C. R. Acad. Sci. Paris, t. 333, Série I, p. 763–768, 2001
Géométrie différentielle/*Differential Geometry*

Compatibilité des structures pseudo-riemanniennes et des structures de Poisson

Mohamed BOUCETTA

Faculté des sciences et techniques, B.P. 618, Marrakech, Maroc
Courriel : boucetta@fstg-marrakech.ac.ma

(Reçu le 6 septembre 2001, accepté le 13 septembre 2001)

Résumé. Dans cette Note, nous allons introduire deux notions naturelles et indépendantes de compatibilité entre une métrique pseudo-riemannienne et une structure de Poisson et ce en utilisant la notion de dérivée contravariante introduite dans [1], nous allons donner les premières propriétés de couple de métrique et de structure de Poisson compatible pour l'une où l'autre et finalement, nous allons donner des exemples de telles structures compatibles. © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Compatibility between pseudo-Riemannian structure and Poisson structure

Abstract. *We will introduce two notions of compatibility between pseudo-Riemannian metric and Poisson structure using the notion of contravariant connection introduced in* [1], *we will study some properties of manifold endowed with such compatible structures and we will give some examples.* © 2001 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

Abridged English version

Let M be a manifold, g a pseudo-Riemannian metric on M, and π a field of bivectors on M; π determines a field of endomorphisms $\#_\pi : \mathrm{T}^*M \to \mathrm{T}M$ by $\beta(\#_\pi(\alpha)) = \pi(\alpha, \beta)$ and a bracket on differential 1-forms given by:

$$[\alpha, \beta]_\pi = L_{\#_\pi(\alpha)}\beta - L_{\#_\pi(\beta)}\alpha - \mathrm{d}\big(\pi(\alpha, \beta)\big).$$

The metric g induces the canonical fields of isomorphisms $b_g : \mathrm{T}M \to \mathrm{T}^*M$ and $\#_g : \mathrm{T}^*M \to \mathrm{T}M$. We denote by $\widetilde{g}$ the metric on T^*M such that $\widetilde{g}(\alpha, \beta) = g(\#_g(\alpha), \#_g(\beta))$ and by $J : \mathrm{T}^*M \to \mathrm{T}^*M$ the field of endomorphisms given by $\pi(\alpha, \beta) = \widetilde{g}(J\alpha, \beta) = -\widetilde{g}(\alpha, J\beta)$.

Now, we may associate to the couple (g, π) two contravariant linear connections (*see* [1] for the definition of contravariant connection). The first one, denoted by ∇^π, is given by:

$$\nabla^\pi_\alpha \beta = \nabla_{\#_\pi(\alpha)}\beta;$$

Note présentée par Charles-Michel MARLE.

S0764-4442(01)02132-2/FLA

∇ being the Levi-Civita connection of g. The second one, denoted by D^π, is given by:

$$2\widetilde{g}\big(\mathrm{D}^\pi_\alpha\beta,\gamma\big) = \#_\pi(\alpha)\cdot\widetilde{g}(\beta,\gamma) + \#_\pi(\beta)\cdot\widetilde{g}(\alpha,\gamma) - \#_\pi(\gamma)\cdot\widetilde{g}(\alpha,\beta) + \widetilde{g}\big([\gamma,\alpha]_\pi,\beta\big) + \widetilde{g}\big([\gamma,\beta]_\pi,\alpha\big) + \widetilde{g}\big([\alpha,\beta]_\pi,\gamma\big).$$

We have $\mathrm{D}^\pi\widetilde{g} = \nabla^\pi\widetilde{g} = 0$. Now, we can introduce two notions of compatibility of the couple (g,π).

DÉFINITION 1. – Let M be a manifold with a pseudo-Riemannian metric g and a field of bivectors π.
1) The couple (g,π) is ∇^π-*compatible* if $\nabla^\pi\pi = 0$.
2) The couple (g,π) is D^π-*compatible* if $\mathrm{D}^\pi\pi = 0$.

We have

$$[\pi,\pi]_S(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{2}\big\{\widetilde{g}\big(\alpha, D^\pi_\gamma(J)(\beta)\big) + \widetilde{g}\big(\beta, D^\pi_\alpha(J)(\gamma)\big) + \widetilde{g}\big(\gamma, D^\pi_\beta(J)(\alpha)\big)\big\}$$
$$= \widetilde{g}\big(\alpha, \nabla^\pi_\gamma(J)(\beta)\big) + \widetilde{g}\big(\beta, \nabla^\pi_\alpha(J)(\gamma)\big) + \widetilde{g}\big(\gamma, \nabla^\pi_\beta(J)(\alpha)\big);$$

$[\pi,\pi]_S$ is the Schouten–Nijenhuis bracket. If (g,π) is compatible for ∇^π or D^π, then π determines a Poisson structure on M. In this Note, we will study some properties of manifold endowed with such compatible structures and we will give some examples.

---

1. Deux conditions naturelles de compatibilité entre une structure pseudo-riemannienne et une structure de Poisson

À notre connaissance, la notion de compatibilité entre une structure pseudo-riemannienne et une structure de Poisson n'a jamais été étudié bien que ce soit une notion naturelle et bien qu'il soit établi que la compatibilité entre deux structures engendre des situations géométriques très riches (compatibilité entre deux structures de Poisson, compatibilité entre une métrique et une structure symplectique, variétés kählériennes). La difficulté pour trouver une telle notion est le fait que la métrique et le tenseur de Poisson appartiennent à deux univers différents, l'un covariant et l'autre contravariant. Dans ce qui suit, nous allons donner deux conditions de compatibilité indépendantes en préviligéant le point de vue contravariant. Pour les notions de base sur les structures de Poisson, voir par exemple [4], et pour la notion de dérivée contravariante, voir [1].

1.1. Dérivées contravariantes associées à une métrique pseudo-riemannienne et un champ de bivecteurs

Soit M une variété différentiable munie d'une métrique pseudo-riemannienne g et d'un champ de bivecteurs π.

Au champ de bivecteurs π est associé, d'une manière naturelle, un champ d'endomorphismes $\#_\pi : \mathrm{T}^*M \to \mathrm{T}M$ par $\beta(\#_\pi(\alpha)) = \pi(\alpha,\beta)$ et un crochet sur les 1-formes défini par :

$$[\alpha,\beta]_\pi = L_{\#_\pi(\alpha)}\beta - L_{\#_\pi(\beta)}\alpha - \mathrm{d}\big(\pi(\alpha,\beta)\big).$$

Le crochet de Schouten–Nijenhuis $[\pi,\pi]_S$ est l'obstruction à ce que $\#_\pi$ soit un homorphisme entre $\Omega^1(M)$ munie du crochet $[\ ,\ ]_\pi$ et $\mathcal{X}(M)$ muni de crochet de Lie. Nous avons

$$[\pi,\pi]_S(\alpha,\beta,\gamma) = \gamma\big[\#_\pi\big([\alpha,\beta]_\pi\big) - \big[\#_\pi(\alpha),\#_\pi(\beta)\big]\big].$$

Le champ de bivecteurs π définit une structure de Poisson sur M si et seulement si $[\pi,\pi]_S = 0$.

Soient $b_g : \mathrm{T}M \to \mathrm{T}^*M$ et $\#_g : \mathrm{T}^*M \to \mathrm{T}M$ les isomorphismes fibrés définis par g, soit $\widetilde{g}$ la métrique sur le fibré cotangent définie par :

$$\widetilde{g}(\alpha,\beta) = g\big(\#_g(\alpha),\#_g(\beta)\big)$$

et soit $J : \mathrm{T}^*M \to \mathrm{T}^*M$ le champ d'endomorphismes défini par :

$$\pi(\alpha,\beta) = \widetilde{g}(J\alpha,\beta) = -\widetilde{g}(\alpha,J\beta).$$

On considère aussi le champ d'endomorphismes $\widetilde{J} = \#_g \circ J \circ b_g$.

Maintenant, nous sommes en mesure d'associer au couple (g,π) deux dérivées contravariantes. La première, qu'on notera ∇^π, est définie à l'aide de la connexion de Levi-Civita ∇ de g par :

$$\nabla^\pi_\alpha\beta = \nabla_{\#_\pi(\alpha)}\beta.$$

La deuxième, qu'on notera D^π, est donnée par la formule

$$\begin{aligned}2\widetilde{g}\big(\mathrm{D}^\pi_\alpha\beta,\gamma\big) &= \#_\pi(\alpha)\cdot\widetilde{g}(\beta,\gamma) + \#_\pi(\beta)\cdot\widetilde{g}(\alpha,\gamma) - \#_\pi(\gamma)\cdot\widetilde{g}(\alpha,\beta)\\ &\quad + \widetilde{g}\big([\gamma,\alpha]_\pi,\beta\big) + \widetilde{g}\big([\gamma,\beta]_\pi,\alpha\big) + \widetilde{g}\big([\alpha,\beta]_\pi,\gamma\big).\end{aligned} \tag{1}$$

La proposition suivante donne les premières propriétés des deux connexions ∇^π et D^π et permet de les comparer.

PROPOSITION 1. – *Nous avons* :
1) ∇^π *et* D^π *sont métriques, i.e.*

$$\mathrm{D}^\pi\widetilde{g}(\alpha,\beta,\gamma) = \#_\pi(\alpha)\cdot\widetilde{g}(\beta,\gamma) - \widetilde{g}\big(\mathrm{D}^\pi_\alpha\beta,\gamma\big) - \widetilde{g}\big(\beta,\mathrm{D}^\pi_\alpha\gamma\big) = 0$$

et la même formule pour ∇^π ;
2) D^π *n'a pas de torsion* ; *en revanche,* ∇^π *a de la torsion et nous avons*

$$\widetilde{g}\big([\alpha,\beta]_\pi - \big(\nabla^\pi_\alpha\beta - \nabla^\pi_\beta\alpha\big),\gamma\big) = g\big(\nabla_{\#_g(\gamma)}(\widetilde{J})\big(\#_g(\alpha)\big),\#_g(\beta)\big);$$

3)
$$\begin{aligned}[\pi,\pi]_S(\alpha,\beta,\gamma) &= \frac{1}{2}\big\{\widetilde{g}\big(\alpha,D^\pi_\gamma(J)(\beta)\big) + \widetilde{g}\big(\beta,D^\pi_\alpha(J)(\gamma)\big) + \widetilde{g}\big(\gamma,D^\pi_\beta(J)(\alpha)\big)\big\}\\ &= \widetilde{g}\big(\alpha,\nabla^\pi_\gamma(J)(\beta)\big) + \widetilde{g}\big(\beta,\nabla^\pi_\alpha(J)(\gamma)\big) + \widetilde{g}\big(\gamma,\nabla^\pi_\beta(J)(\alpha)\big);\end{aligned}$$

4) *on pose* $T(\alpha,\beta) = [\alpha,\beta]_\pi - (\nabla^\pi_\alpha\beta - \nabla^\pi_\beta\alpha)$ *et* $\widetilde{\nabla}^\pi_\alpha\beta = \nabla^\pi_\alpha\beta + \frac{1}{2}T(\alpha,\beta)$; $\widetilde{\nabla}^\pi$ *est une dérivée contravariante sans torsion et nous avons*

$$\widetilde{\nabla}^\pi_\alpha\beta - \mathrm{D}^\pi_\alpha\beta = \frac{1}{2}b_g\big[\nabla_{\#_g(\alpha)}(\widetilde{J})\big(\#_g(\beta)\big) + \nabla_{\#_g(\beta)}(\widetilde{J})\big(\#_g(\alpha)\big)\big];$$

5) *on pose* $S(\alpha,\beta) = \widetilde{\nabla}^\pi_\alpha\beta - \mathrm{D}^\pi_\alpha\beta$. *Nous avons*

$$\widetilde{g}\big(\mathrm{D}^\pi_\alpha(J)(\beta) - \frac{1}{2}\nabla^\pi_\alpha(J)(\beta),\gamma\big) + \frac{1}{2}[\pi,\pi]_S(\alpha,\beta,\gamma) = \widetilde{g}\big(S(\alpha,\gamma),\widetilde{J}\beta\big) - \widetilde{g}\big(S(\alpha,\beta),\widetilde{J}\gamma\big).$$

Démonstration. – Le 1) et la première partie de 2) est un calcul trivial, la deuxième partie de 2) est un calcul direct et le reste découle facilement de ce cette formule. □

1.2. Définition de la compatibilité entre une structure pseudo-riemannienne et une structure de Poisson

Les connexions ∇^π et D^π sont métriques, il est alors naturel de poser la définition suivante :

DÉFINITION 2. – Soit M une variété différentiable munie d'une métrique pseudo-riemannienne et d'un champ de bivecteurs π.
1) On dira que le couple (g,π) est ∇^π-*compatible* si $\nabla^\pi\pi = 0$ ou, d'une manière équivalente, $\nabla^\pi(J) = 0$.
2) On dira que le couple (g,π) est D^π-*compatible* si $\mathrm{D}^\pi\pi = 0$ ou, d'une manière équivalente, $\mathrm{D}^\pi(J) = 0$.

Remarques. – 1) Si le couple (g,π) est compatible pour l'une ou l'autre et si f est une fonction de Casimir de π, alors le couple $(g,f\pi)$ est compatible.

2) D'après les relations 3) de la proposition 1, la condition de compatibilité entraîne l'intégrabilité du tenseur π.

3) D'après 5) de la proposition 1, il semblerait que ces deux notions soient indépendantes. Nous verrons sur un exemple à la fin de cette Note qu'elles le sont effectivement.

4) Supposons que $\#_\pi$ soit inversible ce qui équivaut à J ou $\widetilde{J}$ inversible.

Le couple (g,π) est ∇^π-compatible si et seulement si la 2-forme $\omega(u,v)=\pi(\#_\pi^{-1}(u),\#_\pi^{-1}(v))$ est parallèle pour la connexion de Levi-Civita de g.

En utilisant (1), il est facile d'établir la formule

$$\mathrm{D}^\pi_\alpha\beta=\#_\pi^{-1}\big(\nabla^{\widetilde{J}}_{\#_\pi(\alpha)}\#_\pi(\beta)\big),$$

où $\nabla^{\widetilde{J}}$ est la connexion de Levi-Civita de la métrique $g^{\widetilde{J}}(u,v)=g(\widetilde{J}^{-1}(u),\widetilde{J}^{-1}(v))$. Le couple (g,π) est D^π-compatible si et seulement si la 2-forme $\omega(u,v)=\pi(\#_\pi^{-1}(u),\#_\pi^{-1}(v))$ est parallèle pour la connexion $\nabla^{\widetilde{J}}$ qui est aussi la connexion de Levi-Civita de g.

Ainsi, les deux conditions coincident dans le cas symplectique et nous retrouvons la notion de compatibilité étudiée dans [3].

1.3. Interprétation géométrique de la compatibilité du couple (g,π)

Il est clair que le couple (g,π) est ∇^π-compatible si et seulement si le tenseur de Poisson est invariant par transport parallèle (associé à la connexion de Levi-Civita de g) le long des courbes tangentes aux feuilles symplectiques.

À la dérivée contravariante D^π est associée une notion de transport parallèle le long de courbes cotangentes (*voir* [1]). Une courbe cotangente est un couple (γ,α) où $\gamma:[0,1]\to S$ est une courbe différentiable dans une feuille symplectique S et $\alpha:[0,1]\to \mathrm{T}^*M$ différentiable telle que, pour tout $t\in[0,1]$, $\#_\pi(\alpha(t))=(\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}t)(t)$. À chaque courbe cotangente (γ,α) est associé un isomorphisme d'espaces vectoriels $\tau_{(\gamma,\alpha)}:\mathrm{T}^*_{\gamma(0)}M\to\mathrm{T}^*_{\gamma(1)}M$. Le couple (g,π) est D^π-compatible si et seulement si $\tau_{(\gamma,\alpha)}$ est une isométrie qui commute avec J et ce pour toute courbe cotangente et toute feuille symplectique.

2. Compatibilité et feuilletage symplectique

Soit M une variété différentiable munie d'une métrique g et d'un champ de bivecteurs π. On reprend les notations et les définitions de la section précédente.

On suppose que le couple (g,π) est compatible (pour l'une ou pour l'autre des notions) et on considère S une feuille symplectique du feuilletage défini par la structure de Poisson et on note ω_S la forme symplectique de S.

Si le couple (g,π) est ∇^π-compatible, il est facile de voir que S est une sous-variété totalement géodésique et la forme symplectique est parallèle pour la restriction de ∇ à S.

On suppose maintenant que le couple (g,π) est D^π-compatible. Pour tout couple de champs de vecteurs X, Y tangents à S, on pose

$$\nabla^S_XY=\#_\pi\big(\mathrm{D}^\pi_\alpha\beta\big), \tag{2}$$

où α, β sont deux 1-formes telles que $\#_\pi(\alpha)=X$ et $\#_\pi(\beta)=Y$. De la formule

$$\#_\pi\big(\mathrm{D}^\pi_\alpha\beta\big)=\#_\pi\big(\mathrm{D}^\pi_\beta\alpha\big)+\big[\#_\pi(\alpha),\#_\pi(\beta)\big]$$

et du fait que $\mathrm{D}^\pi\pi=0$, on déduit que

$$\#_\pi(\alpha)=0\quad\text{ou}\ \#_\pi(\beta)=0$$

entraîne que $\#_\pi(\mathrm{D}^\pi_\alpha\beta)=0$. Il en découle que ∇^S définit une connexion covariante sur S. Un calcul direct permet de montrer que $\nabla^S\omega_S=0$ et si la restriction de g à S est non dégénérée, ∇^S est la connection de Levi-Civita de la restriction de g à S. Les feuilles symplectiques ne sont pas en général totalement géodésiques.

Remarque. – Si le couple (g,π) est compatible (pour l'une ou pour l'autre des notions) et si $J^3=-J$ alors toutes les feuilles symplectiques sont des variétés kählériennes.

3. Tenseur de courbure de D^π

Soit M une variété différentiable munie d'une métrique g et d'un champ de bivecteurs π. On reprend les notations et définitions du paragraphe 1.

La connexion contravariante D^π est sans torsion et comme dans le cas covariant, on lui associe un tenseur de courbure qu'on notera R^π et un tenseur de Ricci qu'on notera r^π par les formules

$$\mathrm{R}^\pi(\alpha,\beta)=\mathrm{D}^\pi_{[\alpha,\beta]_\pi}-\left(\mathrm{D}^\pi_\alpha\mathrm{D}^\pi_\beta-\mathrm{D}^\pi_\beta\mathrm{D}^\pi_\alpha\right)\quad\text{et}\quad \mathrm{r}^\pi(\alpha,\beta)=\mathrm{Tr}\big(\gamma\to\mathrm{R}^\pi(\alpha,\gamma)\beta\big).$$

Ces deux tenseurs contravariants vérifient les mêmes formules que dans le cas covariant.

On suppose que le couple (g,π) est D^π-compatible et on considère S une feuille symplectique et on note R^S et r^S respectivement le tenseur de courbure et le tenseur de Ricci de la connexion ∇^S définie par (2). Alors on a clairement, en vertu de (2),

$$\mathrm{R}^S(X,Y)Z=\#_\pi\big(\mathrm{R}^\pi(\alpha,\beta)\gamma\big)$$

avec $X=\#_\pi(\alpha)$ et ainsi de suite.

Pour la courbure de Ricci, on remarque d'abord que $\#_\pi$ réalise un isomorphisme entre $\mathrm{Im}\,J$ et $\mathrm{Im}\,\widetilde{J}=\mathrm{T}S$ et si on note $\#_\pi^{-1}$ son isomorphisme inverse, un calcul direct nous donne la formule

$$\mathrm{r}^S(X,Y)=\mathrm{r}^\pi\big(\#_\pi^{-1}(X),\#_\pi^{-1}(Y)\big).$$

Ces deux formules sont intéressantes dans la mesure où elles permettent d'utiliser un tenseur global R^π pour écrire des propriétés des feuilles symplectiques. Par exemple, si $\mathrm{r}^\pi=\lambda\widetilde{g}$ (ici λ est nécessairement une fonction de Casimir de la structure de Poisson) alors toutes les feuilles symplectiques sont des variétés d'Einstein.

Pour finir ce paragraphe, on remarque que, dans le cas de D^π-compatibilité, r^π vérifie

$$\mathrm{r}^\pi(\alpha,J\beta)=-\mathrm{r}^\pi(J\alpha,\beta)$$

et définit donc un champ de bivecteurs qu'on notera π^{r} par la formule

$$\pi^{\mathrm{r}}(\alpha,\beta)=\mathrm{r}^\pi(J\alpha,\beta).$$

Comme dans le cas kählérien, on a

$$[\pi,\pi^{\mathrm{r}}]_S=0$$

et on obtient donc une classe de cohomologie pour la cohomologie de Poisson.

4. Exemples de couples compatibles

Soit (M,g) une variété pseudo-riemannienne et U un champ de Killing de g. On définit le champ d'endomorphismes $\widetilde{J}:\mathrm{T}M\to\mathrm{T}M$ par

$$\widetilde{J}X=\nabla_XU,$$

où ∇ est la connexion de Levi-Civita de g ; $\widetilde{J}$ est anti-symétrique par rapport à g et, si on considère $J = \#_g \circ \widetilde{J} \circ b_g$, on a un champ de bivecteurs par

$$\pi(\alpha, \beta) = g\big(\widetilde{J}\#_g(\alpha), \#_g(\beta)\big).$$

On notera R le tenseur de courbure de g.

PROPOSITION 2. – 1) *Le couple* (g, π) *est* ∇^π*-compatible si et seulement si*

$$\mathrm{R}\big(U, \widetilde{J}X\big)Y = 0$$

pour tout couple de champs de vecteurs X, Y *sur* M.
2) *Le couple* (g, π) *est* D^π*-compatible si et seulement si*

$$g\big(\mathrm{R}(Y, Z)U, \widetilde{J}X\big) + g\big(\mathrm{R}(X, U)Y, \widetilde{J}Z\big) + g\big(R(U, X)Z, \widetilde{J}Y\big) = 0$$

pour tout triple de champs de vecteurs X, Y, Z *sur* M.

Démonstration. – Le point 1) découle immédiatement du fait que $\nabla_X(\widetilde{J})(Y) = \mathrm{R}(U, X)Y$ pour tout couple de champs de vecteurs X, Y ; quant à 2), il découle aussi de cette relation et de la formule 5) de la proposition 1. $\square$

Un cas particulier où on peut expliciter des exemples est le cas où M est un groupe de Lie G, g une pseudo-métrique bi-invariante et U un champ invariant à gauche associé à un vecteur u de l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G. Dans ce cas, on a :

PROPOSITION 3. – 1) *Le couple* (g, π) *est* ∇^π*-compatible si et seulement si*

$$\big[\big[u, [x, u]\big], y\big] = 0 \tag{3}$$

pour tout couple de vecteurs x, y *dans* $\mathcal{G}$.
2) *Le couple* (g, π) *est* D^π*-compatible si et seulement si*

$$\big[[u, x], [u, y]\big] = 0 \tag{4}$$

pour tout couple de vecteurs x, y *dans* $\mathcal{G}$.

Démonstration. – Découle de la proposition 2 et du fait que dans ce cas $\mathrm{R}(X, Y) = \frac{1}{4}[X, Y]$ pour tout couple de champs de vecteurs X, Y invariants à gauche. $\square$

Les algèbres de Lie munies de pseudo-métriques bi-invariantes ont été étudiées dans [2]. Dans ce travail on trouve notamment l'exemple de $\mathbb{R}^5$ munie de la structure d'algèbre de Lie donnée par :

$$[e_1, e_5] = e_4 - e_3, \quad [e_2, e_5] = -e_1 + e_3 + e_4, \quad [e_1, e_2] = e_3,$$

et les autres tous nuls. Il est facile de voir que tout vecteur dans cette algèbre de Lie vérifie (4).
D'un autre côté, il est facile de vérifier sur ce genre d'exemples que les conditions (3) et (4) sont indépendantes.

Références bibliographiques

[1] Fernandes R.L., Connections in Poisson geometry 1: holonomy and invariants, J. Differ. Geom. 54 (2000) 303–366.
[2] Medina A., Groupes de Lie munis de pseudo-métriques de Riemann bi-invariantes, Séminaire Montpellier, 1981-1982.
[3] Rakotondralambo J., Compatibilité d'une forme symplectique et d'une pseudo-métrique, Thèse de l'université de Pau, 1997.
[4] Vaisman I., Lecture on the Geometry of Poisson Manifold, Progr. in Math., Vol. 118, Birkhäuser, Berlin, 1994.