C. R. Acad. Sci. Paris, t. 333, Série I, p. 571–576, 2001
Géométrie différentielle/*Differential Geometry*

Spectre du Laplacien de Lichnerowicz sur les projectifs complexes

Mohamed BOUCETTA

Faculté des sciences et techniques, B.P. 618, Marrakech, Maroc
Courriel : boucetta@fstg-marrakech.ac.ma

(Reçu le 5 février 2001, accepté après révision le 3 août 2001)

Résumé. Dans cette Note, nous calculons le spectre du Laplacien de Lichnerowicz associé à la métrique canonique du projectif complexe $\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n$ et agissant sur les formes symétriques de degré 2. Ce calcul est la suite d'un calcul fait dans le cas des sphères [6]. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

The spectra of the Lichnerowicz Laplacian on $\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n$

Abstract. *In this paper, we compute the spectra of the Lichnerowicz Laplacian on the symmetric forms of degree* 2 *on* $\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n$*. This obtained by using the Riemannian submersion of* $\mathbb{S}^{2n+1}$ *to* $\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n$ *and the computation done on* $\mathbb{S}^{2n+1}$ *in* [6]. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

In [10], p. 27, Lichnerowicz introduced a Laplacian Δ_M^p acting on the space of symmetric p-forms $\mathcal{S}^p M$ of a manifold M that generalize the Laplacian of Hodge. In [6], we compute the spectra with multiplicity of $\Delta^2_{\mathbb{S}^n}$ and $\Delta^2_{\mathbb{R}\mathrm{P}^n}$. In this Note, we intend to compute the spectra of $\Delta^2_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}$.

Let $(\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n, g_0, J)$ be the projective complex space provided of his canonical Kählerian structure, $P : (\mathbb{S}^{2n+1}, \mathrm{can}) \to (\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n, g_0)$ be the Riemannian submersion of Hopf, ∇ be the Levi-Civita connection of $(\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n, g_0)$ and Z be the fundamental field of the natural action of the circle on $\mathbb{S}^{2n+1}$. We have

$$\Delta^2_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n} h = \nabla^*\nabla h + 2(2nh - \mathrm{Tr}\, h g_0) + 6(h - h\circ J),$$

$$\Delta^2_{\mathbb{S}^{2n+1}} P^*h = P^*\Delta^2_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n} h + 4P^*(h\circ J) + 2P^*[\delta_1(h\circ J)\circ J] \odot i_Z\,\mathrm{can} - 4(\mathrm{Tr}\, h\circ P) i_Z\,\mathrm{can} \odot i_Z\,\mathrm{can},$$

$$\mathcal{S}^2_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n = \mathrm{Ker}\,\delta_1 \cap \mathrm{Tr}^{-1}(0) \oplus \big(\delta_1^*\big(\mathcal{S}^1_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n\big) + \mathrm{C}^\infty\big(\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n, \mathbb{C}\big) g_0\big).$$

From this and the computation done in [6], we get:

THEOREM 1. – *We have*

$$\mathrm{Spect}\,\Delta^2_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n} = \big\{4k(k+n),\ k \geqslant 0;\ 4(k+1)(k+n),\ k \geqslant 1;\ 4(k+1)(k+n-1),\ k \geqslant 0;\ 4(k^2+nk+n+1),\ k \geqslant 0\big\}.$$

Note présentée par Charles-Michel MARLE.

S0764-4442(01)02100-0/FLA

Cette Note est une suite de [6] ; il utilisera ses notations et ses résultats.

1. Introduction

Dans [10], p. 27, Lichnerowicz a introduit, pour tout $p \in \mathbb{N}$, un Laplacien Δ_M^p agissant sur l'espace des p-formes symétrique $\mathcal{S}^p M$ d'une variété différentiable M avec Δ_M^0 et Δ_M^1 qui sont les Laplaciens de Hodge–de Rham respectivement sur $\mathrm{C}^\infty(M)$ et sur $\Omega^1(M)$. Le Laplacien de Lichnerowicz $\Delta_M^2 : \mathcal{S}^2 M \to \mathcal{S}^2 M$ possède des propriétés remarquables et s'est avéré très utile pour l'étude des versions infinitésimales de différents problèmes géométriques (*voir* [3,2,11]). La connaissance du spectre de Δ_M^2 pourrait être déterminante dans la résolution de certains problèmes géométriques : dans [11], p. 61, 62], Michel a été amené à développer des techniques très sophistiquées pour trouver un minorant strict du spectre de $\Delta_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}^2$ afin de pouvoir conclure la démonstration de son théorème.

Dans [6], on a calculé le spectre avec multiplicité de $\Delta_{\mathbb{S}^n}^2$ et de $\Delta_{\mathbb{R}\mathrm{P}^n}^2$, où $\mathbb{S}^n$ est la sphère standard et $\mathbb{R}\mathrm{P}^n$ le projectif réel munis de leurs métriques canoniques. Dans cette Note, on se propose de calculer le spectre de $\Delta_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}^2$. La connaissance du spectre de $\Delta_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}^2$ nécessitant la connaissance du spectre de $\Delta_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}^1$, on va donner son spectre par une méthode qui diffère de celle donnée dans [8].

2. Préliminaires

2.1. Notations

On désigne par $(\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n, g_0, J)$ le projectif complexe muni de sa structure kählérienne canonique dont la courbure sectionnelle holomorphe est égale à 4, $P : (\mathbb{S}^{2n+1}, \mathrm{can}) \to (\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n, g_0)$ la submersion riemannienne de Hopf et ∇ la connexion de Levi-Civita de $(\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n, g_0)$; Z désigne le champ fondamental de l'action naturelle du cercle sur $\mathbb{S}^{2n+1}$, $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n, \mathbb{C})$, $\mathcal{S}^1_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n$, $\mathcal{S}^2_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n$ désignent respectivement l'espace des fonctions différentiables sur $\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n$ à valeurs complexes, l'espace des 1-formes différentiables sur $\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n$ à valeurs complexes et l'espace des 2-formes symétriques différentiables sur $\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n$ à valeurs complexes. Soient

$$\delta_0 : \mathcal{S}^1_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n \to \mathrm{C}^\infty(\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n, \mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \delta_1 : \mathcal{S}^2_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n \to \mathcal{S}^1_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n$$

les opérateurs divergence dont les adjoints formels sont donnés par :

$$\delta_0^* = \mathrm{d} \quad \text{et} \quad \delta_1^*(\cdot) = \frac{1}{2} L_{\#\cdot} g_0,$$

où $\#$ est l'isomorphisme qui identifie le cotangent au tangent grâce à la métrique. On note par $\Delta_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}^0$, $\Delta_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}^1$ et $\Delta_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}^2$ les Laplaciens de Lichnerowicz respectivement sur $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n, \mathbb{C})$, $\mathcal{S}^1_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n$ et $\mathcal{S}^2_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n$. Pour toute forme bilinéaire symétrique h, on a

$$\Delta_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}^2 h = \nabla^*\nabla h + r_{g_0}(h) - 2R(h),$$

où $r_{g_0}(h)$ et $R(h)$ sont les formes bilinéaires symétriques définies par :

$$r_{g_0}(h)(u,v) = r_{g_0}(\# i_u h, v) + r_{g_0}(\# i_v h, u), \qquad R(h)(u,v) = \sum_{i=1}^{2n} h\big(R(u,e_i)v, e_i\big),$$

avec R le tenseur de courbure associé à la métrique g_0, r_{g_0} la courbure de Ricci, $(e_1, \ldots, e_{2n})$ une base orthonormée locale et $\#$ l'isomorphisme musical associé à la métrique g_0. Le Laplacien de Lichnerowicz commute avec la trace et dans le cas d'une variété kählérienne d'Einstein avec les opérateurs divergence et avec leurs adjoints formels [10], p. 29.

Pour toute p-forme symétrique sur $\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n$, on notera $h \circ J$ la p-forme symétrique définie par :

$$h \circ J(X_1, \ldots, X_p) = h(JX_1, \ldots, JX_p).$$

Finalement, pour toute $h \in \mathbb{S}^2_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n$, il existe un couple unique (h^+, h^-) de 2-formes symétriques telles que $h = h^+ + h^-$, $h^+ \circ J = h^+$ et $h^- \circ J = -h^-$; $\mathrm{Tr}\, h$ désignera la trace de h par rapport à g_0.

2.2. Quelques formules

Dans ce sous-paragraphe, nous allons établir quelques formules qui vont jouer un rôle primordial par la suite. On a, pour tout $\alpha \in \mathbb{S}^1_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n$ et tout $h \in \mathbb{S}^2_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n$,

$$\Delta^1_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}(\alpha \circ J) = \Delta^1_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}(\alpha) \circ J, \qquad \Delta^2_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}(h \circ J) = \Delta^2_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}(h) \circ J.$$

Ceci découle de l'expression générale du Laplacien de Lichnerowicz et du fait que J commute avec le Laplacien $\nabla^*\nabla$ et le tenseur de courbure R. D'après [11], p. 36, et [6], définition 2.1, on a, pour tout $\alpha \in \mathbb{S}^1_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n$ et tout $h \in \mathbb{S}^2_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n$,

$$\Delta^1_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}\alpha = \nabla^*\nabla\alpha + 2(n+1)\alpha, \tag{1}$$

$$\Delta^2_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}h = \nabla^*\nabla h + 2(2nh - \mathrm{Tr}\, h g_0) + 6(h - h \circ J). \tag{2}$$

Ces deux formules et les propriétés des submersions riemanniennes permettront d'établir par un calcul direct les deux formules suivantes qui peuvent rentrer dans le cadre des formules établies par O'Neill [12] :

$$\Delta^1_{\mathbb{S}^{2n+1}}P^*\alpha = P^*\Delta^1_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}\alpha - \big(2\delta_0(\alpha \circ J) \circ P\big) i_Z\, \mathrm{can}, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\Delta^2_{\mathbb{S}^{2n+1}}P^*h = {} & P^*\Delta^2_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}h + 4P^*(h \circ J) + 2P^*\big[\delta_1(h \circ J) \circ J\big] \odot i_Z\, \mathrm{can} \\ & - 4(\mathrm{Tr}\, h \circ P) i_Z\, \mathrm{can} \odot i_Z\, \mathrm{can},\end{aligned} \tag{4}$$

où can désigne la métrique canonique de $\mathbb{S}^{2n+1}$ et $\odot$ le produit symétrique. Une démonstration de (4) sera donnée à la fin de cette Note.

Ces deux formules à elles seules ne permettent pas d'avoir le spectre $\Delta^1_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}$ et $\Delta^2_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}$ en fonction de $\Delta^1_{\mathbb{S}^{2n+1}}$ et $\Delta^2_{\mathbb{S}^{2n+1}}$ comme dans le cas de $\Delta^0_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}$. En réalité, on aura besoin des décompositions orthogonales suivantes (la première est vérifiée pour $n \geqslant 2$) :

$$\mathbb{S}^1_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n = \mathrm{dC}^\infty\big(\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n, \mathbb{C}\big) \oplus J\big(\mathrm{dC}^\infty\big(\mathbb{C}\mathrm{P}^n, \mathbb{C}\big)\big) \oplus \mathrm{Ker}\, \delta_0 \cap J(\mathrm{Ker}\, \delta_0), \tag{5}$$

$$\mathbb{S}^1_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\,\mathrm{P}^1 = \mathrm{dC}^\infty\big(\mathbb{C}\,\mathrm{P}^1, \mathbb{C}\big) \oplus J\big(\mathrm{dC}^\infty\big(\mathbb{C}\mathrm{P}^1, \mathbb{C}\big)\big), \tag{6}$$

$$\mathbb{S}^2_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n = \mathrm{Ker}\, \delta_1 \cap \mathrm{Tr}^{-1}(0) \oplus \big(\delta_1^*\big(\mathbb{S}^1_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n\big) + \mathrm{C}^\infty\big(\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n, \mathbb{C}\big) g_0\big). \tag{7}$$

Ces décompositions sont invariantes par les Laplaciens de Lichnerowicz puisque ces derniers commutent avec J, la trace et la divergence. Pour l'identité (7), voir [2], p. 130. Les décompositions (5)–(6) découlent du théorème de Hodge et du fait que $\mathrm{H}^1(\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n, \mathbb{R}) = 0$. En effet, puisque $\mathrm{H}^1(\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n, \mathbb{R}) = 0$, on a d'après le théorème de Hodge,

$$\mathbb{S}^1_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n = \mathrm{dC}^\infty\big(\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n, \mathbb{C}\big) \oplus \mathrm{Im}\, \delta.$$

Or, $\mathrm{Im}\, \delta \subset \mathrm{Ker}\, \delta_0$ et par compacité on déduit que $\mathrm{Im}\, \delta = \mathrm{Ker}\, \delta_0$. Soit $\alpha \in \mathbb{S}^1_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n$, $\alpha = \mathrm{d}f + \mu$ avec $\mu \in \mathrm{Ker}\, \delta_0$ et de même $\mu \circ J = \mathrm{d}h + \mu'$ avec $\mu' \in \mathrm{Ker}\, \delta_0$. Or, $\delta_0(\mathrm{d}h \circ J) = 0$ ($\delta_0(\mathrm{d}h \circ J)$ est la divergence du champ de vecteurs hamiltonien associé à h pour la structure symplectique) et donc $\delta_0(\mu' \circ J) = 0$ et on obtient l'identité (5). (6) découle de (5), du fait que $\mathrm{H}^1(\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n, \mathbb{R}) = 0$, de la dimension et de la formule $\mathrm{d}(\mu \circ J)(X, JX) = \delta_0(\mu)$ pour toute 1-forme μ et tout champ de vecteurs unitaire X.

Le spectre de $\Delta^0_{\mathbb{C}\mathrm{P}}$ est connu [4] : si $\mathcal{H}^{\mathbb{C}}_{(k,k)}$ désigne l'espace des polynômes harmoniques sur $\mathbb{C}^{n+1}$ homogènes de degré k en $(z_1,\dots,z_{n+1})$ et homogène de degré k en $(\bar z_1,\dots,\bar z_{n+1})$, si $F\in\mathcal{H}^{\mathbb{C}}_{(k,k)}$, sa restriction à $\mathbb{S}^{2n+1}$ est projetable en une fonction f sur $\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n$ et on a $\Delta^0_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n} f = 4k(n+k)f$.

3. Spectre de $\Delta^1_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}$ et $\Delta^2_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}$

3.1. Spectre de $\Delta^1_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}$

Soit $F\in\mathcal{H}^{\mathbb{C}}_{(k,k)}$ et soit f sa projection sur $\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n$. On a

$$\Delta^1_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}\,\mathrm{d}f = 4k(n+k)\mathrm{d}f, \qquad \Delta^1_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}(\mathrm{d}f\circ J) = 4k(n+k)(\mathrm{d}f\circ J).$$

On a ainsi le spectre de $\Delta^1_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}$ restreint à $\mathrm{d}\mathrm{C}^\infty(\mathbb{C}\mathrm{P}^n,\mathbb{C})\oplus J(\mathrm{d}\mathrm{C}^\infty(\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n,\mathbb{C}))$.

Remarque. – Pour $n=1$, on a obtenu complètement le spectre $\Delta^1_{\mathbb{C}\mathrm{P}^1}$ en vertu de la décomposition de $\mathcal{S}^1_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\,\mathrm{P}^1$ donnée dans (6).

Déterminons maintenant le spectre de $\Delta^1_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}$ restreint à $\mathrm{Ker}\,\delta_0\cap J(\mathrm{Ker}\,\delta_0)$.

Soit $\beta\in\mathrm{Ker}\,\delta_0\cap J(\mathrm{Ker}\,\delta_0)$ un vecteur propre de $\Delta^1_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}$ pour la valeur propre λ. On pose $\widetilde{\beta}=P^*\beta$.

D'après (3), et puisque $\delta_0(\beta\circ J)=0$, on aura $\Delta^1_{\mathbb{S}^{2n+1}}\widetilde{\beta}=\lambda\widetilde{\beta}$. D'un autre côté, et puisque β est de divergence nulle, on vérifie facilement que $\widetilde{\beta}$ est aussi de divergence nulle. $\widetilde{\beta}$ est donc un vecteur propre de $\Delta^1_{\mathbb{S}^{2n+1}}$ pour la valeur propre λ et de divergence nulle. Les valeurs propres et les sous-espaces propres de $\Delta^1_{\mathbb{S}^{2n+1}}$ restreint à $\mathrm{Ker}\,\overline{\delta_0}$ ont été caractérisés dans [6], sous-paragraphe 3.6. Il existe donc $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $\lambda=k(k+2n)+2n-1$. Puisque $\widetilde{\beta}$ est projetable, k serait nécessairement impaire, soit $\lambda=4(p+1)(p+n)$ avec p un entier.

En vertu de ce qui précède on obtient le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1. – *Le spectre de $\Delta^1_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}$ est*

$$\mathrm{Spect}\Delta^1_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}=\big\{4k(n+k),\ k\geqslant 1;\ 4(k+1)(k+n),\ k\geqslant 0\big\}.$$

La multiplicité des valeurs propres est donnée par :

$$\mathrm{multp}\big(4k(k+n)\big)=4n(n+2k)\left(\frac{(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}\right)^2,$$

$$\mathrm{multp}(4(k+1)(k+n))=\frac{4((k+n-1)!)^2(n-1)k}{n!(n-1)!((k+1)!)^2}\big(2k^2+3(n+1)k+(n+1)^2\big).$$

Démonstration. – La multiplicité est calculée de la même manière que dans le cas de la sphère (*voir* [6]). □

3.2. Spectre de $\Delta^2_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}$

D'après le théorème 2.1 de [6], on a

$$\Delta^2_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}\circ\delta_1^*=\delta_1^*\circ\Delta^1_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}\quad\text{et}\quad\Delta^2_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}(fg_0)=\Delta^0_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}(f)g_0$$

pour toute fonction f sur $\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n$. Ces deux formules et la décomposition (7) permettent d'avoir le spectre de $\Delta^2_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}$ restreint à $\big(\delta_1^*(\mathcal{S}^1_{\mathbb{C}}\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n)+\mathrm{C}^\infty(\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n,\mathbb{C})g_0\big)$.

Dans ce qui suit, on va déterminer le spectre de $\Delta^2_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}$ restreint à $\mathrm{Ker}\,\delta_1\cap\mathrm{Tr}^{-1}(0)$.

Soit $h\in\mathrm{Ker}\,\delta_1\cap\mathrm{Tr}^{-1}(0)$ un vecteur propre de $\Delta^2_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}$ pour la valeur propre λ. $h\circ J$ est aussi un vecteur propre pour la valeur propre λ. On a deux cas :

1. $\delta_1(h\circ J)\neq 0$ et d'après [6] théorème 2.1, on aura $\Delta^1_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}\delta_1(h\circ J)=\lambda\delta_1(h\circ J)$, et donc $\lambda\in\operatorname{Spect}\Delta^1_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}$ et par suite $\lambda=4k(k+n)$ ou $\lambda=4(k+1)(k+n)$;
2. $\delta_1(h\circ J)=0$ et dans ce cas $h\in\operatorname{Ker}\delta_1\cap J(\operatorname{Ker}\delta_1)\cap\operatorname{Tr}^{-1}(0)$. En appliquant (4) à h et à $h\circ J$, on obtient

$$\begin{aligned}\Delta^2_{\mathbb{S}^{2n+1}}P^*h^+ + \Delta^2_{\mathbb{S}^{2n+1}}P^*h^- &= (\lambda+4)P^*h^+ + (\lambda-4)P^*h^-,\\ \Delta^2_{\mathbb{S}^{2n+1}}P^*h^+ - \Delta^2_{\mathbb{S}^{2n+1}}P^*h^- &= (\lambda+4)P^*h^- - (\lambda-4)P^*h^-.\end{aligned}$$

Soient

$$\Delta^2_{\mathbb{S}^{2n+1}}P^*h^+=(\lambda+4)P^*h^+,\qquad \Delta^2_{\mathbb{S}^{2n+1}}P^*h^-=(\lambda-4)P^*h^-.$$

Puisque h^+ et $h^-\in\operatorname{Ker}\delta_1\cap\operatorname{Tr}^{-1}(0)$, P^*h^+ et $P^*h^-\in\operatorname{Ker}\bar\delta_1\cap\operatorname{Tr}^{-1}(0)$ et d'après [6], théorème 3.2, on aura

$$P^*h^+\in G_{\lambda^2_{2k}},\quad \lambda=4\big(k^2+nk+n-1\big)=4(k+1)(k+n-1)\quad\text{et}\quad h^-=0$$

ou

$$P^*h^-\in G_{\lambda^2_{2k}},\quad \lambda=4\big(k^2+nk+n+1\big)\quad\text{et}\quad h^+=0.$$

En vertu de tout ce qui précède, on obtient le théorème :

THÉORÈME 3.2. – *On a*

$$\operatorname{Spect}\Delta^2_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}=$$
$$\big\{4k(k+n),\ k\geqslant 0;\ 4(k+1)(k+n),\ k\geqslant 1;\ 4(k+1)(k+n-1),\ k\geqslant 0;\ 4(k^2+nk+n+1),\ k\geqslant 0\big\}.$$

La méthode utilisée dans le cas de la sphère permettrait de calculer la multiplicité des valeurs propres, mais les calculs semblent difficiles.

Pour finir cette Note, on va donner une démonstration de la formule (4).

Soit D la connexion de Levi-Civita de $(\mathbb{S}^{2n+1},\mathrm{can})$ et Z le champ de vecteurs fondamental de l'action naturelle du cercle sur $\mathbb{S}^{2n+1}$. Pour tout champ de vecteurs X sur $\mathbb{S}^{2n+1}$,

$$\mathrm{D}_XZ=J_0\big(X-\langle X,Z\rangle Z\big),\tag{8}$$

où J_0 est le champ d'endomorphismes associé à la structure complexe de $\mathbb{C}^{n+1}$ et $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire usuel.

Pour tout champ de vecteurs X sur $\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n$, on notera X^b le champ de vecteurs sur $\mathbb{S}^{2n+1}$ relevé horizontal de X. Soient X et Y deux champs de vecteurs sur $\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n$. Les formules suivantes sont une conséquence de (8) et des formules classiques de O'Neill :

$$\begin{aligned}P_*\big(\mathrm{D}_{X^b}Y^b\big)&=\nabla_XY, & P_*\big(\mathrm{D}_ZY^b\big)&=JY,\\ P_*\big(\mathrm{D}_Z\mathrm{D}_ZY^b\big)&=-Y, & P_*\big(\mathrm{D}_{X^b}\mathrm{D}_{X^b}Y^b\big)&=\nabla_X\nabla_XY-g_0(JX,Y)JX.\end{aligned}\tag{9}$$

Soit $(E_1,\ldots,E_{2n})$ une base orthonormée de champs de vecteurs locaux sur $\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n$. $(E_1^b,\ldots,E_{2n}^b,Z)$ est une base orthonormée de champs de vecteurs locaux sur $\mathbb{S}^{2n+1}$. Soient h une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n$ et $\widetilde h=P^*h$. On a

$$\Delta^2_{\mathbb{S}^{2n+1}}\widetilde h=\mathrm{D}^*\mathrm{D}\widetilde h+2\big((2n+1)\widetilde h-\operatorname{Tr}\widetilde h\,\mathrm{can}\big).$$

En explicitant la formule

$$\mathrm{D}^*\mathrm{D}h=-\sum_{i=1}^{2n}\mathrm{D}^2_{(E_i^b,E_i^b)}h-\mathrm{D}^2_{(Z,Z)}h,$$

on obtient que pour tous champs de vecteurs $X,\ Y$ sur $\mathbb{S}^{2n+1}$

$$\begin{aligned}\Delta^2_{\mathbb{S}^{2n+1}}\widetilde{h}(X,Y) = \sum_{i=1}^{2n}\big[&-E_i^b\cdot E_i^b\cdot\widetilde{h}(X,Y)+2E_i^b\cdot\widetilde{h}(\mathrm{D}_{E_i^b}X,Y)+2E_i^b\cdot\widetilde{h}(X,\mathrm{D}_{E_i^b}Y)\\ &+\mathrm{D}_{\mathrm{D}_{E_i^b}E_i^b}\cdot\widetilde{h}(X,Y)-2\widetilde{h}(\mathrm{D}_{E_i^b}X,\mathrm{D}_{E_i^b}Y)-\widetilde{h}(\mathrm{D}_{E_i^b}\mathrm{D}_{E_i^b}X,Y)-\widetilde{h}(\mathrm{D}_{E_i^b}\mathrm{D}_{E_i^b}Y,X)\big]\\ &-Z\cdot Z\cdot\widetilde{h}(X,Y)+2Z\cdot\widetilde{h}(\mathrm{D}_ZX,Y)+2Z\cdot\widetilde{h}(\mathrm{D}_ZY,X)-2\widetilde{h}(\mathrm{D}_ZX,\mathrm{D}_ZY)\\ &-\widetilde{h}(\mathrm{D}_Z\mathrm{D}_ZX,Y)-\widetilde{h}(\mathrm{D}_Z\mathrm{D}_ZY,X)+2\big((2n+1)\widetilde{h}(X,Y)-\mathrm{Tr}\,\widetilde{h}\,\mathrm{can}(X,Y)\big).\end{aligned}$$

Soient X et Y deux champs de vecteurs sur $\mathbb{C}\,\mathrm{P}^n$, en remplaçant dans la formule ci-dessus et en utilisant (2) et (9), on obtient que pour tout $z\in\mathbb{S}^{2n+1}$,

$$\begin{aligned}\Delta^2_{\mathbb{S}^{2n+1}}\widetilde{h}\big(X^b(z),Y^b(z)\big) &= \Delta^2_{\mathbb{C}\mathrm{P}^n}h\big(X\big(P(z)\big),Y\big(P(z)\big)\big)+4h\big(JX\big(P(z)\big),JY\big(P(z)\big)\big),\\ \Delta^2_{\mathbb{S}^{2n+1}}\widetilde{h}\big(X^b(z),Z(z)\big) &= 2\delta_1(h\circ J)\big(JX\big(P(z)\big)\big),\\ \Delta^2_{\mathbb{S}^{2n+1}}\widetilde{h}\big(Z(z),Z(z)\big) &= -4\mathrm{Tr}\,h(P(z)).\end{aligned}$$

Ceci permet d'avoir (4).

Références bibliographiques

[1] Besse A., Manifolds all of whose Geodesics Are Closed, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1978.
[2] Besse A., Einstein Manifolds, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1987.
[3] Berger M., Ebin D., Some decomposition of the space of symmetric tensors on Riemannian manifold, J. Differ. Geom. 3 (1969) 379–392.
[4] Berger M., Gauduchon P., Mazet E., in: Le spectre d'une variété riemannienne, Lect. Notes in Math., Vol. 194, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1971.
[5] Beers B.L., Millman R.S., The spectra of the Laplace–Beltrami operator on compact, semisimple Lie groups, Amer. J. Math. 99 (4) (1975) 801–807.
[6] Boucetta M., Spectre des Laplaciens de Lichnerowicz sur les sphères et les projectifs réels, Publicacions Matemàtiques 43 (1999) (Barcelone).
[7] Gallot S., Meyer D., Opérateur de courbure et Laplaciens des formes différentielles d'une variété riemannienne, J. Math. Pures Appl. 54 (1975) 259–289.
[8] Ikeda A., Taniguchi Y., Spectra and eigenforms of Laplacian on $\mathbb{S}^n$ and $\mathrm{P}^n(\mathbb{C})$, Osaka J. Math. 15 (3) (1978) 515–546.
[9] Iwasaki I., Katase K., On the spectrum of the Laplace operator on $\bigwedge^*(\mathbb{S}^n)$, Proc. Jap. Acad. Ser. A Math. Sci. 55 (1979) 141–145.
[10] Lichnerowicz A., Propagateurs et commutateurs en relativité générale, Presses Universitaires de France, Paris, 1961 [Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 10 (1961)].
[11] Michel R., Problèmes d'analyse géométrique liés à la conjecture de Blaschke, Bull. Soc. Math. France 101 (1973) 17–69.
[12] O'Neill B., The fundamental equations of submersion, Mich. Math. J. 13 (1966) 459–469.