Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique

1989 - PREMIER SEMESTRE
CASMEI ISSN 0249-6291

COMPTES RENDUS
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

TOME 308 SÉRIE I N° 13 — 30 MARS 1989

Série I
MATHÉMATIQUE

gauthier-villars

COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

23, quai de Conti, 75006 Paris. Tél. (1) 43.26.66.21 ; Télex 206 521 F ; Télécopie (1) 43.54.63.99.

INSTRUCTIONS AUX AUTEURS

Une Note aux Comptes rendus *est la première relation publiée d'une découverte importante ou d'un résultat nouveau significatif. Elle bénéficie d'une publication rapide. Elle est obligatoirement présentée par un Membre, un Associé étranger ou un Correspondant.*

Langue et présentation

Le français est la langue normalement utilisée dans les Comptes rendus. *La rédaction doit être claire, accessible au plus grand nombre de spécialistes et bien mettre en évidence l'originalité du résultat* (*).

La Note rédigée en français doit tenir dans quatre pages imprimées (figures et tableaux compris).

Toutefois les Notes *bilingues* contenant une version abrégée en anglais d'une page imprimée au moins, de deux pages au plus, et faisant appel aux figures, tableaux et références bibliographiques, peuvent atteindre une longueur maximale de 6 pages (figures et tableaux compris).

Les auteurs étrangers peuvent présenter une Note rédigée en anglais (ou éventuellement et sur demande spéciale dans une langue usant de caractères latins), à condition de l'accompagner d'une version abrégée en français d'une page imprimée au moins et faisant appel aux figures, tableaux et références bibliographiques. Les Notes répondant à cette règle peuvent atteindre une longueur totale de 6 pages (figures et tableaux compris).

En cas de nécessité, et avec l'autorisation d'un des Secrétaires perpétuels, une ou deux pages de figures hors texte peuvent être ajoutées à la Note. Ces planches sont à la charge des auteurs, qui doivent soumettre une mise en page prête à l'impression.

Comité de Lecture

Les Secrétaires perpétuels sont responsables de la publication des *Comptes rendus*. Ils sont assistés d'un Comité de lecture qui peut suggérer de recueillir l'avis de spécialistes. Ils peuvent ainsi être conduits à demander aux auteurs d'apporter certaines modifications à leur texte initial. Ils décident en dernier ressort de l'acceptation des Notes. La date de remise du manuscrit, et celle de son acceptation définitive *ne varietur*, sont indiquées à la fin du texte imprimé.

Composition d'une Note

Une Note aux *Comptes rendus* comprend normalement et dans l'ordre :

1. la rubrique sous laquelle elle est publiée (**), en français et en anglais (éventuellement une deuxième rubrique peut être ajoutée);
2. le titre en français;
3. les noms des auteurs précédés de leur prénom;
4. un court résumé en français;
5. le titre et un court résumé en anglais;
6. éventuellement une « version abrégée » en anglais;
7. le texte de la Note;
8. les légendes des tableaux et des figures en français et en anglais;
9. la liste des références numérotées dans l'ordre où elles sont citées dans le texte, chacune donnant auteur(s) (initiales des prénoms, et nom), titre de la revue, tome, année, première et dernière page de référence (et, pour les Notes de la série I, titre complet de l'article);
10. l'adresse postale et le numéro de téléphone des auteurs ou des Laboratoires;
11. le nom, l'adresse, les numéros de téléphone, télex et télécopie de la personne qui doit corriger les épreuves.

Les auteurs étrangers écrivant le texte de la Note (*cf.* 7) en anglais ou dans leur langue, joignent une version abrégée en français (*cf.* 6) et des légendes pour tableaux et figures rédigées en français (*cf.* 8).

Caractéristiques techniques

Les Notes sont obligatoirement dactylographiées en double interligne (texte, résumés, légendes, etc.) et adressées en **deux** exemplaires.

Une page imprimée des *Comptes rendus* compte 47 lignes de 85 caractères, signes ou espaces. Les résumés sont imprimés en petits caractères (95 caractères ou espaces par ligne). Les titres, résumés, tableaux, figures et bibliographie doivent tenir dans le nombre de pages indiqué.

— Fournir les originaux des figures avec des lettres ou des chiffres de dimension suffisante pour permettre la réduction. Ne pas donner de documents dépassant le format 21 × 30 cm.

— Utiliser les unités internationales (**).

— Présenter clairement les équations mathématiques (dactylographiées si possible) en particulier exposants et indices.

— Indiquer dans la marge ou dans une liste les symboles non usuels et si nécessaire consigner les directives et explications pour l'Imprimeur sur un feuillet séparé, attaché au manuscrit.

— Ne pas commencer une phrase par une formule mathématique.

— Les Notes de « bas de page » sont à éviter dans la mesure du possible; elles seront numérotées séparément des références et figureront à la fin du texte avant la bibliographie.

Correction des Épreuves

Les corrections sur épreuves ne peuvent être que d'ordre typographique. Les épreuves corrigées doivent être retournées par retour du courrier avec le manuscrit à l'Académie des Sciences (Service des *Comptes rendus*, 23, quai de Conti, 75006 Paris).

Tirages à part

Chaque Note donne lieu à 25 exemplaires de tirages à part gratuits pour les auteurs. Ceux-ci pourront en acquérir un plus grand nombre, à leurs frais, à condition d'envoyer la commande en même temps que le renvoi des épreuves corrigées.

(*) Il n'est parfois pas possible, en raison de la concision exigée, de donner les démonstrations ou les preuves complètes du résultat énoncé, spécialement dans la série I; il est alors recommandé de joindre à l'appui de la Note un texte, si possible dactylographié, explicitant les compléments nécessaires à une bonne compréhension qui facilite l'examen de la Note par le présentateur et qui sera conservé cinq ans dans les Archives de l'Académie pour pouvoir être communiqué à tout lecteur des *Comptes rendus* qui en fait la demande. Il est alors fait mention au bas de la Note de l'existence de ce document par la formule suivante : « Résumé d'un texte qui sera conservé cinq ans dans les Archives de l'Académie et dont copie peut être obtenue. »

(**) La liste des rubriques ainsi que des tableaux d'unités internationales sont donnés dans le premier numéro de chaque tome.

COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

Série I : Mathématiques ; Série II : Mécanique, Physique, Chimie, Sciences de l'Univers, Sciences de la Terre ; Série III : Sciences de la Vie.

Tarif d'abonnements. France 1989
Vol. 308 + 309-40 numéros

Une série	2 440 F
Deux séries	4 370 F
Trois séries (I, II, III)	5 490 F

Pour l'Étranger les tarifs postaux par voie normale sont inclus. Sur demande, l'envoi par avion sera facturé en sus. En 1989, Le service de la Série générale « La Vie des Sciences » est assuré gracieusement à tous les abonnés.

La Vie des Sciences : Institution 458 F/Particulier 275 F

Adresser les commandes à : C.D.R., Centrale des Revues, 11, rue Gossin, 92543 Montrouge Cedex, France.
Envoi de Spécimen sur demande

English text on inside back cover

Série I : MATHÉMATIQUE

TOME 308 — SÉRIE I — N° 13 — 30 MARS 1989

Les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences sont une publication imprimée et diffusée par GAUTHIER-VILLARS, 1, boulevard Ney, 75018 Paris, Société anonyme, constituée pour 99 ans, au capital de 3 089 600 F. *Siège social :* 17, rue Rémy-Dumoncel, Paris. *P.D.G. :* J.-M. BOURGOIS. *Actionnaire :* BORDAS S.A. (99,8 % des parts).

Directeurs de la publication et responsables de la rédaction : MM. les Secrétaires Perpétuels de l'Académie des Sciences, P. GERMAIN et A. JOST.

CONTENTS

1989 — VOLUME 308 — SECTION I — N° 13

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 308, Série I, p. 391-395, 1989

Théorie des nombres/*Number Theory*

Moyenne arithmético-géométrique p-adique

Guy HENNIART et Jean-François MESTRE

Résumé – Soit E une courbe elliptique définie sur un corps p-adique, et d'invariant non entier. L'introduction d'une moyenne arithmético-géométrique p-adique permet de calculer par un algorithme quadratiquement convergent les paramètres u et q attachés à E.

The p-adic arithmetic mean

Abstract – *Let* E *be an elliptic curve over a p-adic field, with non-integral invariant. Using a p-adic arithmetic-geometric mean, we compute by a quadratically convergent algorithm the parameters u and q attached to* E.

Abridged English Version – Let K be a non-archimedean complete valued field of characteristic $\neq 2$. Let $\mathfrak{m}$ be the maximal ideal of its ring of integers. If x belongs to $1+4\mathfrak{m}$, let $\sqrt{x}$ be the unique element of K such that $y \equiv 1 \bmod 2\mathfrak{m}$ and $y^2=x$.

Let α et β in $K^\times$ be such that $\alpha/\beta \equiv 1 \bmod 8\mathfrak{m}$. Put $\alpha_0=\alpha$, $\beta_0=\beta$ and for $n \geqq 0$ $\alpha_{n+1}=(\alpha_n+\beta_n)/2$ and $\beta_{n+1}=\beta_n\sqrt{\alpha_n/\beta_n}$. Then the sequences (α_n) and (β_n) both converge quadratically to the same element of $K^\times$, which we call the *arithmetic-geometric mean* of α and β and write $M(\alpha, \beta)$.

Let E be an elliptic curve over K, given by an equation

$$y^2+a_1xy+a_3y=x^3+a_2x^2+a_4x+a_6$$

with coefficients in K. We assume that the j-invariant of E is not an integer of K. To E is then associated a *Tate curve* $E(q)=\mathbf{G}_m/q^{\mathbf{Z}}$ where $q \in \mathfrak{m}$ is characterized by the equality $j=q^{-1}+744+\ldots$ There is an isomorphism φ of $E(q)$ onto E; it is defined over $K'=K(\sqrt{-c_6})$. Then $\varphi^*(dx/(2y+a_1x+a_3))$ is equal to $u\,dt/t$ for some $u \in K'^\times$, where dt/t is the canonical invariant differential of $E(q)$. Moreover u^2 belongs to K and does not depend on the choice of φ.

We can use the arithmetic-geometric mean to give a quadratically convergent algorithm computing u^2. Indeed put $L=K'(q^{1/2})$ and write $\mathfrak{m}_L$ for the maximal ideal of its ring of integers; let e_1, e_2 and e_3 be the first coordinates of $\varphi(-1)$, $\varphi(-q^{1/2})$ and $\varphi(q^{1/2})$. Let us choose a square root α of e_3-e_1 and a square root β of e_2-e_1 such that $\alpha/\beta \equiv 1 \bmod 8\mathfrak{m}_L$. Then u^2 is given by $4u^2M(\alpha, \beta)^2=1$. Actually a variant can be given to compute u^2 which only uses computations in K (Thm. 2).

We can also give a non-archimedean analogue of the classical descending Landen transform; it is a quadratically convergent algorithm which for a point $P(x_0, y_0) \in E(K')$, computes $t_\infty \in K'^\times$ such that $|q|<|t_\infty| \leqq 1$ and $\varphi^{-1}(P)=t_\infty \bmod q^{\mathbf{Z}}$. Starting from x_0 and y_0 we define x_1 and y_1 by formula (6) below and, for $n \geqq 2$, x_n and y_n by formula (7) below. Then x_n and y_n converge to x_∞ et y_∞ and $t_\infty=(2uy_\infty-x_\infty)/(2uy_\infty+x_\infty)$.

Actually a slight variant gives a quadratically convergent algorithm to compute $q \in K$, whereas the usual procedures are linearly convergent.

Note présentée par Jean-Pierre SERRE.

0249-6291/89/03080391 \$ 2.00

As an illustration we take E to be $X_1(11)$ with equation $y^2+y=x^3-x^2$ over $\mathbf{Q}_{11}$; one needs only 6 iterations to compute u^2 and $q \bmod 11^{64}$.

---

1. La moyenne arithmético-géométrique de deux nombres p-adiques. — Soient K un corps complet pour une valeur absolue ultramétrique $|\,.\,|$, et $\mathbf{m}$ l'idéal maximal de l'anneau des entiers de K. On suppose la caractéristique de K différente de 2.

Si x est un élément de $1+4\mathbf{m}$, on note $\sqrt{x}$ l'unique élément y de K tel que $y \equiv 1 \bmod 2\mathbf{m}$ et $y^2=x$.

Soient α et β deux éléments de $K^\times$, tels que $\alpha/\beta \equiv 1 \bmod 8\mathbf{m}$. On peut alors définir les suites (α_n) et (β_n) d'éléments de $K^\times$ en posant $\alpha_0=\alpha$, $\beta_0=\beta$, et, pour $n>0$, $\alpha_{n+1}=(\alpha_n+\beta_n)/2$ et $\beta_{n+1}=\beta_n\sqrt{\alpha_n/\beta_n}$. Un calcul sans difficulté donne :

Proposition. — *Soient α et β deux éléments de $K^\times$ tels que $\alpha/\beta \equiv 1 \bmod 8\mathbf{m}$. Les suites (α_n) et (β_n) définies ci-dessus convergent vers un même élément de $K^\times$. La convergence est quadratique; plus précisément, on a*

$$|\alpha_{n+1}-\beta_{n+1}|=\frac{|\alpha_n-\beta_n|^2}{|8\beta|}.$$

On note $M(\alpha, \beta)$ la limite commune des suites (α_n) et (β_n) et on l'appelle la *moyenne arithmético-géométrique de α et β*.

2. Applications aux courbes elliptiques. — Soit E une courbe elliptique sur K donnée par une équation $y^2+a_1xy+a_3y=x^3+a_2x^2+a_4x+a_6$ à coefficients dans K. Dans la suite de cet article, nous utilisons librement les notations b_2, b_4, b_6, c_4, c_6 et j de Tate [3], p. 180. *Supposons l'invariant j de* E *non entier.* On associe alors à E la *courbe de Tate* $E(q)=\mathbf{G}_m/q^{\mathbf{Z}}$, où q est l'élément de $\mathbf{m}$ caractérisé par l'identité $j=q^{-1}+744+\ldots$ ([3], p. 190). Les courbes E et $E(q)$ sont isomorphes sur le corps $K'=K(\sqrt{-c_6})$ (*cf.* [2], 1.12). Soit φ un isomorphisme de $E(q)$ sur E; il est défini sur K', et les seuls isomorphismes de $E(q)$ sur E sont φ et $-\varphi$. On a $\varphi^*(dx/(2y+a_1x+a_3))=u\,dt/t$, où $u\in K'$ et où dt/t est la différentielle invariante canonique de $E(q)$. La quantité u^2, qui ne dépend pas du choix de φ, appartient à K.

Nous décrivons dans ce paragraphe un algorithme quadratiquement convergent pour calculer u^2, basé sur la moyenne arithmético-géométrique introduite dans la section précédente.

Soient $P_1=\varphi(-1)$, $P_2=\varphi(-q^{1/2})$ et $P_3=\varphi(q^{1/2})$ les trois points d'ordre 2 de E; P_1 est rationnel sur K, P_2 et P_3 sur $K(q^{1/2})$. Si on note e_1, e_2 et e_3 leurs abcisses respectives, P_1 est caractérisé par le fait que $6e_1^2+b_2e_1+b_4$ et $c_4/32$ ont même valuation.

Posons $L=K'(q^{1/2})$, et notons $\mathbf{m}_L$ l'idéal maximal de l'anneau des entiers de L. On a alors $(e_2-e_1)/(e_3-e_1)\equiv 1 \bmod 16\mathbf{m}_L$, et on peut choisir dans L une racine carrée α de e_3-e_1 et une racine carrée β de e_2-e_1 telles que $\alpha/\beta\equiv 1 \bmod 8\mathbf{m}_L$. D'après le paragraphe 1, on peut alors définir $M(\alpha, \beta)$, qui est un élément de L.

Théorème 1. — *Avec les notations précédentes, on a l'égalité*

$$4u^2M(\alpha, \beta)^2=1.$$

Esquissons la démonstration de ce théorème.

Notons $\theta(w)$ la série formelle $\sum_{n\in\mathbf{Z}} w^{n^2}$. Il existe un unique isomorphisme ψ de $E(q)$ sur la courbe elliptique plane d'équation $y^2=x(x-\theta^4(q^{1/2}))(x-\theta^4(-q^{1/2}))$ tel que

$\psi^*(dx/y)=dt/t$; il est défini sur K, et si on note ε_1, ε_2, ε_3 les abscisses de $\psi(-1)$, $\psi(-q^{1/2})$ et $\psi(q^{1/2})$, on a

(1) $$\varepsilon_1=0, \qquad \varepsilon_2=\theta^4(-q^{1/2}), \qquad \varepsilon_3=\theta^4(q^{1/2}).$$

Les identités classiques

$$2\theta^2(t^2)=\theta^2(t)+\theta^2(-t) \quad \text{et} \quad \theta^2(t^2)=\sqrt{\theta^2(t)\theta^2(-t)}$$

montrent que $M(\theta^2(q^{1/2}), \theta^2(-q^{1/2}))=M(\theta^2(q^{2^r}), \theta^2(-q^{2^r}))$ pour tout entier $r\geqq 0$. On obtient donc

(2) $$M(\theta^2(q^{1/2}), \theta^2(-q^{1/2}))=1.$$

D'autre part, on a

(3) $$4u^2(e_2-e_1)=\varepsilon_2-\varepsilon_1, \qquad 4u^2(e_3-e_1)=\varepsilon_3-\varepsilon_1.$$

Le théorème découle alors des formules (1), (2) et (3).

Ce théorème fait intervenir des quantités et une moyenne arithmético-géométrique calculées dans L. En fait, pour obtenir u^2, qui est un élément de K, on peut donner un algorithme qui ne fait intervenir que des calculs dans K.

Pour A et B dans K^*, tels que $A/B\equiv 1 \bmod 16\mathbf{m}$, posons $M_2(A, B)=BM(\sqrt{A/B}, 1)^2$. C'est la limite commune des suites (A_n) et (B_n) d'éléments de K définies par $A_0=A$, $B_0=B$, et pour

$$n\geqq 0, \quad B_{n+1}=B_n\sqrt{\frac{A_n}{B_n}} \quad \text{et} \quad A_{n+1}=\frac{A_n+B_n+2B_{n+1}}{4}.$$

On déduit alors du théorème 1 le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Il existe un unique élément w de* K *tel que*

$$w^2=12e_1^2+2b_2e_1+2b_4 \quad \textit{et} \quad \frac{b_2+12e_1}{4w}\equiv -1 \bmod 2\mathbf{m}.$$

Posons $A_1=(1/4)(-(b_2/4)-3e_1+w)$ *et* $B_1=w/2$. *Alors*

$A_1/B_1\equiv 1 \bmod 16\mathbf{m}$ *et on a* $4u^2M_2(A_1, B_1)=1$.

3. TRANSFORMATION DE LANDEN p-ADIQUE. — Gardons les notations ci-dessus. Nous allons donner un analogue non archimédien de la transformation de Landen descendante classique ([1], p. 27-28); c'est un algorithme quadratiquement convergent, qui, pour tout point $P(x, y)\in E(K')$ calcule $\varphi^{-1}(P)\in K'^{\times}/q^{\mathbf{Z}}$. Il est basé sur la considération de la tour de 2-isogénies

(4) $$\ldots \to E(q^{2^{n+1}}) \xrightarrow{f_n} E(q^{2^n}) \to \ldots \to E(q^2) \xrightarrow{f_0} E(q),$$

chaque isogénie étant induite par l'application identique de $\mathbf{G}_m$.

Pour tout $n\geqq 1$, notons E_n la courbe elliptique définie sur K donnée par l'équation $y^2=x(x+A_n)(x+A_n-B_n)$, et posons $E_0=E$. Pour $n\geqq 0$, notons g_n l'isogénie de E_{n+1} sur E_n d'équations

(5) $$x'=x+\frac{A_{n+1}(A_{n+1}-B_{n+1})}{x}-\frac{r_n}{2}, \qquad y'=y\left(1-\frac{A_{n+1}(A_{n+1}-B_{n+1})}{x^2}\right)-s_n,$$

avec $r_0=e_1+b_2/4$, $s_0=-(x_1x'+a_3)/2$, et, pour $n\geqq 1$, $r_n=A_n-B_n$, $s_n=0$.

Pour tout n, le noyau de g_n est le groupe d'ordre 2 engendré par le point (0, 0) de $E_{n+1}(K)$. Par ailleurs, si ω_n est la forme différentielle définie par $dx/2y$ pour $n\geqq 1$ et $dx/2y+a_1x+a_3$ pour $n=0$, on a $g_n^*(\omega_n)=\omega_{n+1}$ pour tout $n>0$, et il existe un unique isomorphisme φ_n de $E(q^{2^n})$ sur E_n tel que $\varphi_n^*(\omega_n)=udt/t$; en particulier, on a $\varphi_0=\varphi$. Par les applications φ_n, la tour (4) se transforme en la tour $\ldots \to E_{n+1} \xrightarrow{g_n} E_n \ldots$

Quand $n\to\infty$, l'équation de E_n tend vers l'équation $y^2=x^2(x+M_2(A_1, B_1))$. On note E_∞ la courbe donnée par cette équation, et φ_∞ l'isomorphisme de $\mathbf{G}_m$ sur $E_\infty-\{(0, 0)\}$ donné par

$$x=\frac{t}{u^2(1-t)^2}, \qquad y=\frac{t(1+t)}{2u^3(1-t)^3},$$

où t est le paramètre courant de $\mathbf{G}_m$.

Notons v' une valuation de K' et $\mathbf{m}'$ l'idéal maximal de K'. Soient $P_0(x_0, y_0)\in E(K')$, et $t_\infty\in K'^*$ l'unique représentant de $\varphi^{-1}(P_0)$ tel que $0\leqq v'(t_\infty)<v'(q)$. Pour tout $n\geqq 0$, posons $t_n=t_\infty \bmod q^{2^n}$, $P_n(x_n, y_n)=\varphi_n(t_n)$, et $P_\infty(x_\infty, y_\infty)=\varphi_\infty(t_\infty)$. Le point clé de la transformation de Landen est que P_∞ est la limite des P_n; plus précisément, il existe une constante C ne dépendant que de P_0 et de E telle que $v'(x_n-x_\infty)\geqq C+2v'(x_{n-1}-x_\infty)$.

L'algorithme est alors le suivant :

— On calcule d'abord P_1 en fonction de P_0 par les formules, obtenues à partir de (5) :

$$(6)\quad x_1=\frac{1}{2}(x_0+r_0/2)(1+\sqrt{1-4\delta}), \qquad y_1=\left(y_0+\frac{a_1x_0+a_3}{2}\right)\left(1-\frac{A_1(A_1-B_1)}{x_1^2}\right)^{-1}$$

où $\delta=A_1(A_1-B_1)/(x_0+r_0/2)^2$, la racine carrée ρ de $1-4\delta$ étant celle du paragraphe 1 si $v'(\delta)>0$ et sinon celle qui vérifie $\rho(2x_0+r_0)/2u(2y_0+a_1x_0+a_3)\equiv 1 \bmod 2\mathbf{m}'$.

— Pour $n\geqq 1$, on calcule P_{n+1} en fonction de P_n par les formules

$$(7)\qquad x_{n+1}=x_n\left(\frac{1+\sqrt{1+r_n/x_n}}{2}\right)^2, \qquad y_{n+1}=y_n\left(1-\frac{r_n^2}{16x_{n+1}^2}\right)^{-1}$$

la racine carrée étant celle du paragraphe 1. On a alors

$$u^2=1/4\,M_2(A_1, B_1),\ t_\infty+t_\infty^{-1}=2+u^{-2}x_\infty^{-1} \quad\text{et}\quad t_\infty=(2uy_\infty-x_\infty)/(2uy_\infty+x_\infty).$$

Remarque. — Si P_0 et u sont rationnels sur K, les calculs permettant d'obtenir t_∞ sont tous effectués dans K.

4. Calcul du paramètre q. — D'ordinaire, on obtient le paramètre q attaché à E en calculant les premiers termes de la série réciproque de

$$j(q)=q^{-1}+744+196884\,q+21493760\,q^2+\ldots$$

ou, mieux, de celle de $\theta(q)/\theta(-q)$. Quelles que soient les séries utilisées, la convergence du procédé est de nature linéaire. L'algorithme ci-dessus permet d'obtenir q par un processus quadratiquement convergent. Il suffit d'appliquer la transformation de Landen au point P_1 de coordonnées (0, 0) de E_1. On a alors

$$q=w(1-\sqrt{1-w^{-2}}), \qquad \text{avec} \quad w=1+(2u^2x_\infty)^{-1}.$$

Les calculs nécessaires pour obtenir q sont tous effectués dans K.

5. Un exemple. — Nous traitons ici l'exemple de la courbe modulaire $X_1(11)$, d'équation $y^2+y=x^3-x^2$, d'invariant $j=-4096/11$. Nous avons utilisé l'algorithme ci-dessus pour calculer simultanément dans $K=\mathbf{Q}_{11}$ les paramètres u^2 et q associés. Une

fois calculé e_1 (par l'algorithme de Newton, quadratiquement convergent), il a suffi de 6 itérations (et donc de 12 racines carrées) pour les obtenir à une précision de 11^{64} :

$e_1 =$ 7.9444405I888I861I8656839425835731949I91129149042I1I919I51115952...
$A_1 =$ 1.6...
$B_1 =$ 1.I...
$A_2 =$ 1.8I...
$B_2 =$ 1.89...
$A_3 =$ 1.8458...
$B_3 =$ 1.845I...
$A_4 =$ 1.84598267...
$A_5 =$ 1.84598260873311994...
$B_5 =$ 1.84598260873311990...
$A_6 =$ 1.84598260873119924440O8II61087434...
$B_6 =$ 1.8459826087311992444008II61087433...
$A_7 =$ 1.8459826087311992444008II610874393506188946I9673849032380728518 2...
$B_7 =$ 1.8459826087311992444008II6108743935061889 46I96738490323807285182...
$x_2 =$ 0.I6...
$x_3 =$ 0.I156...
$x_4 =$ 0.I1554605...
$x_5 =$ 0.I155460197 31I838...
$x_6 =$ 0.I1554601973 1I83I37302031269I8693...
$x_7 =$ 0.I1554601973 1I83I37302031269I86993298897698 7297I64061229900I9729...
$u^2 =$ 3.663I634I3355328016575911937 88I1021809797682053836 47I372I8351452...
$q =$ 0.835809210I029I1772640909104 24I7484599254239837365775935 48I31I06...
$u = \pm$ 5.75I613193009034152596285682600121I846261693618592I4248I8623I854...

On a noté $a_{-n} \ldots a_{-1} a_0 . a_1 a_2 \ldots$ le nombre p-adique

$$a_{-n} p^{-n} + \ldots + a_{-1} p^{-1} + a_0 + a_1 p + a_2 p^2 \ldots,$$

la lettre I désignant le chiffre 10 en base 11.

Les calculs ont été faits sur un Sun 3/60 du Département de Mathématiques et d'Informatique de l'École normale supérieure, à l'aide du logiciel de multi-précision PARI mis au point par C. Batu, D. Bernardi, H. Cohen et M. Olivier. Le temps de calcul total a été de 0,8 s.

Note remise le 6 janvier 1989, acceptée le 31 janvier 1989.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] C. HOUZEL, Fonctions elliptiques et intégrales abéliennes, in *Abrégé d'Histoire des Mathématiques*, sous la direction de J. Dieudonné, Hermann, Paris, 1978.

[2] J.-P. SERRE, Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques, *Invent. math.*, 15, 1972, p. 259-331 (= *Œuvres*, III, 94).

[3] J. TATE, The Arithmetic of Elliptic Curves, *Invent. math.*, 23, 1974, p. 179-206.

G. H. : *Université de Paris-XI*, Bât. n° 425, *Mathématiques, Centre d'Orsay*, 91405 *Orsay Cedex;*

J.-F. M. : *Département de Mathématiques, École normale supérieure*, 45, *rue d'Ulm*, 75230 *Paris Cedex* 05.

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 308, Série I, p. 397-399, 1989

Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*

L'analyse de Klein-Gordon

André UNTERBERGER

Résumé — L'analyse pseudo-différentielle de Klein-Gordon, qui — à l'opposé de celle de Weyl — tient compte de la structure relativiste de l'espace-temps, peut être considérée comme une analyse pseudo-différentielle sur $\mathbf{R}^n$: la continuité sur L^2 et l'existence d'algèbres d'opérateurs sont établies pour ce calcul.

The Klein-Gordon analysis

Abstract — *The Klein-Gordon pseudodifferential analysis—which takes relativity into account—may be considered as a pseudodifferential analysis on* $\mathbf{R}^n$. *Basic facts concerning it are established, including the* L^2*-continuity of operators and the existence of operator algebras.*

Le calcul symbolique de Klein-Gordon, introduit dans [3], a été développé davantage dans la Note [2], à laquelle nous renvoyons pour les définitions et notations. On effectue cependant les changements suivants : (i) on fixe ici non seulement $h=c=1$, mais aussi $m=1$; (ii) un point de l'espace de phase Ω, noté dans [2] sous la forme $\omega=(x; v)=(t, \mathbf{x}; v)\in\mathbf{R}^{n+1}\times\mathrm{B}$, où B est la boule-unité ouverte de $\mathbf{R}^n$, sera noté ici $\omega=(x; p)=(t, \mathbf{x}; p)\in\mathbf{R}^{n+1}\times\mathscr{M}^+$, où $\mathscr{M}^+$ est le feuillet à énergie positive de l'hyperboloïde de masse, et où $p=(p_0, \mathbf{p})=(1-|v|^2)^{-1/2}(1, -v)$ est le covecteur d'énergie-impulsion d'une particule de masse 1 et de vitesse v; (iii) enfin, identifiant une solution T à énergie positive de l'équation de Klein-Gordon $\square\mathrm{T}=-4\pi^2\mathrm{T}$ sur $\mathbf{R}^{n+1}$ à sa restriction u à $t=0$, on identifie l'espace de Hilbert H considéré dans [2] à l'espace de Sobolev $\mathrm{H}^{1/2}(\mathbf{R}^n)$.

Rappelons qu'une fonction f sur Ω est dite admissible si elle ne dépend que de $(\mathbf{x}-tv; v)$: avec les présentes notations, cela s'exprime par l'équation différentielle

$$p_0\frac{\partial f}{\partial t}=\sum_{j\geq 1}\mathbf{p}_j\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_j}$$

qui permet d'identifier une fonction $f(x; p)$ admissible à la fonction $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ sur $\mathbf{R}^{2n}$ qui en est la restriction à $t=0$, p_0 étant en outre exprimé sous la forme $(1+|\mathbf{p}|^2)^{1/2}$.

Enfin, on sélectionne une famille d'*états cohérents* $\varphi_{\mathbf{y},q}(\mathbf{y}\in\mathbf{R}^n, q\in\mathscr{M}^+)$: ceux-ci sont extraits d'une famille de fonctions déjà considérée dans [2] et ils privilégient la classe des observateurs liés à l'observateur de référence par des translations purement spatiales.

DÉFINITION 1. — *Soit k la fonction définie pour* $t\in\mathbf{C}$, $\operatorname{Re} t>0$, *par*

$$k(t)=t^{(1-n)/2}\,\mathrm{K}_{(n-1)/2}(2\pi t^{1/2}).$$

Pour tout $(\mathbf{y}, q)\in\mathbf{R}^n\times\mathscr{M}$, *on désigne par* $\varphi_{\mathbf{y},q}$ *la fonction sur* $\mathbf{R}^n$ *définie par*

$$\varphi_{\mathbf{y},q}(\mathbf{x})=2k(1+|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^2+2i\langle\mathbf{y}-\mathbf{x}, \mathbf{q}\rangle)$$

ou par sa transformée de Fourier

$$\hat{\varphi}_{\mathbf{y},q}(\xi)=(1+|\xi|^2)^{-1/2}\exp-2\pi[q_0(1+|\xi|^2)^{1/2}-\langle\mathbf{q}-i\mathbf{y}, \xi\rangle].$$

Remarque. — Avec les notations de [2], on a $\varphi_{\mathbf{y},q}=2\psi_{\mathrm{Z}}$ si $\mathrm{Z}=(q_0, -\mathbf{q}+i\,\mathbf{y})\in\mathbf{C}^{n+1}$.

Pour tout opérateur A borné sur $\mathrm{H}^{1/2}(\mathbf{R}^n)$ on peut, en analogie avec la définition (non relativiste) habituelle, définir le symbole de Wick relativiste de A comme la fonction

Note présentée par Laurent SCHWARTZ.

0249-6291/89/03080397 $ 2.00

continue b sur $\mathbf{R}^n \times \mathscr{M}^+$ telle que

$$b(\mathbf{y};\, q) = (\mathrm{A}\, \varphi_{\mathbf{y},\, q},\ \varphi_{\mathbf{y},\, q})_{1/2},$$

formule dans laquelle $(\ ,\ )_{1/2}$ désigne le produit scalaire dans $\mathrm{H}^{1/2}(\mathbf{R}^n)$. On sait que, dans le cas non relativiste, le symbole de Wick b dérive du symbole de Weyl f par régularisation gaussienne, i. e. $b = (\exp \Delta/8\pi) f$. L'analogue relativiste de cette formule est la suivante :

THÉORÈME 1. — *Soit* A *un opérateur à trace sur* $\mathrm{H}^{1/2}(\mathbf{R}^n)$, *et soit g le symbole passif de Klein-Gordon de* A *au sens de* [2]; *soit b le symbole de Wick relativiste de* A. *Si l'on désigne par*

$$\Delta_{\mathscr{M}^+} = \sum \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}_j^2} + \sum \mathbf{p}_j \mathbf{p}_k \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{p}_j \partial \mathbf{p}_k} + n \sum \mathbf{p}_j \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_j}$$

l'opérateur de Laplace-Beltrami de $\mathscr{M}^+$, *et par* $\Box$ *l'opérateur d'alembertien sur* $\mathbf{R}^{n+1}$, *le lien entre g et b est donné par la formule*

$$b(\mathbf{y};\, q) = (\mathrm{C}(\Box,\, \Delta_{\mathscr{M}^+})\, g)(0,\, \mathbf{y};\, q)$$

avec

$$\mathrm{C}(\Box,\, \Delta) = 2^{(3-n)/2} \left(1 + \frac{\Box}{16\pi^2}\right)^{(n-1)/4} \mathrm{K}_{i\,[-\Delta - ((n-1)/2)^2]^{1/2}} \left(4\pi \left(1 + \frac{\Box}{16\pi^2}\right)^{1/2}\right).$$

Au sens de la géométrie riemannienne de $\mathscr{M}^+$, la norme en p d'un vecteur tangent $\alpha = \sum \alpha_j\, \partial/\partial \mathbf{p}_j$ est donnée par $\|\alpha\|_p^2 = |\alpha|^2 - p_0^{-2} \langle \alpha,\, \mathbf{p} \rangle^2$. On introduit également, sur $\mathbf{R}^n$, la norme $|||\ \ |||_p$ duale de la précédente, définie par $|||\beta|||_p^2 = |\beta|^2 + \langle \beta,\, \mathbf{p} \rangle^2$. Si p et q appartiennent à $\mathscr{M}^+$, on pose $\langle \mathrm{J} p,\, q \rangle = p_0 q_0 - \langle \mathbf{p},\, \mathbf{q} \rangle$ de sorte que $\langle \mathrm{J} p,\, q \rangle = \operatorname{ch} d(p,\, q)$ si d est la distance intrinsèque sur $\mathscr{M}^+$.

DÉFINITION 2. — *On appelle fonction-poids toute fonction $m > 0$ sur* $\mathbf{R}^n \times \mathscr{M}^+$ *vérifiant pour certaines constantes* $\mathrm{C}_1 > 0$, $\mathrm{N}_1 \geqq 0$ *et* $\mathrm{N}_2 \geqq 0$ *l'inégalité*

$$m(\mathbf{x},\, p) \leqq \mathrm{C}_1\, m(\mathbf{y},\, q) (\langle \mathrm{J} p,\, q \rangle)^{\mathrm{N}_1} (1 + |||\mathbf{x} - \mathbf{y}|||_q)^{\mathrm{N}_2}$$

pour tout couple $((\mathbf{x},\, p),\, (\mathbf{y},\, q))$ *de points de* $\mathbf{R}^n \times \mathscr{M}^+$. *On appelle symbole de poids m toute fonction* $f_0 = f_0(\mathbf{x},\, \mathbf{p})$ *de classe* C^∞ *sur* $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ *vérifiant la propriété suivante, dans laquelle* $m(\mathbf{x},\, p)$ *est identifiée à la fonction* $m(\mathbf{x},\, \mathbf{p})$ *sur* $\mathbf{R}^{2n}$ *: pour tout opérateur* D *appartenant à l'algèbre engendrée par les opérateurs* $\partial/\partial \mathbf{p}_j$, $\Sigma\, \mathbf{p}_j (\partial/\partial \mathbf{p}_j)$, $p_0^{-1} (\partial/\partial \mathbf{x}_j)$ *et* $p_0^{-1} (\mathbf{p}_j (\partial/\partial \mathbf{x}_k) - \mathbf{p}_k (\partial/\partial \mathbf{x}_j))$, *la fonction* $m^{-1} \mathrm{D} f_0$ *est bornée sur* $\mathbf{R}^{2n}$.

Remarques. — (i) Dans le cas où $n = 1$ et où $m(\mathbf{x},\, p) = p_0^k$, la classe de symboles ainsi définie coïncide avec la classe habituellement notée $\mathrm{S}_{1,\, 1}^k$; (ii) si f est une fonction admissible sur $\mathbf{R}^{n+1} \times \mathscr{M}^+$, nous dirons que c'est un symbole de poids m si sa restriction f_0 est un symbole de poids m.

Rappelons que dans [2] nous avons défini, pour toute fonction f admissible sur Ω vérifiant une certaine hypothèse d'intégrabilité, un opérateur $\mathrm{A} = \mathrm{Op}(f)$ appelé l'opérateur de symbole (de Klein-Gordon) actif f.

THÉORÈME 2. — *La correspondance* $f \mapsto \mathrm{Op}(f)$ *s'étend de façon unique en une application séquentiellement continue (pour une topologie convenable) de l'espace des symboles f de poids m dans l'espace des opérateurs linéaires continus de* $\mathscr{S}(\mathbf{R}^n)$ *dans* $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$. *Cette correspondance est injective et pour qu'un opérateur* A *soit de la forme* $\mathrm{Op}(f)$ *pour un certain symbole de poids m il faut et il suffit qu'il vérifie la condition suivante : pour tout*

$N>0$ *il existe* $C>0$ *tel que l'on ait*

$$|(A\varphi_{y,q}, \varphi_{y'q'})| \leqq C\, m(y, q)\, q_0^{-1} (\langle q, J q' \rangle)^{-N} (1 + |||y - y'|||_q)^{-N}$$

pour tout couple $((y, q), (y' q'))$ *de points de* $\mathbf{R}^n \times \mathcal{M}^+$.

Remarques. — On aura noté que le produit scalaire au membre de gauche est celui de $L^2(\mathbf{R}^n)$. Par ailleurs, la même caractéristique reste valable si l'on se sert des symboles passifs plutôt que des symboles actifs : en effet les puissances fractionnaires de $1+(4\pi)^{-2}\,\square$ conservent les classes de symboles.

Si l'on appelle opérateur de poids m tout opérateur ayant un symbole de Klein-Gordon de poids m, on peut alors énoncer le corollaire suivant :

THÉORÈME 3. — *Si* A *est un opérateur de poids* $m=1$, *alors* A *opère continûment de l'espace de Sobolev* $H^k(\mathbf{R}^n)$ *dans lui-même pour tout* k *réel. Si* A_1 (*resp.* A_2) *est un opérateur de poids* m_1 (*resp.* m_2), *alors* $A_1 A_2$ *est un opérateur de poids* $m_1 m_2$.

Il n'est pas possible de caractériser les opérateurs obtenus en restant dans le cadre du calcul standard des opérateurs pseudo-différentiels (celui dans lequel les convolutions sont effectuées avant les multiplications) et encore moins dans celui du calcul de Weyl. Néanmoins, appelons Op_0-symbole d'un opérateur le symbole de celui-ci dans le calcul standard, et Op_1-symbole son symbole dans le calcul pour lequel les multiplications ont la priorité sur les convolutions (le Op_1-symbole de A^* est le conjugué complexe du Op_0-symbole de A). L'utilisation simultanée des deux types de symboles (laquelle a également été employée par Bourdaud [1] pour l'étude de la classe $S_{1,1}$) donne le résultat suivant : renforçons l'hypothèse sur la fonction-poids (définition 2) en y remplaçant $\langle Jp, q\rangle$ par $\inf(\langle Jp, q\rangle, \langle p, q\rangle)$. Alors, pour qu'un opérateur A admette à la fois un Op_0-symbole et un Op_1-symbole de poids m, il faut et il suffit qu'il vérifie la même estimation que celle du théorème 2, à la différence que $\langle q, Jq'\rangle$ doit y être remplacé par $\inf(\langle q, Jq'\rangle, \langle q, q'\rangle)$.

Il ne faudrait pas déduire de là que l'utilisation simultanée du Op_0 et du Op_1-symbole donne des résultats « presque » aussi bons que le calcul de Klein-Gordon : en effet la contrainte d'avoir à utiliser deux symboles dont le second est l'image du premier par l'opérateur

$$\exp -(2i\pi)^{-1} \sum \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_j \partial \mathbf{p}_j}$$

enlève à un calcul pseudo-différentiel l'essentiel de son efficacité puisqu'il interdit par exemple d'effectuer sur les symboles les opérations les plus simples et les plus utiles, telles les troncatures.

Note remise le 8 février 1989, acceptée le 14 février 1989.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] G. BOURDAUD, Une algèbre maximale d'opérateurs pseudo-différentiels, *Comm. Part. Diff. Equ.*, 13, (9), 1988, p. 1059-1084.

[2] A. UNTERBERGER, Analyse relativiste, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 305, série I, 1987, p. 415-418.

[3] A. UNTERBERGER, Pseudodifferential analysis, quantum mechanics and relativity, *Comm. Part. Diff. Equ.*, 13, (7), 1988, p. 847-894.

Département de Mathématiques, Université de Reims,
Moulin de la Housse, B.P. n° 347, 51062 *Reims Cedex.*

Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*

Inégalités de Harnack à la frontière pour des opérateurs paraboliques

Yanick HEURTEAUX

Résumé — Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^{n+1}$ et Q un point frontière de Ω au voisinage duquel la frontière de Ω est « lipschitzienne ». L étant un opérateur parabolique, on cherche à comparer le comportement de L-solutions positives dans Ω tendant vers zéro à la frontière au voisinage de Q. On établit ensuite un principe de Harnack à la frontière qui nous permet de décrire le cône des L-solutions positives tendant vers zéro en tout point de $\partial_p \Omega - \{Q\}$ où $\partial_p \Omega$ désigne la frontière parabolique de Ω.

Boundary Harnack inequalities for parabolic operators

Abstract — *Let Ω be an open set of $\mathbb{R}^{n+1}$ and let Q be a boundary point of Ω having a neighborhood whose intersection with the boundary of Ω is "Lipschitz". For a parabolic operator, we compare the behavior of positive* L-*solutions in Ω converging to zero at every point of the boundary which is sufficiently close to Q. A boundary Harnack principle is then proved and used to describe the cone of positive* L-*solutions converging to zero at every point of $\partial_p \Omega - \{Q\}$, where $\partial_p \Omega$ is the parabolic boundary of Ω.*

1. NOTATIONS PRÉLIMINAIRES. — On fixe un entier $n \geqq 1$ et, pour (x, t), $(y, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ on appelle distance parabolique la distance $d((x, t), (y, s)) = \|x-y\| \vee |t-s|^{1/2}$.

— Si $Q=(Y, S)=(Y', Y_n, S) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et si r et h sont deux réels >0, $T_Q(r, h)$ désigne le cyclindre $Q+\{(x', x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1};\ \|x'\| \leqq r,\ |x_n| \leqq r,\ |t| \leqq r^2\}$.

— Si f est une fonction numérique définie sur la boule $B_n(Y', S), r) = \{(x', t) \in \mathbb{R}^n;\ d((x', t), (Y', S)) < r\}$ vérifiant $f(Y', S) = Y_n$ et lipschitzienne (par rapport à la distance d) de rapport de Lipschitz inférieur à $h/5r$, on pose :

$$\omega_f = \{(x, t) \in \mathring{T}_Q(r, h);\ x_n > f(x', t)\}. \tag{1}$$

— Un domaine Ω de $\mathbb{R}^{n+1}$ est dit lipschitzien en $Q \in \partial\Omega$ si, à une isométrie près des coordonnées d'espace, la trace de Ω sur un cylindre centré en Q est du type (1).

— Pour $\mu \geqq 1$ on note $\Lambda(\mu)$ la classe des opérateurs L sur $\mathbb{R}^{n+1}$ de la forme :

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \operatorname{div}(A \nabla_x) \tag{2}$$

où $A = (A_{ij}(x, t))_{ij}$ est une matrice $n \times n$ symétrique telle que :

(i) $\forall \xi \in \mathbb{R}^n\ (1/\mu) \|\xi\|^2 \leqq \langle A\xi, \xi \rangle \leqq \mu \|\xi\|^2$;

(ii) les fonctions A_{ij} sont lipschitziennes (relativement à d) de constante de Lipschitz μ;

(iii) bien que cette hypothèse ne soit sans doute pas nécessaire, nous supposerons enfin, pour rester dans un cadre classique que les fonctions $\partial A_{ij}/\partial x_k$ existent et sont localement lipschitziennes par rapport à d.

Pour de tels opérateurs, on dispose du principe de Harnack-Moser [6] ainsi que d'estimations de la solution fondamentale [4].

Note présentée par Jean-Pierre KAHANE.

0249-6291/89/03080401 $ 2.00 © Académie des Sciences

2. Un principe de Harnack faible au bord.

Proposition 1. — *Soient* $L \in \Lambda(\mu)$, *r et h deux réels* >0 *et* Ω *un domaine de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *tel que* $\Omega \cap T_Q(r, h)$ *soit du type* (1). *Notant* G *la* L-*fonction de Green dans* Ω, *il existe une constante* $c = c(\mu, h/r)$ *strictement positive telle que :*

$$\forall A \in \Omega \cap T_Q(r/4, h/4), \quad \forall M \in \Omega - \mathring{T}_Q(r/2, h/2), \qquad G_A(M) \leqq c\, G_A(M_0)$$

où $M_0 = Q + (0, h/2, r^2/4)$.

Théorème 2. — *Soit* ω_f *un domaine du type* (1) *avec* $r \leqq 1$. *Soient* $L \in \Lambda(\mu)$ *et* (u, v) *un couple de* L-*solutions strictement positives dans* ω_f *tendant vers zéro en tout point de* $\partial\omega_f \cap \mathring{T}_Q(r, h)$. *Il existe* $c = c(\mu, h/r) > 0$ *tel que :*

$$\forall M \in T_Q(r/2, h/2), \quad \frac{u(M)}{u(A)} \leqq c \frac{v(M)}{v(A^*)}$$

où $A = Q + (0, h/2, r^2/2)$ *et* $A^* = Q + (0, h/2, -r^2/2)$.

Remarque. — Sous ces hypothèses, on ne peut obtenir une inégalité similaire ne faisant intervenir qu'un seul point de référence. Des contre exemples simples le prouvent lorsque $L = \partial/\partial t - \Delta_x$.

Pour établir ce résultat, on adapte à ce cadre une démarche de A. Ancona dans [1]. Notant $T = \mathring{T}_Q(3r/5, 3h/5) \cap \omega_f$, R_u^T est un L-potentiel porté par $\partial T \cap \omega_f$ coïncidant avec u dans T. Notant h la L-mesure harmonique de $\partial T_Q(3r/5, 3h/5)$ dans T, la proposition 1, le principe du maximum et le principe de Harnack nous donnent : $\forall M \in T$, $u(M) \leqq c u(A) h(M)$. Ensuite on exploite la relation suivante : si G désigne la L-fonction de Green de T qu'on prolonge par ses limites supérieures sur ∂T et par zéro à l'extérieur de T et si L^* est l'adjoint de L, $L^*(G.(M)) = \delta_M - \mu_M$ au sens faible où μ_M est la L-mesure harmonique dans T au point M.

Afin d'obtenir un principe de Harnack au bord ne faisant plus intervenir qu'un seul point de référence, on montre un principe de Harnack uniforme plus fort que le principe de Harnack-Moser. On ne peut évidemment établir ce nouveau principe que pour certaines L-solutions positives particulières. C'est l'objet de la partie qui suit.

3. Un principe de Harnack uniforme.

Théorème 3. — *Soient* ω_f *un domaine du type* (1) *avec* $r \leqq 1$ *et* $L \in \Lambda(\mu)$. *Notons w la* L-*mesure harmonique de* $\partial T_Q(r, h)$ *dans* ω_f. *Pour toute boule* (*relativement à d*) $B(M_0, 2\lambda)$ *incluse dans* $\omega_f \cap T_Q(r/2, h/2)$ *on a :*

$$\forall A, B \in B(M_0, \lambda), \qquad w(A) \leqq c w(B) \quad \text{où } c = c(\mu, h/r) > 0.$$

Lorsque L est à coefficients constants, ce résultat est une conséquence simple du principe du maximum et des inégalités de Harnack. Pour l'étendre à un opérateur L quelconque on cherche à comparer les fonctions w correspondant à deux opérateurs coïncidant en Q. La démarche utilisée m'a été suggérée par A. Ancona [3].

Lemme 4. — *Soit* $L \in \Lambda(\mu)$ *un opérateur à coefficients constants. Soient* ω_{f_1} *et* ω_{f_2} *deux ouverts du type* (1) *où* f_1 *et* f_2 *vérifient pour un couple* (ε, α) *de nombres* >0 :

$$|f_1(x', t) - f_2(x', t)| \leqq \varepsilon [d((x', t), (Y', S))]^{1+\alpha}.$$

Alors, il existe une constante $c=c(\mu, h/r, \varepsilon, \alpha)>0$ *telle que :*

$$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{T_Q}(r/2, h/2) \cap \mathrm{Q}+\left\{x_n \geqq \frac{h}{r}\|x'\| \vee |t|^{1/2}\right\}, \quad \frac{1}{c} w_1(\mathrm{M}) \leqq w_2(\mathrm{M}) \leqq c w_1(\mathrm{M}).$$

où w_i *désigne la* L*-mesure harmonique de* $\partial \mathrm{T_Q}(r, h)$ *dans* ω_{f_i}.

On peut supposer $f_1 \leqq f_2$ et $r=1$. On établit à l'aide du théorème 2 l'existence d'un nombre $\gamma>0$ vérifiant pour les points M qui nous intéressent :

$$\hat{\mathrm{R}}_{w_1}^{\mathrm{I}_p}(\mathrm{M}) \leqq c\, 2^{-\gamma p} w_1(\mathrm{M}) \qquad \text{où} \quad \mathrm{I}_p=(\omega_{f_1}-\omega_{f_2}) \cap [\mathrm{T_Q}(2^{-p}, 2^{-p} h)-\mathring{\mathrm{T}}_{\mathrm{Q}}(2^{-p-1}, 2^{-p-1} h)].$$

Cette estimation permet ensuite de comparer w_2 à w_1 grâce au théorème 1.

Lemme 5. — *Soient* ω_f *un domaine du type* (1) *avec* $r \leqq 1$, L *et* $\tilde{\mathrm{L}}$ *deux opérateurs de* $\Lambda(\mu)$ *coïncidant au point* Q; *notant* w *(resp.* $\tilde{w}$*) la* L *(resp.* $\tilde{\mathrm{L}}$*) mesure harmonique de* $\partial \mathrm{T_Q}(r, h)$ *dans* ω_f, *il existe* $c=c(\mu, h/r)>0$ *telle que :*

$$\forall \mathrm{M} \in \mathrm{T_Q}(r/2, h/2) \cap\left(\mathrm{Q}+\left\{x_n \geqq \frac{h}{r}\|x'\| \vee |t|^{1/2}\right\}\right), \quad \frac{1}{c} \tilde{w}(\mathrm{M}) \leqq w(\mathrm{M}) \leqq c \tilde{w}(\mathrm{M}).$$

On peut supposer que $\tilde{\mathrm{L}}$ est à coefficients constants. On s'inspire d'une démarche d'Ancona dans [2] qui reprend une technique due à Serrin [7]. Pour majorer w, on introduit $f_1(x', t)=f(x', t)-\varepsilon[d((x', t), (\mathrm{Y}', \mathrm{S}))]^{1+\alpha}$ et, notant $\tilde{w}_1$ la $\tilde{\mathrm{L}}$-mesure harmonique de $\partial \mathrm{T_Q}(r, h)$ dans ω_{f_1}, on cherche une solution croissante g nulle en 0 et valant 1 en 1 d'une équation du type $g''(s)=-(\delta/s^\gamma) g'(s)$ avec $\delta>0$, $0<\gamma<1$ telle que $g(\tilde{w}_1)$ soit L-surharmonique dans $\omega_f \cap \mathrm{T_Q}(r/2, h/2)$. La comparaison résulte alors du lemme 4. Pour minorer w, on reprend les mêmes idées. On est amené à introduire deux graphes intermédiaires et à rechercher g solution de $g''(s)=(\delta/s^\gamma) g'(s)$.

Le lemme 5 et le théorème 2 permettent alors d'étendre le théorème 3 à tout opérateur de la classe $\Lambda(\mu)$.

Remarque 6. — 1. Ayant établi le théorème 3 pour tout opérateur de $\Lambda(\mu)$ le lemme 4 se généralise alors à tout opérateur de $\Lambda(\mu)$ lorsque $r \leqq 1$.

2. Il en résulte que si f est une fonction $\mathrm{C}^{1\alpha}$ en x' et $(1+\alpha)/2$ höldérienne en t, la fonction w est de l'ordre de la distance (parabolique) au graphe de f, résultat qui s'étend grâce au théorème 2 à toute solution strictement positive dans ω_f.

4. Un principe de Harnack au bord.

Théorème 7. — *Soient* Ω *un domaine borné de* $\mathbb{R}^{n+1}$, Q *un point frontière et* r_0, h_0 *avec* $r_0 \leqq 1$ *tels que* $\Omega \cap \mathring{\mathrm{T}}_{\mathrm{Q}}(r_0, h_0)$ *soit du type* (1). *Soient* $\mathrm{L} \in \Lambda(\mu)$, $r \leqq r_0/4$ *et* u *et* v *deux solutions positives dans* Ω *tendant vers* 0 *en tout point de* $\partial_p \Omega-\mathrm{T_Q}(r/2, h/2)$ ($\partial_p \Omega$ *désigne la frontière parabolique de* Ω). *Notant* $\mathscr{C}$ *l'ensemble* $\mathrm{Q}+\{(x', x_n, t) \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x'\|^2 \vee (r_0/h_0)^2 |x_n|^2 \leqq t \leqq r_0^2/4\}$ *et* M_r *le point* $\mathrm{Q}+(0, (h_0 r)/r_0, r^2)$, *il existe une constante* $c=c(\mu, h_0/r_0)$ *strictement positive ne dépendant pas de* r *telle que :*

$$\forall \mathrm{M} \in [\mathscr{C}-\mathring{\mathrm{T}}_{\mathrm{Q}}(r, h_0)] \cap \Omega, \quad \frac{u(\mathrm{M})}{u(\mathrm{M}_r)} \leqq c \frac{v(\mathrm{M})}{v(\mathrm{M}_r)}.$$

Pour l'établir, on adapte la technique du théorème 2. On se ramène à écrire des estimations sur la fonction de Green G de Ω. On utilise l'analogue des théorèmes 2 et 3 pour la théorie adjointe afin de dégager l'estimation :

$$\forall 0 \leqq 2r \leqq \rho \leqq r_0/2, \qquad \mathrm{G}_{\mathrm{M}_r^*}(\mathrm{M}_\rho) \leqq c\, \mathrm{G}_{\mathrm{M}_r}(\mathrm{M}_\rho) \quad \text{où} \quad \mathrm{M}_r^*=\mathrm{Q}+(0, (h_0 r)/r_0, -r^2).$$

COROLLAIRE 8. — *Supposant de plus que tout point de* $\partial_p \Omega$ *est régulier (au sens de Perron-Wiener-Brelot), notant* C_Q *le cône des* L-*solutions positives de* Ω *s'annulant en tout point de* $\partial_p \Omega$ *autre que* Q, C_Q *est une demi-droite engendrée par une* L-*solution positive minimale de* Ω.

On retrouve ainsi dans le cadre de l'opérateur L l'analogue du théorème 1-7 de J. T. Kemper dans [5].

La proposition 1 permet d'établir $C_Q \neq \{0\}$. Grâce au théorème 7, deux éléments u et v non nuls de C_Q vérifient $u \leqq \alpha v$ dans $\mathscr{C} \cap \Omega$. On établit ensuite que $\mathscr{C} \cap \Omega$ est non effilé en u et v si celles-ci sont minimales. Ainsi, sous cette hypothèse supplémentaire, l'inégalité se propage à Ω. On obtient alors que deux minimales de C_Q sont proportionnelles, puis que $\dim(C_Q) = 1$.

Note remise le 16 février 1989, acceptée le 20 février 1989.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] A. ANCONA, Principe de Harnack à la frontière et théorème de Fatou pour un opérateur elliptique dans un domaine lipschitzien, *Ann. Inst. Fourier*, 28, 1978, p. 162-213.

[2] A. ANCONA, Comparaison des mesures harmoniques et des fonctions de Green pour des opérateurs elliptiques sur un domaine lipschitzien, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 294, série I, 1982, p. 505-508.

[3] A. ANCONA, *Comparaison des fonctions de Green sur des graphes et des variétés* (à paraître).

[4] E. B. FABES et D. W. STROOCK, A new proof of Moser's parabolic Harnack inequality via the old ideas of Nash, *Arch. Rat. Mech. and Anal.*, 96, 1986, p. 326-338.

[5] J. T. KEMPER, Temperatures in several variables : kernel functions, representations, and parabolic boundary values, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 167, 1972, p. 243-262.

[6] J. MOSER, A Harnack inequality for parabolic differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 17, 1964, p. 101-134.

[7] J. SERRIN, On the Harnack inequality for elliptic equations, *J. Anal. Math.*, 4, 1956, p. 292-308.

E.N.S. de Cachan, Département de Mathématiques,
61, *avenue du Président-Wilson,* 94230 *Cachan.*

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 308, Série I, p. 405-409, 1989

Analyse complexe/*Complex Analysis*

The Grothendieck-Dolbeault lemma for complete intersections

Guennadi M. Henkin and Pierre L. Polyakov

Abstract — For complete intersection M in the ball B it is proved the following theorem. For arbitrary differential form α with coefficients in $C^\infty(B)$ which is $\bar\partial$-closed in the points of $\operatorname{Reg} M = M \setminus \operatorname{Sing} M$ it may be constructed a differential form β with coefficients in $C^\infty(B \setminus \operatorname{Sing} M)$ such that $\bar\partial B = \alpha$ in $\operatorname{Reg} M$.

Le lemme de Grothendieck-Dolbeault pour les intersections complètes

Résumé — *Pour une intersection complète* M *dans la boule* B *nous prouvons le théorème suivant. Pour une forme différentielle arbitraire* α *à coefficients dans* $C^\infty(B)$ *qui est* $\bar\partial$*-fermée aux points de* $\operatorname{Reg} M = M \setminus \operatorname{Sing} M$ *il est possible de construire une forme différentielle* β *à coefficients dans* $C^\infty(B \setminus \operatorname{Sing} M)$ *telle que* $\bar\partial\beta = \alpha$ *dans* Reg M.

Version française abrégée — Soient B la boule unité fermée de $\mathbb{C}^n$, Ω un voisinage ouvert de B, $g_1, \ldots, g_p \in \mathcal{O}(\Omega)$ des fonctions holomorphes, $\tilde{M} = \{\zeta \in \Omega;\ g_1(\zeta) = \ldots = g_p(\zeta) = 0\}$, $M = \tilde{M} \cap B$,

$$\operatorname{Sing} M = \{\zeta \in M,\ D_I g(\zeta) = (\partial(g_1, \ldots, g_p) \mid \partial(\zeta_{i_1}, \ldots, \zeta_{i_p}))(\zeta) = 0;\quad \forall I = (i_1, \ldots, i_p) \subset \{1, \ldots, n\}\},$$

$\operatorname{Reg}\ M = M \setminus \operatorname{Sing} M$.

Théorème. — *Supposons que* M *soit une intersection complète réduite dans* B, i.e. $\dim_{\mathbb{C}} M = n - p$ *et* Reg M *partout dense dans* M. *Soit* α *une forme différentielle de type* $(0, r)$, C^∞ *dans* Ω *et telle que* $\bar\partial\alpha|_{\operatorname{Reg} M} = 0$. *Alors il existe une forme différentielle* β *de type* $(0, r-1)$ C^∞ *dans* $B \setminus \operatorname{Sing} M$ *telle que*

$$\bar\partial\beta|_{\operatorname{Reg} M} = \alpha|_{\operatorname{Reg} M}. \tag{1}$$

Schéma de la démonstration. — On référera aux formules numérotées dans le texte détaillé. Soient $Q_{ij}(\zeta, z)$ les coefficients de la décomposition de Hefer de $g_i(\zeta) - g_i(z)$, $\zeta, z \in \Omega$; Δ_p le p-simplexe canonique de $\mathbb{R}^p$, $\lambda \in \Delta_p$; $\omega_g(\zeta, z, \lambda)$ la forme différentielle utilisée classiquement dans les formules intégrales avec poids [7], $dg = dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_p$; $\gamma_g(\zeta, z, \lambda) = \prod_{k=1}^{p} (g_k(\zeta) - g_k(z)) \cdot \omega_g(\zeta, z, \lambda)$, γ_g^m la composante de type $(0, m)$ en z de γ_g, $M_\delta = \{\zeta \in M;\ \sum_{|I| = p} |D_I g(\zeta)| > \delta\}$. On définit $\beta(z)$ par la formule (2). Pour prouver l'existence de la limite dans (2), pour $z \in B \setminus \operatorname{Sing} M$ fixé, quand $\delta \to 0$, on localise la donnée à l'aide du produit par une fonction C^∞ égale à 1 au voisinage de z et on utilise un résultat de Coleff-Herrera sur les courants résiduels [9], interprété par Zich [10].

Pour montrer que la forme β satisfait à (1), on localise au voisinage de $\xi \in \operatorname{Reg} M$, à l'aide du produit par une fonction χ dans B, à support disjoint de Sing M, égale à 1 au voisinage de ξ; β_1 satisfaisant à $\bar\partial\beta_{1\,|M} = \alpha_{|M}$ au voisinage de ξ, on pose $\alpha_1 = \bar\partial(\chi\beta_1)$, $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$. On prouve (1) pour α_1 à l'aide de la formule d'homotopie avec poids (7) pour le $\bar\partial$-complexe dans

$$D^\varepsilon(M) = \{\zeta \in B;\ |g_1(\zeta)| \leqq \varepsilon, \ldots, |g_p(\zeta)| \leqq \varepsilon\}.$$

Note présentée par Paul Malliavin.

0249-6291/89/03080405 \$ 2.00

On prouve (1) pour α_2, *i.e.* $\bar{\partial}\beta_{2\,|\,\mathrm{Reg\,M}}=0$ où $\beta_2(z)$ est défini par la formule (2) avec $\alpha=\alpha_2$, en utilisant à nouveau [9] et des calculs classiques en théorie des formules intégrales.

The Grothendieck-Dolbeault lemma asserts that the equation $\bar{\partial}\beta=\alpha$ is locally solvable for α satisfying the condition $\bar{\partial}\alpha=0$ in a pseudoconvex neighbourhood of a point of a complex manifold [1]. From the works ([2], [3]) it follows that this lemma in the given above formulation is not valid in general for an analytic set even if this set is a complete intersection with isolated singularity. In this work using the integral formulas for solutions of $\bar{\partial}$-equation in domains of $\mathbb{C}^n$ ([4] to [7]) and the theory of residual currents ([9], [10]) we obtain the following weakened version of the Grothendieck-Dolbeault lemma for complete intersections. Let $\mathrm{B}=\{\zeta\in\mathbb{C}^n\colon |\zeta_1|^2+\ldots+|\zeta_n|^2\leqq 1\}$ be the unit ball in $\mathbb{C}^n$; $g_1, \ldots, g_p$ holomorphic functions in the neighbourhood $\Omega\supset\mathrm{B}$; $\tilde{\mathrm{M}}=\{\zeta\in\Omega\colon g_1(\zeta)=\ldots=g_p(\zeta)=0\}$ analytic set in Ω; $\mathrm{M}=\tilde{\mathrm{M}}\cap\mathrm{B}$. Denote

$$\mathrm{Sing\,M}=\left\{\zeta\in\mathrm{M}\colon \mathrm{D_I}g(\zeta)\overset{\mathrm{def}}{=}\frac{\partial(g_1,\ldots,g_p)}{\partial(\zeta_{i_1},\ldots,\zeta_{i_p})}(\zeta)=0,\ \forall\,\mathrm{I}=(i_1,\ldots,i_p)\subset(1,\ldots,n)\right\}$$

$$\mathrm{Reg\,M}=\mathrm{M}\setminus\mathrm{Sing\,M}.$$

THEOREM. — *Let* M *be a reduced complete intersection in* B, i.e. $\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{M}=n-p$ *and* Reg M *is everywhere dense in* M; α *a differential form of the type* $(0, r)$ *with coefficients of the class* $\mathrm{C}^\infty(\Omega)$ *and such that* $\bar{\partial}\alpha|_{\mathrm{Reg\,M}}=0$. *Then there exists a differential form* β *of the type* $(0, r-1)$ *with coefficients of the class* $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{B}\setminus\mathrm{Sing\,M})$ *such that*

$$\bar{\partial}\beta|_{\mathrm{Reg\,M}}=\alpha|_{\mathrm{Reg\,M}}. \tag{1}$$

Remark. — This theorem solves in particular one of our problems, *see* [8], p. 229. The question of validity of the theorem for analytic sets which are not complete intersections remains open.

Proof of the theorem. — Introduce some notations. For the set of holomorphic functions $g_1, \ldots, g_p$ denote by $\mathrm{Q}_{ij}(\zeta, z)$ the holomorphic in ζ and z coefficients of Hefer's decomposition:

$$g_i(\zeta)-g_i(z)=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Q}_{ij}(\zeta, z)\,.\,(\zeta_j-z_j).$$

Denote

$$\Delta_p=\left\{(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)\in\mathbb{R}_+^p\colon \sum_{k=1}^{p}\lambda_k\leqq 1\right\},$$

$$\Delta_{\mathrm{J}}=\left\{(\lambda_{j_1},\ldots,\lambda_{j_s})\in\mathbb{R}_+^s\colon \sum_{k=1}^{s}\lambda_{j_k}\leqq 1\right\}$$

for the multiindex $\mathrm{J}\subset(1,\ldots,p)$; $d\zeta=d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n$, $dg=dg_1\wedge\ldots\wedge dg_p$.

For two vector-functions $v=(v_1,\ldots,v_n)$ and $u=(u_1,\ldots,u_n)$ we denote:

$$\langle v\,.\,u\rangle=\sum_{j=1}^{n}v_j\,.\,u_j,$$

$$\omega_k'(v, u)=(2\pi i)^{-n}\det[u, \overbrace{dv, \ldots, dv}^{k}, \overbrace{du, \ldots, du}^{n-k-1}]\wedge d\zeta,$$

$$\mathrm{G}^{(k)}(\zeta, z)=\frac{\mathcal{N}!}{(\mathcal{N}-k)!}\left(\frac{1-\langle\bar{\zeta}.\zeta\rangle}{1-\langle\bar{\zeta}.z\rangle}\right)^{\mathcal{N}-k}, \qquad k=0, 1, \ldots$$

$$\omega_g(\zeta, z, \lambda)=\sum_{l=0}^{n-1}(-1)^l\frac{1}{l!}\mathrm{G}^{(l)}(\zeta, z)$$
$$\times\,\omega_l'\left(\frac{-\bar{\zeta}}{1-\langle\bar{\zeta}.z\rangle}, \sum_{k=1}^{p}\lambda_k\frac{\mathrm{Q}_k(\zeta, z)}{g_k(\zeta)-g_k(z)}+\left(1-\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\right)\frac{\bar{\zeta}-\bar{z}}{|\zeta-z|^2}\right)\wedge d\zeta,$$

where $\mathrm{Q}_k(\zeta, z)=(\mathrm{Q}_{k1}(\zeta, z), \ldots, \mathrm{Q}_{kn}(\zeta, z))$.

$\omega_g^m(\zeta, z, \lambda)$ — a component of the type $(0, m)$ in z of the form $\omega_g(\zeta, z, \lambda)$.

$\gamma_g(\zeta, z, \lambda)=\prod_{k=1}^{p}(g_k(\zeta)-g_k(z)).\,\omega_g(\zeta, z, \lambda)$, $\gamma_g^m(\zeta, z, \lambda)$ a component of the type $(0, m)$ in z of the form $\gamma_g(\zeta, z, \lambda)$. Define now the desired form β in the theorem by the formula:

$$\beta(z)=\lim_{\delta\to 0}(-1)^r.(2\pi i)^p\int_{\Delta_p\times \mathrm{M}_\delta} dg(\zeta)\,\lrcorner\,(\alpha(\zeta)\wedge\gamma_g^{r-1}(\zeta, z, \lambda)), \tag{2}$$

where the form $\varphi=dg\,\lrcorner\,\psi$ is defined uniquely on $\mathrm{Reg}\,\mathrm{M}$ by the form ψ from the condition $dg(\zeta)\wedge\varphi(\zeta)=\psi(\zeta)$ for $\zeta\in\mathrm{Reg}\,\mathrm{M}$, $\mathrm{M}_\delta=\{\zeta\in\mathrm{M}: \sum_{|\mathrm{I}|=p}|\mathrm{D_I}g(\zeta)|>\delta\}$ and the degree $\mathcal{N}$ in the definition of the weight $\mathrm{G}^{(k)}(\zeta, z)$ will be chosen below.

For the proof of existence of limit in (2) for fixed $z\in\mathrm{B}\setminus\mathrm{Sing}\,\mathrm{M}$ when δ tends to zero we choose $\delta(z)>0$ such that $\mathcal{U}_{\delta(z)}(z)\cap\mathrm{Sing}\,\mathrm{M}=\varnothing$ where $\mathcal{U}_{\delta(z)}(z)=\{\zeta\in\mathrm{B}: |\zeta-z|<\delta(z)\}$ — the ball of the radius $\delta(z)$ centered in z. Let $\chi_z(\zeta)$ be a function of the class $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{B})$ such that

$$\chi_z(\zeta)\equiv 1 \quad \text{for } \zeta\in\mathcal{U}_{\delta(z)/2}(z) \qquad \text{and} \quad \chi_z(\zeta)\equiv 0 \quad \text{for } \zeta\notin\mathcal{U}_{\delta(z)}(z). \tag{3}$$

Existence of the limit when $\delta\to 0$ for

$$\mathrm{I}(z, \chi_z, \delta)=\int_{\Delta_p\times\mathrm{M}_\delta} dg(\zeta)\,\lrcorner\,(\chi_z(\zeta).\alpha(\zeta)\wedge\gamma_g^{r-1}(\zeta, z, \lambda))$$

follows from the equality:

$$\mathrm{I}(z, \chi_z, \delta)=\text{const.} \qquad \text{for } \delta<\min_{\zeta\in\mathcal{U}_{\delta(z)}(z)}\sum_{|\mathrm{I}|=p}|\mathrm{D_I}g(\zeta)|. \tag{4}$$

For the proof of the existence of limit of $\mathrm{I}(z, 1-\chi_z, \delta)$ when $\delta\to 0$ we apply the theory of Coleff and Herrera [9]. As in [10] showed A. Zich from this theory follows that for a complete intersection M and an arbitrary form of the type $(n, n-p)$ ψ with coefficients in $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{B})$ the following equality holds:

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathrm{T}^\varepsilon_\delta(\mathrm{M})}\prod_{k=1}^{p}g_k^{-1}(\zeta).\psi(\zeta)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathrm{T}^\varepsilon(\mathrm{M})}\prod_{k=1}^{p}g_k^{-1}(\zeta).\psi(\zeta), \tag{5}$$

where

$$\mathrm{T}^\varepsilon(\mathrm{M})=\{\zeta\in\mathrm{B}: |g_1(\zeta)|=\ldots=|g_p(\zeta)|=\varepsilon\}$$

and

$$\mathrm{T}^\varepsilon_\delta(\mathrm{M})=\{\zeta\in\mathrm{T}^\varepsilon(\mathrm{M}): \sum_{|\mathrm{I}|=p}|\mathrm{D_I}g(\zeta)|>\delta\},$$

and limits in both sides of (5) exist and define a current of the type $(0, p)$.

Applying this theorem to the form $(1-\chi_z(\zeta)).\alpha(\zeta)\wedge\gamma_g^{r-1}(\zeta, z, \lambda)$ for every fixed $\lambda\in\Delta_p$ and then integrating with respect to λ we have

$$(6)\quad \lim_{\delta\to 0} \mathrm{I}(z, 1-\chi_z, \delta) = \lim_{\delta\to 0}\int_{\Delta_p\times \mathrm{M}_\delta} dg(\zeta) \lrcorner ((1-\chi_z(\zeta))\alpha(\zeta)\wedge\gamma_g^{r-1}(\zeta, z, \lambda))$$
$$= \lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Delta_p\times \mathrm{T}_\delta^\varepsilon(\mathrm{M})} (1-\chi_z(\zeta)).\prod_{k=1}^{p} g_k^{-1}(\zeta).\alpha(\zeta)\wedge\gamma_g^{r-1}(\zeta, z, \lambda)$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Delta_p\times \mathrm{T}^\varepsilon(\mathrm{M})} (1-\chi_z(\zeta)).\prod_{k=1}^{p} g_k^{-1}(\zeta).\alpha(\zeta)\wedge\gamma_g^{r-1}(\zeta, z, \lambda).$$

Since the right-hand side of (6) defines the current *i.e.* it makes sense for the forms with coefficients in $\mathrm{C}^m(\mathrm{B})$ for some $m>0$ we choose $\mathcal{N}=m+n$ in the expression for the weight $\mathrm{G}^{(k)}(\zeta, z)$.

The belonging of the coefficients of β to $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{B}\setminus\mathrm{Sing}\,\mathrm{M})$ also is corollary of (4) and (6).

Now, for the completion of the proof of the theorem it is necessary to prove (1) in such neighbourhood $\mathrm{V}_\xi \Subset \mathrm{B}$ of a fixed point $\xi\in\mathrm{Reg}\,\mathrm{M}$ that $\mathrm{V}_\xi\cap\mathrm{Sing}\,\mathrm{M}=\varnothing$. Choose the neighbourhood V'_ξ such that $\mathrm{V}_\xi\subset\mathrm{V}'_\xi\Subset\mathrm{B}$ and $\mathrm{V}'_\xi\cap\mathrm{Sing}\,\mathrm{M}=\varnothing$. Consider the function $\chi\in\mathrm{C}^\infty(\mathrm{B})$ such that $\chi(\zeta)\equiv 1$ for $\zeta\in\mathrm{V}_\xi$ and $\chi(\zeta)\equiv 0$ for $\zeta\notin\mathrm{V}'_\xi$ and the differential form β_1 with coefficients in $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{V}'_\xi)$ such that $\bar\partial\beta_1|_{\mathrm{V}'_\xi\cap\mathrm{M}}=\alpha|_{\mathrm{V}'_\xi\cap\mathrm{M}}$. Define the forms $\alpha_1=\bar\partial(\chi.\beta_1)$, $\alpha_2=\alpha-\alpha_1$ and prove (1) for α_1 and α_2. To prove (1) for α_1 we consider the weighted homotopy formula for the $\bar\partial$-complex of differential forms on $\mathrm{D}^\varepsilon(\mathrm{M})=\{\zeta\in\mathrm{B}: |g_1(\zeta)|\leqq\varepsilon, \ldots, |g_p(\zeta)|\leqq\varepsilon\}$:

$$(7)\qquad \alpha_1(z)=\bar\partial\,\mathrm{I}_r^\varepsilon\alpha_1(z)+\mathrm{I}_{r+1}^\varepsilon\bar\partial\alpha_1(z) \qquad \text{for}\quad z\in\mathrm{D}^\varepsilon(\mathrm{M}),$$

where

$$(8)\qquad \begin{cases} \mathrm{I}_r^\varepsilon\psi(z)=(-1)^r \displaystyle\sum_{\substack{\mathrm{J}\subset(1,\ldots,p)\\ 0\leqq|\mathrm{J}|\leqq n-r}} \int_{\Delta_\mathrm{J}\times\sigma_\varepsilon^\mathrm{J}} \psi(\zeta)\wedge\omega_g^{r-1}(\zeta, z, \lambda),\\ \sigma_\varepsilon^\mathrm{J}=\{\zeta\in\mathrm{B}: |g_j(\zeta)|=\varepsilon \text{ for } j\in\mathrm{J}\}.\end{cases}$$

Tending ε to zero in (7) we find that (7) $\to$ (1) for α_1 when $\varepsilon\to 0$ and $z\in\mathrm{V}_\xi\cap\mathrm{M}$.

To prove (1) for α_2 and $z\in\mathrm{V}_\xi\cap\mathrm{M}$ we apply again (5) and get:

$$(9)\quad \beta_2(z)=\lim_{\delta\to 0}(-1)^r(2\pi i)^p\int_{\Delta_p\times\mathrm{M}_\delta} dg(\zeta)\lrcorner(\alpha_2(\zeta)\wedge\gamma_g^{r-1}(\zeta, z, \lambda))$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(-1)^r\int_{\Delta_p\times\mathrm{T}^\varepsilon(\mathrm{M})} \alpha_2(\zeta)\wedge\omega_g^{r-1}(\zeta, z, \lambda).$$

Again using the Coleff and Herrera theory [9] we differentiate (9) with respect to z and get

$$(10)\qquad \bar\partial_z\beta_2(z)=\lim_{\varepsilon\to 0}(-1)^r\int_{\Delta_p\times\mathrm{T}^\varepsilon(\mathrm{M})} \alpha_2(\zeta)\wedge\bar\partial_z\omega_g^{r-1}(\zeta, z, \lambda).$$

Using the equality

$$-d_{\zeta,\lambda}\,\omega_g^r(\zeta, z, \lambda)=\bar\partial_z\,\omega_g^{r-1}(\zeta, z, \lambda)$$

and the Stokes formula for the right-hand side of (10) on $\Delta_p \times T^\varepsilon(M)$ we have for $z \in V_\xi \cap M$:

$$\begin{aligned}\bar\partial_z \beta_2(z) &= \lim_{\varepsilon \to 0} (-1)^{r+1} \int_{\Delta_p \times T^\varepsilon(M)} \alpha_2(\zeta) \wedge d_{\zeta,\lambda}\, \omega_g^r(\zeta, z, \lambda)\\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} (-1) \int_{\Delta_p \times T^\varepsilon(M)} \bar\partial \alpha_2(\zeta) \wedge \omega_g^r(\zeta, z, \lambda)\\ &= \lim_{\delta \to 0} \lim_{\varepsilon \to 0} (-1) \int_{\Delta_p \times T^\varepsilon(M)} \bar\partial \alpha_2(\zeta) \wedge \omega_g^r(\zeta, z, \lambda) = 0.\end{aligned}$$

This completes the proof of the theorem.

The authors thank P. Dolbeault for very useful conversations which stimulated the completion of this work.

Note remise le 23 janvier 1989, acceptée le 13 février 1989.

REFERENCES

[1] P. DOLBEAULT, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 236, 1953, pp. 175-177.
[2] J. REIFFEN, *Math. Z.*, 101, 1967, pp. 269-284.
[3] J.-M. KANTOR, *Bull. Soc. Math. Fr.*, Mémoire, 53, 1977, pp. 5-80.
[4] G. M. HENKIN, *Uspekhi Matem. Nauk*, 26, No. 3, 1971, pp. 211-212.
[5] P. L. POLYAKOV, *Matem. Sbornik*, 85, No. 3, 1971, pp. 388-402.
[6] Sh. A. DAUTOV and G. M. HENKIN, *Matem. Sbornik*, 107, No. 2, 1978, pp. 165-174.
[7] B. BERNDTSSON and M. ANDERSSON, *Ann. Inst. Fourier*, 32, No. 3, 1982, pp. 91-110.
[8] G. M. HENKIN and J. LEITERER, *Andreotti-Grauert Theory by Integral Formulas*, Berlin, Akademic-Verlag, 1988.
[9] N. R. COLEFF and M. E. HERRERA, *Springer Lect. Notes Math.*, No. 633, 1978.
[10] A. K. ZICH, *Multidimensional residues and applications*, Novosibirsk, Nauka, 1988 (in Russian).

U.S.S.R. Academy of Sciences,
Central Economic and Mathematical Institute, Krasikova str. 32, *Moscow* 117417, *U.S.S.R.*

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 308, Série I, p. 411-414, 1989

Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Solutions positives globales d'une équation biharmonique sur-linéaire

Robert DALMASSO

Résumé — Nous étudions l'équation biharmonique semi-linéaire $\Delta^2 u = p(|x|)u^\lambda$ dans $\mathbf{R}^n$ pour $n \geqq 5$ et $\lambda > 1$. Sous certaines conditions sur p et λ, nous montrons l'existence d'une solution positive globale tendant vers zéro quand $|x| \to +\infty$.

Entire positive solutions of a superlinear biharmonic equation

Abstract — *We study the semilinear biharmonic equation* $\Delta^2 u = p(|x|)u^\lambda$ *in* $\mathbf{R}^n$ *where* $n \geqq 5$ *and* $\lambda > 1$. *Under some conditions on p and* λ, *we show the existence of an entire positive solution which decays to zero as* $|x| \to +\infty$.

1. INTRODUCTION. — Le but de ce travail est d'étudier l'équation biharmonique semi-linéaire

(1.1) $$\Delta^2 u = p(|x|)u^\lambda, \qquad x \in \mathbf{R}^n$$

avec la condition à l'infini

(1.2) $$\lim u(x) = 0 \text{ quand } |x| \to +\infty$$

pour $n \geqq 5$ sous les hypothèses suivantes :

(H_1) $p \in C([0, +\infty[)$ espace des fonctions continues sur $[0, +\infty[$, $p \geqq 0$, $p \not\equiv 0$ et

$$\int_0^{+\infty} t^3 p(t)\, dt < +\infty$$

(H_2) il existe $a > 0$ et $l \geqq 0$ tels que

$$p(t) = at^l + o(t^l) \text{ au voisinage de } 0$$

(H_3) $$1 < \lambda < \frac{n+4+2l}{n-4}.$$

On appelle solution globale de (1.1) toute fonction $u \in C^4(\mathbf{R}^n)$ vérifiant (1.1) en chaque point de $\mathbf{R}^n$. De nombreux auteurs ont étudié le problème de l'existence, de l'unicité et du comportement asymptotique de solutions globales d'équations elliptiques semi-linéaires d'ordre supérieur à deux ([1], [2], [4] à [7]). Cependant le problème (1.1), (1.2) dans le cas sur-linéaire ($\lambda > 1$) n'a pas été abordé à notre connaissance. Notre résultat principal est le

THÉORÈME. — *Supposons les hypothèses* (H_1), (H_2) *et* (H_3) *satisfaites. Alors l'équation* (1.1) *admet une solution positive globale vérifiant* (1.2).

Remarque 1.1. — Nous verrons que la solution dont l'existence est établie dans le théorème vérifie aussi $\lim (\Delta u)(x) = 0$ quand $|x| \to +\infty$.

Remarque 1.2. — L'hypothèse (H_3) est en un certain sens essentielle. En effet considérons l'équation

(1.3) $$(\Delta^2 u)(x) = p(|x|)u^9(x), \qquad x \in \mathbf{R}^5$$

Note présentée par Haïm BREZIS.

0249-6291/89/03080411 $ 2.00 © Académie des Sciences

où $p(|x|)=(1-|x|)$ si $|x|\leqq 1$ et $p(|x|)=0$ si $|x|\geqq 1$. Il est clair que l'hypothèse (H_3) n'est pas vérifiée. La démonstration du théorème montre que pour tout $\alpha>0$ l'équation (1.3) admet une unique solution positive radiale $u\in C^4(\mathbf{R}^5)$ telle que $u(0)=\alpha$ et $\lim(\Delta u)(x)=0$ pour $|x|\to+\infty$. En utilisant la technique de Pohozaev on montre que $\lim u(x)>0$ quand $|x|\to+\infty$.

2. Réduction du problème à une équation différentielle. — Comme nous cherchons des solutions positives, l'équation (1.1) est équivalente à $\Delta^2 u=p(|x|)f(u)$ où f est définie par $f(u)=u^\lambda$ si $u\geqq 0$ et $f(u)=0$ si $u<0$. On cherche des solutions radiales $u(x)=y(|x|)$ ce qui nous amène à introduire le problème suivant

$$(\mathrm{P}_\alpha)\qquad \begin{cases} (\Delta^2 y)(t)=p(t)f(y(t)) & \text{pour}\quad t\geqq 0\\ y(0)=\alpha,\qquad y'(0)=(\Delta y)'(0)=0, & \lim\limits_{t\to+\infty}(\Delta y)(t)=0\end{cases}$$

où α désigne un paramètre strictement positif et Δ le laplacien en coordonnées polaires.

On note $L^1_r(]0,+\infty[)$ l'espace des fonctions f réelles, mesurables sur $]0,+\infty[$ telles que $\int_0^{+\infty}s^r|f(s)|\,ds<+\infty$ et on définit les opérateurs $\mathrm{H}:C([0,+\infty[)\to C^2([0,+\infty[)$ et $\mathrm{K}:C([0,+\infty[)\cap L^1_1(]0,+\infty[)\to C^2([0,+\infty[)$ par

$$(\mathrm{H}g)(t)=\frac{1}{n-2}\int_0^t\left(1-\left(\frac{s}{t}\right)^{n-2}\right)sg(s)\,ds\qquad\text{pour}\quad t\geqq 0$$

et

$$(\mathrm{K}g)(t)=\frac{1}{n-2}\int_0^t\left(\frac{s}{t}\right)^{n-2}sg(s)\,ds+\frac{1}{n-2}\int_t^{+\infty}sg(s)\,ds\qquad\text{pour}\quad t\geqq 0.$$

On renvoie à [2] pour les propriétés élémentaires de H et K. On montre alors que $y\in C^4([0,+\infty[)$ est solution de (P_α) si et seulement si $y\in C([0,+\infty[)$, $pf(y)\in L^1_1(]0,+\infty[)$ et

$$(2.1)\qquad y(t)=\alpha-(\mathrm{HK}\,pf(y))(t)\qquad\text{pour}\quad t\geqq 0.$$

D'autre part en notant $\mathrm{Y}(t)=(y(t),(\Delta y)(t))$ et $\mathrm{F}(t,\mathrm{Y}(t))=((\Delta y)(t),p(t)f(y(t)))$ on montre aussi que si $y\in C^4([0,+\infty[)$ est solution de (P_α), alors

$$(2.2)\qquad \mathrm{Y}(t)=\mathrm{Y}(0)+(\mathrm{HF}^*\mathrm{Y})(t)\qquad\text{pour}\quad t\geqq 0$$

où $(\mathrm{F}^*\mathrm{Y})(t)=\mathrm{F}(t,\mathrm{Y}(t))$.

L'équation intégrale (2.1) nous permet de démontrer l'existence d'une solution de (P_α). Pour l'unicité on considère deux solutions y et z de (P_α) et on montre tout d'abord que $(\Delta y)(0)=(\Delta z)(0)$ en utilisant le principe du maximum. L'unicité résulte alors de (2.2) car F est localement lipschitzienne. Dans la suite on note y_α l'unique solution de (P_α).

3. Démonstration du théorème. — La fonction y_α vérifie les propriétés suivantes :

(i) y_α est strictement décroissante et bornée : $m(\alpha)\leqq y_\alpha\leqq\alpha$ où

$$m(\alpha)=\alpha-\frac{\alpha^\lambda}{2(n-2)(n-4)}\int_0^{+\infty}s^3p(s)\,ds,$$

(ii) y'_α est bornée,

(iii) Δy_α est strictement croissante et $(\Delta y_\alpha)(t)<0$ pour $t\geqq 0$.

Ceci montre l'existence de $\hat{y}(\alpha)=\lim_{t\to+\infty} y_\alpha(t)$. (2.1), (i), (ii) et les propriétés élémentaires de H et K permettent de démontrer que la fonction $\hat{y}$ est continue sur $]0,+\infty[$, que $\hat{y}(\alpha)>0$ pour α suffisamment petit et que $\lim_{\alpha\to 0}\hat{y}(\alpha)=0$. Le théorème résulte alors du lemme suivant et du théorème de la valeur intermédiaire.

LEMME 3.1. — *Si p et λ vérifient les hypothèses* (H_1), (H_2) *et* (H_3), *il existe* $\alpha\in]0,+\infty[$ *tel que* $\hat{y}(\alpha)<0$.

Démonstration. — Nous allons utiliser la technique introduite par A. Haraux et F. B. Weissler ([3], propositions 3.8 et 3.9). Il est clair que le lemme découle des deux propositions suivantes.

PROPOSITION 3.1. — *Supposons les hypothèses* (H_1), (H_2) *satisfaites et* $\lambda>1$. *Si la solution* y_α *du problème* (P_α) *est telle que* $\hat{y}(\alpha)\geqq 0$ *pour* $\alpha\in]0,+\infty[$, *alors il existe une fonction positive décroissante* $z\in C^4([0,+\infty[)$ *telle que* $(\Delta^2 z)(t)=at^l f(z(t))$ *pour* $t\geqq 0$, $z(0)=1$, $z'(0)=(\Delta z)'(0)=0$ *et* $\lim_{t\to+\infty}(\Delta z)(t)=0$.

PROPOSITION 3.2. — *Soit* $1<\lambda<(n+4+2l)/(n-4)$ *avec* $l\geqq 0$ *et soit* $a>0$. *Alors il n'existe pas de fonction positive* $z\in C^4([0,+\infty[)$ *vérifiant l'équation* $(\Delta^2 z)(t)=at^l f(z(t))$ *pour* $t\geqq 0$ *avec les conditions* $z(0)=1$, $z'(0)=(\Delta z)'(0)=0$, $\lim_{t\to+\infty}(\Delta z)(t)=0$.

Démonstration de la proposition 3.1. — On pose $m=(\lambda-1)/(l+4)$ et pour $\alpha>0$ on définit la fonction z_α par $z_\alpha(t)=\alpha^{-1}y(\alpha^{-m}t)$ pour $t\geqq 0$. On montre alors que pour $T>0$ les fonctions z_α, z'_α, Δz_α, $(\Delta z_\alpha)'$ sont bornées pour $\alpha\in]0,+\infty[$ uniformément par rapport à $t\in[0,T]$. Le théorème d'Ascoli permet de démontrer l'existence de deux fonctions z et w appartenant à $C([0,+\infty[)$ et d'une suite $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telles que $\alpha_j\to+\infty$ pour $j\to+\infty$, $z_{\alpha_j}\to z$ et $\Delta z_{\alpha_j}\to w$ quand $j\to+\infty$ uniformément sur tout intervalle compact. On montre alors que $w=\Delta z$ et que $(\Delta^2 z)(t)=at^l f(z(t))$. Toutes les propriétés de z à l'exception de la condition à l'infini ($\lim_{t\to+\infty}(\Delta z)(t)=0$) sont facilement vérifiées. (iii) entraîne que $\lim_{t\to+\infty}(\Delta z)(t)$ existe. Notons $(\Delta z)(+\infty)$ cette limite et définissons h par $h(t)=at^l$ pour $t\geqq 0$. On démontre que

$$z(t)=1+\frac{(\Delta z)(+\infty)}{2n}t^2-(\mathrm{HK}\,hf(z))(t)\qquad\text{pour}\quad t\geqq 0 \tag{3.1}$$

et qu'il existe une constante $C>0$ telle que

$$0\leqq t^{(l+4)/(\lambda-1)}z(t)\leqq C\qquad\text{pour}\quad t\geqq 0. \tag{3.2}$$

Compte tenu des propriétés de y_α et de l'hypothèse $\hat{y}(\alpha)\geqq 0$ pour $\alpha>0$ on voit que $0\leqq z\leqq 1$. D'autre part (3.2) entraîne que $hf(z)\in L^1_3(]0,+\infty[)$ et les propriétés de H et K montrent que

$$\lim_{t\to+\infty}(\mathrm{HK}\,hf(z))(t)=\frac{1}{2(n-2)(n-4)}\int_0^{+\infty}s^3\,h(s)\,z^\lambda(s)\,ds<+\infty.$$

On déduit de (3.1) et de ce qui précède que $(\Delta z)(+\infty)=0$ et la proposition est démontrée.

Démonstration de la proposition 3.2. — On vérifie que la majoration (3.2) est encore vraie et on utilise alors la méthode de [3] avec l'hypothèse (H_3).

Note remise le 16 décembre 1988, acceptée après révision le 6 février 1989.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] R. DALMASSO, Solutions d'équations elliptiques semi-linéaires d'ordre $2m$, *Funkcial. Ekvac.* (à paraître).

[2] N. FUKAGAI, Positive entire solutions of higher order semilinear elliptic equations, *Hiroshima Math. J.*, 17, 1987, p. 561-590.

[3] A. HARAUX et F. B. WEISSLER, Non-uniqueness for a semilinear initial value problem, *Indiana Univ. Math. J.*, 31, 1982, p. 167-189.

[4] T. KUSANO, M. NAITO et C. A. SWANSON, Radial entire solutions to even order semilinear elliptic equations in the plane, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 105 A, 1987, p. 275-287.

[5] T. KUSANO, M. NAITO et C. A. SWANSON, Entire solutions of a class of even order quasilinear elliptic equations, *Math. Z.*, 195, 1987, p. 151-163.

[6] T. KUSANO et C. A. SWANSON, Positive entire solutions of semilinear biharmonic equations, *Hiroshima Math. J.*, 17, 1987, p. 13-28.

[7] H. USAMI, On strongly increasing entire solutions of even order semilinear elliptic equations, *Hiroshima Math. J.*, 17, 1987, p. 175-217.

Laboratoire TIM 3-I.M.A.G., Équipe E.D.P.
Tour I.R.M.A., B.P. n° 53 X, 38041 *Grenoble Cedex.*

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 308, Série I, p. 415-419, 1989

Contrôle optimal/*Optimal Control*

Une extension du lemme de Farkas et son application au problème de régulation linéaire sous contraintes

Jean-Claude HENNET

Résumé — Dans cette Note, on cherche à expliciter les relations mathématiques devant exister entre les matrices et les vecteurs de coefficients définissant deux systèmes d'inéquations linéaires pour que toute solution du premier système soit aussi solution du second système.

Le résultat obtenu peut faciliter la résolution de nombreux problèmes, en particulier en automatique. L'application que nous présentons ici concerne la construction de régulateurs permettant de stabiliser des systèmes dynamiques linéaires soumis à des contraintes linéaires sur la commande et sur l'état.

An extension of Farkas' lemma and its application to the linear constrained regulation problem

Abstract — *The purpose of this Note is to express the mathematical relations between the matrices and the vectors of coefficients defining two systems of linear inequalities, so that any solution of the first system is also a solution of the second system.*

The result which has been obtained may contribute to an easier resolution of many problems, specially in control theory. The application which is presented in this paper deals with the design of stabilizing regulators for linear dynamical systems subject to linear constraints on control and state.

Abridged English Version — The set of linear inequalities $Q.X \leqq \varphi$, with $Q \in \mathbf{R}^{q*n}$ and $\varphi \in \mathbf{R}^q$ defines a convex polyhedron of $\mathbf{R}^n$, denoted $R(Q, \varphi)$. Under what conditions any point of $R(Q, \varphi)$ also satisfies the set of linear inequalities $P.X \leqq \psi$ with $P \in \mathbf{R}^{p*n}$ and $\psi \in \mathbf{R}^p$? An extension of Farkas' lemma to the non-homogeneous matrix case provides a set of necessary and sufficient conditions on Q, P, φ, ψ under which $R(Q, \varphi) \subseteqq R(P, \psi)$.

THEOREM. — *The system* $P.X \leqq \psi$ *is satisfied by any point of the non-empty convex polyhedron defined by the system* $Q.X \leqq \varphi$ *if and only if there exists a (dual) matrix* U *of* $\mathbf{R}^{p*q}$ *with non-negative coefficients satisfying conditions* $U.Q = P$ *and* $U.\varphi \leqq \psi$.

This theorem can easily be proven by concatenation of necessary and sufficient conditions related to each line P_i of matrix P.

Application of this theorem to the linear constrained regulation problem (LCRP) provides a set of sufficient conditions and a LP algorithm for finding a feasible control law.

The linear feedback control $U_k = F.X_k$ with $F \in \mathbf{R}^{m*n}$ has to satisfy constraints $-\rho_2 \leqq U_k \leqq \rho_1$, ρ_1 and ρ_2 being positive vectors of $\mathbf{R}^m$ and to stabilize the system $X_{k+1} = A.X_k + B.U_k$, with $X_k \in \mathbf{R}^n$, $U_k \in \mathbf{R}^m$, $A \in \mathbf{R}^{n*n}$, $B \in \mathbf{R}^{n*m}$ for any initial state belonging to the convex polyhedron defined by the set of inequalities:

$G.X_0 \leqq \omega$ with $G \in \mathbf{R}^{g*n}$, rank $G = n$ and ω a positive vector of $\mathbf{R}^g$.

Constraints on the control vector can then be re-written $S.X_k \leqq \rho$ with:

$$S = \begin{bmatrix} +F \\ -F \end{bmatrix}, \qquad \rho = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix}.$$

Observe that when rank $G = n$, invariance of $R(G, \omega)$ for system $X_{k+1} = (A + B.F) X_k$ implies its stability and that inclusion of $R(G, \omega)$ in $R(S, \rho)$ guarantees the respect of control constraints. A simple method for finding an admissible control can then be obtained by applying twice the theorem presented above.

Note présentée par Pierre FAURRE.

0249-6291/89/03080415 $ 2.00

• Invariance of $R(G, \omega)$ is equivalent to the existence of a matrix H with non negative coefficients satisfying $\begin{cases} H.G=G(A+B.F) \\ H.\omega \leqq \omega. \end{cases}$

• A necessary and sufficient condition for the inclusion of $R(G, \omega)$ in $R(S, \rho)$ is the existence of two matrices of non-negative coefficients, D and D′ such that:

$$\begin{cases} D.G=F,\ D.\omega \leqq \rho_1 \\ D'.G=-F,\ D'.\omega \leqq \rho_2. \end{cases}$$

A LP algorithm can be constructed by adding a linear criterion to the preceding linear relations. After computation of matrices H, D and D′, gain matrix F can be obtained from $F=D.G$ or $F=-D'.G$.

---

1. Introduction. — Dans l'espace affine attaché à $\mathbf{R}^n$, tout point X vérifiant le système d'inéquations linéaires :

(1) $$Q.X \leqq \varphi$$

avec $Q \in \mathbf{R}^{q*n}$ et $\varphi \in \mathbf{R}^q$, appartient à un ensemble convexe fermé, appelé tronçon, que nous noterons $R(Q, \varphi)$,

(2) $$R(Q, \varphi)=\{X \in \mathbf{R}^n;\ Q.X \leqq \varphi\}.$$

Supposons que cet ensemble n'est pas vide, c'est-à-dire que les inéquations constituant le système (1) sont compatibles.

L'ensemble $R(Q, \varphi)$ n'est pas supposé borné. Dans le cas particulier où le vecteur φ est nul, le système (1) est dit homogène. $R(Q, 0)$ est un cône polyédral convexe. Dans le cas général où une au moins des composantes de φ est non nulle, le système d'inéquations (1) est dit non homogène.

Étant donnés une matrice $P \in \mathbf{R}^{p*n}$ et un vecteur $\psi \in \mathbf{R}^p$, on cherche sous quelles conditions

(3) $$R(Q, \varphi) \subseteq R(P, \psi)$$

c'est-à-dire quelles relations entre Q, φ, P et ψ sont nécessaires et suffisantes pour que toute solution du système (1) soit aussi solution du système (4) :

(4) $$P.X \leqq \psi.$$

Une technique classique de résolution de ce problème consiste à déterminer les sommets et les rayons extrémaux de $R(Q, \varphi)$ et de vérifier qu'ils appartiennent à $R(P, \psi)$; mais cette technique est relativement lourde et ne permet pas une caractérisation explicite de la condition d'inclusion. La méthode duale présentée ci-dessous constitue une généralisation du lemme de Minkowski-Farkas ([5], [4]) au cas matriciel non homogène. L'application de cette méthode à la régulation sous contraintes de systèmes dynamiques linéaires est une bonne illustration de l'intérêt de la formulation duale du problème.

2. Une condition nécessaire et suffisante d'imbrication de deux systèmes d'inéquations linéaires.

Théorème. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que tout point* $X \in \mathbf{R}^n$ *solution du système d'inéquations compatibles* $Q.X \leqq \varphi$ *soit solution du système d'inéquations* $P.X \leqq \psi$ *est qu'il existe une matrice* $U \in \mathbf{R}^{p*q}$ *telle que :*

(5) $$U=((U_{ij})) \quad \textit{avec} \quad U_{ij} \geqq 0 \quad \textit{pour } i=1, \ldots, p,\ j=1, \ldots, q$$

(6) $$U.Q=P$$

(7) $$U.\varphi \leqq \psi.$$

Démonstration. — Considérons chaque ligne P_i de la matrice P et chaque composante associée φ_i du vecteur φ pour $i=1, \ldots, p$.

La condition (3) est équivalente au respect conjoint des p conditions (C_i) ainsi définies :

$$(C_i) \quad \begin{cases} P_i.X \leqq \psi_i \\ \forall X, \quad Q.X \leqq \varphi. \end{cases}$$

Si l'ensemble $R(Q, \varphi)$ n'est pas vide, la condition (C_i) est équivalente à l'existence d'une solution optimale à composantes finies, notée $\hat{X}^i$, au problème (Π_i) ci-dessous :

$$(\Pi_i) \quad \begin{cases} \text{maximiser } P_i.X \\ \text{sous } Q.X \leqq \varphi, \end{cases}$$

cette solution optimale étant telle que : $P_i.\hat{X}^i=\alpha_i$ avec $\alpha_i \leqq \psi_i$.

Par le théorème de dualité en programmation linéaire, l'existence d'une solution primale finie $\hat{X}^i$ pour laquelle la valeur du critère est α_i est équivalente à l'existence d'un vecteur ligne dual optimal : $\hat{U}_i=(\hat{U}_{i1}, \ldots, \hat{U}_{iq})$ tel que $\hat{U}_{ij} \geqq 0$, $\forall j=1, \ldots, q$, $\hat{U}_i.Q=P_i$ et $\hat{U}_i.\varphi=\alpha_i$, avec $\alpha_i \leqq \psi_i$.

Cette propriété permet une extension directe du lemme de Minkowski-Farkas au cas vectoriel non homogène :

$$(C_i) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \exists U_i, \quad U_i^T \in \mathbf{R}^q \\ U_{ij} \geqq 0, \quad \forall j=1, \ldots, q \\ U_i.Q=P_i \\ U_i.\varphi \leqq \psi_i \end{cases}$$

Le respect conjoint des p conditions (C_i) pour $i=1, \ldots, p$ est équivalent à l'existence de p vecteurs-ligne U_i vérifiant chacun les conditions de droite de l'équivalence ci-dessus. La condition (3) est donc équivalente à l'existence d'une matrice U dont les lignes sont les vecteurs-ligne U_i vérifiant les conditions qui viennent d'être énoncées.

Pour que tout point de $R(Q, \varphi)$ appartienne à $R(P, \psi)$, il faut et suffit qu'il existe dans $\mathbf{R}^{p*q}$ une matrice U à composantes non négatives vérifiant les conditions de l'énoncé du théorème.

3. Application à la régulation sous contraintes de systèmes linéaires. — Considérons le système linéaire en temps discret :

(8) $$X_{k+1}=A.X_k+B.U_k$$

$X_k \in \mathbf{R}^n$ est le vecteur d'état du système, $U_k \in \mathbf{R}^m$ le vecteur de commande, $A \in \mathbf{R}^{n*n}$, $B \in \mathbf{R}^{n*m}$.

L'ensemble des états initiaux admissibles du système est restreint au domaine convexe défini par le système d'inéquations linéaires suivant :

(9) $$G.X_0 \leqq \omega$$

avec $G \in \mathbf{R}^{g*n}$ et ω vecteur de $\mathbf{R}^g$ dont les composantes sont supposées strictement positives.

Le vecteur de commande courant, U_k, est lui aussi soumis à des contraintes linéaires que, pour la simplicité de l'exposé, nous supposons admettre la formulation suivante :

(10) $$-\rho_2 \leqq U_k \leqq \rho_1$$

où ρ_1 et ρ_2 sont des vecteurs de $\mathbf{R}^m$ dont les composantes sont supposées strictement positives.

On cherche une commande par retour d'état linéaire :

$$U_k = F \cdot X_k \quad \text{avec} \quad F \in \mathbf{R}^{m*n}. \tag{11}$$

Cette commande doit permettre de faire converger le système vers l'état 0 à partir d'un état quelconque appartenant au domaine $R(G, \omega)$, tout en respectant les contraintes (10) et les relations (8) et (11).

Une méthode de résolution de ce problème est issue des travaux de J. Cheganças, C. Burgat 1985 [3], de A. Benzaouia, C. Burgat 1988 [1] et de G. Bitsoris 1988 [2]. Elle consiste à déterminer une matrice de gain F assurant la stabilité du système (8) et l'invariance positive d'un ensemble Ω tel que :

$$R(G, \omega) \subseteqq \Omega \subseteqq R(\mathscr{F}, \rho) \tag{12}$$

avec $\mathscr{F} = \begin{bmatrix} F \\ -F \end{bmatrix}$, $\rho = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix}$.

L'ensemble Ω est dit positivement invariant pour le système $X_{k+1} = (A + B \cdot F) X_k$ si et seulement si $X_m \in \Omega \Rightarrow X_n = (A + B \cdot F)^{n-m} X_m \in \Omega$ pour tout entier $n \geqq m$.

Les conditions de positivité des vecteurs ω et ρ sont nécessaires pour l'appartenance stricte de l'état de consigne, 0, aux domaines $R(G, \omega)$ et $R(\mathscr{F}, \rho)$.

Le choix $\Omega = R(G, \omega)$, lorsqu'il est possible, permet de réduire le problème à une condition de stabilité du système commandé, à la condition d'inclusion (12) et à la condition d'invariance positive du domaine $R(G, \omega)$, qui peut se formuler ainsi :

$$R(G(A + B.F), \omega) \subseteqq R(G, \omega). \tag{13}$$

Dans le cas où le rang de $G = n$, la condition d'invariance positive de $R(G, \omega)$ assure aussi la stabilité du système commandé. En effet, dans ce cas, on vérifie aisément que la fonction $v(X) = \max_i \{ |(GX)_i| / (\omega)_i \}$ est définie positive et joue le rôle de fonction de Lyapunov pour le système en boucle fermée. Il est généralement possible de satisfaire cette condition de rang en imposant, si nécessaire, des contraintes fictives non pénalisantes sur le vecteur d'état.

Par application du théorème présenté en section 2, la condition (13) équivaut à l'existence d'une matrice $H = ((H_{ij}))$ vérifiant les conditions suivantes :

$$H = ((H_{ij})) \quad \text{avec} \quad H_{ij} \geqq 0 \quad \text{pour } i = 1, \ldots, g, \ j = 1, \ldots, g \tag{14}$$

$$H \cdot G = G(A + B \cdot F) \tag{15}$$

$$H \cdot \omega \leqq \omega \tag{16}$$

et la condition d'inclusion (12) équivaut à l'existence de deux matrices $D = ((D_{ij}))$ et $D' = ((D'_{ij}))$ vérifiant les conditions suivantes :

$$D = ((D_{ij})) \quad \text{avec} \quad D_{ij} \geqq 0 \quad \text{pour } i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, g \tag{17}$$

$$D \cdot G = F \tag{18}$$

$$D \cdot \omega \leqq \rho_1 \tag{19}$$

$$D' = ((D'_{ij})) \quad \text{avec} \quad D'_{ij} \geqq 0 \quad \text{pour } i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, g \tag{20}$$

$$D' \cdot G = -F \tag{21}$$

$$D' \cdot \omega \leqq \rho_2. \tag{22}$$

Dans le cas où $g \geqq n$ et rang $(G) = n$, une méthode simple de résolution du problème de régulation sous contraintes consiste donc, par exemple, selon un schéma analogue à celui proposé par M. Vassilaki, J.-C. Hennet et G. Bitsoris 1988 [6], à déterminer des matrices $H \in \mathbf{R}^{g*g}$, $D \in \mathbf{R}^{m*g}$ et $D' \in \mathbf{R}^{m*g}$ en résolvant par la méthode du simplexe le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{rll} \text{Minimiser} & \varepsilon & \\ \text{sous} & \varepsilon & \geqq 0 \\ & H.\omega-\varepsilon\omega & \leqq 0 \\ & H.G-G.B.D.G & =G.A \\ & D.G+D'G & =0 \\ & D.\omega & \leqq \rho_1 \\ & D'.\omega & \leqq \rho_2 \end{array}$$

et les conditions de positivité (14), (17), (20).

On en déduit la matrice de gain F par la relation (18).

4. Conclusion. — Le théorème faisant l'objet de cette Note repose sur la propriété de dualité en programmation linéaire. Il permet la validation d'une propriété générale sur les variables primales par détermination d'une solution au problème dual; d'où une simplification notable de la procédure de validation.

L'exemple présenté illustre bien l'intérêt pratique de ce résultat. Il concerne la résolution d'un problème de commande linéaire sous contraintes. On montre que ce problème se ramène à un système de contraintes linéaires, qu'il est facile de résoudre par programmation linéaire. Certaines de ces contraintes (celles liées à l'invariance du domaine) avaient déjà été établies par d'autres méthodes; mais le traitement du problème global n'a jamais, à ce jour, été envisagé de façon aussi simple.

Note remise le 12 janvier 1989, acceptée le 7 février 1989.

Références bibliographiques

[1] A. Benzaouia et Ch. Burgat, The regulator problem for a class of linear systems with constrained control, *Systems and Control Letters*, 10, n° 5, 1988, p. 357-363.

[2] G. Bitsoris, On the positive invariance of polyhedral sets for discrete-time systems, *Systems and Control Letters*, 11, 1988, p. 243-248.

[3] J. Cheganças et C. Burgat, Régulateurs *P*-invariants avec contraintes sur les commandes, *Congrès A.F.C.E.T.*, Toulouse, France, 1985, p. 193-203.

[4] D. G. Luenberger, *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley, 1972.

[5] M. Simonnard, *Programmation Linéaire*, Dunod, Paris, 1972.

[6] M. Vassilaki, J.-C. Hennet et G. Bitsoris, Feedback control of linear discrete-time systems under state and control constraints, *Int. Journal of Control*, 47, 1988, p. 1727-1735.

Laboratoire d'Automatique et d'Analyse des Systèmes, 7, *avenue du Colonel-Roche*, 31077 *Toulouse*.

Géométrie différentielle/*Differential Geometry*

Géométrie globale des systèmes hamiltoniens complètement intégrables : fibrations lagrangiennes singulières et coordonnées action-angle à singularités

Mohamed BOUCETTA et Pierre MOLINO

Résumé — Un système hamiltonien (M, ω, H) sera complètement intégrable s'il admet une algèbre d'intégrales premières en involution qui permet de définir localement des coordonnées action-angle à singularités au sens de H. Eliasson [8]. La variété (M, ω) est alors munie d'une fibration lagrangienne singulière sur une variété affine plate à bords et coins localement convexe. On met en évidence les éléments caractéristiques qui déterminent la géométrie globale d'une telle fibration. On généralise ainsi à la fois les résultats de J. J. Duistermaat [6], qui correspondent au cas des fibrations lagrangiennes régulières, et un résultat de T. Delzant [4] d'après lequel, pour une action hamiltonienne du tore $\mathbb{T}^n$ sur une $2n$-variété symplectique compacte, l'image du moment suffit à déterminer la variété symplectique.

Global geometry of completely integrable hamiltonian systems: Lagrangian singular foliations and action-angle variables with singularities

Abstract — *An hamiltonian system* (M, ω, H) *will be told completely integrable if it admits an algebra of first integrals in involution, which allows to define locally action-angle variables with singularities, in the sense of H. Eliasson. The manifold* (M, ω) *is endowed with a singular Lagrangian fibration on an affine locally convex manifold, with affine boundary and coins. Characteristic elements of such a fibration are defined, which determine the global geometry. One obtains by this way a generalization of previous results of J. J. Duistermaat (which correspond to the case of a regular Lagrangian fibration) and T. Delzant (who proved that the image of the momentum mapping of an hamiltonian action of the torus $\mathbb{T}^n$ on a compact $2n$-dimensional symplectic manifold determines the manifold, up to symplectomorphism).*

Toutes les structures considérées sont de classe C^∞.

I. FEUILLETAGE SINGULIER ASSOCIÉ À UN SYSTÈME HAMILTONIEN COMPLÈTEMENT INTÉGRABLE. — I.1. *Soit* (M, ω, H) *un système hamiltonien, avec* $\dim M = 2n$. — On dira que ce système est *complètement intégrable* s'il existe une algèbre $\mathscr{A}$ d'intégrables premières en involution ayant les propriétés suivantes : pour tout $x_0 \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x_0 et un difféomorphisme :

$$\Phi_U:\quad U \to \mathbb{T}^l \times D^l(0, r) \times D_1^2(0, r_1) \times \ldots \times D_{n-l}^2(0, r_{n-l})$$

où $\mathbb{T}^l$ est le tore de dimension l, muni des coordonnées angulaires $\theta^1, \ldots, \theta^l$, $D^l(0, r)$ est la boule de rayon r dans $\mathbb{R}^l$, munie des coordonnées $q^1, \ldots, q^l$, $D_j^2(0, r_j)$ est la boule de rayon r_j dans $\mathbb{R}^2$, munie des coordonnées polaires ρ^j, φ^j avec

$$(\Phi_U^{-1})^* \omega = \sum_{i=1}^{l} d\theta^i \wedge dq^i + \sum_{j=1}^{n-l} d\varphi^j \wedge d\left(\frac{(\rho^j)^2}{2}\right)$$

de telle sorte que $\mathscr{A}$ est engendrée fonctionnellement dans U par les fonctions q^i, $(\rho^j)^2/2$.

On dira que U est un *ouvert distingué* et Φ_U une *carte locale distinguée* du système, et que $(\theta^i, q^i, \varphi^j, (\rho^j)^2/2)$ forment un système de *coordonnées action-angle à singularités* (CAAS); *voir* [8] et [5].

Soit $\mathscr{F}$ le feuilletage à singularités, au sens de P. Stefan [10] et H. J. Sussmann [11], formé des orbites de l'algèbre des champs hamiltoniens $\mathscr{A}^*$ associée à $\mathscr{A}$. On dira que $\mathscr{F}$ est *le feuilletage singulier associé à* (M, ω, H).

Note présentée par André LICHNEROWICZ.

0249-6291/89/03080421 $ 2.00 © Académie des Sciences

I.2. *Inversement, donnons-nous sur la* $2n$*-variété symplectique* (M, ω) *un feuilletage singulier* $\mathscr{F}$. — Notons $\mathscr{A}$ l'algèbre de toutes les intégrales premières de $\mathscr{F}$, $\mathscr{A}^*$ l'espace des champs hamiltoniens associés. On suppose :

(i) Que les feuilles de $\mathscr{F}$ sont les orbites de $\mathscr{A}^*$ (ce qui implique que les fonctions de $\mathscr{A}$ sont en involution).

(ii) Que toutes les feuilles sont compactes.

(iii) Que le couple $(\mathscr{A}, \mathscr{A}^*)$ est transversalement elliptique en tout point x_0 de M au sens de [5] (ce qui signifie que l'action naturelle de $\mathscr{A}^*$ sur le fibré des repères transverses à la feuille a pour orbites des tores de dimension n).

D'après le théorème d'Éliasson, *voir* [8] et [5], ces hypothèses entraînent que $\mathscr{F}$ est localement défini par une action hamiltonienne de $\mathbb{T}^n$.

Étudier la géométrie globale d'un système hamiltonien complètement intégrable revient donc à étudier un triple $(M, \omega, \mathscr{F})$, *où* (M, ω) *est une variété symplectique de dimension* $2n$, $\mathscr{F}$ *un feuilletage singulier astreint aux conditions* (i) (ii) (iii). C'est ce que nous ferons dans la suite, en laissant de côté le hamiltonien H. *Voir* [2], où le problème est posé en ces termes.

II. ÉLÉMENTS CARACTÉRISTIQUES DE $(M, \omega, \mathscr{F})$. — II.1. *Fibration lagrangienne singulière sur l'espace des feuilles.* — Soient $W = M/\mathscr{F}$ l'espace des feuilles, et $\pi : M \to W$ la projection canonique. Si (U, Φ_U) est une carte locale distinguée de $(M, \omega, \mathscr{F})$, et $\bar{U} = \pi(U)$, on en déduit une application $\Phi_{\bar{U}} : \bar{U} \to \mathbb{R}^n$ dont les composantes sont les coordonnées « action » q^i, $(\rho^j)^2/2$ du système de CAAS. L'image de $\Phi_{\bar{U}}$ est un ouvert dans le cône convexe de $\mathbb{R}^n$ défini par $x^{l+1} \geqq 0, \ldots, x^n \geqq 0$.

LEMME II.1. — *La famille des couples* $(\bar{U}, \Phi_{\bar{U}})$ *forme sur* W *un atlas* Φ *de variété affine plate, à bords et coins affines, localement convexe; les changements de cartes de* Φ *sont des transformations affines dont la partie linéaire est à coefficients entiers.*

Au-dessus d'un point y de l'intérieur de W, la fibre $\pi^{-1}(y)$ est un tore Lagrangien, ce qui justifie pour la projection $\pi : M \to W$ la terminologie de « fibration lagrangienne singulière ».

Exemples. — 1. *Le cas où* $\mathscr{F}$ *est un feuillage régulier* est celui étudié par J. J. Duistermaat [6].

2. *Si* M *est compacte*, et $\mathscr{F}$ défini par une action hamiltonienne du tore $\mathbb{T}^n$, W s'identifie à l'image $J(M)$ du moment. On sait, par le théorème d'Atiyah-Guillemin-Sternberg ([1], [9]), que $J(M)$ est un polytope convexe de $\mathbb{R}^n$; la structure affine de W est alors induite par celle de $\mathbb{R}^n$. Toutefois l'injection $W = J(M) \to \mathbb{R}^n$ n'est pas dans ce cas une carte de l'atlas affine Φ : les cartes de Φ sont en effet *adaptées au bord.*

II.2. *Réseau de* W *et classe de Chern de la fibration lagrangienne singulière.* — (*a*) *Le fibré cotangent* $T^* W$, défini localement comme le pull-back de $T^* \mathbb{R}^n$ par les cartes de Φ est lui-même une variété affine plate à bords et coins. Pour $y \in W$, les combinaisons entières des différentielles des coordonnées action forment un réseau $\mathscr{R}_y$ dans $T_y^* W$. On obtient ainsi un réseau $\mathscr{R}$ dans $T^* W$ qui est un $\mathbb{Z}^n$-revêtement de W. On observe que, si $y \in \partial W$, $\mathscr{R}_y$ contient une base de chacun des sous-espaces engendrés par les 1-formes qui s'annulent sur une face de ∂W. On exprimera cette propriété en disant que *le réseau* $\mathscr{R}$ *est adapté au bord de W.*

Remarque. — Dans le cas régulier (Duistermaat), $\mathscr{R}$ est le réseau d'isotropie de l'action naturelle de $T^* W$ sur M; dans le cas général, on a une interprétation analogue en considérant *l'isotropie transversale* de cette action, au sens défini dans [5].

(*b*) *Comme dans le cas régulier*, on a une action verticale naturelle de T^*W sur M. Pour toute fonction $\bar{f} \in C^\infty(W)$, le hamiltonien de $\pi^* \bar{f}$ agit sur les fibres de π, et son action sur $\pi^{-1}(y)$ ne dépend que de $d\bar{f}_y$. Cette action se factorise en une action du fibré en tores $\mathscr{P} = T^* W/\mathscr{R}$. Observons également que le fibré $\mathscr{P}$ (qui est lui-même une variété à bords et coins) est muni d'une forme symplectique $\omega_{\mathscr{P}}$ obtenue par passage au quotient à partir de la forme de Liouville.

Si U est un ouvert distingué de M, avec $\pi(U) = \bar{U}$, muni d'un système $(\theta, q, \varphi, \rho^2/2)$ de coordonnées AAS, la correspondance $(q, \rho^2/2) \to (0, q, 0, \rho^2/2)$ définit une section lagrangienne de π, dont l'image est une sous-variété à bords et coins de U. Tout autre système de CAAS dans U définit une nouvelle section lagrangienne, se déduisant par l'action d'une section lagrangienne $\mu : \bar{U} \to \mathscr{P}$ du fibré en tores.

Si maintenant $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ est un recouvrement ouvert de M par des ouverts distingués munis de CAAS, et si $(\bar{U}_\alpha, \Phi_{\bar{U}_\alpha})_{\alpha \in A}$ est l'atlas correspondant de W, les changements de coordonnées AAS dans les $U_\alpha \cap U_\beta$ déterminent un 1-cocycle $(\mu_{\alpha\beta})$ à valeurs dans les sections lagrangiennes de $\mathscr{P}$, donc une classe $[\mu] \in H^1(W, \Lambda(\mathscr{P}))$. La suite exacte courte :

$$0 \to \mathscr{R} \to \Lambda(T^* W) \to \Lambda(\mathscr{P}) \to 0 \tag{1}$$

détermine un isomorphisme $\delta : H^1(W, \Lambda(\mathscr{P})) \xrightarrow{\sim} H^2(W, \mathscr{R})$. On appellera *classe de Chern de la fibration lagrangienne* π la classe (*voir* [3], [6], [7]) :

$$\gamma = \delta[\mu] \in H^2(W, \mathscr{R}). \tag{2}$$

Remarquons [3] que l'on a un morphisme naturel :

$$\hat{d} : \quad H^2(W, \mathscr{R}) \to H^3(W, \mathbb{R}) \tag{3}$$

que l'on peut définir de la façon suivante : supposons le recouvrement ouvert $(\bar{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ de W tel que les intersections d'ouverts soient contractiles. Soit $(\gamma'_{\alpha\beta\gamma})$ un 2-cocycle représentant une classe $\gamma' \in H^2(W, \mathscr{R})$. On peut regarder $\gamma'_{\alpha\beta\gamma}$ comme une 1-forme fermée sur $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$, et trouver une fonction $f_{\alpha\beta\gamma}$ sur cette intersection, telle que $df_{\alpha\beta\gamma} = \gamma'_{\alpha\beta\gamma}$. La classe de cohomologie réelle $\hat{d}\gamma'$ sera alors représentée par le 3-cocycle $\xi_{\alpha\beta\gamma\delta} = f_{\alpha\beta\gamma} - f_{\beta\gamma\delta} + f_{\gamma\delta\alpha} - f_{\delta\alpha\beta}$.

Ceci étant, le fait que les sections $\mu_{\alpha\beta}$ de $\mathscr{P}$ introduites plus haut soient lagrangiennes se traduit par la condition :

$$\hat{d}\gamma = 0. \tag{4}$$

Nous dirons que $(W, \mathscr{R}, \gamma)$ est *le triple des éléments caractéristiques* de $(M, \omega, \mathscr{F})$.

III. Théorème de classification; existence de variables action-angle globales avec singularités. — III.1. *Réalisation d'un triple d'éléments caractéristiques, et classification.* — Par « variété affine entière à bords et coins localement convexe » nous entendons une variété affine plate à bords et coins affines, localement convexe, munie d'un atlas affine adapté au bord, dans lequel les changements de carte sont des transformations affines dont la partie linéaire est à coefficients entiers. Étant donnée une telle variété, son réseau $\mathscr{R}$ est défini comme en II.2.*a*).

Théorème III.1. — *Soit* $(W, \mathscr{R}, \gamma)$ *un triple, où* W *est une variété affine entière à bords et coins localement convexe,* $\mathscr{R}$ *son réseau,* $\gamma \in H^2(W, \mathscr{R})$ *avec* $\hat{d}\gamma = 0$. *Alors :*

(i) *Il existe une variété symplectique* (M, ω) *et un feuilletage singulier* $\mathscr{F}$ *sur* M *vérifiant les hypothèses* (i) (ii) (iii) *de* I.2, *tels que* $(M, \omega, \mathscr{F})$ *admette* $(W, \mathscr{R}, \gamma)$ *comme triple d'éléments caractéristiques; on dira que* $(M, \omega, \mathscr{F})$ *est une* réalisation *de* $(W, \mathscr{R}, \gamma)$.

(ii) *Si* $(M_i, \omega_i, \mathscr{F}_i)$ *est, pour* $i=1, 2$, *une réalisation de* $(W, \mathscr{R}, \gamma)$, *il existe un difféomorphisme* $\psi: M_1 \to M_2$ *tel que, si* $\pi_i: M_i \to W$ *est la projection canonique, on ait :*

$$\pi_1 = \pi_2 \circ \psi \qquad et \qquad \psi^* \omega_2 - \omega_1 = \pi_1^* \sigma,$$

où σ *est une 2-forme fermée sur* W.

On observera que (ii) permet, comme dans [3], de classifier les réalisations de $(W, \mathscr{R}, \gamma)$ par $H^2(W, \mathbb{R})/\hat{d}H^1(W, \mathscr{R})$, où $\hat{d}: H^1(W, \mathscr{R}) \to H^2(W, \mathbb{R})$ est défini comme l'homomorphisme (3).

Exemples. — 1. Dans le cas régulier, on retrouve les résultats de Duistermaat.

2. Dans le cas des actions hamiltoniennes globales de $\mathbb{T}^n$ sur une variété symplectique compacte (M, ω), W est le convexe $J(M)$, image du moment. Le réseau $\mathscr{R}$ est trivial, et $\gamma=0$, car W est contractile. Comme $H^2(W, \mathbb{R})=0$, la donnée de la variété affine entière $W=J(M)$ détermine la réalisation (M, ω, J), à symplectomorphisme près; c'est le théorème de T. Delzant [4].

III.2. *Existence de variables action-angle globales avec singularités.*

THÉORÈME III.2. — *Soient* (M, ω) *une variété symplectique, et* $\mathscr{F}$ *un feuilletage singulier sur* M, *vérifiant les hypothèses* (i), (ii), (iii) *de* I.2. *Si* $(W, \mathscr{R}, \gamma)$ *est le triple des éléments caractéristiques de* $(M, \omega, \mathscr{F})$, *la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe des coordonnées action-angle globales avec singularités adaptées à* $(M, \omega, \mathscr{F})$ *est que les hypothèses suivantes soient satisfaites :*

(i) $\mathscr{R}$ *est trivial.*

(ii) $\gamma=0$.

(iii) ω *est exacte.*

Note remise le 6 février 1989, acceptée le 21 février 1989.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] M. ATIYAH, Convexity and commuting hamiltonians, *Bull. Lond. Math. Soc.*, 14, 1982, p. 1-15.

[2] M. CONDEVAUX, P. DAZORD et P. MOLINO, Géométrie du moment, *Travaux du Sém. Sud-Rhod. I*, multigraphié, Lyon, 1988.

[3] P. DAZORD et T. DELZANT, Le problème général des variables action-angle, *Jour. of Diff. Geom.*, 26-2, 1987, p. 223-252.

[4] T. DELZANT, Hamiltoniens périodiques et image convexe de l'application moment, *Bull. S.M.F.*, 116, 1988.

[5] J.-P. DUFOUR et P. MOLINO, Compactification des actions de $\mathbb{R}^n$ et variables action-angle avec singularités, *Travaux du Sém. Sud-Rhod. I*, multigraphié, Lyon, 1988.

[6] J.J. DUISTERMAAT, On global action-angle variables, *Comm. on pure and appl. Math.*, 33, 1980, p. 687-706.

[7] J. J. DUISTERMAAT et G. J. HECKMANN, On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space, *Invent. Math.*, 68, 1983, p. 259-268.

[8] H. ÉLIASSON, Hamiltonian systems with Poisson-commuting integrals, *Thèse*, Stockholm, 1984.

[9] V. GUILLEMIN et S. STERNBERG, Convexity properties of the moment mapping I, *Invent. Math.*, 67, 1982, p. 491-513.

[10] P. STEFAN, Accessibility and foliations with singularities, *Bull. A.M.S.*, 80, 1974, p. 1142-1145.

[11] H. J. SUSSMANN, Orbits of families of vector fields and integrability of distributions, *Trans A.M.S.*, 180, 1973, p. 171-188.

Département de Mathématiques,
Université des Sciences et Techniques du Languedoc,
place Eugène-Bataillon, 34060 *Montpellier.*

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 308, Série I, p. 425-428, 1989

Probabilités/*Probability Theory*

Grandes déviations pour des systèmes de processus de Markov avec interaction à longue portée

Christian LÉONARD

Résumé — Des propriétés élémentaires des espaces d'Orlicz nous permettent de donner, à la proposition 1, une représentation des lois des processus dont l'information de Kullback par rapport à une loi markovienne est finie et à la proposition 3, une version renforcée du théorème de Sanov. Puis, nous énonçons au théorème 4 un résultat de grandes déviations pour un système de processus markoviens avec interaction à longue portée, dont la preuve nécessite l'emploi des propositions précédentes.

Large deviations for a long range interacting system of Markov processes

Abstract — *Using basic properties of Orlicz spaces enables us to state in proposition* 1 *a representation of any process law whose Kullback information with respect to a given Markov law is finite and also in proposition* 3 *a strengthened version of Sanov's theorem. Then, we give in theorem* 4, *a large deviation result for a system of Markov processes with a long range interaction. In order to prove this last result, we shall use proposition* 1 *and proposition* 3.

QUELQUES NOTATIONS. — Si $(Y, \mathscr{F}, \nu)$ est un espace mesurable où ν est une mesure positive bornée sur Y muni de la tribu $\mathscr{F}$ et si $\theta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction continue, croissante, convexe telle que $\theta(0)=0$ et $\lim_{t\to\infty} (\theta(t)/t) = +\infty$, $L^\theta(Y, \nu)$ désigne l'espace d'Orlicz des fonctions $\mathscr{F}$-mesurables dont la norme

$$\| f \|_\theta = \inf\left\{ a>0;\ \int \theta\left(\frac{|f(y)|}{a}\right)\nu(dy) \leqq 1 \right\}$$

est finie (*voir* [2]).

Par la suite on considèrera les espaces L^τ et L^{τ^*} associés à $\tau(t)=e^t-t-1$, $\forall t\in\mathbb{R}$ et à sa transformée de Legendre τ^* définie par $\tau^*(t)=(t+1)\log(t+1)-t$ si $t \geqslant -1$; $\tau^*(-1)=1$; $\tau^*(t)=+\infty$ si $t<-1$.

$$K(\mu, \nu) = \begin{cases} \displaystyle\int \tau^*\left(\frac{d\mu}{d\nu}-1\right)d\nu & \text{si} \quad \mu \ll \nu \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

est l'information de Kullback de la mesure positive μ par rapport à la mesure positive ν.

REPRÉSENTATION DES LOIS DONT L'INFORMATION DE KULLBACK PAR RAPPORT À UNE LOI MARKOVIENNE EST FINIE. — Soit α la loi d'un processus de Markov sur $\mathscr{Z}\subset\mathbb{R}^d$, de générateur $A\,g(z)=\int_E \{g(z+\Delta)-g(z)\}\,\mathscr{L}(z;\, d\Delta)$, $g\in C_c(\mathscr{Z})$ où $\{\mathscr{L}(z;\ .);\ z\in\mathscr{Z}\}$ est un noyau de Lévy borné sur $E=(\mathscr{Z}-\mathscr{Z})\setminus\{0\}$. A la proposition 1 nous identifions les probabilités v sur $D=D([0, T], \mathscr{Z})$ (l'ensemble des trajectoires càdlàg de [0, T] dans $\mathscr{Z}$) dont l'information de Kullback $K(v, \alpha)$ par rapport à α est finie.

PROPOSITION 1. — *Soit v une probabilité sur* D *telle que* $K(v, \alpha)$ *soit fini. Alors, on peut trouver une unique fonction (à une équivalence près)* $l_v : \mathscr{Z}\times[0, T]\times E \to \mathbb{R}_+$, *telle que* $l_v - 1$ *appartienne à* $L^{\tau^*}(\mathscr{Z}\times[0, T]\times E,\ v_t(dz)\,dt\,\mathscr{L}(z;\, d\Delta))$ *et l'ensemble des marginales*

Note présentée par Jean-Pierre KAHANE.

0249-6291/89/03080425 $ 2.00

$\{ v_t : 0 \leqq t \leqq \mathrm{T} \}$ *vérifie la propriété suivante :*

pour toute $f \in \mathrm{C}_c(\mathscr{X} \times [0, \mathrm{T}])$ *et tous* $0 \leqq r \leqq u \leqq \mathrm{T}$,

$$\int_{\mathscr{X}} f(z, u)\, v_u(dz) - \int_{\mathscr{X}} f(z, r)\, v_r(dz) = \int_r^u \int_{\mathscr{X}} \mathrm{G}_{v,\, t} f(z, t)\, v_t(dz)\, dt$$

où le générateur $\mathrm{G}_{v,\, t}(0 \leqq t \leqq \mathrm{T})$ *est défini par :*

$$\mathrm{G}_{v,\, t} f(z, t) = \int_{\mathrm{E}} \{ f(z+\Delta, t) - f(z, t) \}\, l_v(z, t, \Delta)\, \mathscr{L}(z; d\Delta).$$

Soit v^* la loi du processus de Markov non homogène de générateur $\{ \mathrm{G}_{v,t}; 0 \leqq t \leqq \mathrm{T} \}$ et de loi initiale $v_0^* = v_0$. Il est naturel d'appeler v^* la projection markovienne de v. La propriété de la proposition précédente s'exprime aussi : $\{ v_t;\ 0 \leqq t \leqq \mathrm{T} \} = \{ v_t^*;\ 0 \leqq t \leqq \mathrm{T} \}$.

Proposition 2. — *Soit* v *une probabilité sur* D *telle que* $\mathrm{K}(v, \alpha)$ *soit fini. Alors, la définition ci-dessus de* v^* *a un sens car* v^* *est la loi d'un unique processus de Markov sur* $\mathscr{X}$ *qui n'explose pas sur* $[0, \mathrm{T}]$. *De plus,*

$$\mathrm{K}(v, \alpha) = \mathrm{K}(v, v^*) + \mathrm{K}(v^*, \alpha)$$

et

$$\mathrm{K}(v^*, \alpha) = \mathrm{K}(v_0, \alpha_0) + \int_0^{\mathrm{T}} \int_{\mathscr{X} \times \mathrm{E}} \tau^*(l_v(z, t, \Delta) - 1)\, \mathscr{L}(z; d\Delta)\, v_t(dz)\, dt.$$

Remarque. — $\mathscr{L}_v(z, t; d\Delta) = l_v(z, t, \Delta)\, \mathscr{L}(z; d\Delta)$ est le noyau de Lévy de v^* et

$$\mathrm{K}(v^*, \alpha) = \mathrm{K}(v_0, \alpha_0) + \int_0^{\mathrm{T}} \int_{\mathscr{X}} \mathrm{K}(\mathscr{L}_v(z, t, .), \mathscr{L}(z, .))\, v_t(dz)\, dt.$$

Corollaire. — *Si* A *est un borélien de* $\Pi(\mathrm{D})$ *qui vérifie* $\forall v \in \mathrm{A}$, $\forall u \in \Pi(\mathrm{D})$, $(u_t = v_t,\ \forall\, 0 \leqq t \leqq \mathrm{T}) \Rightarrow u \in \mathrm{A}$, *alors* $\inf_{v \in \mathrm{A}} \mathrm{K}(v, \alpha) = \inf_{v \in \mathrm{A} \cap \mathbb{M}} \mathrm{K}(v, \alpha)$ *où* $\mathbb{M}$ *désigne l'ensemble des lois markoviennes sur* D.

Ce résultat a été obtenu par H. Föllmer (*voir* [1]) dans le cas où α est la loi d'une diffusion sans sauts.

Idée de la preuve de la proposition 1 :

$$\mathrm{K}(v, \alpha) = \sup \left\{ \int_{\mathrm{D}} \mathrm{F}\, d\alpha - \log \int_{\mathrm{D}} e^{\mathrm{F}}\, d\alpha;\ \mathrm{F} \in \mathrm{C}_b(\mathrm{D}) \right\}$$

et $(\exp(\mathrm{F}_{f,t}(x)))_{r \leqq t \leqq \mathrm{T}}$ est une α-surmartingale lorsque

$$\mathrm{F}_{f,t}(x) = f(x_t) - f(x_r) - \int_r^t \mathrm{A} f(x_s)\, ds - \int_r^t \int_{\mathrm{E}} \tau(\Delta f(x_s, \Delta))\, \mathscr{L}(x_s; d\Delta)\, ds$$

où $\Delta f(z, \Delta) = f(z+\Delta) - f(z)$. Donc, $0 < \int_{\mathrm{D}} \exp(\mathrm{F}_{f,t})\, d\alpha \leqq 1$ et $\mathrm{K}(v, \alpha) \geqq \int_{\mathrm{D}} \mathrm{F}_{f,t}\, dv$, pour toute f de $\mathrm{C}_c(\mathscr{X})$. Soit :

$$\frac{1}{\| \Delta f \|_\tau} \left(\int_{\mathscr{X}} f\, dv_t - \int_{\mathscr{X}} f\, dv_r - \int_r^t \int_{\mathscr{X}} \mathrm{A} f\, dv_s\, ds \right)$$

$$\leqq \mathrm{K}(v, \alpha) + \int_{[r,t] \times \mathscr{X} \times \mathrm{E}} \tau\left(\frac{\Delta f(z, \Delta)}{\| \Delta f \|_\tau} \right) \mathscr{L}(z; d\Delta)\, v_s(dz)\, ds \leqq \mathrm{K}(v, \alpha) + 1$$

où $\|\,.\,\|_\tau$ désigne la norme de $L^\tau([r, t]\times\mathscr{X}\times E, \mathscr{L}(z; d\Delta)\,v_s(dz)\,ds)$. Par conséquent $\Delta f \mapsto \int_{\mathscr{X}} f\,dv_t - \int_{\mathscr{X}} f\,dv_r - \int_r^t \int_{\mathscr{X}} A\, f\,dv_s\,ds$ peut se prolonger en une forme linéaire continue sur L^τ et d'après le théorème de représentation du dual d'un espace d'Orlicz (*voir* [2]) il existe η dans L^{τ^*} telle que

$$\int_{\mathscr{X}} f\,dv_t - \int_{\mathscr{X}} f\,dv_r - \int_r^t \int_{\mathscr{X}} A\, f\,dv_s\,ds = \int_{[r,\,t]\times\mathscr{X}\times E} \eta(z, s, \Delta)\ \mathscr{L}(z; d\Delta)\,v_s(dz)\,ds.$$

On prendra $\eta = l_v - 1$ pour obtenir la proposition. □

La proposition 2 est une conséquence de la proposition 1.

Le théorème de Sanov renforcé. — Soit ψ une fonction continue positive sur un ensemble X. On note $\Pi_\psi(X)$ l'ensemble des probabilités v sur X telles que $\int_X \psi\,dv < +\infty$. On munit $\Pi_\psi(X)$ de la topologie $*$-faible $\sigma(\Pi_\psi(X), C_\psi(X))$ où $C_\psi(X)$ est l'ensemble des fonctions f continues telles qu'il existe une constante $c \geqq 0$ pour laquelle $|f(x)| \leqq c(1+\psi(x))$, $\forall x \in X$.

Proposition 3. — *Soit* $(Y_i)_{i\leqq 1}$ *une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi* α *sur un espace Polonais* X. *Soit* ψ *une fonction positive continue sur* X *telle que* $\int_X \exp(\lambda\psi)\,d\alpha < +\infty$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. *Alors, l'ensemble des mesures empiriques* $(1/N)\sum_{i=1}^{N} \delta_{Y_i}$ *obéit à un principe de grandes déviations dans l'espace topologique* $\Pi_\psi(X)$ *pour la fonctionnelle de grandes déviations* $v \mapsto K(v, \alpha)$. *De plus, si* $K(v, \alpha) < +\infty$, v *est dans* $\Pi_\psi(X)$.

Remarque. — Le théorème de Sanov énonce ce résultat dans l'espace topologique $\Pi(X)$ des probabilités sur X muni de la topologie $\sigma(\Pi(X), C_b(X))$. Lorsque ψ n'est pas bornée, on a $\Pi_\psi(X) \subsetneqq \Pi(X)$.

Un système de processus de Markov avec interaction a longue portée. — On se donne un ensemble de sites $\mathscr{S} \subset \mathbb{R}^k$ et $\{(s_i^N)_{1\leqq i\leqq N};\ N \geqq 1\}$ un réseau triangulaire dans $\mathscr{S}$ tel que $(1/N)\sum_{i=1}^{N} \delta_{s_i^N}$ tende étroitement vers une probabilité m sur $\mathscr{S}$. $(X_i^N)_{1\leqq i\leqq N}$ est un processus de Markov sur $\mathscr{X}^n$ $(\mathscr{X} \subset \mathbb{R}^d)$ de générateur infinitésimal

$$(1)\quad \sum_{i=1}^{N} \int_E \{ f(\ldots, z_{i-1}, z_i+\Delta, z_{i+1}, \ldots) - f(\ldots, z_{i-1}, z_i, z_{i+1}, \ldots)\} \times \mathscr{L}\left(z_i, s_i^N, \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \delta_{z_j,\, s_j^N}; d\Delta\right)$$

où $\{\mathscr{L}(z, s, u; .);\ z\in\mathscr{X},\ s\in\mathscr{S},\ u\in\Pi(Z)\}$ est un noyau de Lévy sur $E = (\mathscr{X}-\mathscr{X})\setminus\{0\}$. Nous supposons qu'il existe une mesure bornée Λ sur E telle que pour tout (z, s, u) de $\mathscr{X}\times\mathscr{S}\times\Pi(\mathscr{X}\times\mathscr{S})$, $\mathscr{L}(z, s, u)$ soit absolument continue par rapport à Λ, $(z, s, u, \Delta) \mapsto d\mathscr{L}(z, s, u)/d\Lambda(\Delta)$ soit continue bornée sur $\mathscr{X}\times\mathscr{S}\times\Pi(\mathscr{X}\times\mathscr{S})$ et que $\{d\mathscr{L}(., ., .)/d\Lambda(\Delta);\ \Delta\in E\}$ soit une famille uniformément continue de fonctions sur $\mathscr{X}\times\mathscr{S}\times\Pi(\mathscr{X}\times\mathscr{S})$. En outre, nous supposons que le système des mesures empiriques initiales de $(X_i^N)_{1\leqq i\leqq N}$ obéit à un principe de grandes déviations dans $\Pi(\mathscr{X}\times\mathscr{S})$.

THÉORÈME 4. — *Sous les hypothèses précédentes, la loi de* $(1/\mathrm{N})\sum_{i=1} \delta_{\mathrm{X}_i^{\mathrm{N}},\, s_i^{\mathrm{N}}}$ *obéit à un principe de grandes déviations dans* $\Pi(\mathrm{D}\times\mathscr{S})$. *La fonctionnelle associée* $v\mapsto \mathrm{I}(v)$ *est telle que si* $\mathrm{I}(v)<+\infty$, *alors la marginale de* v *sur* $\mathscr{S}$ *est nécessairement* m *et il existe un unique noyau* $\mathscr{L}_v(z, s, t; d\Delta)$ *sur* E *tel que pour tous* $0\leqq r\leqq u<\mathrm{T}$ *et toute fonction* f *de* $\mathrm{C}_c(\mathscr{X}\times\mathscr{S})$,

$$\int_r^u\int_{\mathscr{X}\times\mathscr{S}} f\, dv_t\, dt=\int_r^u\int_{\mathscr{X}\times\mathscr{S}\times\mathrm{E}}\{f(z+\Delta, s)-f(z, s)\}\,\mathscr{L}_v(z, s, t; d\Delta)\,dt.$$

De plus, en notant v^* *la projection markovienne de* v *associée au noyau de Lévy* $\mathscr{L}_v$, *si* $\mathrm{I}(v)<+\infty$, *on a*

$$\mathrm{I}(v)=\mathrm{K}(v, v^*)+\mathrm{I}(v^*)$$

et

$$\mathrm{I}(v^*)=i(v_0)+\int_{[0,\mathrm{T}]\times\mathscr{X}\times\mathscr{S}}\mathrm{K}(\mathscr{L}_v(z, s, t), \mathscr{L}(z, s, v_t))\,v_t(dz, ds)\,dt$$

où i *est la fonctionnelle associée au système des mesures empiriques initiales.*

Idée de la preuve du théorème 4. — Elle est basée sur le principe de Laplace-Varadhan (*voir* [3]). En effet, en notant μ^{N} la loi de $(1/\mathrm{N})\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \delta_{\mathrm{X}_i^{\mathrm{N}},\, s_i^{\mathrm{N}}}$ et μ_0^{N} celle de $(1/\mathrm{N})\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \delta_{\mathrm{Y}_i^{\mathrm{N}},\, s_i^{\mathrm{N}}}$ où $(\mathrm{Y}_i^{\mathrm{N}})_{1\leqq i\leqq \mathrm{N}}$ est le processus de Markov régi par (1) avec $\mathscr{L}=\Lambda$, on a :

$$\mu^{\mathrm{N}}(dv)=\exp[\mathrm{N}\,h(v)]\,\mu_0^{\mathrm{N}}(dv)$$

avec

$$h(v)=\int_{\mathrm{D}\times\mathscr{S}}\left(\sum_{0\leqq t\leqq \mathrm{T}}\log\frac{d\mathscr{L}(x_{t^-}, s, v_{t^-})}{d\Lambda}(x_{t^-}-x_t)\right.$$
$$\left.-\int_0^{\mathrm{T}}\int_{\mathrm{E}}\left\{\frac{d\mathscr{L}(x_t, s, v_t)}{d\Lambda}(\Delta)-1\right)\mathbf{1}_{x_t+\Delta\in\mathscr{X}}\,\Lambda(d\Delta)\,dt\right)v(dx, ds).$$

h n'est pas bornée, mais $h/(1+\sum_{0\leqq t\leqq \mathrm{T}}\mathbf{1}_{x_{t^-}\neq x_t})$ l'est. C'est pourquoi nous avons besoin de la proposition 3 (avec $\psi(x, s)=1+\sum_{0\leqq t\leqq \mathrm{T}}\mathbf{1}_{x_{t^-}\neq x_t}$) pour déterminer la fonctionnelle I_0 de $\{\mu_0^{\mathrm{N}};\ \mathrm{N}\geqq 1\}$ dans $\Pi_\psi(\mathrm{D}\times\mathscr{S})$. Nous obtenons alors $\mathrm{I}=-h+\mathrm{I}_0$. Puis, les propositions 1 et 2 nous permettent de conclure. □

Note remise le 26 janvier 1989, acceptée le 6 février 1989.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] H. FÖLLMER, Cours à l'école d'été de probabilités de Saint-Flour, *Lecture Notes in Math.*, n° 1362, 1988.

[2] M. A. KRASNSEL'SKII et Ya. B. RUTICKII, *Convex functions and Orlicz spaces*, P. Noordhoff Ltd, 1961.

[3] S. R. S. VARADHAN, Asymptotic probabilities and differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1, 1966, p. 261-268.

Université de Paris-Sud, Mathématiques, Bât. n° 425, 91405 *Orsay Cedex.*

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 308, Série I, p. 429-432, 1989

Statistique/*Statistics*

Exactitude au second ordre des intervalles de confiance bootstrap pour les paramètres d'un modèle de régression non linéaire

Sylvie HUET et Emmanuel JOLIVET

Résumé — Nous démontrons que, à condition de bien choisir la statistique que l'on rééchantillonne, les bornes d'intervalles de confiance bootstrap, pour les paramètres d'un modèle de régression non linéaire, sont exactes à un $o(n^{-1/2})$ près.

Second order correctness of bootstrap confidence intervals for the parameters of a nonlinear regression model

Abstract — *It is shown that, for a well chosen resampled statistic, the endpoints of bootstrap confidence intervals for the parameters of a nonlinear regression model are within a $o(n^{-1/2})$ of the exact ones.*

1. INTRODUCTION. — Soit le modèle de régression non linéaire

$$X_\nu = f(x_\nu, \theta_0) + \varepsilon_\nu, \qquad \nu = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

où $\theta_0 \in \mathring{\Theta} \subset \mathbf{R}^p$, Θ compact, $f(., \theta): \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, et les ε_ν sont des variables aléatoires indépendantes et équidistribuées, centrées, de variance σ^2, de loi F. On note $\mathscr{X}$ l'observation $X_1, \ldots, X_n$. On s'intéresse aux propriétés au second ordre d'intervalles de confiance pour les estimateurs des moindres carrés ordinaires, fondés sur la distribution de statistiques rééchantillonnées par la méthode bootstrap.

L'idée, bien décrite par P. Hall dans plusieurs articles ([1], [2]), consiste à rééchantillonner des statistiques pour lesquelles on sait qu'il existe un développement d'Edgeworth au second ordre, tant pour la statistique originale $\hat{T}_n$ que pour la statistique rééchantillonnée $\hat{T}_n^*$:

$$\Pr\{\hat{T}_n < x\} = \Phi(x) + n^{-1/2} \varphi(x) P(x) + o(n^{-1/2})$$

et

$$\Pr\{\hat{T}_n^* < x \mid \mathscr{X}\} = \Phi(x) + n^{-1/2} \varphi(x) \hat{P}(x) + o(n^{-1/2})$$

uniformément en x, avec les notations habituelles. Si, pour tout x, $n^{1/2}(\hat{P}(x) - P(x))$ est borné en probabilité, alors, en notant $t_\alpha(\mathscr{X}) = \inf\{t : \Pr\{\hat{T}_n^* \leqq t \mid \mathscr{X}\} \geqq \alpha\}$,

$$\Pr\{\hat{T}_n < t_\alpha(\mathscr{X})\} = \alpha + o(n^{-1/2}). \tag{2}$$

2. DÉVELOPPEMENT D'EDGEWORTH EN RÉGRESSION NON LINÉAIRE. — On note $\hat{\theta}_n$ et $\hat{\sigma}_n^2$ les estimateurs des moindres carrés ordinaires de θ_0 et σ^2, et τ (resp. $\hat{\tau}_n$) une des coordonnées de θ_0 (resp. $\hat{\theta}_n$), la première par exemple. Soit $\Gamma_{n, \theta}$ la matrice d'éléments

$$n^{-1} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f(x_\nu, \theta)}{\partial \theta_j} \frac{\partial f(x_\nu, \theta)}{\partial \theta_k}$$

et $\lambda_{n, \theta}$ l'élément (1, 1) de l'inverse de cette matrice. L'existence de développements d'Edgeworth a été démontrée ([5], [6], [7]) sous des hypothèses de régularité $\mathscr{R}$ de la fonction f, de ses dérivées par rapport à θ et du plan d'expérience, et sous des conditions

Note présentée par Jean-Pierre KAHANE.

0249-6291/89/03080429 $ 2.00

$\mathscr{C}$ de type Cramer sur les fonctions caractéristiques $\psi_{n,\nu}(.)$ des vecteurs de dimension $1+p+p^2$

$$V_{n\nu}(\varepsilon)=\left(\sum_{j=1}^{p} g_{1j}\frac{\partial f_\nu}{\partial\theta_j}\varepsilon, \ldots, \sum_{j=1}^{p} g_{pj}\frac{\partial f_\nu}{\partial\theta_j}\varepsilon, \sum_{j=1}^{p} g_{1j}\frac{\partial^2 f_\nu}{\partial\theta_j\partial\theta_1}\varepsilon, \ldots, \sum_{j=1}^{p} g_{pj}\frac{\partial^2 f_\nu}{\partial\theta_j\partial\theta_p}\varepsilon, \varepsilon^2-\sigma^2\right)^{\mathrm{T}},$$

où $g_{ij}=\sigma^2(\Gamma_{n,\theta_0}^{-1})_{ij}$:

$$\Pr\left\{n^{1/2}\frac{\hat{\tau}_n-\tau}{\hat{\sigma}_n\lambda_{n,\hat{\theta}_n}}\leqq x\right\}=\Phi(x)+n^{-1/2}\varphi(x)(a+bx^2)+o(n^{-1/2}) \tag{3}$$

et

$$\Pr\left\{n^{1/2}\frac{\hat{\tau}_n-\tau}{\sigma\lambda_{\theta_0}}\leqq x\right\}=\Phi(x)+n^{-1/2}\varphi(x)(a+cx^2)+o(n^{-1/2}) \tag{4}$$

uniformément en x, où a, b et c sont définis en [3].

3. Procédé de rééchantillonnage. — Appelons versions bootstrap de $\hat{\theta}_n$ et $\hat{\sigma}_n^2$, les estimateurs des moindres carrés ordinaires $\hat{\theta}_n^*$ et $\hat{\sigma}_n^{*2}$ pour le modèle

$$X_\nu^*=f(x_\nu,\theta)+\varepsilon'_\nu, \qquad \nu=1,\ldots,n, \tag{5}$$

où les observations sont rééchantillonnées selon le procédé

$$X_\nu^*=f(x_\nu,\hat{\theta}_n)+\eta_\nu,\ \nu=1,\ldots,n,$$

les η_ν étant des variables aléatoires indépendantes de loi $\tilde{F}_n=n^{-1}\sum_{\nu=1}^{n}\delta_{\tilde{\varepsilon}_\nu}$, avec

$$\tilde{\varepsilon}_\nu=X_\nu-f(x_\nu,\hat{\theta}_n)-n^{-1}\sum_{m=1}^{n}(X_m-f(x_m,\hat{\theta}_n)).$$

Notre objectif est donc d'étudier les propriétés au second ordre d'intervalles de confiance pour τ fondés sur la distribution des statistiques

$$\hat{T}_n^*=n^{1/2}\frac{\hat{\tau}_n^*-\hat{\tau}_n}{\hat{\sigma}_n^*\lambda_{n,\hat{\theta}^*}}\quad \text{version bootstrap de } \hat{T}_n=n^{1/2}\frac{\hat{\tau}_n-\tau}{\hat{\sigma}_n\lambda_{n,\hat{\theta}_n}}$$

et

$$\hat{S}_n^*=n^{1/2}\frac{\hat{\tau}_n^*-\hat{\tau}_n}{\hat{\sigma}_n\lambda_{n,\hat{\theta}_n}}\quad \text{version bootstrap de } \hat{S}_n=n^{1/2}\frac{\hat{\tau}_n-\tau}{\sigma\lambda_{\theta_0}}.$$

Pour ce faire, nous démontrons essentiellement deux résultats : premièrement, l'existence d'un développement d'Edgeworth pour la distribution, conditionnelle en $\mathscr{X}$, de $\hat{T}_n^*$ et $\hat{S}_n^*$; deuxièmement, la proximité entre les polynômes intervenant dans les développements associés à ces statistiques d'une part, et ceux intervenant en (3) et (4), d'autre part.

4. Fonction caractéristique après rééchantillonnage. — Il faut seulement démontrer, pour appliquer des résultats du type de ceux donnés par les formules (3) et (4) dans le cadre du modèle (5), que les conditions $\mathscr{C}$ *passent* de la situation ordinaire à la situation de rééchantillonnage, les hypothèses $\mathscr{R}$ étant automatiquement vérifiées, puisque ni le modèle d'espérance, ni le plan d'expérience ne changent. En fait, si F_n est la répartition empirique (inobservable) des résidus associés à l'observation $\mathscr{X}$, on sait que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\mathbf{E}_{F_n}(\exp(i\langle t, V_{n\nu}(\varepsilon)\rangle))-\mathbf{E}(\exp(i\langle t, V_{n\nu}(\varepsilon)\rangle))\right|=0 \text{ p.s., uniformément en } t.$$

Le résultat essentiel est le suivant.

PROPOSITION 1. — *Si, pour le modèle* (1), *les hypothèses* $\mathscr{R}$ *sont vérifiées, et si toutes les dérivées d'ordre* 1 *et* 2 *de* f *par rapport à* θ *sont des fonctions bornées de* x, *si en outre* $E(\varepsilon^{10})$ *est fini, alors*

$$\lim_{n\to\infty} |E_{\tilde{F}_n}(\exp(i\langle t, V^*_{nv}(\varepsilon)\rangle)) - E_{F_n}(\exp(i\langle t, V_{nv}(\varepsilon)\rangle))| = 0 \ p.s.,$$

uniformément en t.

Ici, $V^*_{nv}(\varepsilon)$ est identique à $V_{nv}(\varepsilon)$, mais $\hat{\theta}_n$ remplace θ_0 et $\tilde{\sigma}_n^2 = n^{-1}\sum_{v=1}^{n}\tilde{\varepsilon}_v^2$ remplace σ^2. Considérons d'abord les $p+p^2$ premières composantes : il suffit de montrer

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\exp(it\hat{h}_l\tilde{\varepsilon}_m) - \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\exp(ith_l\varepsilon_m)\right| = 0 \quad \text{p. s., uniformément en } t.$$

avec

$$h_l = \begin{cases} -\sigma^{-2}\sum_{j=1}^{p} g_{lj}\dfrac{\partial f_v}{\partial\theta_j} & \text{si} \quad 1 \leqq l \leqq p \\ -\sigma^2\sum_{j=1}^{p} g_{kj}\dfrac{\partial^2 f_v}{\partial\theta_j\,\partial\theta_l} & \text{si} \quad kp+1 \leqq l \leqq (k+1)p \quad \text{et} \quad l = kp+l, \\ \qquad \text{pour} \quad k=1, \ldots, p-1. \end{cases}$$

et $\hat{h}_l$ étant défini de façon similaire, $\hat{\theta}_n$(resp. $\hat{\sigma}_n^2$) remplaçant θ_0(resp. σ^2). A cause de la continuité uniforme de $x \to \exp(ix)$,

$$\Pr\left\{\limsup_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\exp(it\hat{h}_l\tilde{\varepsilon}_m) - \exp(ith_l\varepsilon_m)\right| \geqq \eta\right\}\right\}$$

est majoré par $\Pr\{\limsup_{n\to\infty}\{\max_{v=1,\ldots,n}|\hat{h}_l\tilde{\varepsilon}_v - h_l\varepsilon_v| \geqq \delta_\eta\}\}$. Compte tenu de la définition de $\tilde{\varepsilon}_m$ et des hypothèses $\mathscr{R}$, qui impliquent en particulier la consistance forte de l'estimateur $\hat{\theta}_n$, $\tilde{\varepsilon}_m - \varepsilon_m$ converge presque sûrement vers 0 uniformément en m. De même, pour tout $l=1,\ldots,p+p^2$, $\hat{h}_l - h_l$ converge presque sûrement vers 0. Comme $|\hat{h}_l\tilde{\varepsilon}_m - h_l\varepsilon_m| \leqq |(\hat{h}_l - h_l)\varepsilon_m| + |(\hat{h}_l - h_l)(\tilde{\varepsilon}_m - \varepsilon_m)| + |h_l(\tilde{\varepsilon}_m - \varepsilon_m)|$, il suffit maintenant de démontrer la convergence presque sûre de $(|\hat{h}_l - h_l|\max_{m=1,\ldots,n}|\varepsilon_m|)$ vers 0. Grâce aux hypothèses $\mathscr{R}$, nous avons pour tout $a<5$,

$$\Pr\{|\hat{h}_l - h_l||\varepsilon_m| > \eta\} \leqq \frac{E(|\hat{h}_l - h_l|^a|\varepsilon_m|^a)}{\eta^a} \leqq \frac{1}{\eta^a}[E|\hat{h}_l - h_l|^{2a}E|\varepsilon_m|^{2a}]^{1/2} \leqq C\,n^{-a/2}.$$

La dernière inégalité résulte du fait que $n^{1/2}(\hat{h}_l - h_l)$ peut être développé comme une fonction des résidus plus un reste et de l'hypothèse $E\,\varepsilon^{10} < \infty$. Comme

$$\Pr\{|\hat{h}_l - h_l|\max_{m=1,\ldots,n}|\varepsilon_m| > \eta\} \leqq \sum_{m=1}^{n}\Pr\{|\hat{h}_l - h_l||\varepsilon_m| > \eta\},$$

le choix de n'importe quel a strictement compris entre 4 et 5 permet de conclure que $(|\hat{h}_l - h_l|\max_{m=1,\ldots,n}|\varepsilon_m|)$ converge vers 0 presque sûrement, par application du lemme de Borel-Cantelli. On démontre de façon analogue que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\exp(it(\tilde{\varepsilon}_m^2 - \tilde{\sigma}_n^2)) - \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n}\exp(it(\varepsilon_m^2 - \sigma^2))\right| = 0 \quad \text{p. s., uniformément en } t.$$

Ceci achève la démonstration de la proposition.

5. Propriété au second ordre des intervalles de confiance. — Grâce à la proposition (1), nous pouvons écrire

$$\Pr\{\hat{T}_n^* \leqq x \mid \mathscr{X}\} = \Phi(x) + n^{-1/2}\varphi(x)(\hat{a} + \hat{b}x^2) + o(n^{-1/2}) \tag{6}$$

et

$$\Pr\{\hat{S}_n^* \leqq x \mid \mathscr{X}\} = \Phi(x) + n^{-1/2}\varphi(x)(\hat{a} + \hat{c}x^2) + o(n^{-1/2}) \tag{7}$$

où $\hat{a}$, $\hat{b}$ et $\hat{c}$ correspondent respectivement à a, b et c définis en (3) et (4), où $\hat{\theta}_n$ remplace θ_0 et les trois premiers cumulants de $\tilde{F}_n$ remplacent ceux de F. On vérifie, par les méthodes habituelles, que $n^{1/2}(\hat{a}-a)$ [resp. $n^{1/2}(\hat{b}-b)$, resp. $n^{1/2}(\hat{c}-c)$] converge en loi vers une gaussienne centrée, ce qui permet d'énoncer :

Proposition 2. — *Sous les hypothèses de la proposition* (1), *les intervalles de confiance pour* τ *fondés sur les quantiles de la distribution de* $\hat{T}_n^*$ *ont des bornes exactes au second ordre. Autrement dit,*

$$\Pr\{\tau \geqq \hat{\tau}_n - n^{1/2}\hat{\sigma}_n \lambda_{n\hat{\theta}_n} t_\alpha(\mathscr{X})\} = \alpha + o(n^{-1/2}).$$

Une conséquence immédiate est que les intervalles de confiance pour τ fondés sur les quantiles de $\hat{S}_n^*$ n'ont pas cette propriété. Les résultats d'une expérience de simulation [4], conduite pour des valeurs de n conformes à celles rencontrées en pratique, sont cohérents avec ces résultats asymptotiques.

Note remise le 8 février 1989, acceptée le 16 février 1989.

Références bibliographiques

[1] P. Hall, On the bootstrap and confidence intervals, *The Annals of Statistics*, 14, 1986, p. 1431-1452.

[2] P. Hall, Theoretical comparison of bootstrap confidence intervals, *The Annals of Statistics*, 16, 1988, p. 927-953.

[3] S. Huet et E. Jolivet, *Bootstrap and Edgeworth expansion: the nonlinear regression as an example*, Rapport technique, I.N.R.A., Département de Biométrie, 1989.

[4] S. Huet, E. Jolivet et A. Messéan, *Some simulations results about confidence intervals and bootstrap methods in nonlinear regression*, Rapport technique, I.N.R.A., Département de Biométrie, 1989.

[5] A. V. Ivanov et S. Zwanzig, An asymptotic expansion for the distribution of the least squares estimator in nonlinear regression model, *Math. Operationforsch. Statist. Ser. Statist.*, 14, 1983, p. 7-27.

[6] W. Schmidt et S. Zwanzig, Second order asymptotics in nonlinear regression, *Journal of Multivariate Analysis*, 18, 1986, p. 187-215.

[7] S. Zwanzig, *Asymptotic tests in nonlinear regression*, Rapport technique, Akademie der Wissenschaften, Berlin, D.D.R., Karl Weierstraß Institut für Mathematik, 1987.

I.N.R.A., Laboratoire de Biométrie, 78350 *Jouy-en-Josas.*

C. R. Acad. Sci. Paris, t. 308, Série I, p. 433-436, 1989

Analyse numérique/*Numerical Analysis*

Sur un procédé de construction d'algorithmes de calcul approché des racines d'une équation du type $f(x)=0$

Jean-Claude YAKOUBSOHN

Résumé — On utilise le procédé de construction de la méthode de Newton pour déterminer une classe de méthodes itératives et on exhibe à cette occasion, un exemple original de méthode itérative d'ordre trois.

On an algorithm construction method for the computation of roots of equations

Abstract — *We construct a class of iterative methods to solve non linear equations and we give an original example of a third order iterative method.*

I. NOTATIONS. — f désigne une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et r un zéro simple de f, c'est-à-dire : $f(r)=0$, $f'(r)\neq 0$. On considère une fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que g et sa dérivée soient non nulles sur I; u, v et w sont trois fonctions définies de I dans $\mathbb{R}$ et dont les liens avec la fonction f apparaîtront dans la suite. Afin d'alléger l'écriture de certaines relations, on convient de noter f, u, v, w, etc. au lieu de $f(x)$, $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$, etc. On notera h', h'', $h^{(3)}$, ..., $h^{(n)}$ les dérivées successives d'une fonction h; en outre, la simple écriture $h^{(n)}$ suppose implicitement que la fonction h est dérivable jusqu'à l'ordre n sur son domaine de définition.

II. INTRODUCTION. — Il est ici question d'algorithmes ou méthodes itératives qui sont définis par la donnée d'une fonction F appelée fonction d'itération de la méthode, et d'une valeur initiale x_0. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$x_0 \text{ donné}, \qquad x_{n+1}=\mathrm{F}(x_n)$$

est destinée à converger vers une racine de l'équation $f(x)=0$ (Traub [8]). Le point x_0 est calculé par des méthodes d'isolation et de localisation des zéros d'une fonction. Si f est un polynôme, on pourra consulter Dedieu [3]. La construction annoncée dans le titre est basée sur le procédé suivant. Dans une première étape, on calcule pour une valeur fixée de la variable x, A et B solution du système :

$$\begin{aligned}\mathrm{A}\,g+\mathrm{B}&=u\\ \mathrm{A}\,g'&=v.\end{aligned}$$

On obtient $\mathrm{A}=v/g'$ et $\mathrm{B}=u-vg/g'$.

Ceci permet dans un deuxième temps, de définir l'itéré de x, noté $\mathrm{F}(x)$, et donc la fonction d'itération de la méthode par :

R1 $$\mathrm{A}\,g(\mathrm{F})+\mathrm{B}=0$$

R2 $$|\mathrm{F}(x)-x|=\mathrm{Inf}\left\{|y-x| \;\middle|\; y\in g^{-1}\left(g-\frac{u}{v}g'\right)\right\}.$$

Et ceci sous l'hypothèse qui rend le calcul ci-dessus possible :

$$\text{pour tout } x\in\mathrm{I}, \text{ on a } g-\frac{u}{v}g'\in\mathrm{Im}\,g\cap\mathrm{I}.$$

Note présentée par Jacques ARSAC.

0249-6291/89/03080433 $ 2.00 © Académie des Sciences

L'ordre d'une telle fonction d'itération est donné par la

PROPOSITION 1. — *La fonction d'itération* F *définie par les relations* R1 *et* R2 *est :*

1° *d'ordre* 2 *en* r [$F(r)=r$ *et* $F'(r)=0$] *si et seulement si les relations suivantes sont vérifiées :*

R3 $$u(r)=0 \quad et \quad v(r)\neq 0$$

R4 $$u'(r)=v(r);$$

dans ce cas, on a au point $x=r$:

$$F''=\frac{-u''+2v'}{v}-\frac{g''}{g'};$$

2° *d'ordre* 3 *en* r [$F(r)=r$ *et* $F'(r)=F''(r)=0$] *si et seulement si les relations* R3 *et* R4 *sont vérifiées ainsi que :*

R5 $$-g'(r)v(r)+(2v'(r)-u''(r))g'(r)=0;$$

dans ce cas, on a en $x=r$

$$F^{(3)}=\frac{-u^{(3)}+3v''}{v}-\frac{6v'^2}{v^2}+\frac{2u''v'}{v^2}+\left(\frac{6v'}{v}-\frac{3u''}{v}\right)\frac{g''}{g'}-\frac{2g^{(3)}}{g'}.$$

On utilise la relation R1 pour montrer la proposition 1.

On détermine maintenant une classe de fonctions u et v satisfaisant à la proposition 1. D'après Traub [8], p. 98, une fonction d'itération d'ordre m dépend explicitement de f et des $m-1$ premières dérivées de f. On cherche u et v sous la forme de polynômes homogènes en $f, f', \ldots, f^{(m-1)}$. On a alors la

PROPOSITION 2. — *Soit* $g(x)=x$.

1° *Les polynômes* u *et* v *homogènes de degré* 1 *en* f *et* f' *qui satisfont aux relations* R3 *et* R4 *sont de la forme :*

$$u=u_0 f, \qquad v=v_0 f+u_0 f' \qquad avec \quad u_0\in\mathbb{R}\ et\ v_0\in\mathbb{R}.$$

2° *Les polynômes* u *et* v *homogènes de degré* 2 *en* f, f' *et* f'' *qui satisfont aux relations* R3, R4 *et* R5 *sont de la forme :*

$$u=u_0 f^2+u_1 ff', \qquad v=v_0 f^2+u_0 ff'-\frac{u_1}{2}ff''+u_1 f'^2$$

avec $u_0\in\mathbb{R}$, $u_1\in\mathbb{R}$ *et* $v_0\in r$.

Exemple 1. — Dans le 1 de la proposition 2, en prenant $v_0=0$ et $u_0\neq 0$, on retrouve la fonction d'itération de Newton. Dans le cas 2 en prenant $u_0=0$, $u_1=2$ et $v_0=0$, on retrouve la fonction d'itération de Halley.

Exemple 2. — $g(x)=x^n$, $u=f$ et $v=f'$. On obtient la fonction d'itération d'ordre deux donnée par Burgstalher [1] pour des polynômes.

L'étude de la convergence d'une telle méthode avec des hypothèses adéquates sur les fonctions g, u et v est strictement identique à celles faites par Dieudonné [4], p. 59, et par Ostrowski [7].

III. CONSTRUCTION D'UNE CLASSE DE FONCTIONS D'ITÉRATION D'ORDRE 3. — On détermine pour une valeur fixée de la variable x, A, B et C solution du système :

$$A g^2+B g+C=u$$
$$2A gg'+B g'=v$$
$$2A(gg''+g'^2)+B g''=w;$$

on obtient :

$$2g'^3\,\mathrm{A}=g'\,w-g''\,v,\ 2g'^3\,\mathrm{B}=(g'^2+gg'')\,v-g'\,gw$$
$$2g'^3\,\mathrm{C}=2\,ug'^3+g^2\,g'\,w-vg\,(2\,g'^2+gg'').$$

L'itéré de x est défini par :

R6 $$\mathrm{A}\,g^2(\mathrm{F})+\mathrm{B}\,g(\mathrm{F})+\mathrm{C}=0$$

R7 $$|\mathrm{F}(x)-x|=\mathrm{Inf}\{|y-x|\ |\ y\in g^{-1}(\mathrm{H}(x))\}$$

où

$$\mathrm{H}(x)=\left\{g-\frac{2\,ug'/v}{1+\sqrt{\Delta}},\ g-\frac{2\,ug'/v}{1-\sqrt{\Delta}}\right\}\quad \text{et}\quad \Delta=1-\frac{2\,uw}{v^2}+2\frac{u}{v}\frac{g''}{g'}.$$

Il faut supposer que $\mathrm{H}(x)$ est contenu dans $\mathrm{Im}\,g\cap\mathrm{I}$ et que $\Delta\geqq 0$, pour tout $x\in\mathrm{I}$.

PROPOSITION 3. — *La fonction d'itération* F *définie par la relation* R7 *est d'ordre* 3 *si et seulement si les relations suivantes sont vérifiées :*

R8 $$u(r)=0$$

R9 $$u'(r)=v(r)$$

R10 $$-2\,v(r)\,g''(r)+(u''(r)-2\,v'(r)+w(r))\,g'(r)=0.$$

Les calculs établissant la proposition sont effectués à l'aide de la relation R6.

Comme en II, on recherche les fonctions u, v et w sous la forme de polynômes homogènes en $f, f', \ldots, f^{(m-1)}$ où m est l'ordre de la fonction d'itération. On a la

PROPOSITION 4. — *Soit* $g(x)=x$.

1° *Les polynômes homogènes* u, v *et* w *de degré* 1 *en* f, f' *et* f'' *satisfaisant aux relations* R8, R9 *et* R10 *sont de la forme :*

$$u=u_0\,f,\qquad v=u_0\,f'+v_0\,f,\qquad w=w_0\,f+2\,v_0\,f'+u_0\,f''$$

où u_0, v_0 *et* w_0 *sont des nombres réels quelconques.*

2° *Les polynômes homogènes* u, v *et* w *de degré* 2 *en* f, f' *et* f'' *satisfaisant aux relations* R8, R9 *et* R10 *sont de la forme :*

$$u=u_0\,f^2+u_1\,ff'+u_2\,ff''$$
$$v=v_0\,f^2+v_1\,ff'+v_2\,ff''+u_1\,f'^2+u_2\,f'\,f''$$
$$w=w_0\,f^2+w_1\,ff'+w_2\,ff''+2\,(v_1-u_0)\,f'^2+(2\,v_2+u_1)\,f'\,f''+u_2\,f''^2$$

où u_0, u_1, u_2, v_0, v_1, v_2, w_0, w_1 *et* w_2 *sont des nombres réels quelconques.*

On étudie plus spécialement les deux exemples suivants :

Exemple 3. — Avec $g(x)=x$, $u=f$, $v=f'$ et $w=f''$. On obtient :

$$\mathrm{F}(x)=x-\frac{2\,f/f'}{1+\sqrt{1-2\,ff''/f'^2}}.$$

On retrouve la fonction d'itération de Cauchy [2]. La méthode itérative associée à F est d'ordre 3 : c'est la méthode des paraboles.

On a au point $x=r$: $\mathrm{F}^{(3)}=f^{(3)}/f'$. De plus si le produit $f^{(3)}\,f'$ est négatif sur un intervalle contenant une racine, il y a convergence monotone de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la racine de f. On peut enfin remarquer qu'il existe un voisinage d'une racine de f où la quantité f'^2-ff'' est positive.

Voici l'exemple d'une méthode itérative dont les limites d'utilisation sont dues uniquement à la fonction f et à ses dérivées et sans que la fonction d'itération en soit la cause.

Exemple 4. — Avec $g(x)=x$, $u=ff'$, $v=f'^2-ff''$ et $w=-f'f''$; on obtient :

$$F(x)=x-\frac{2ff'}{f'^2-ff''+\sqrt{f'^4+(ff'')^2}}.$$

Cette fonction d'itération est d'ordre trois avec en $x=r$:

$$F^{(3)}=\frac{f^{(3)}}{f'}-\frac{5}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2.$$

On peut noter que les valeurs qui annulent la dérivée f' sont des points fixes instables. De plus si la condition :

$$f^{(3)}f'<\left(2+\frac{f'^2}{\sqrt{f'^4+(ff'')^2}-ff''}\right)(f'')^2$$

est réalisée dans un intervalle qui contient une racine, alors il y a convergence monotone de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la racine. Cette condition s'obtient en écrivant : $F'>0$.

Ainsi pour $f(x)=\operatorname{Log} x$, la condition précédente est réalisée et le domaine d'attraction de la racine $x=1$ est $]0, +\infty[$.

Note remise le 28 octobre 1988, acceptée après révision le 21 février 1989.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] S. BURGSTALHER, An algorithm for solving polynomials equations, *Am. Monthly*, 93, n° 6, 1986, p. 421-430.

[2] A. CAUCHY, Méthode générale pour la détermination des racines réelles des équations algébriques ou même transcendantes, *Œuvres* 1re série, 4, Gauthier-Villars, Paris, p. 88-98.

[3] J.-P. DEDIEU, Sur le calcul des racines d'un polynôme, *Séminaire Calcul formel et outils algébriques pour la modélisation géométrique*, Paris, 1988.

[4] J. DIEUDONNÉ, *Calcul infinitésimal*, Hermann, Paris 1968.

[5] H. HALLEY, A new and general method of finding the root of equation, *Phil. Trans. Roy. Society London*, 18, 1964, p. 136.

[6] C. MASSE, L'itération de Newton : convergence et chaos, *Thèse de 3e Cycle*, Grenoble, 1984.

[7] A. OSTROWSKI, *Solutions of equations in Euclidean and Banach spaces*, 3e éd., Academic Press, 1973.

[8] J. F. TRAUB, *Iterative methods for the solutions of equations*, Prentice Hall, 1964.

[9] H. S. WALL, A modification of Newton's method, *Am. Monthly*, 55, 1948, p. 90-94.

Université Paul-Sabatier, U.F.R. Mathématiques, Informatique, Gestion,
118, *route de Narbonne*, 31062 *Toulouse Cedex.*

COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES
23, quai de Conti, 75006 Paris (France). Tel. (33.1) 43.26.66.21 ; Telex 206 521 F; Telefax (33.1) 43.54.63.99.

INSTRUCTIONS TO AUTHORS

A Note in the Comptes rendus *is the first report of an important discovery or a significant new result. It is rapidly published. It must be submitted by a Member, a Foreign Associate or a Corresponding Member of the Academy.*

Languages used and presentation

Notes for the Comptes rendus *are usually published in French. They must be clear, within the comprehension of the majority of specialists and distinctly highlight the originality of the results (*).*

The French text must not exceed 4 pages in length, including tables and figures.

However, a "Note" may be *bilingual* and include an "Abridged English Version" of at least one but not more than two printed pages, which refers to the figures, tables and bibliographical entries. In this case, the total length including, figures and tables etc. may extend to 6 pages.

Foreign authors may submit a "Note" written in English (other, languages using latin characters may be accepted upon request), on condition that they include an Abridged French Version of at least one page, which refers to the figures, tables and bibliographical entries. In this case, the total length of the Note (including title, figures, tables, etc.) may extend to 6 printed pages.

If necessary, and with the authorization of one of the Permanent Secretaries of the Academy, one or two additional pages of figures may be added to the "Note". These additional plates must be submitted with a final layout and are published at the authors' expense.

Advisory Board

The Permanent Secretaries are responsible for the publication of the *Comptes rendus*. They are assisted by an Advisory Board which may suggest to refer to specialists in the field and may also request that the author(s) amend their initial text. They make the final decision regarding acceptance of the "Note". The date on which the manuscript is submitted and the date of its final acceptance *ne varietur* are indicated at the end of the printed text.

Contents of the "Note"

As a rule each "Note" should include the following items:

1. the heading denoting, in French and English, the scientific field under which it is to be published (**) (where applicable, a second heading for cross-reference in the tables of contents may be given);
2. the title in French;
3. the first names, followed by the surname, of the author(s);
4. a short Abstract in French (called "Résumé");
5. the title and a short Abstract in English;
6. if desired, an Abridged English Version;
7. the text of the "Note";
8. the captions for the tables and figures in both French and English;
9. a numbered list of references in the order cited in the text. Each reference is to show the author(s)' first initial and surname, title of the review, volume, year, first and last pages of the article (for "Notes" in Series I, the complete title of the article should also be given);
10. the mailing address and phone number, of the author(s) or Laboratories;
11. the name, address, phone, telex and telefax number of the person to whom the texts are to be sent for proof-reading.

Foreign authors who write their "Note" in English (or in another language) (§ 7 above), must include an Abridged Version in French (substituted for § 6 above) and captions for tables and figures in French, as indicated in § 8 above.

Technical Requirements

A "Note" must be typed, double-spaced and submitted in **two copies**.

A printed page for the *Comptes rendus* consists of 47 lines of 85 letters, symbols or spaces. The Abstract and Résumé are printed in small letters (95 letters or spaces per line). Titles, abstracts, tables, figures captions and bibliographic entries must be included in the total number of pages allowed.

— The originals of the figures must be submitted with letters and numbers large enough to allow for reduction. No document should exceed 21 × 30 cm.

— Internationally accepted units should be used (**).

— Mathematical equations must be clearly written (typed if possible), especially sub- and superscripts.

— The meaning of uncommon symbols should be specified in the margin or on a separate list. Special instructions and explanations for the printer are to be noted on a separate sheet attached to the manuscript.

— No sentence may begin with a mathematical formula.

— Footnotes are to be avoided. However, if they must be used, they should be numbered differently from the references and will appear at the end of the text, before the bibliography.

Proof-reading

Only typographic corrections may be made on the proofs. Corrected proofs should be sent to the Academy of Sciences by return mail, along with the manuscript (Service of the *Comptes rendus*, 23, quai de Conti, 75006 Paris).

Reprints

Twenty-five reprints will be sent to the author(s) free of charge. Additional copies may be obtained, at the author's expense, provided an order is included when the corrected proofs are returned to the printer.

(*) Due to the brevity required, it may not always be possible to include all the conclusive experiments or the complete proof of the results obtained, especially in Series I. Therefore, we recommend that a text, typed if possible, be enclosed in support of the "Note", providing the supplementary information needed for a thorough understanding, in order that the submitting Member might easily examine the "Note". This document will be kept at the Academy for five years so that, on request, any *Comptes rendus* reader may have access to it. In this case, a footnote will appear at the end of the "Note"stating "this the succinct version of a text on file for five years in the Academy Archives. Copy available upon request."

(**) The list of Headings and tables of international units appear in the first issue of each Volume.

COMPTES RENDUS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

Series I: Mathematics; Series II : Mechanics, Physics, Chemistry, Earth Sciences, Space Sciences; Series III : Life Sciences.

Subscription Rates. Foreign Countries 1989
Vol. 308 + 309-40 numéros

One series	3 450 F
Two series	6 210 F
Three series (I, II, III)	7 770 F

For foreign countries, subscription rates include surface mail charges. For faster delivery, please mark your order "Air Mail charges invoiced in addition". For 1989, all subscribers receive a free service of Série générale "La Vie des Sciences".

La Vie des Sciences : Institution 490 FF/Individual 294 FF

Subscriptions should be sent to : C.D.R., Centrale des Revues, 11, rue Gossin, 92543 Montrouge Cedex, France
Specimen copy on request

Version française p. 2 de couverture

COMPTES RENDUS
DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

MATHÉMATIQUE

1989 — Tome 308 — Série I — n° 13

Les « *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* » figurent dans « *Current Contents* » et « *Pascal* »

3899-89 Dépôt légal mars 1989 : Imprimeur 3300 — CPPP 60383 — Imprimé en France

CONTENTS 1989 - VOLUME 308 - SECTION I - N° 13

COMPTES RENDUS DE L'ACADEMIE DES SCIENCES MATHEMATIQUE 1989 - Tome 308 - Série I - n° 13

Contents with English abstracts