Ann. Sci. Math. Québec **22** (1998), no. 1, 17–20.

SUR LA VARIATION DES MÉTRIQUES À GÉODÉSIQUES PÉRIODIQUES

M. BOUCETTA

RÉSUMÉ. Une métrique riemannienne dont toutes les géodésiques sont périodiques et de même longueur l est appelée C_l-métrique. Dans ce cas, l'espace des géodésiques orientées est une variété symplectique. Dans cet article, nous allons prouver que si $(g_t)_{t\in[0,1]}$ est une famille de $C_{l(t)}$-métriques sur une variété donnée, les structures différentielles et symplectiques de leurs espaces des géodésiques orientées ne varient pas (à difféomorphisme près).

ABSTRACT. A Riemannian metric all of whose geodesics are periodic with the same length l is called a C_l-metric. In this case it is known that the space of oriented geodesics is a symplectic manifold. In this paper, we will prove that if $(g_t)_{t\in[0,1]}$ is a familly of $C_{l(t)}$-metrics on a manifold, the differentiable and symplectic structures of their spaces of oriented geodesics are the same (up to diffeomorphism).

1. Rappels et notations. Dans cette section nous présentons un bref rappel des notions que nous utiliserons le long de ce travail. Pour plus de détail consulter [2].

Soit (M,g) une variété riemannienne de dimension d. On notera, pour $v\in TM$,

$$E_g(v)=\frac{1}{2}g(v,v)\,.$$

Le flot géodésique est le champ de vecteurs Z_g sur TM défini par

$$\iota_{Z_g}d\alpha_g=-dE_g$$

où α_g est l'image réciproque de la forme de Liouville par l'isomorphisme musical entre le fibré tangent et le fibré cotangent défini par la métrique g.

Le champ de vecteurs Z_g est tangent aux lignes de niveaux de E_g et, en particulier, au fibré unitaire U_gM.

On dira que g est une C_l-métrique sur M si le flot de Z_g (en restriction à U_gM) est périodique de plus petite période l. Dans ce cas, on a une action libre du cercle S^1 sur U_gM dont l'espace quotient sera noté C_gM. La projection canonique $q_g : U_gM\to C_gM$ est un S^1-fibré principal dont α_g est une forme de connection et sa courbure $d\alpha_g$ est projettable en une 2-forme fermée ω_g sur C_gM. Le couple (C_gM,ω_g) est en fait une variété symplectique.

Reçu le 12 mars 1997 et, sous forme définitive, le 17 juin 1997.

Les projections des courbes intégrales de Z_g restreintes à U_gM sont les géodésiques de g paramétrées par la longueur d'arc. Dire que g est une C_l-métrique équivaut à dire que les géodésiques de g sont périodiques et de même longueur l; C_gM est l'espace des géodésiques orientées qui est alors muni d'une structure de variété différentiable symplectique. Une variété munie d'une C_l-métrique est nécessairement compacte.

2. Enoncé et démonstration du résultat principal. Les notations sont celles du premier paragraphe. Dans ce paragraphe on va démontrer le résultat suivant :

Théorème. *Soit M une variété différentiable et soit $(g_t)_{t\in[0,1]}$ une famille de $C_{l(t)}$-métriques sur M variant différentiablement en fonction de t. Si (C_tM,ω_t) désigne la variété des géodésiques orientées de la métrique g_t munie de sa structure symplectique canonique, alors il existe une famille de difféomorphismes $F_t : C_0M \longrightarrow C_tM$, avec $F_0 = \mathrm{id}_{C_0M}$, tels que*

$$(F_t)^* \frac{\omega_t}{l(t)} = \frac{\omega_0}{l(0)}.$$

Preuve. Dans ce qui suit, tous les objets associés à g_t seront indexés par t.

On considére la famille à un paramètre de S^1-fibrés principaux :

$$q_t : (U_tM, \alpha_t, Z_t) \longrightarrow (C_tM, \omega_t). \tag{1}$$

On remarque tout d'abord que, d'après un théorème de Weinstein [5], la fonction période l varie différentiablement en fonction du volume de (M, g_t) et donc différentiablement en fonction de t.

Puisque la période $l(t)$ varie différentiablement, on a une famille à un paramètre de S^1-fibrés principaux qui varie différentiablement. Puisque les espaces totaux U_tM s'identifient naturellement à U_0M, les espaces quotients C_tM s'identifient alors à C_0M. Ainsi (1) est équivalent à

$$q_t : (U_0M, \alpha_t, Z_t) \longrightarrow (C_0M, \omega_t), \tag{2}$$

avec les abus de notations de rigueur.

Puisque $q_t^*(\frac{\omega_t}{l(t)}) = \frac{d\alpha_t}{l(t)}$ et que $\frac{d\alpha_t}{l(t)}$ est la courbure de la 1-forme de connexion $\frac{\alpha_t}{l(t)}$, $\frac{\omega_t}{l(t)}$ est, via l'isomorphisme de de Rham, la classe d'Euler $e(q_t)$ du fibré principal (2). La classe de cohomologie $\left[\frac{\omega_t}{l(t)}\right]$ est l'image de la classe intégrale $[e(q_t)]$ par l'homomorphisme $H^2(C_0M,\mathbb{Z}) \to H^2(C_0M,\mathbb{R})$. Comme la classe d'Euler ne prend que des valeurs entières, elle ne varie pas par déformation continue. On en déduit que la classe de cohomologie $\left[\frac{\omega_t}{l(t)}\right]$ ne varie pas.

Pour plus de détails sur les relations entre classe caractéristiques et les formes de courbure voir [3].

Pour conclure, il suffit d'établir lemme suivant :

Lemme. *Soit M une variété différentiable et $(\omega_t)_{t\in[0,1]}$ une famille à un paramètre de formes symplectiques sur M. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

i) $\dfrac{d}{dt}\omega_t$ *est exacte pour tout* $t \in [0,1]$.

ii) *Il existe une famille à un paramètre* $(G_t)_{t\in[0,1]}$ *de difféomorphismes de* M *telle que* $G_t^*\omega_t = \omega_0$.

Preuve. On utilise la méthode du chemin dû à Moser [4].

Soit X_t le champ de vecteurs dépendant du temp associé à $(G_t)_{t\in[0,1]}$. On a la formule [1]

$$\frac{d}{dt}G_t^*\omega_t = G_t^*(L_{X_t}\omega_t + \frac{d}{dt}\omega_t).$$

Le lemme découle alors de cette formule et du fait que $L_{X_t}\omega_t = di_{X_t}\omega_t$. □

Ce théorème serait trivial si les classes connexes des C_l-métriques (sur une variété différentiable fixée) était, à isométrie près, de la forme ag où a est un réel strictement positif et g est une C_l-métrique donnée. Ce n'est pas le cas, comme l'indique l'exemple suivant (voir [2, p. 105]).

Les métriques de Zoll sur la sphère S^2 sont de la forme $g = (1 + h(\cos r))^2 dr^2 + \sin^2 r d\theta^2$, où (r,θ) est une paramétrisation appropriée de S^2 privée d'un point et h est une fonction impaire de $[-1,1]$ vers $]-1,1[$ vérifiant $h(1) = 0$. Ces métriques sont des $C_{2\pi}$-métriques et leur courbure sectionnelle est données par

$$K(r) = \frac{1}{(1 + h(\cos r))^3}(1 + h(\cos r) - \cos r \cdot h'(\cos r)).$$

L'expression de la courbure montre jusqu' à quel point la classe connexe de telles métriques peut être riche.

Remerciement. Je tiens à remercier l'arbitre qui m'a indiqué une démonstration plus simple et plus courte que celle que j'avais initialement proposée.

English extended abstract. Let (M,g) be a Riemannian manifold of dimension d. Let us denote, for any $v \in TM$,

$$E_g(v) = \frac{1}{2}g(v,v).$$

The geodesic flow is the vector field Z_g on TM defined by

$$\iota_{Z_g} d\alpha_g = -dE_g$$

where α_g is the inverse image of the Liouville form by the isomorphism between the tangent and cotangent spaces induced by the metric g.

The vector field Z_g is tangent to the level sets of E_g and, therefore, to the unitary fiber bundle U_gM.

We say that g is a C_l-metric on M if the flow of Z_g (restricted to U_gM) is periodic of period l. In this case, one gets a free action of the circle S^1 on U_gM leading to a quotient denoted by C_gM. The canonical projection $q_g : U_gM \to C_gM$ is a S^1-principal fiber bundle on which α_g is a connection form with curvature $d\alpha_g$ that projects down to a closed 2-form ω_g on C_gM. The pair (C_gM, ω_g) is actually a symplectic manifold. Using the de Rham isomorphism, the class $[\frac{\omega}{l}]$ is the Euler class $e(q_g)$ of the bundle q_g.

Once projected down, the integral curves of Z_g on U_gM are geodesics of g parametrized by arc length. Then the fact that g is a C_l-metric is equivalent to the fact that all geodesics of g have same period l; C_gM is then the space of oriented geodesics endowed with its natural symplectic form.

The paper is entirely devoted to prove the following theorem.

Theorem. *Let M be a differentiable manifold and $(g_t)_{t\in[0,1]}$ be a family of $C_{l(t)}$-metric on M depending differentiably on t. Letting (C_tM, ω_t) denote the space of oriented g_t-geodesics with its natural symplectic structure, there exists a family of diffeomorphisms $F_t : C_0M \longrightarrow C_tM$ such that $F_0 = \mathrm{id}_{C_0M}$ and*

$$(F_t)^* \frac{\omega_t}{l(t)} = \frac{\omega_0}{l(0)}.$$

The proof is based on Moser's method and the fact that the Euler class only takes integral values and therefore does not vary under a continuous deformation.

BIBLIOGRAPHIE

1. R. Abraham et J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics, Second Edition*, Benjamin-Cumming, Reading, 1978.
2. A. L. Besse, *Manifolds all of whose geodesics are closed*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1978.
3. W. Graeub, S. Halperin et R. Vanstone, *Curvature, Connections and Cohomology*, Academic Press, New York, 1972.
4. J. Moser, *On the volume element of a manifold*, Trans. Amer. Math. Soc. **120** (1965), 286–294.
5. A. Weinstein, *On the volume of manifolds all of whose geodesics are closed*, J. Diff. Geom. **9** (1977), 413–517.

M. BOUCETTA
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES GUELIZ
BP 618, MARRAKECH
MAROC