C. R. Acad. Sci. Paris, t. 326, Série I, p. 1403-1406, 1998
Géométrie différentielle/*Differential Geometry*

# Courbure sectionnelle et intégrales premières symétriques du flot géodésique : généralisation d'un théorème de S. Bochner

**Mohamed BOUCETTA**

Faculté des sciences et techniques Gueliz, département de mathématiques, B.P. 618, Marrakech, Maroc
Courriel : fstg@cybernet.net.ma

(Reçu le 15 décembre 1997, accepté après révision le 25 mai 1998)

**Résumé.** Soit $(M, g)$ une variété riemannienne. Nous montrons que l'espace vectoriel $\mathcal{G}$ des formes symétriques invariantes par le flot géodésique est une algèbre de Lie contenant (comme sous-algèbre) l'algèbre des champs de Killing ainsi que l'espace vectoriel des formes symétriques parallèles comme sous-algèbre abélienne. Dans un deuxième temps, nous donnons une décomposition de Weitzenböck d'un certain laplacien sur les formes symétriques et en déduisons une généralisation d'un théorème de S. Bochner [2]. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

***Sectional curvature and symmetric first integrals of geodesic flow: a generalization of S. Bochner theorem***

**Abstract.** *Let $(M, g)$ be a Riemannian manifold. We prove that the space of symmetric tensors invariant under the geodesic flow, is a Lie algebra which contains, as a subalgebra, the Lie algebra of Killing vector fields, and which also contains the space of parallel symmetric tensors as an Abelian subalgebra. Morever, we give a Weitzenböck decomposition of some Laplace–Beltrami operator on symmetric tensors and prove a vanishing theorem which generalizes a theorem due to S. Bochner* [2]. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Toutes les structures considérées sont de classe $C^\infty$.

## 1. Algèbre de Lie des formes symétriques invariantes par le flot géodésique

Soit $(M, g)$ une variété riemannienne. Soit $D$ sa connexion de Levi-Civita. Soient $\flat_g : TM \to T^*M$ l'isomorphisme défini par $g$ et $\# : T^*M \to TM$ son isomorphisme inverse. Pour toute fonction $h \in C^\infty(TM)$, on notera $Z_h$ le champ de vecteurs sur $TM$ défini par :

$$i_{Z_h} \mathrm{d}\alpha_g = -\mathrm{d}h,$$

avec $\alpha_g = (\flat_g)^* \alpha$ et $\alpha$ étant la 1-forme de Liouville sur $T^*M$.

**Note présentée par Charles-Michel MARLE.**

Pour tout couple de fonctions $(h_1, h_2)$ sur T$M$, le crochet de Poisson de $h_1$ et $h_2$ est défini par :

$$\{h_1, h_2\} = \mathrm{d}\alpha_g(Z_{h_1}, Z_{h_2}).$$

Le crochet de Poisson munit $\mathrm{C}^\infty(\mathrm{T}M)$ d'une structure d'algèbre de Lie.

Le flot géodésique est le champ de vecteurs $Z_g$ défini par :

$$i_{Z_g}\mathrm{d}\alpha_g = -\mathrm{d}E,$$

où $E$ est la fonction énergie définie par $E(v) = \frac{1}{2}g(v, v)$.

Pour tout entier naturel $p$, la connexion de Levi-Civita définit un opérateur différentiel $\mathrm{D}_p$ : $\mathrm{C}^\infty(\bigotimes^p \mathrm{T}^*M) \to \mathrm{C}^\infty(\bigotimes^{p+1} \mathrm{T}^*M)$. On notera $\mathrm{D}_p^*$ son adjoint formel pour la structure de fibré euclidien définie sur $\bigotimes^p \mathrm{T}^*M$ par la métrique $g$.

Soit $\mathcal{S}^pM$ le $\mathrm{C}^\infty(M)$-module des formes symétriques sur $M$. En symétrisant l'opérateur D, on obtient un opérateur différentiel $\delta_p^*$ : $\mathcal{S}^pM \to \mathcal{S}^{p+1}M$ défini par :

$$\delta_p^* h(X_1, \ldots, X_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} \mathrm{D}_{X_i} h(X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_{p+1}).$$

Soit $\delta_p$ : $\mathcal{S}^{p+1}M \to \mathcal{S}^pM$ son adjoint formel.

Pour toute $h \in \mathcal{S}^pM$, on définit la fonction $\widetilde{h}$ sur T$M$ par :

$$\widetilde{h}(v) = \frac{1}{p} h(v, \ldots, v).$$

PROPOSITION 1.1. – Soit $h \in \mathcal{S}^pM$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $Z_g(\widetilde{h}) = 0$,

ii) $\delta_p^*(h) = 0$.

On notera, pour tout entier naturel $p$, $\mathcal{G}_p = \operatorname{Ker}\delta_p^*$ et $\mathcal{P}_p = \operatorname{Ker} D_p$. On a clairement $\mathcal{P}_p \subset \mathcal{G}_p$. On pose :

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathcal{G}_p \quad \text{et} \quad \mathcal{P} = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathcal{P}_p.$$

Pour toute 1-forme $\alpha$ sur $M$, $\delta_1^*\alpha = L_{\#\alpha}g$ et $\#(\mathcal{G}_1)$ est donc l'algèbre de Lie des champs de Killing sur $M$.

Pour tout $h \in \mathcal{S}^pM$, tout $v \in \mathrm{T}M$ et tout $q < p$, on notera $i_v^q h$ le produit intérieur $q$ fois de $h$ par $v$.

PROPOSITION 1.2. – *Soient $h_1 \in \mathcal{G}_p$ et $h_2 \in \mathcal{G}_q$. Le crochet de Poisson de $\widetilde{h}_1$ et $\widetilde{h}_2$ est donné par :*

$$\{\widetilde{h}_1, \widetilde{h}_2\}(v) = g(\#i_v^{q-1}h_2, \#i_v^{p-1}D_v h_1) - g(\#i_v^{p-1}h_1, \#i_v^{q-1}D_v h_2).$$

*En particulier, si $h_1$ et $h_2$ sont parallèles, alors $\{\widetilde{h}_1, \widetilde{h}_2\} = 0$.*

Soient $h_1 \in \mathcal{G}_p$ et $h_2 \in \mathcal{G}_q$. On définit la $(p+q-1)$-forme symétrique par :

$$\begin{aligned}[h_1, h_2](X_1, \ldots, X_{p+q-1}) = {} & \frac{1}{(p+q-1)!} \sum_{\sigma \in S_{p+q-1}} \\ & g(\#i_{X_{\sigma(1)}} \cdots i_{X_{\sigma(q-1)}} h_2, \#i_{X_{\sigma(q)}} \cdots i_{X_{\sigma(p+q-2)}} \mathrm{D}_{X_{\sigma(p+q-1)}} h_1) \\ & - g(\#i_{X_{\sigma(1)}} \cdots i_{X_{\sigma(p-1)}} h_1, \#i_{X_{\sigma(p)}} \cdots i_{X_{\sigma(p+q-2)}} \mathrm{D}_{X_{\sigma(p+q-1)}} h_2).\end{aligned}$$

D'après la proposition 1.2, on a :

$$\widetilde{[h_1, h_2]}(v) = \frac{1}{p+q-1}\{\widetilde{h}_1, \widetilde{h}_2\}(v).$$

Nous avons donc :

PROPOSITION 1.3. – *$(\mathcal{G}, [\cdot,\cdot])$ est une algèbre de Lie et $\mathcal{P}$ en est une sous-algèbre de Lie abélienne.*

Cette structure d'algèbre de Lie sur $\mathcal{G}$ généralise le crochet de Lie des champs de vecteurs défini sur $\mathcal{G}_1$, identifié à l'algèbre des champs de Killing. Plus précisément, on a :

PROPOSITION 1.4. – *Soit $h \in \mathcal{G}_p$ et soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{G}_1$. On a les formules :*
i) $\#[\alpha_1, \alpha_2] = [\#\alpha_1, \#\alpha_2]$,
ii) $[\alpha_1, h] = L_{\#\alpha_1} h$.

## 2. Généralisation d'un théorème de Bochner

Soit $(M, g)$ une variété riemannienne compacte. Les notations et définitions sont celles du paragraphe précédent.

LEMME 2.1. – *Pour tout entier $p > 0$ et pour tout $h \in S^p M$, on a :*

$$\delta_p \circ \delta_p^* h - \delta_{p-1}^* \circ \delta_{p-1} h = \mathrm{D}_p^* \mathrm{D}_p h - K_p(h),$$

*avec*

$$\begin{aligned} K_p(h)(X_1, \ldots, X_p) = &\sum_{i=1}^{p} \mathrm{r}(X_i, \# i_{X_1 \widehat{X}_i X_p} h) \\ &- \mathrm{Tr}_g[(U, V) \mapsto \sum_{i \neq j} h(\mathrm{R}(X_i, U)X_j, V, X_1, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_p)], \end{aligned}$$

*$\mathrm{R}$ et $\mathrm{r}$ désignent respectivement la courbure tensorielle et la courbure de Ricci de $g$ et $\mathrm{Tr}_g$ désigne la trace par rapport à $g$.*

*Remarque.* – L'opérateur $K_p$ apparaît dans la définition du laplacien $\Delta_L$ de Lichnerowicz ([3], [4]) et plus précisément, on a :

$$\Delta_L = \mathrm{D}^* \mathrm{D} + K_p.$$

LEMME 2.2. – *Soient $h \in S^p M$ et $m \in M$. On désignera par $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$ le produit scalaire défini par la métrique $g$ dans la fibre de $\bigotimes^p \mathrm{T}^* M$ au-dessus de $m$. Alors :*
i) *si la courbure sectionnelle de $g$ en $m$ est positive (resp. négative), alors $\langle K_p(h), h \rangle_m$ est positif (resp. négatif);*
ii) *si la courbure sectionnelle en $m$ est partout non nulle, alors*

$$\langle K_p(h), h \rangle_m = 0 \iff h = \begin{cases} 0 & si \quad p = 2q+1, \\ cg^q & si \quad p = 2q, \end{cases}$$

*où $g^q$ est le produit symétrique $q$ fois de la métrique $g$, et $c$ est une constante.*

D'après le lemme 2.1, pour tout $h \in \mathcal{G}_p$, on a :

$$\int_M \langle K_p(h), h \rangle \mu_g = \langle \mathrm{D}_p h, \mathrm{D}_p h \rangle + \langle \delta_{p-1} h, \delta_{p-1} h \rangle. \qquad (*)$$

De cette formule et du lemme 2.2, on déduit :

THÉORÈME 2.1. – *Soit* $(M, g)$ *une variété riemannienne compacte. Soit* $\mathcal{G} = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathcal{G}_p$ *l'algèbre de Lie des formes symétriques invariantes par le flot géodésique, et soit* $\mathcal{P} = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathcal{P}_p$ *l'algèbre abélienne des formes symétriques parallèles.*

i) *Si la courbure sectionnelle est partout non nulle en un point* $m$*, alors :*

$$\mathcal{P}_p = \begin{cases} 0 & si \quad p = 2q+1 \\ Rg^q & si \quad p = 2q. \end{cases}$$

ii) *Si la courbure sectionnelle est négative, alors* $\mathcal{G} = \mathcal{P}$.

iii) *Si la courbure sectionnelle est strictement négative, alors :*

$$\mathcal{G}_p = \begin{cases} 0 & si \quad p = 2q+1 \\ Rg^q & si \quad p = 2q \end{cases}$$

*Remarque.* – Pour $p = 1$, la formule $(*)$ s'écrit :

$$\int_M \mathrm{r}(\#h, \#h)\mu_g = \langle \mathrm{D}_p h, \mathrm{D}_p h\rangle + \langle \delta_{p-1} h, \delta_{p-1} h\rangle,$$

et on retrouve ainsi le théorème de S. Bochner [2].

## Références bibliographiques


[1] Besse A.L., Einstein manifolds, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1987.
[2] Bochner S. Vector fields and Ricci curvature, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946) 776–797.
[3] Lichnerowicz A., Spineurs harmoniques, C. R. Acad. Sci. Paris 275 (1963) 7–9.
[4] Lichnerowicz A., Géométrie des groupes de transformations, Dunod, Paris, 1958.