Bien débuter en Mathématiques.
Réduction des endomorphismes

Mohamed Boucetta, Jean-Marie Morvan

22 février 2022

Table des matières

Chapitre 1

Prérequis

1.1 Rappels sur les endomorphismes

Dans tout ce qui suit, E désigne un espace vectoriel sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si la dimension de E est finie, égale à n, on notera $(e_1, ..., e_k, ..., e_n)$ une base quelconque de E.

Soit $f : E \to E$ un endomorphisme de E, (c'est à dire une application linéaire de E dans E). On sait que f est parfaitement déterminé par l'image d'une base de E. Posons

$$\begin{array}{rcl} f(e_1) & = & a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + ... + a_{j1}e_j + ... + a_{n1}e_n, \\ f(e_2) & = & a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + ... + a_{j2}e_j + ... + a_{n2}e_2, \\ \vdots & \vdots & \\ f(e_n) & = & a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + ... + a_{jn}e_j + ... + a_{nn}e_n. \end{array}$$

La *représentation matricielle* de f dans la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est la matrice

$$M(f)_{(e_i)_{1\leq i\leq n}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1i} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2i} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{j1} & a_{j2} & ... & a_{ji} & ... & a_{jn} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{ni} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Si $(\epsilon_j)_{1\leq j\leq n}$ est une autre base de E, on sait que la matrice $M(f)_{(\epsilon_j)}$ de f dans cette nouvelle base est reliée à la matrice $M(f)_{(e_i)_{1\leq i\leq n}}$ par la relation

$$M(f)_{(\epsilon_j)} = P^{-1}M(f)_{(e_i)}P, \tag{1.1}$$

où P est la matrice de passage de la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ dans la base $(\epsilon_j)_{1\leq j\leq n}$. Plus précisément, si

$$\begin{array}{rcl}
\epsilon_1 & = & p_{11}e_1 + p_{21}e_2 + ... + p_{n1}e_n, \\
\epsilon_2 & = & p_{21}e_1 + p_{22}e_2 + ... + p_{n2}e_n, \\
\vdots & \vdots & \\
\epsilon_n & = & p_{n1}e_1 + p_{n2}e_2 + ... + p_{nn}e_n,
\end{array}$$

alors

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1i} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2i} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{j1} & p_{j2} & \dots & p_{ji} & \dots & p_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{ni} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Notations -

- On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace des endomorphismes de E.
- On note $\mathcal{M}_n(K)$ l'espace des matrices carrées d'ordre n, (c'est-à-dire à n lignes et n colonnes [1]) à coefficients dans K.

Définition 1 *Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(K)$ sont dites semblables s'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que*

$$B = P^{-1}AP.$$

1.2 Rappels sur les polynômes

1.2.1 Racines d'un polynôme

Soit $P(X)$ un polynôme de degré p à coefficients dans K. Rappelons les notions tout à fait élémentaires suivantes. Soit $a \in K$.

- On dit que a est une *racine* de P si $P(a) = 0$. Dans ce cas, on pourra écrire
$$P(X) = (X - a)P_1(X),$$
où $P_1(X)$ est un polynôme de degré $p - 1$.
- On dit que a est une *racine* d'ordre k (ou de multiplicité k) de P si l'on peut écrire
$$P(X) = (X - a)^k P_k(X),$$
où $P_k(X)$ est un polynôme de degré $(p-k)$ qui n'admet pas a comme racine.

Le principal théorème de factorisation d'un polynôme s'énonce ainsi :

Théorème 1 *Soit $P(X)$ un polynôme de degré p à coefficients dans $\mathbb{C}$. Alors*

1. On dit aussi des matrices (n, n)

- *$P(X)$ a p racines (distinctes ou confondues) ;*
- *on peut écrire*

$$P(X) = a(X - a_1)^{\alpha_1}...(X - a_k)^{\alpha_k}...(X - a_q)^{\alpha_q},$$

  où $a, a_k \in \mathbb{C}, (1 \leq k \leq q)$, avec $\alpha_1 + ... + \alpha_k + ...\alpha_q = p$;
- *en particulier, si $P(X)$ a p racines distinctes, alors $P(X)$ est le produit de p facteurs de degré 1 :*

$$P(X) = a(X - a_1)...(X - a_k)...(X - a_p).$$

Il est bien évident que ce résultat tombe en défaut si l'on considère des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Par exemple, on peut écrire

$$X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$$

en travaillant dans $\mathbb{C}$, mais on ne peut pas écrire $X^2 + 1$ comme produit de deux polynômes de degré 1 à coefficients réels. Le corps K dans lequel vivent les coefficients est donc crucial dans ce type de questions.

1.2.2 Polynômes scindés

Définition 2 *Soit P un polynôme à coefficients dans K. On dit que P est* **scindé** *si l'on peut écrire P sous la forme :*

$$P(X) = a(X - a_1)^{\alpha_1}...(X - a_k)^{\alpha_k}...(X - a_q)^{\alpha_q},$$

où $a, a_k \in K, (1 \leq k \leq q)$.

Autrement dit, P est scindé s'il s'écrit comme produit de monômes à coefficients dans K. Comme nous venons de le voir, cette propriété dépend du corps K. Elle n'a d'intérêt que lorsque $K = \mathbb{R}$. En effet, si $K = \mathbb{C}$, alors tout polynôme de degré p à coefficients dans $\mathbb{C}$ a p racines distinctes ou confondues. Il est donc scindé.

Ainsi, nous pouvons dire en utilisant ce nouveau langage que $X^2 + 1$ est scindé sur $\mathbb{C}$, puisque $X^2 + 1 = (X + i)(X - i)$, mais pas sur $\mathbb{R}$.

1.2.3 Polynômes de matrices

Si $P(X)$ un polynôme de degré p à coefficients dans K, on peut étendre P à l'ensemble des matrices $\mathcal{M}_n(K)$: la variable décrit alors un ensemble de matrices. Ainsi, si

$$P(X) = \alpha_p X^p + \alpha_{p-1} X^{p-1} + ... + \alpha_1 X + \alpha_0,$$

où pour tout $i \in \{0, ..., p\}, \alpha_i \in K$, et $A \in \mathcal{M}_n(K)$,

$$P(A) = \alpha_p A^p + \alpha_{p-1} A^{p-1} + ... + \alpha_1 A + \alpha_0 \mathrm{Id}.$$

De la même façon, on peut étendre P à l'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel E sur K : la variable décrit alors l'ensemble de ces endomorphismes. Ainsi, si u est un endomorphisme de E,

$$P(u) = \alpha_p u^p + \alpha_{p-1} u^{p-1} + ... + \alpha_1 u + \alpha_0 \mathrm{Id}.$$

Par exemple, si

$$P(X) = X^2 + 2,$$

et

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

alors

$$P(A) = A^2 + 2\mathbf{Id},$$

c'est-à-dire

$$P(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Il est alors utile de remarquer que si P est un polynôme et A une matrice, on a toujours, (c'est évident) :

$$A \circ P(A) = P(A) \circ A. \tag{1.2}$$

De la même façon, si u est un endomorphisme de E,

$$u \circ P(u) = P(u) \circ u. \tag{1.3}$$

Chapitre 2

Déterminants

2.1 Rappels de cours

2.1.1 La définition du déterminant d'une matrice par récurrence

La définition générale du déterminant d'une matrice étant délicate, nous allons plutôt commencer par la donner pour des matrices de toute petite dimension. Toutes les définitions seront données dans le cadre des matrices carrées à coefficients dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. **Déterminant d'une matrice carrée d'ordre** 1 **-** Commençons par considérer une matrice à une ligne et une colonne, qu'on peut identifier à un nombre réel ou complexe a. On pose alors
$$\det a = a. \tag{2.1}$$
2. **Déterminant d'une matrice carrée d'ordre** 2 **-** Considérons maintenant une matrice $A \in \mathcal{M}_2(K)$,
$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$
On pose alors
$$\det A = ad - bc. \tag{2.2}$$
On note
$$\det A = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \tag{2.3}$$
3. **Déterminant d'une matrice carrée d'ordre** 3 **-** Considérons encore une matrice $A \in \mathcal{M}_3(K)$,
$$A = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}.$$

On pose alors

$$\det A = a\begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - a'\begin{vmatrix} b & b'' \\ c & c'' \end{vmatrix} + a''\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}. \tag{2.4}$$

On a donc :

$$\det A = a(b'c'' - c'b'') - a'(bc'' - cb'') + a''(bc' - cb'). \tag{2.5}$$

On note encore :

$$\det A = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}. \tag{2.6}$$

On dit qu'on a calculé le determinant de la matrice A en le *développant suivant la première ligne.*

4. **Définition par récurrence du déterminant d'une matrice carrée d'ordre** n **-** Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans K,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1i} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2i} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{j1} & a_{j2} & ... & a_{ji} & ... & a_{jn} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{ni} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Définition 3 *On appelle matrice extraite d'ordre k d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$, toute matrice d'ordre k obtenue en enlevant $(n-k)$ lignes et $(n-k)$ colonnes à la matrice A.*

On définit le déterminant de A, noté $\det A$ en posant :

$$\det A = a_{11} \det A_{11} + ... + (-1)^{k+1} a_{1k} \det A_{1k} + ... + (-1)^{n+1} a_{1n} \det A_{1n}, \tag{2.7}$$

où A_{ij} est la matrice carrée d'ordre $n-1$ extraite de A en enlevant la i^{ieme} ligne et la j^{ieme} colonne de A.

On note

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1i} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2i} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{j1} & a_{j2} & ... & a_{ji} & ... & a_{jn} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{ni} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

On dit qu'on a calculé le déterminant de la matrice A en le développant par rapport à la première ligne.

5. **Cofacteur d'un élément d'une matrice -** Plus généralement, si a_{ij} est un élément d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$, on appelle cofacteur de a_{ij} le nombre réel cof (a_{ij}) défini par

$$\text{cof } (a_{ij}) = (-1)^{i+j} \det A_{ij}. \tag{2.8}$$

On a alors

$$\det A = a_{11} \text{ cof } (a_{11}) + ... + a_{1k} \text{ cof } (a_{1k}) + ... + a_{1n} \text{ cof } (a_{1n}). \tag{2.9}$$

Ainsi,

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 - 16 - 2 = -14.$$

2.1.2 La définition classique du déterminant d'une matrice carrée d'ordre n

La définition classique du déterminant utilise les propriétés élémentaires des permutations d'un ensemble fini. Elle est naturellement équivalente à celle donnée en 2.7. Elle est peu utilisée dans les exercices et les applications, mais permet souvent de démontrer des propriétés intéressantes du déterminant.

Rappel sur les permutations

Définition 4
- *Une permutation de l'ensemble* $\{1, ..., n\}$ *est une bijection de* $\{1, ..., n\}$ *sur lui même.*
- *L'ensemble des permutations de* $\{1, ..., n\}$ *est noté* $\mathcal{S}_n$.
- *Une transposition de l'ensemble* $\{1, ..., n\}$ *est une permutation de l'ensemble* $\{1, ..., n\}$ *qui échange deux éléments et laisse invariants tous les autres.*

Dans la théorie des déterminants, le résultat utile concernant les permutations peut être résumé comme suit.

Rappelons que l'ensemble $\mathcal{S}_n$ est muni d'un produit $\circ$ qui n'est autre que la composition de bijections : si $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$, $\sigma \circ \sigma' \in \mathcal{S}_n$. Une permutation σ se note en général comme suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Théorème 2 • *Toute permutation σ de l'ensemble $\{1, ..., n\}$ peut se décomposer en un produit de transpositions*[1].

- *Si σ admet une décomposition en produit de p transpositions, et une autre décomposition en produit de p' transpositions, alors p est pair si et seulement si p' est pair.*

Ce théorème conduit à poser la

Définition 5 *Si une permutation σ se décompose en un produit de p transpositions, la signature de σ est le nombre*

$$\epsilon(\sigma) = (-1)^p.$$

Déterminant d'une matrice carrée d'ordre n

Soit encore A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1i} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2i} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{j1} & a_{j2} & ... & a_{ji} & ... & a_{jn} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{ni} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Définition 6 *Le déterminant de la matrice A est le nombre réel*

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} ... a_{\sigma(n)n}.$$

Cette définition coïncide évidemment avec celle donnée au paragraphe 2.1.1

2.1.3 Déterminant de n vecteurs

Considérons l'espace vectoriel K^n, avec $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni d'une base quelconque $(e_1, ..., e_n)$. Donnons nous n vecteurs $v_1, ..., v_n$ de K^n, et écrivons ces vecteurs dans la base $(e_1, ..., e_n)$ sous forme de vecteurs colonnes :

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{21} \\ \vdots \\ v_{n1} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} v_{12} \\ v_{22} \\ \vdots \\ v_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, v_n = \begin{pmatrix} v_{1n} \\ v_{2n} \\ \vdots \\ v_{nn} \end{pmatrix}.$$

On appelle *déterminant des n vecteurs $v_1, ..., v_n$* dans la base $(e_1, ..., e_n)$ et on note

$$\det_{(e_i)}(v_1, v_2, ..., v_n)$$

1. Attention, il n'y a pas unicité de cette décomposition.

ou encore

$$|v_1, v_2, ..., v_n|_{e_i}$$

le déterminant de la matrice

$$V = (v_1, v_2, ..., v_n),$$

c'est-à-dire le déterminant de la matrice

$$V = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & ... & v_{1i} & ... & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & ... & v_{2i} & ... & v_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ v_{j1} & v_{j2} & ... & v_{ji} & ... & v_{jn} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ v_{n1} & v_{n2} & ... & v_{ni} & ... & v_{nn} \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire le déterminant de la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $v_1, ..., v_n$.

2.1.4 Quelques règles de calcul

Le calcul d'un déterminant se fait rarement de façon direct. On utilise presque toujours des simplifications qui résultent des résultats qui suivent.

1. Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre n, alors

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

2. Si A est inversible,

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Ainsi, si l'on cherche le déterminant de l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

il est inutile de calculer explicitement A^{-1}. La formule précédente donne immédiatement

$$\mathbf{det}\ A^{-1} = (\mathbf{det}\ A)^{-1} = \frac{1}{2}.$$

3. Si M et N sont deux matrices semblables (*cf.* Définition 1), alors

$$\det\ M = \det\ N.$$

Ainsi, si B est semblable à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

C'est-à-dire s'il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$, alors

$$\textbf{det } B = \textbf{det } A = 2.$$

4. Le déterminant d'une matrice est égal à celui de sa matrice transposée : si $A \in \mathcal{M}_n(K)$, alors

$$\det A = \det {}^tA.$$

Ainsi, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

alors

$${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et

$$\textbf{det } A = \textbf{det } {}^tA = 8.$$

2.1.5 Quelques simplifications possibles

Pour simplifier le calcul d'un déterminant, on peut *"travailler"* sur ses lignes ou sur ses colonnes : considérons une matrice

$$A = (c_1, ..., c_k, ..., c_n),$$

où $c_1, ..., c_k, ..., c_n$ sont n vecteurs colonnes. Alors,

1. pour tout $\lambda \in K$,

$$\det(c_1, ..., \lambda c_k, ..., c_n) = \lambda \det(c_1, ..., c_k, ..., c_n).$$

En particulier, pour tout $\mu \in K$,

$$\det(\mu c_1, ..., \mu c_k, ..., \mu c_n) = \mu^n \det(c_1, ..., c_k, ..., c_n).$$

Ainsi,

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & \pi \\ 1 & 6 & 0 \\ 3 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & \pi \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

2. Si l'une des colonnes c_k est la somme de deux colonnes $a_k + b_k$, alors

$$\det(c_1, ..., a_k + b_k, ..., c_n) =$$

$$\det(c_1, ..., a_k, ..., c_n) + \det(c_1, ..., b_k, ..., c_n).$$

3. Si deux colonnes de la matrice A sont égales,
$$\det A = 0.$$
4. Si l'une des colonnes de A est nulle, alors
$$\det A = 0.$$
5. Plus généralement, si l'une des colonnes de la matrice A est combinaison linéaire des autres, alors
$$\det A = 0.$$
   Ainsi,
$$\begin{vmatrix} 1 & 1+2\pi & \pi \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 3+2e & e \end{vmatrix} = 0,$$
   puisqu'on obtient la deuxième colonne en ajoutant à la première colonne deux fois la troisième colonne.
6. En particulier, on ne change pas la valeur du determinant de A en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes.
7. Si l'on échange deux colonnes de la matrice A, alors le déterminant de A change de signe.
8. Plus généralement, si σ est une permutation de $\{1, ..., n\}$,
$$\det(c_{\sigma(1)}, ..., c_{\sigma(k)}, ..., c_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma)\det(c_1, ..., c_k, ..., c_n),$$
   où $\epsilon(\sigma)$ est la signature de la permutation σ.

   Par exemple,
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Ces propriétés indiquent que le déterminant est une **forme multilinéaire alternée**.

Toutes les propriétés indiquées ci-dessus concernant le calcul d'un déterminant au moyen des colonnes des matrices sont valables pour les *lignes* des matrices. En particulier, on peut calculer un déterminant en le développant par rapport à l'une quelconque de ses colonnes, ou l'une quelconque de ses lignes, comme on le fait avec la première ligne.

2.1.6 Le cas de matrices triangulaires

Il est un cas ou le calcul du déterminant est extrêmement simple : c'est celui des matrices carrées triangulaires. Si une matrice M est triangulaire (supérieure ou inférieure) [2], alors le déterminant de M est égal au produit des éléments de la diagonale.

Par exemple,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & \pi \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & e & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8e.$$

Naturellement, si une matrice carrée est diagonale, alors son déterminant est aussi le produit des éléments de la diagonale.

2.1.7 Déterminant d'un endomorphisme

La formule du déterminant d'un produit de matrices a une conséquence intéressante. Si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel sur K de dimension n, on pose

$$\det f = \det M(f)_{(e_i)},$$

où $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base quelconque de E.

Cette définition a bien un sens, puisqu'elle est indépendante de la base choisie pour définir la matrice de f. En effet, deux matrices représentant le même endomorphisme sont semblables. Il suffit alors d'appliquer la formule :

$$\det P^{-1}AP = \det P^{-1}\det A\det P = (\det P)^{-1}\det A\det P = \det A.$$

Finalement,

$$\det P^{-1}AP = \det A. \tag{2.10}$$

Cette propriété est intéressante à plusieurs titres. D'abord parce qu'elle montre que le déterminant est une notion qui se place dans le cadre des endomorphismes d'un espace vectoriel. Ensuite parce qu'il devient possible de calculer le déterminant d'un endomorphisme même lorsque celui ci n'est pas donné sous forme matricielle.

Calculons par exemple le déterminant d'une rotation r du plan d'angle $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Comme le déterminant de r est indépendant de la base dans

2. Rappelons qu'une matrice est triangulaire supérieure si tous les termes qui se trouvent au dessous de la diagonale sont nuls ; une matrice est triangulaire inférieure si tous les termes qui se trouvent au dessus de la diagonale sont nuls.

laquelle on le calcule, choisissons d'écrire r dans la base canonique du plan. On a :

$$M(r) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

donc

$$\textbf{det } r = \textbf{det } M(r) = 1.$$

2.1.8 Calcul de l'inverse d'une matrice

Bien que peu utilisé dans la pratique, la formule 3 permet de calculer explicitement l'inverse d'une matrice (inversible) en calculant son déterminant, et une suite de déterminant de matrices extraites.

Définition 7 *Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(K)$. La matrice des cofacteurs de A, est la matrice cof (A) obtenue en remplaçant chaque terme a_{ij} de la matrice A par son cofacteur cof a_{ij}, défini en 4.*

Théorème 3 *Soit A une matrice carrée d'ordre $n \geq 1$.*

1. *On a :*
$$A cof(^tA) = (det A)I_n.$$
2. *En particulier, si A est une matrice inversible,*
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\text{cof }(^tA).$$

Ainsi, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, **alors det** $A = 1$, $^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, **et cof** $^tA = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Donc,

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.1.9 Calcul du rang d'une matrice

Définition 8 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$.*

- *Soit M_r une matrice carrée d'ordre r extraite de A. On dit que le déterminant de M_r est un mineur m_r d'ordre r de A (c'est le mineur associé à M_r).*
- *On dit qu'un mineur m_{r+1} d'ordre $r+1$ de A (associé à une matrice extraite M_{r+1}) borde le mineur m_r d'ordre r (associé à une matrice extraite M_r) si M_r est une matrice extraite de M_{r+1}.*

Considérons par exemple, la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le mineur

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

est bordé par 4 **mineurs, notamment par le mineur**

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix},$$

obtenu en retirant la première ligne et la première colonne, par le mineur

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix},$$

obtenu en enlevant la quatrième ligne et la deuxième colonne, etc...

Théorème 4 *Soit* $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$ *une matrice à* p *lignes et* n *colonnes. Le rang de* A *est* r *si et seulement si*

- *on peut extraire de* A *un mineur* m_r *d'ordre* r *non nul, et*
- *tous les mineurs extraits de* A *d'ordre* $r+1$ *qui bordent* m_r *sont nuls.*

Cherchons par exemple le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Son rang est au moins 2 **puisque le mineur**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

est non nul. Il y a 4 **mineurs d'ordre** 3 **qui bordent ce mineur d'ordre** 2**. Un calcul direct montre que ces quatre mineurs sont nuls. Donc le rang de la matrice est** 2**.**

Corollaire 1 *Soit* E *un espace vectoriel de dimension* n *sur* K*, muni d'une base* $(e_1, ..., e_n)$*.*

- *Soient* $\{v_1, v_2, ..., v_r\}$ r *vecteurs de* E*. Ces* r *vecteurs forment une famille libre de* E *si et seulement si la matrice*

  $$(v_1, v_2, ..., v_r)$$

  admet un mineur d'ordre r *non nul.*

- *En particulier, n vecteurs $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ forment une base de E si et seulement si*
$$\det_{(e_i)}|v_1, v_2, ..., v_n| \neq 0.$$

A titre d'exemple, les deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ dont les composantes dans la base canonique sont

$$v_1 = (1, 0, 6), v_2 = (3, 0, \pi)$$

forment une famille libre puisque le rang de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \\ 6 & \pi \end{pmatrix}.$$

est 2. En effet, le mineur

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 6 & \pi \end{vmatrix} = \pi - 18,$$

est non nul, et il n'est pas possible d'extraire de la matrice B un mineur d'ordre 3...

2.2 Exercices

Exercice 1 *Calculer les déterminants suivants, où $a, b, c \in K$:*

$$D_1 = \begin{vmatrix} -2a & a+b & a \\ b+a & -2b & b \\ a & b & 0 \end{vmatrix}, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} c & b & b \\ a & c & b \\ a & a & c \end{vmatrix}, \qquad D_4 = \begin{vmatrix} 1 & a & b & a \\ 1 & b & 1 & b \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & b \end{vmatrix},$$

$$D_5 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a+b & a+c \\ 1 & a+b & 0 & b+c \\ 1 & a+c & b+c & 0 \end{vmatrix}.$$

Solution - Nous allons systématiquement utiliser les règles de calculs 2, 3 de la section 2.1.1, et la section 2.1.5.

1. Pour calculer D_1, on pourra, par exemple, le développer suivant la dernière colonne[3]. On obtient donc :

$$\begin{aligned} D_1 &= a\begin{vmatrix} b+a & -2b \\ a & b \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} -2a & a+b \\ a & b \end{vmatrix} \\ &= a(b(a+b)+2ab) - b(-2ab - a(a+b)) = 4ab(a+b). \end{aligned}$$

   Finalement,

$$D_1 = 4ab(a+b).$$

2. Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de D_2. On remarque que $C_1+C_2+C_3 = 0$. Ainsi les colonnes de D_2 sont liées. On déduit alors des propriétés du déterminant (voir les rappels de la section 2.1.5 4 ou 5) que

$$D_2 = 0.$$

3. Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de D_3. En utilisant les propriétés classiques du déterminant (voir les rappels de la section 2.1.5 5), on a

$$D_3 = \det(C_1, C_2, C_3) = \det(C_1, C_2, C_3 - C_2) = \begin{vmatrix} c & b & 0 \\ a & c & b-c \\ a & a & c-a \end{vmatrix}.$$

---

3. En général, on choisit de développer un déterminant suivant la ligne ou la colonne qui a le plus de termes nuls. Ceci simplifie grandement les calculs...

En développant ce dernier déterminant suivant la dernière colonne, on obtient

$$\begin{aligned} D_3 &= -(b-c)\begin{vmatrix} c & b \\ a & a \end{vmatrix} + (c-a)\begin{vmatrix} c & b \\ a & c \end{vmatrix} \\ &= -(b-c)(ac-ab)+(c-a)(c^2-ab) = c^3+ab(a+b-3c). \end{aligned}$$

Donc

$$D_3 = c^3 + ab(a+b-3c)$$

4. Notons L_1, L_2, L_3, L_4 les lignes de D_4. On a

$$\begin{aligned} D_4 &= \det(L_1,L_2,L_3,L_4) = \det(L_1, L_2-L_1, L_3-L_1, L_4-L_1) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & a & b & a \\ 0 & b-a & 1-b & b-a \\ 0 & 1-a & 1-b & 0 \\ 0 & 1-a & a-b & b-a \end{vmatrix} \end{aligned}$$

En développant ce déterminant suivant la première ligne, on obtient

$$D_4 = \begin{vmatrix} b-a & 1-b & b-a \\ 1-a & 1-b & 0 \\ 1-a & a-b & b-a \end{vmatrix} = (b-a)\begin{vmatrix} b-a & 1-b & 1 \\ 1-a & 1-b & 0 \\ 1-a & a-b & 1 \end{vmatrix}.$$

On note L_1, L_2, L_3 les lignes de ce déterminant. On a

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} b-a & 1-b & 1 \\ 1-a & 1-b & 0 \\ 1-a & a-b & 1 \end{vmatrix} &= \det(L_1,L_2,L_3) = \det(L_1,L_2,L_3-L_1) \\ &= \begin{vmatrix} b-a & 1-b & 1 \\ 1-a & 1-b & 0 \\ 1-b & a-1 & 0 \end{vmatrix} = -\left[(a-1)^2+(b-1)^2\right]. \end{aligned}$$

Finalement,

$$D_4 = (a-b)\left[(a-1)^2+(b-1)^2\right].$$

5. Notons L_1, L_2, L_3, L_4 les lignes de D_5. On a

$$\begin{aligned} D_5 &= \det(L_1,L_2,L_3,L_4) = \det(L_1,L_2,L_3-L_2,L_4-L_2) \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a+b & a+c \\ 0 & a+b & -(a+b) & b-a \\ 0 & a+c & c-a & -(a+c) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

En développant ce déterminant suivant la première colonne, on obtient

$$D_5 = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & -(a+b) & b-a \\ a+c & c-a & -(a+c) \end{vmatrix}.$$

On notera C_1, C_2, C_3 les colonnes de ce déterminant. On a

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & -(a+b) & b-a \\ a+c & c-a & -(a+c) \end{vmatrix} &= \det(C_1, C_2, C_3) \\ &= \det(C_1, C_2 - C_1, C_3 - C_1) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & -2(a+b) & -2a \\ a+c & -2a & -2(a+c) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

En développant ce déterminant suivant la première ligne, on obtient

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & -2(a+b) & -2a \\ a+c & -2a & -2(a+c) \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -2(a+b) & -2a \\ -2a & -2(a+c) \end{vmatrix} \\ &= 4\begin{vmatrix} (a+b) & a \\ a & (a+c) \end{vmatrix} \\ &= 4[(a+c)(a+b) - a^2] \\ &= 4(ab+bc+ac). \end{aligned}$$

Finalement

$$D_5 = -4(ab+bc+ac).$$

Exercice 2 *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & a_3 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & a_4 \\ a_5 & 0 & a_7 & 0 \\ 0 & a_6 & 0 & a_8 \end{pmatrix}.$$

Montrer la relation

$$\det A = \det\left[\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_7 & 0 \\ 0 & a_8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_5 & 0 \\ 0 & a_6 \end{pmatrix}\right]. \quad (2.11)$$

Solution - Le résultat va découler d'un calcul direct, en calculant d'abord le terme de droite de 2.11, puis le terme de gauche.

- Tout d'abord

$$\begin{aligned}
& \det\left[\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_7 & 0 \\ 0 & a_8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_5 & 0 \\ 0 & a_6 \end{pmatrix}\right] \\
= & \begin{vmatrix} a_1a_7 - a_3a_5 & 0 \\ 0 & a_2a_8 - a_4a_6 \end{vmatrix} \\
= & (a_1a_7 - a_3a_5)(a_2a_8 - a_4a_6).
\end{aligned}$$

- D'un autre côté, utilisons 2.7 et développons le déterminant de A suivant la première ligne. On obtient

$$\begin{aligned}
\det A &= a_1 \begin{vmatrix} a_2 & 0 & a_4 \\ 0 & a_7 & 0 \\ a_6 & 0 & a_8 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} 0 & a_2 & a_4 \\ a_5 & 0 & 0 \\ 0 & a_6 & a_8 \end{vmatrix} \\
&= a_1\left(a_2\begin{vmatrix} a_7 & 0 \\ 0 & a_8 \end{vmatrix} + a_6\begin{vmatrix} 0 & a_4 \\ a_7 & 0 \end{vmatrix}\right) + a_3\left(-a_5\begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ a_6 & a_8 \end{vmatrix}\right) \\
&= a_1a_2a_7a_8 - a_1a_4a_6a_7 - a_2a_3a_5a_8 + a_3a_4a_5a_6 \\
&= a_1a_7(a_2a_8 - a_4a_6) - a_3a_5(a_2a_8 - a_4a_6) \\
&= (a_1a_7 - a_3a_5)(a_2a_8 - a_4a_6).
\end{aligned}$$

En définitive, le terme de gauche de 2.11 est égal au terme de droite de 2.11, et donc,

$$\det A = \det\left[\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_7 & 0 \\ 0 & a_8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_5 & 0 \\ 0 & a_6 \end{pmatrix}\right].$$

Exercice 3 *Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ est*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que $\mathcal{B} = \{(1,0,1), (-1,1,0), (1,1,0)\}$ est une base $\mathbb{R}^3$.*
2. *Calculer la matrice B de u dans $\mathcal{B}$.*
3. *Calculer A^n, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

Solution -
On notera $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (-1,1,0)$ et $v_3 = (1,1,0)$.

1. La famille $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si

$$\det_{\mathcal{B}_0}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \neq 0.$$

   Or

$$\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = -2.$$

   Donc $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. On a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}3\\ 1\\ 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

   Ces relations montrent que

$$u(v_1) = v_1, \quad u(v_2) = v_2 \quad \text{et} \quad u(v_3) = v_3 + 2v_1. \tag{2.12}$$

   La matrice B de u dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par

$$B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

   Comme les matrices A et B sont semblables, il existe une matrice inversible P, telle que

$$B = P^{-1}AP. \tag{2.13}$$

   La matrice P n'est rien d'autre que la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_0$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$P = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Pour utiliser la relation 2.13, on aura besoin de calculer la matrice P^{-1} qui n'est rien d'autre que la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}_0$. Un moyen de faire ce calcul est d'écrire le sytème

$$\left\{\begin{array}{lcl} v_1 & = & e_1+e_3, \\ v_2 & = & -e_1+e_2, \\ v_3 & = & e_1+e_2. \end{array}\right.$$

La résolution de ce système donne

$$\left\{\begin{array}{lcl} e_1 & = & \frac{1}{2}(v_3-v_2), \\ e_2 & = & \frac{1}{2}(v_2+v_3), \\ e_3 & = & \frac{1}{2}(2v_1+v_2-v_3). \end{array}\right.$$

Ainsi

$$P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. D'après 2.12, $A=PBP^{-1}$ et ainsi, (en utilisant les règles de la section 2.1.4,

$$\det A=\det B=1.$$

On obtient alors pour tout $n\in\mathbb{Z}$,

$$A^n=PB^nP^{-1}.$$

Pour calculer B^n, on peut remarquer que B^n est la matrice de u^n dans la base $\mathcal{B}$. On déduit de 2.12 que pour tout $n\in\mathbb{Z}$:

$$u^n(v_1)=v_1, \quad u^n(v_2)=v_2 \quad \text{et} \quad u^n(v_3)=v_3+2nv_1, \tag{2.14}$$

ce qui donne

$$B^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad n\in\mathbb{Z}. \tag{2.15}$$

On obtient finalement, pour tout $n\in\mathbb{Z}$,

$$A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

En définitive,

$$A^n = \begin{pmatrix} n+1 & n & -n \\ 0 & 1 & 0 \\ n & n & 1-n \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 *Calculer les comatrices des matrices suivantes et leurs inverses quand elles sont inversibles :*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution - Nous utiliserons le Théorème 3. Rappelons que

$$A^t\mathrm{cof}(A) = \det AI_n.$$

Quand A est inversible, c'est à dire quand $\det A \neq 0$, on déduit de cette relation :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}({}^t\mathrm{cof}(A)).$$

1. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\det A = -2$ et

$$\mathrm{cof}(A) = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi A et inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\det A = 4$ et

$$\mathrm{cof}(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi A et inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\det A = -27$ et

$$\operatorname{cof}(A) = \begin{pmatrix} -12 & -3 & 12 & 4 \\ 3 & -6 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \\ -3 & 6 & -24 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi A et inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 12 & -3 & 0 & 3 \\ 3 & 6 & 0 & -6 \\ -12 & 3 & 0 & 24 \\ -4 & 1 & 9 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 *Si A est une matrice carrée d'ordre $n \geq 2$ à coefficients dans K, on note $\tilde{A}$ la transposée de la comatrice de A.*

1. *Montrer que*

$$\det\tilde{A} = (\det A)^{n-1}. \tag{2.16}$$

2. *Montrer que*
   (a) $\mathrm{rg}A = n \Leftrightarrow \mathrm{rg}\tilde{A} = n$;
   (b) $\mathrm{rg}A = n-1 \Leftrightarrow \mathrm{rg}\tilde{A} = 1$;
   (c) $\mathrm{rg}A \leq n-2 \Leftrightarrow \mathrm{rg}\tilde{A} = 0$.
3. *Calculer $\tilde{\tilde{A}}$.*

Solution - Comme dans l'exercice 4, utilisons le théorème 3. En notant $\widetilde{A}$ la transposée de cof(A), on a la relation

$$A\widetilde{A} = (\det A)I_n. \tag{2.17}$$

Si $A = 0$, l'exercice est trivial. On supposera donc dans tout ce qui suit que $A \neq 0$.

1. On déduit de 2.17 et des règles de calcul enoncées dans la section 2.1.4, (1) :

$$\det(A\widetilde{A}) = \det A \det \widetilde{A} = (\det A)^n \det I_n = (\det A)^n. \tag{2.18}$$

En définitive,

$$\det A \det \widetilde{A} = (\det A)^n. \tag{2.19}$$

- Si $\det A \neq 0$, on déduit de la relation 2.19

$$\det \widetilde{A} = (\det A)^{n-1}. \tag{2.20}$$

- Si $\det A = 0$, 2.17 s'écrit

$$A\widetilde{A} = 0. \tag{2.21}$$

On en déduit que nécessairement $\det \widetilde{A} = 0$. En effet, dans le cas contraire, $\widetilde{A}$ serait inversible et, en multipliant par son inverse dans la relation 2.21, on obtiendrait que $A = 0$ ce qui contredit notre hypothèse. Donc dans ce cas, on a encore

$$\det \widetilde{A} = (\det A)^{n-1} = 0. \tag{2.22}$$

Finalement, dans tous les cas,

$$\det \widetilde{A} = (\det A)^{n-1}.$$

2. (a) On a

$$\mathrm{rg}\ A = n \quad \Leftrightarrow \quad \det A \neq 0 \quad \overset{(2.22)}{\Leftrightarrow} \quad \det \widetilde{A} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rg}\ \widetilde{A} = n.$$

(b) Supposons que $\mathrm{rg}\ A = n - 1$. Dans ce cas $\det A = 0$ et la relation 2.17 s'écrit

$$A\widetilde{A} = 0.$$

Considérons les endomorphismes u et $\widetilde{u}$ de K^n dont les matrices dans la base canonique sont respectivement A et $\widetilde{A}$. De la relation $u \circ \widetilde{u} = 0$, on déduit que

$$\mathrm{Im}\ \widetilde{u} \subset \mathrm{Ker}\ u.$$

Comme le rang de u est $n - 1$, le théorème du rang implique que

$$\dim \mathrm{Ker}\ u = 1,$$

et par suite $\dim \mathrm{Im}\ \widetilde{u}$ est nulle ou égale à 1. Ceci signifie que le rang de $\widetilde{A}$ est 0 ou 1.

Puisque le rang de A est $n - 1$, il existe un mineur non nul de A d'ordre $n-1$. En d'autres termes, il existe un couple (i, j) tels que $\det A_{ij} \neq 0$. Ceci qui entraîne que

$$\widetilde{A} \neq 0.$$

Finalement, la seule possibilité est

$$\mathrm{rg}\ \widetilde{A} = 1.$$

(c) Si rg $A \leq n-2$, alors pour tout $1 \leq i, j \leq n$, $\det A_{ij} = 0$ et donc $\widetilde{A} = 0$.

3. • Si A est inversible, on a

$$\widetilde{\widetilde{A}} \overset{(2.17)}{=} \det \widetilde{A}(\widetilde{A})^{-1} \overset{(2.17)(2.22)}{=}$$

$$(\det A)^{n-1} \frac{1}{\det A} A = (\det A)^{n-1}(A^{-1})^{-1} = (\det A)^{n-1} A.$$

• Si rg$A \leq n-1$, on a $\det A = 0$ et, en vertu de la question 2b, rg$\widetilde{A} \leq 1$ et, toujours en vertu de la question 2b, $\widetilde{\widetilde{A}} = 0$.

Finalement dans tous les cas, on a la formule

$$\widetilde{\widetilde{A}} = (\det A)^{n-1} A.$$

Exercice 6 *1. Soient* (a_1, a_2, a_3) *et* (b_1, b_2, b_3) *deux éléments de* K^3*. On considère la matrice* $A = (a_i + b_j)_{1 \leq i,j \leq 3}$.
Montrer que $\det A = 0$.

2. Nous allons généraliser ce résultat : soient $(a_1, \ldots, a_n)$ *et* $(b_1, \ldots, b_n)$ *deux éléments de* K^n, $(n \geq 3)$*. On considère la matrice* $A = (a_i + b_j)_{1 \leq i,j \leq n}$.
Montrer que $\det A = 0$.

3. Ce résultat est-il valable pour $n = 2$ *?*

Solution -

1. Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de la matrice A. Pour tout $1 \leq j \leq 3$,

$$C_j = V + b_j E$$

où $V = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi

$$\det A = \det(V + b_1 E, V + b_2 E, V + b_3 E).$$

Utilisons la multilinéarité du déterminant :

$$\begin{array}{rcc} \det A & = & \det(V,V,V) + b_2 \det(V,E,V) \\ & + & b_3 \det(V,V,E) + b_1 \det(E,V,V) \\ & + & b_1 b_2 \det(E,E,V) + b_2 b_3 \det(V,E,E) \\ & + & b_1 b_3 \det(E,V,E) + b_1 b_2 b_3 \det(E,E,E). \end{array} \tag{2.23}$$

Utilisons maintenant le fait que le déterminant est alterné, (2.1.4) : chaque fois qu'il apparaît deux fois au moins la même colonne dans un déterminant, celui-ci est nul. Comme c'est ce qui se produit dans l'expression 2.23, on déduit que

$$\det A = 0.$$

2. Plaçons nous maintenant dans le cas général, ($n \geq 3$). Notons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de la matrice A. Pour tout $1 \leq j \leq n$,

$$C_j = V + b_j E$$

où $V = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi

$$\det A = \det(V + b_1 E, V + b_2 E, \ldots, V + b_n E).$$

En développant cette quantité grâce à la multilinéarité du détermiant, (2.1.4), on obtient

$$\begin{array}{rcl} \det A & = & \det(V, \ldots, V) \\ & + & \sum_{q=1}^{n} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n} b_{i_1} \ldots b_{i_q} \det(X_1^{i_1, \ldots, i_q}, \ldots, X_n^{i_1, \ldots, i_q}) \end{array}$$

où chaque colonne $X_j^{i_1, \ldots, i_q}$ est égale soit à V soit à E. Ainsi, puisque $n \geq 3$, dans l'expression $\det(X_1^{i_1 \ldots i_q}, \ldots, X_n^{i_1 \ldots i_q})$ soit V soit E va apparaître au moins deux fois et cette expression s'annulera. Finalement $\det A = 0$.

3. L'hypothèse $n \geq 3$ est cruciale. En effet, pour $n = 2$, on obtient

$$\begin{array}{rclcl} \det A & = & \det\,(V + b_1 E, V + b_2 E) & = & (b_2 - b_1) \det(V, E) \\ & = & (b_2 - b_1) \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \end{vmatrix} & = & (b_2 - b_1)(a_1 a_2 - 1). \end{array}$$

En prenant par exemple

$$a_1 = 1, a_2 = 0, b_1 = 0, b_2 = 1,$$

on trouve

$$\det A = 1.$$

Le résultat des deux précédentes questions tombe donc en défaut pour $n = 2$.

Exercice 7 *Soit* $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ *une matrice d'ordre* n *à coefficients complexes et* $\alpha \in \mathbb{C}$. *On considère la matrice*

$$A(\alpha) = (\alpha^{i+j} a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}.$$

Montrer la relation $\det A(\alpha) = \alpha^{n(n+1)} \det A$.

On pourra revenir à la définition classique du déterminant d'une matrice, (rappelée au paragraphe 2.1.2). On se souviendra également de la formule qui donne la somme des n premiers entiers :

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Solution - On note $\widetilde{a}_{ij}$ les coefficients de $A(\alpha)$. D'après la définition classique du déterminant d'une matrice,

$$\begin{aligned}
\det A(\alpha) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) \widetilde{a}_{\sigma(1)1} \widetilde{a}_{\sigma(2)2} \ldots \widetilde{a}_{\sigma(n)n} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) \alpha^{\sigma(1)+1} a_{\sigma(1)1} \alpha^{\sigma(2)2} a_{\sigma(2)2} \ldots \alpha^{\sigma(n)+n} a_{\sigma(n)n} \\
&= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) \alpha^{1+\ldots+n+\sigma(1)+\ldots+\sigma(n)} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \ldots a_{\sigma(n)n} \\
&= \alpha^{1+\ldots+n+\sigma(1)+\ldots+\sigma(n)} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \ldots a_{\sigma(n)n}.
\end{aligned}$$

Comme chaque permutation σ est une bijection, on a :

$$\sigma(1) + \ldots + \sigma(n) = 1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Par suite,

$$\det A(\alpha) = \alpha^{n(n+1)} \det A.$$

Chapitre 3

Systèmes linéaires

3.1 Rappels de cours

3.1.1 Définitions

Un *système linéaire* est une suite d'équations du type :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + ...a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + ...a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + ...a_{pn}x_n & = b_p \end{cases} \tag{3.1}$$

où les coefficients a_{ij}, b_k sont des éléments de $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que 3.1 est un système linéaire à p équations et n inconnues $x_1, \ldots, x_n$.

Résoudre un tel système signifie *déterminer* tous les n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ vérifiant simultanément toutes les équations 3.1.

Il y a plusieurs façons d'interpréter un système linéaire, qui utilisent l'algèbre linéaire. En voici quelques unes.

- **Expression matricielle d'un système linéaire -**

  — On note $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq n}$ la matrice des coefficients du système. On appelle *rang* du système 3.1 le rang de la matrice A.

  — On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ le vecteur de K^n dont les composantes (dans la base canonique) sont les inconnues $x_1, ..., x_n$ du système,

— et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ le vecteur de K^p, dont les composantes (dans la base canonique) sont les coefficients qui apparaissent dans le terme de droite de 3.1.

Le système 3.1 s'écrit alors :

$$AX = B.$$

Etant donnés la matrice A et le vecteur $B \in K^p$, résoudre le système 3.1 revient donc à déterminer tous les vecteurs $X \in K^n$ tels que

$$AX = B.$$

Ainsi, considérons par exemple le système très simple :

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 & = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = 3 \end{cases} \tag{3.2}$$

On associe à 3.2 la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

et les deux vecteurs $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ **et** $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Le système 3.2 est donc équivalent à l'équation matricielle

$$AX = B.$$

- **Interprétation en termes d'application linéaire -**

On peut interpréter le système 3.1 en introduisant l'endomorphisme

$$f : K^n \to K^p,$$

dont la matrice dans les bases canoniques de K^n et K^p est A. Résoudre 3.1 revient alors à rechercher tous les vecteurs $x = (x_1, ..., x_n)$ de K^n tels que

$$f(x) = b,$$

où b est le vecteur ayant pour composantes $(b_1, ..., b_p)$ dans la base canonique de K^p.

Ainsi, reprenons le système très simple 3.2 : Soient (e_1, e_2, e_3) **la base canonique de** $\mathbb{R}^3$ **et** (ϵ_1, ϵ_2) **la base canonique de** $\mathbb{R}^2$**. On associe à 3.2 l'application linéaire**

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,$$

définie par

$$\begin{aligned} f(e_1) &= 2\epsilon_1 + \epsilon_2 \\ f(e_2) &= 4\epsilon_1 + 2\epsilon_2 \\ f(e_3) &= 2\epsilon_1 + \epsilon_2 \end{aligned} \tag{3.4}$$

et les deux vecteurs

$$b = 6\epsilon_1 + 3\epsilon_2,$$

et

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3.$$

Le système 3.2 est donc équivalent à l'équation

$$f(x) = b.$$

- **Interprétation en termes de combinaisons vectorielles -** Considérons les n vecteurs $c_1, c_2, ..., c_n$ de K^p dont les composantes sont les colonnes du système 3.1 :

$$c_1 = (a_{11}, ..., a_{p1}),$$

$$c_2 = (a_{12}, ..., a_{p2}),$$

$$\vdots$$

$$c_n = (a_{1n}, ..., a_{pn}),$$

et

$$b = (b_1, ..., b_p).$$

Résoudre le système 3.1 revient alors à rechercher des scalaires $x_1, ..., x_n$ tels que

$$x_1c_1 + ... + x_nc_n = b,$$

c'est-à-dire à examiner si le vecteur b est combinaison linéaire des vecteurs $c_1, c_2, ..., c_n$, et trouver les coefficients $x_1, ..., x_n$ qui réalisent cette combinaison.

Suivant le problème traité, il peut être judicieux de choisir une interprétation plutôt qu'une autre.

3.1.2 La formule de Cramer

Traitons d'abord un cas particulier : celui où $n = p$ et A est une matrice inversible. Dans ce cas, 3.1 a une solution unique. En effet,

$$AX = B \Longleftrightarrow X = A^{-1}B.$$

On a alors le

Théorème 5 - la formule de Cramer - *Si $n = p$ et la matrice A est inversible, le système 3.1 admet pour unique solution le n-uplet $(x_1, ..., x_n)$, où pour tout $i \in \{1, ..., n\}$,*

$$x_i = \frac{\det|c_1, ..., c_{i-1}, b_i, c_{i+1}, ..., c_n|}{\det A}.$$

Considérons par exemple le système

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 & = 4 \\ x_1 + \pi x_2 & = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

La matrice associée à 3.5 est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & \pi \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

Comme det $A = 2\pi + 3$, il s'agit d'un système de Cramer dont la solution unique est

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 0 & \pi \end{vmatrix}}{2\pi + 3}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{2\pi + 3},$$

c'est à dire

$$x_1 = \frac{4\pi}{2\pi + 3}, \quad x_2 = \frac{-4}{2\pi + 3},$$

3.1.3 Systèmes homogènes

Le système 3.1 est dit *homogène* si

$$b_1 = ... = b_p = 0.$$

En utilisant la représentation matricielle, le système 3.1 s'écrit donc

$$AX = 0.$$

L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions est donc le noyau de A :

$$\mathcal{S} = \text{Ker } A.$$

C'est donc un sous-espace vectoriel de K^n. En particulier, $\mathcal{S}$ n'est pas vide puisqu'il contient au moins la solution nulle.

Théorème 6 *Soit*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + ...a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + ...a_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + ... + ...a_{pn}x_n & = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

un système homogène. On détermine comme suit les solutions éventuelles de 3.7 : On calcule le rang du système. Soit r ce rang, (un mineur d'ordre r est alors non nul). Alors

- *les solutions du système 3.7 forment un sous-espace* **vectoriel** *de dimension $n - r$.*
- *Si c'est par exemple le mineur*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rr} \end{vmatrix} \tag{3.8}$$

qui n'est pas nul, alors le système 3.7 est equivalent au système

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r & = -a_{1(r+1)}x_{r+1} - ... - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_r & = -a_{2(r+1)}x_{r+1} - ... - a_{2n}x_n \\ \vdots & \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rr}x_r & = -a_{r(r+1)}x_{r+1} - ... - a_{rn}x_n \end{cases} \tag{3.9}$$

- *On peut alors résoudre 3.9 en considérant qu'il s'agit d'un système de Cramer, les solutions dépendant alors des paramètres $x_{r+1}, ..., x_n$ intervenant dans les termes de droite des signes "$=$".*

Voici un exemple dans $\mathbb{R}^4$, dont les coordonnées d'un point sont notées (x, y, z, t) : en utilisant la méthode précédente [1], résolvons le système

$$\begin{cases} x + y + z & = 0 \\ y + z + t & = 0 \\ x + 2y + 2z + t & = 0 \\ x - t & = 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

Un calcul direct montre que le rang de ce système est 2. L'ensemble des solutions est donc un plan vectoriel. De plus, le mineur $(2, 2)$ "en haut à gauche" est

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1. \tag{3.11}$$

1. ce qui est bien lourd, eu égard à la simplicité du système ...

Il est donc non nul. Par conséquent, le système 3.10 est équivalent au système

$$\begin{cases} x+y & =-z \\ 2x+y & =-z-t \end{cases} \tag{3.12}$$

où z **et** t **deviennent des paramètres. On déduit immédiatement des deux premières équations :**

$$\begin{cases} x & =-t \\ y & =-z+t \end{cases} \tag{3.13}$$

Donc l'ensemble des solutions est un plan vectoriel (sous-espace vectoriel de dimension $4-2=2$ **de** $\mathbb{R}^4$**) :**

$$\mathcal{S}=\{(x,y,z,t) \textbf{ tels que } x=-t, y=-z+t, z\in\mathbb{R}, t\in\mathbb{R}\}.$$

3.1.4 Le cas général

Théorème 7 de Rouché et Fontené - *On détermine comme suit les solutions éventuelles du système 3.1 :*

- *Si le rang du système est r, (un mineur d'ordre r est donc non nul), l'ensemble des solutions du système 3.1 est*
  - *soit vide,*
  - *soit un sous-espace* **affine**[2] *de dimension $(n-r)$. En particulier, si $r<n$, le système admet dans ce cas une infinité de solutions.*
- *Si c'est par exemple le mineur*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \tag{3.14}$$

qui n'est pas nul, alors le système 3.1 admet des solutions si et seulement si tous les mineurs d'ordre $r+1$ du type

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & b_r \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sr} & b_s \end{vmatrix}, \tag{3.15}$$

(où $r<s\leq p$) sont nuls[3].

2. Par définition, un sous-espace affine de dimension $(n-r)$ de K^n est obtenu en translatant un sous-espace vectoriel de dimension $(n-r)$ de K^n

3. Pour être plus précis, on appelle *déterminant caractéristique* associé au mineur d'ordre r de type 3.14 tout déterminant du type 3.15.

- *Dans ce cas, le système 3.1 est équivalent au système de Cramer*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r & = b_1 - a_{1(r+1)}x_{r+1} - ... - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_r & = b_2 - a_{2(r+1)}x_{r+1} - ... - a_{2n}x_n \\ \vdots & \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rr}x_r & = b_r - a_{r(r+1)}x_{r+1} - ... - a_{rn}x_n \end{cases} \tag{3.16}$$

L'ensemble des solutions du système 3.1 est alors obtenu en faisant prendre aux variables x_i se trouvant à droite du signe " = " de 3.16 des valeurs arbitraires, et en résolvant le système de Cramer ainsi défini.

Reprenons l'exemple 3.10, auquel on ajoute un second membre :

$$\begin{cases} x + y + z & = 3 \\ y + z + t & = 6 \\ x + 2y + 2z + t & = 9 \\ x - t & = -3 \end{cases} \tag{3.17}$$

Le rang de ce système est évidemment toujours 2. Comme le mineur d'ordre 2 "en haut à gauche"

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{3.18}$$

est non nul (et égal à 1), nous allons chercher si le système 3.17 a des solutions en calculant tous les déterminants caractéristiques obtenus en bordant ce mineur comme la procédure du théorème 7 le décrit. Il y a 2 déterminants d'ordre 3 à calculer : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 9 \end{vmatrix}$ **et** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}$**. On vérifie que ces deux déterminants sont nuls. L'espace des solutions $\mathcal{S}$ est donc un espace affine de dimension $4 - 2 = 2$, c'est à dire un plan affine. Plus précisément, on détermine $\mathcal{S}$ en résolvant le système de Cramer**

$$\begin{cases} x + y & = 3 - z \\ y & = 6 - z - t \end{cases} \tag{3.19}$$

où z et t sont considérés comme des paramètres. On a donc :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 - z & 1 \\ 6 - z - t & 1 \end{vmatrix}}{1}; \ y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 - z \\ 0 & 6 - z - t \end{vmatrix}}{1};$$

c'est à dire :

$\mathcal{S} = \{(x, y, z, t)$ **tels que** $x = 6 - 2t, y = -9 + z + 2t, z \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\}$.

3.1.5 Interprétation géométrique

Revenons à l'interprétation en termes d'endomorphisme, et remarquons que si X et X' sont solutions du système 3.1, alors $AX = AX' = B$, et donc $A(X - X') = 0$. Par suite,

$$X - X' \in \text{ Ker } A.$$

Réciproquement, si X_0 est solution de 3.1, et $Z \in$ Ker A, alors $A(X_0+Z) = AX_0 + AZ = B$, donc $X_0 + Z$ est aussi solution de 3.1. On a donc le

Théorème 8 *Pour déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de 3.1 il suffit de trouver une solution particulière X_0 de 3.1 et de déterminer le noyau de la matrice A : l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de 3.1 est donc le sous-espace affine*

$$\mathcal{S} = \{X \in K^n, \text{ tels que } X = X_0 + Z, Z \in \text{Ker}A\}.$$

Voici un exemple : considérons le "petit" système linéaire

$$\begin{cases} 2x + 3y & = 8 \\ 4x + 6y & = 16 \end{cases} \tag{3.20}$$

Une solution particulière de 3.20 est

$$X_0 = (x_0, y_0) = (1, 2).$$

La matrice associée à 3.20 est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6. \end{pmatrix}$$

Le rang de A est 1. Le noyau de A est

$$\textbf{Ker } A = \{(3t, -2t), t \in \mathbb{R}\}.$$

Le théorème 8 affirme que l'espace des solution est la droite affine du plan

$$\mathcal{S} = \{(x, y) = (1, 2) + (3t, -2t), t \in \mathbb{R}\},$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{S} = \{(x, y) = (1 + 3t, 2 - 2t), t \in \mathbb{R}\}.$$

3.2 Exercices

Exercice 8 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *les systèmes suivants* $(K = \mathbb{R})$ *:*

$$1) \quad \begin{cases} -2x - y + 2z = 1 \\ -2x + 2z = -2 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases} \quad , \quad 2) \quad \begin{cases} x + z + 2t = -1 \\ x - y + z = 2 \\ x - y - 2t = 3 \\ x + y - t = -3 \end{cases}$$

Solution -

1. Le système peut s'écrire sous forme matricielle

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.21}$$

où $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Calculons le déterminant de A. On a

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} \overset{L_2 - L_1}{=} \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 4.$$

Le déterminant de A étant non nul, le système est un système de Cramer et les solutions sont données par la formule de Cramer, c'est-à-dire,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{4}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{4} \quad \text{et } z = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{4}.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}\left(\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} \right) = 3 \\ y &= \frac{1}{4}\left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \right) = -3 \\ z &= \frac{1}{4}\left(\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \right) = 2. \end{aligned}$$

On vérifie que $(3, -3, 2)$ est bien solution du sytème.
En conclusion, $(3, -3, 2)$ est l'unique solution du sytème 3.21.

2. Le système peut s'écrire sous forme matricielle

$$B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \tag{3.22}$$

où $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculons le déterminant de B. On a

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} &\overset{\substack{L_2-L_1 \\ L_3-L_1 \\ L_4-L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -4 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_2-L_1 \\ L_3+L_1}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -5 \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -3.
\end{aligned}$$

Le déterminant de B étant non nul, le système est un système de Cramer et les solutions sont données par la formule de Cramer, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned}
x &= -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad y = -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\
z &= -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}, \quad t = -\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_2+2L_1 \\ L_3+3L_1 \\ L_4-3L_1}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \end{vmatrix} \overset{L_2=L_3}{=} 0.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_2-L_1 \\ L_3-L_1 \\ L_4-L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \quad 3\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 9.$$

Un calcul analogue à celui de y donne les valeurs de z et de t. On obtient finalement $(x, y, z, t) = (0, -3, -1, 0)$ qui est bien solution de 3.22.

En résumé $(0, -3, -1, 0)$ est l'unique solution de 3.22.

Exercice 9 *Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système suivant, où a est un paramètre complexe :*

$$\begin{cases} -ax - y + \imath z = 2a \\ -x + \imath y + 2z = 0 \\ \imath x - y + \imath a z = a \end{cases}$$

Solution -

Le système peut s'écrire sous forme matricielle

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

où $A = \begin{pmatrix} -a & -1 & \imath \\ -1 & \imath & 2 \\ \imath & -1 & \imath a \end{pmatrix}$.

Calculons le déterminant de A. On a

$$\begin{vmatrix} -a & -1 & \imath \\ -1 & \imath & 2 \\ \imath & -1 & \imath a \end{vmatrix} \overset{\substack{L_2+\imath L_1 \\ L_3-L_1}}{=} \begin{vmatrix} -a & -1 & \imath \\ -1-\imath a & 0 & 1 \\ \imath + a & 0 & \imath(a-1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1-\imath a & 1 \\ \imath + a & \imath(a-1) \end{vmatrix} = a(a-2-\imath).$$

1. Supposons $a \neq 0$ et $a \neq 2+\imath$. Dans ce cas le déterminant de A est non nul et donc 3.23 est un systèmes de Cramer dont les solutions sont données par la formule de Cramer
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2a & -1 & \imath \\ 0 & \imath & 2 \\ a & -1 & \imath a \end{vmatrix}}{a(a-2-\imath)},\ y = \frac{\begin{vmatrix} -a & 2a & \imath \\ -1 & 0 & 2 \\ \imath & a & \imath a \end{vmatrix}}{a(a-2-\imath)} \text{ et } z = \frac{\begin{vmatrix} -a & -1 & 2a \\ -1 & \imath & 0 \\ \imath & -1 & a \end{vmatrix}}{a(a-2-\imath)}.$$
On a
$$\begin{vmatrix} 2a & -1 & \imath \\ 0 & \imath & 2 \\ a & -1 & \imath a \end{vmatrix} = 2a\begin{vmatrix} \imath & 2 \\ -1 & \imath a \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} -1 & \imath \\ \imath & 2 \end{vmatrix} = -a(2a-3).$$
$$\begin{vmatrix} -a & 2a & \imath \\ -1 & 0 & 2 \\ \imath & a & \imath a \end{vmatrix} = -2a\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ \imath & \imath a \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} -a & \imath \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = a(2(1+\imath)a+3\imath).$$
$$\begin{vmatrix} -a & -1 & 2a \\ -1 & \imath & 0 \\ \imath & -1 & a \end{vmatrix} = 2a\begin{vmatrix} -1 & \imath \\ \imath & -1 \end{vmatrix} + a\begin{vmatrix} -a & -1 \\ -1 & \imath \end{vmatrix} = a(3-\imath a).$$
En résumé, si $a \neq 0$ et $a \neq 2+\imath$, le triplet
$$\left(\frac{3-2a}{a-2-\imath}, \frac{2(1+\imath)a+3\imath}{a-2-\imath}, \frac{3-\imath a}{a-2-\imath}\right)$$
est l'unique solution de 3.23.

2. Supposons $a = 0$. Le système 3.23 devient un système homogène. Puisque le mineur $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & \imath \end{vmatrix}$ est non nul, la matrice A est de rang 2. Les solutions de 3.23 sont donc les solutions du système
$$\begin{cases} -y+\imath z = 0 \\ -x+\imath y+2z = 0 \end{cases} \tag{3.24}$$
L'ensemble des solutions de 3.24, est la droite vectorielle
$$\mathbb{S} = \{(z, \imath z, z), z \in \mathbb{C}\}.$$
En définitive, si $a = 0$, l'ensemble des solutions de 3.23 est la droite
$$\mathbb{S} = \{(z, \imath z, z), z \in \mathbb{C}\}.$$

3. Supposons $a = 2+\imath$. Le mineur $\begin{vmatrix} -2-\imath & -1 \\ -1 & \imath \end{vmatrix}$ est non nul et donc la matrice A est de rang 2. D'après le théorème de Rouché-Fontené, 3.23 admet des solutions si et seulement si
$$\begin{vmatrix} -2-\imath & -1 & 2(2+\imath) \\ -1 & \imath & 0 \\ \imath & -1 & (2+\imath) \end{vmatrix} = 0.$$

Or

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -2-\imath & -1 & 2(2+\imath) \\ -1 & \imath & 0 \\ \imath & -1 & (2+\imath) \end{vmatrix} &= (2+\imath)\begin{vmatrix} -2-\imath & -1 & 2 \\ -1 & \imath & 0 \\ \imath & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (2+\imath)\left(2\begin{vmatrix} -1 & \imath \\ \imath & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2-\imath & -1 \\ -1 & \imath \end{vmatrix}\right) \\
&= 2(2+\imath)(2-\imath) \neq 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, dans le cas $a = 2+\imath$, 3.23 n'admet pas de solution.

Le tableau suivant résume ce qui précède. Désignons par $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de 3.23.

Conditions sur a	Solutions de (S)
$a \neq 0$ et $a \neq 2+\imath$	$\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{3-2a}{a-2-\imath}, \frac{2(1+\imath)a+3\imath}{a-2-\imath}, \frac{3-\imath a}{a-2-\imath}\right)\right\}$
$a = 0$	$\mathcal{S} = \{(z, \imath z, z), z \in \mathbb{C}\}$
$a = 2+\imath$	$\mathcal{S} = \emptyset$

Exercice 10 *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants :*

$$1) \quad \begin{cases} 3x - 3y + z = 0 \\ -2x + 2y + 2z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} , \quad 2) \quad \begin{cases} -23x + 3y + z + 2t = 0 \\ x - 4y + z + t = 0 \\ x - y + z - 2t = 0 \\ 3x + y - 2t = 0 \end{cases}$$

Solution -

1. Le système peut s'écrire sous forme matricielle

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le système 3.25 est homogène. Déterminons le rang de la matrice A. En notant C_1, C_2, C_3 les colonnes de A, on remarque $C_2 = -C_1$ et donc

$$\det A = 0.$$

Ainsi le rang de A est inférieure ou égal à 2. Comme le mineur $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 8$ n'est pas nul, A est de rang 2.
Le système 3.25 est donc équivalent au système

$$\begin{cases} 3x + z = 3y \\ -2x + 2z = -2y \end{cases} \tag{3.26}$$

Les solutions de 3.26 sont données par la formule de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3y & 1 \\ -2y & 2 \end{vmatrix}}{8} = y \quad \text{et} \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3y \\ -2 & -2y \end{vmatrix}}{8} = 0.$$

L'ensemble des solutions de 3.25 est donc la droite vectorielle

$$\{(x, x, 0), x \in \mathbb{R}\}.$$

2. Le système peut s'écrire sous forme matricielle

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

où

$$B = \begin{pmatrix} -23 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Le système 3.27 est un système homogène. Déterminons le rang de la matrice B. On a

$$\begin{aligned}
\det B &= \begin{vmatrix} -23 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\
&\overset{\substack{L_2-L_1 \\ L_3-L_1}}{=} \begin{vmatrix} -23 & 3 & 1 & 2 \\ 24 & -7 & 0 & -1 \\ 24 & -4 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 24 & -7 & -1 \\ 24 & -4 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 24 & -7 & -1 \\ -6 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\
&= -12 \begin{vmatrix} 8 & -7 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_2+L_1 \\ L_3-2L_1}}{=} -12 \begin{vmatrix} 8 & -7 & -1 \\ 6 & -6 & 0 \\ -15 & 15 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 12 \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -15 & 15 \end{vmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

Calculons le mineur d'ordre 3 de B obtenu en enlevant la dernière ligne et la dernière colonne à la matrice B, c'est à dire

$$\begin{vmatrix} -23 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

On a

$$\begin{vmatrix} -23 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_2-L_1 \\ L_3-L_1}}{=} \begin{vmatrix} -23 & 3 & 1 \\ 24 & -7 & 0 \\ 24 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 72.$$

Comme ce déterminant n'est pas nul, le rang de B est égal à 3 et le système 3.27 est équivalent au système

$$\begin{cases} -23x + 3y + z = -2t \\ x - 4y + z = -t \\ x - y + z = 2t \end{cases},$$

dont les solutions sont données par la formule de Cramer

$$x = \frac{1}{72}\begin{vmatrix} -2t & 3 & 1 \\ -t & -4 & 1 \\ 2t & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{t}{72}\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_2-L_1 \\ L_3-L_1}}{=} \frac{t}{72}\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 1 & -7 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \end{vmatrix} = \frac{t}{3}.$$

$$y = \frac{1}{72}\begin{vmatrix} -23 & -2t & 1 \\ 1 & -t & 1 \\ 1 & 2t & 1 \end{vmatrix} = \frac{t}{72}\begin{vmatrix} -23 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_2-L_1 \\ L_3-L_1}}{=} \frac{t}{72}\begin{vmatrix} -23 & -2 & 1 \\ 24 & 1 & 0 \\ 24 & 4 & 0 \end{vmatrix} = t.$$

$$z = \frac{1}{72}\begin{vmatrix} -23 & 3 & -2t \\ 1 & -4 & -t \\ 1 & -1 & 2t \end{vmatrix} = \frac{t}{72}\begin{vmatrix} -23 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{L_3-L_2}{=} \frac{t}{72}\begin{vmatrix} -23 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \frac{8}{3}t.$$

L'ensemble des solutions de 3.27 est donc la droite vectorielle

$$\left\{(\frac{t}{3}, t, \frac{8}{3}t, t), t \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercice 11 *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants :*

$$1) \quad \begin{cases} x - 6y + 2z = 4 \\ -2x + 6y + 2z = -2 \\ x - y - 3z = -1 \end{cases}, \quad 2) \quad \begin{cases} -y + 4z + 2t = 5 \\ -3x + y + z = -1 \\ 6x - y - 2t = 3 \\ 3x + y - 4t = 0 \end{cases}$$

Solution -

1. Le système peut s'écrire sous forme matricielle

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 \\ -2 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Calculons le déterminant de A. On a

$$\begin{vmatrix} 1 & -6 & 2 \\ -2 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_2+2L_1 \\ L_3-L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

Le rang de A est donc inférieur ou égal à 2 et puisque le mineur $\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}$ est non nul, le rang de A et égal à 2. D'après le théorème de Rouche-Fontené, le système 3.28 admet des solutions si et seulement si le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & -6 & 4 \\ -2 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ est nul. Or

$$\begin{vmatrix} 1 & -6 & 4 \\ -2 & 6 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_2+2L_1 \\ L_3-L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -6 & 4 \\ 0 & -6 & 6 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = -12 \neq 0.$$

Ainsi 3.28 n'admet pas de solution.

2. Le système peut s'écrire sous forme matricielle

$$B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

où

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Calculons le déterminant de B. On a

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} & \overset{\substack{L_2+L_1 \\ L_3-L_1 \\ L_4+L_1}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 & 2 \\ -3 & 0 & 5 & 2 \\ 6 & 0 & -4 & -4 \\ 3 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} \\ & = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 6 & -4 & -4 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_2+2L_1 \\ L_3+L_1}}{=} \begin{vmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi le rang de B est inférieur ou égal à 3. Calculons le mineur d'ordre 3, $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix}$. On a

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix} \overset{L_3+2L_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -18.$$

Ce mineur étant non nul, le rang de B est égal à 3 et, d'après le théorème de Rouché-Fontené, le système (S_2) admet des solutions si et seulement si le déterminant $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \\ 6 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ est nul. Calculons ce déterminant. On a

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 & 5 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \\ 6 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \overset{\substack{L_2+L_1 \\ L_3-L_1 \\ L_4+L_1}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 4 & 5 \\ -3 & 0 & 5 & 4 \\ 6 & 0 & -4 & -2 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} \\
& = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 6 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \overset{\substack{L_2+2L_1 \\ L_3+L_1}}{=} \begin{vmatrix} -3 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 9 & 9 \end{vmatrix} = 0.
\end{aligned}$$

Ainsi 3.29 admet des solutions et il est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} -y + 4z = 5 - 2t \\ -3x + y + z = -1 \\ 6x - y = 3 + 2t \end{array} \right. ,$$

dont les solutions sont données par la formule de Cramer

$$\begin{aligned}
x &= -\frac{\begin{vmatrix} 5-2t & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3+2t & -1 & 0 \end{vmatrix}}{18} \overset{\substack{L_2+L_1 \\ L_3-L_1}}{=} -\frac{\begin{vmatrix} 5-2t & -1 & 4 \\ 4-2t & 0 & 5 \\ -2+4t & 0 & -4 \end{vmatrix}}{18} = -\frac{\begin{vmatrix} 4-2t & 5 \\ -2+4t & -4 \end{vmatrix}}{18} \\
&= \frac{1}{3}(2t+1). \\
y &= -\frac{\begin{vmatrix} 0 & 5-2t & 4 \\ -3 & -1 & 1 \\ 6 & 3+2t & 0 \end{vmatrix}}{18} \overset{L_3+2L_2}{=} -\frac{\begin{vmatrix} 0 & 5-2t & 4 \\ -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1+2t & 2 \end{vmatrix}}{18} = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 5-2t & 4 \\ 1+2t & 2 \end{vmatrix} \\
&= 2t-1. \\
z &= -\frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 5-2t \\ -3 & 1 & -1 \\ 6 & -1 & 3+2t \end{vmatrix}}{18} \overset{L_3+2L_2}{=} -\frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 5-2t \\ -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1+2t \end{vmatrix}}{18} = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 5-2t \\ 1 & 1+2t \end{vmatrix} = 1.
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de 3.29 est donné par

$$\mathbb{S} = \left\{ (\frac{1}{3}(2t+1), 2t-1, 1), t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 12 *Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants et où a, b sont deux paramètres réels*

$$\left\{\begin{array}{l}(a+b)x - by + (2a+b)z = b \\ (1+a-b)x + by + (2+2a-b)z = 2b \\ (1-a-b)x + by + (2-2a-b))z = 3b\end{array}\right. .$$

Solution - Le système peut s'écrire sous forme matricielle

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 2b \\ 3b \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

où $A = \begin{pmatrix} a+b & -b & 2a+b \\ 1+a-b & b & 2+2a-b \\ 1-a-b & b & 2-2a-b \end{pmatrix}$. Calculons le déterminant de A. On a

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a+b & -b & 2a+b \\ 1+a-b & b & 2+2a-b \\ 1-a-b & b & 2-2a-b \end{vmatrix} &\overset{\substack{L_2+L_1 \\ L_3+L_1}}{=} \begin{vmatrix} a+b & -b & 2a+b \\ 1+2a & 0 & 2+4a \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \quad b\begin{vmatrix} 1+2a & 2+4a \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0.\end{aligned}$$

Le rang de A est alors inférieur ou égal à 2. Considèrons le mineur d'ordre 2 donné par

$$\begin{vmatrix} a+b & -b \\ 1+a-b & b \end{vmatrix} = b(1+2a).$$

Discutons suivant que ce mineur est nul ou non.

1. $b \neq 0$ et $a \neq -\frac{1}{2}$. Dans ce cas le rang de A est égal à 2 et, d'après le théorème de Rouché-Fontené, le système 3.30 admet des solutions si et seulement si le déterminant $\begin{vmatrix} a+b & -b & 2b \\ 1+a-b & b & 2b \\ 1-a-b & b & 3b \end{vmatrix}$ est nul. Or

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a+b & -b & 2b \\ 1+a-b & b & 2b \\ 1-a-b & b & 3b \end{vmatrix} &\overset{\substack{L_2+L_1 \\ L_3+L_1}}{=} \begin{vmatrix} a+b & -b & 2b \\ 1+2a & 0 & 3b \\ 1 & 0 & 4b \end{vmatrix} \\ &= \quad b\begin{vmatrix} 1+2a & 3b \\ 1 & 4b \end{vmatrix} = b^2(8a+1).\end{aligned}$$

   (a) $b \neq 0$, $a \neq -\frac{1}{2}$ et $a \neq -\frac{1}{8}$. Le système 3.30 n'admet pas de solution.

(b) $b \neq 0$, $a = -\frac{1}{8}$. Le système 3.30 est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} (b - \frac{1}{8})x - by = b - (b - \frac{1}{4})z \\ (\frac{7}{8} - b)x + by = 2b - (\frac{7}{4} - b)z \end{array} \right. ,$$

dont les solutions sont données par la formule de Cramer

$$\begin{aligned} x &= \frac{4}{3b} \begin{vmatrix} b - (b - \frac{1}{4})z & -b \\ 2b - (\frac{7}{4} - b)z & b \end{vmatrix} = 4b - 2z \\ y &= \frac{4}{3b} \begin{vmatrix} b - \frac{1}{8} & b - (b - \frac{1}{4})z \\ \frac{7}{8} - b & 2b - (\frac{7}{4} - b)z \end{vmatrix} = 4b - z - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

2. $b = 0$. Le système s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{l} ax + 2az = 0 \\ (1 + a)x + (2 + 2a)z = 0 \\ (1 - a)x + (2 - 2a))z = 0 \end{array} \right.$$

ce qui est équivalent à

$$x + 2z = 0,$$

puisque $a, 1 + a$ et $1 - a$ ne peuvent pas s'annuler simultanément.

3. $a = -\frac{1}{2}$. Le système (S) s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{l} (b - \frac{1}{2})x - by + (b - 1)z = b \\ (\frac{1}{2} - b)x + by + (1 - b)z = 2b \\ (\frac{3}{2} - b)x + by + (3 - b))z = 3b \end{array} \right. .$$

En faisant $L_1 + L_2$, on obtient $3b = 0$ et donc $b = 0$. Donc ce système admet des solutions si et seulement si $b = 0$ et dans ce cas (S) est équivalent à

$$x + 2z = 0.$$

Le tableau suivant résume ce qui précède. On désigne par $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de 3.30.

Conditions sur a et b	Solutions de 3.30
$b \neq 0$, $a \neq -\frac{1}{2}$ et $a \neq -\frac{1}{8}$	$\mathcal{S} = \emptyset$
$b \neq 0$ et $a = -\frac{1}{8}$	$\mathcal{S} = \{(4b - z, 4b - z - \frac{3}{2}, z), z \in \mathbb{R}\}$
$b \neq 0$ et $a = -\frac{1}{2}$	$\mathcal{S} = \emptyset$
$b = 0$	$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + 2z = 0\}$

Chapitre 4

Diagonalisation des endomorphismes

4.1 Rappels de cours

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et f un endomorphisme de E. On dit que f est **diagonalisable** s'il existe une base $(\epsilon_1, ..., \epsilon_k, ..., \epsilon_n)$ de E dans laquelle la matrice $M(f)_{(\epsilon_i)}$ de f est diagonale. La matrice $M(f)_{(\epsilon_i)}$ aura alors une expression du type suivant :

$$M(f)_{(\epsilon_i)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_i & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$$

De façon équivalente, on dit qu'une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(K)$ est **diagonalisable** si elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(K)$ et une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que

$$M = PDP^{-1}.$$

Ces deux énoncés sont équivalents : en effet, si $M \in \mathcal{M}_n(K)$, on peut considérer M comme la matrice d'un endomorphisme f de K^n dans la base canonique. Si f est diagonalisable, il existe une base $(\epsilon_1, ..., \epsilon_k, ..., \epsilon_n)$ de K^n dans laquelle la matrice D de f est diagonale. Donc D et M représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes. Par suite, ces deux matrices sont semblables, ce qui signifie qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que

$$M = PDP^{-1}.$$

La réciproque est immédiate.

4.1.1 Vecteurs propres, valeurs propres

Soit E un espace vectoriel sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 9 *Soit v un vecteur de E. On dit que v est un* **vecteur propre** *de f si*

- *v n'est pas nul ;*
- *les vecteurs v et $f(v)$ sont proportionnels, c'est-à-dire s'il existe $\lambda \in K$ tel que*

$$f(v) = \lambda v.$$

L'élément λ de K s'appelle la **valeur propre** *associée à v.*

Le spectre $\mathrm{Spec}(f)$ *est l'ensemble des valeurs propres de f.*

Considérons par exemple l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ défini dans la base canonique (e_1, e_2) par :

$$\begin{cases} f(e_1) & = 2e_1 + e_2, \\ f(e_2) & = e_1 + 2e_2. \end{cases} \tag{4.1}$$

Alors le vecteur

$$v = e_1 + e_2$$

vérifie

$$f(v) = f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2) = (2e_1 + e_2) + (e_1 + 2e_2) = 3(e_1 + e_2).$$

En définitive,

$$f(v) = 3v,$$

ce qui signifie que v est un vecteur propre de f, dont la valeur propre associée est 3.

Définition 10 *Soit λ une valeur propre de f. Le sous-espace vectoriel*

$$E_\lambda = \{v \in E : f(v) = \lambda v\}$$

s'appelle le **sous-espace propre** *associé à λ.*

Remarquons que le sous-espace E_λ est composé des vecteurs propres associés à λ, auxquels on a ajouté 0.

Théorème 9 *Soit f un endomorphisme de E. Alors f est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E composée de vecteurs propres.*

Reprenons l'exemple 4.1 : nous avons vu que $v = e_1 + e_2$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 3. On peut également vérifier que $w = e_1 - e_2$ satisfait :

$$f(w) = -w,$$

donc w est aussi un vecteur propre de f associé à la valeur propre -1. Les vecteurs (v, w) forment une base de vecteurs propres de $\mathbb{R}^2$, dans laquelle f est diagonalisée. La matrice de f dans cette nouvelle base s'écrit :

$$M(f)_{(v,w)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes de f, alors on montre que les sous-espaces propres

$$E_{\lambda_1}, ..., E_{\lambda_p}$$

sont en somme directe. On en déduit immédiatement le

Théorème 10 *Soit $f : E \to E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les valeurs propres de f. Alors f est diagonalisable si et seulement si*

$$E = E_{\lambda_1} \oplus ... \oplus E_{\lambda_p}.$$

On déduit immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 2 *Sous les hypothèses du théorème 10, f est diagonalisable si et seulement si*

$$\dim E_{\lambda_1} + ... + \dim E_{\lambda_p} = n.$$

Reprenons encore l'exemple 4.1 : dans notre situation,

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}w.$$

L'exemple que nous venons de traiter est évidemment extrêmement simple. Les paragraphes suivants donnent un cadre général à une telle étude.

4.1.2 Polynôme caractéristique

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 11

- *Soit f un endomorphisme de E. Le* **polynôme caractéristique** *de f est le polynôme $P_f(X)$ de degré n défini par*

$$P_f(X) = \det(f - X\mathrm{Id}).$$

- *Soit $M \in \mathcal{M}_n(K)$. Le* **polynôme caractéristique** *de M est le polynôme $P_M(X)$ de degré n défini par*

$$P_M(X) = \det(M - X\mathrm{Id}).$$

Remarques : Si M est la matrice de f dans une base quelconque, alors

$$P_f(X) = P_M(X),$$

quelle que soit la base dans laquelle on a écrit la matrice M ! [1]

Voici un exemple de calcul d'un polynôme caractéristique. Si f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice $M(f)$ dans une base quelconque s'écrit

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

alors

$$P_f(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ 3 & 2-X \end{vmatrix} = X^2 - 3X - 1.$$

Théorème 11 *Soit f un endomorphisme de E. Alors*

1. *Les valeurs propres de f sont les racines du polynôme P_f ;*
2. *f est diagonalisable si et seulement si*
   - *son polynôme caractéristique P_f est scindé :*

$$P(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} ... (X - \lambda_k)^{\alpha_k} ... (X - \lambda_p)^{\alpha_p},$$

   - *pour chaque valeur propre $\lambda_i, (1 \leq i \leq p)$,*

$$\dim E_{\lambda_i} = \alpha_i.$$

Voici aussi un résultat général très utile :

Théorème 12 *Soit f un endomorphisme de E. Soit λ une racine de son polynôme caractéristique de multiplicité α. Alors*

$$1 \leq \dim E_\lambda \leq \alpha. \tag{4.2}$$

Par conséquent, le théorème 11 signifie qu'un endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si

- son polynôme caractéristique est scindé,
- et pour tout i, l'inégalité large 4.2 est une égalité.

Voici un exemple : considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique a pour expression

$$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

---

1. La preuve de cette remarque est laissée au soin du lecteur... en d'autres termes, si M_1 et M_2 sont des matrices semblables, alors

$$\det(M_1 - X \text{ Id}) = \det(M_2 - X \text{ Id}), \text{ et donc } P_{M_1}(X) = P_{M_2}(X).$$

Le polynôme caractéristique est :

$$P_f(X) = \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 \\ 1 & -X & 1 \\ 1 & 1 & -X \end{vmatrix} = -(X+1)^2(X-2).$$

Donc les valeurs propres de f sont -1, de multiplicité 2 et 2 de multiplicité 1. On déduit des théorèmes 11 et 12 que

- **le sous-espace propre V_2 associé à la valeur propre 2 a pour dimension 1, (c'est donc une droite vectorielle). Pour déterminer un vecteur propre qui engendre cette droite, on résoud le système**

$$MX = 2X, \tag{4.3}$$

c'est-à-dire

$$(M - 2\mathrm{Id})X = 0, \tag{4.4}$$

qui s'écrit, en posant $X = (x, y, z)$,

$$\begin{cases} -2x + y + z & = 0 \\ x - 2y + z & = 0 \\ x + y - 2z & = 0 \end{cases}. \tag{4.5}$$

L'ensemble des solutions est bien une droite vectorielle engendrée par exemple par le vecteur

$$v_1 = (1, 1, 1).$$

- **D'après le théorème 12, le sous-espace propre V_{-1} associé à la valeur propre -1 a une dimension inférieure ou égale à 2. Si cette dimension est 2, alors d'après le théorème 11, f est diagonalisable. Pour connaître cette dimension, on résoud le système :**

$$MX = -X, \tag{4.6}$$

c'est-à-dire

$$(M + \mathrm{Id})X = 0, \tag{4.7}$$

En posant $X = (x, y, z)$, on montre sans problème que le système 4.7 s'écrit

$$\begin{cases} x + y + z & = 0 \\ x + y + z & = 0 \\ x + y + z & = 0 \end{cases}. \tag{4.8}$$

Le sous-espace V_{-1}, qui est l'ensemble des solutions du système 4.8, est le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation

$$x + y + z = 0.$$

C'est donc un sous-espace vectoriel de dimension 2. En conséquence, f est diagonalisable.
Les vecteurs

$$v_2 = (1, -1, 0), v_3 = (0, 1, -1)$$

engendrent le plan V_{-2}.
Dans la base (v_1, v_2, v_3), la matrice de f est diagonale et s'écrit

$$M(f)_{(v_i)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Corollaire 3 *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n sur K. Si f admet n valeurs propres deux à deux distinctes, alors f est diagonalisable.*

4.1.3 Le cas des matrices symétriques réelles

Rappelons qu'une matrice carrée $M = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est *symétrique* si pour tout i, j,

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

On a alors le résultat suivant [2] :

Théorème 13 *Toute matrice carrée symétrique* à coefficients réels *est diagonalisable.*

Par exemple, sans aucun calcul, on peut affirmer que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \\ 0 & 8 & 2 & \pi \\ 3 & 6 & \pi & 7 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable.

Attention, ce résultat n'est plus vrai pour les matrices à coefficients dans $\mathbb{C}$, comme le montrera l'exercice 23.

4.1.4 Deux remarques pour conclure

1. Attention ! lorsqu'on cherche à savoir si une matrice est diagonalisable, il est important de préciser si l'on travaille dans $\mathcal{M}^n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{M}^n(\mathbb{C})$.

   Voici un exemple éclairant. Considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique s'écrit

   $$M(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Son polynôme caractéristique est

   $$P_f(X) = X^2 + 1,$$

   qui n'a pas de racine réelles. Donc $M(f)$ n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}^n(\mathbb{R})$.
   Cependant, considérons maintenant l'endomorphisme g de $\mathbb{C}^2$ dont la matrice dans la base canonique s'écrit encore dans la base canonique

   $$M(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Son polynôme caractéristique est encore

   $$P_f(X) = X^2 + 1.$$

2. En général, ce résultat est énoncé lors de l'étude des formes bilinéaires symétriques. Comme il est très utile, nous préférons le placer ici.

Il admet 2 **racines distinctes** dans $\mathbb{C}$**, qui sont** i **et** $-i$**. Donc** g **est diagonalisable et dans une base de vecteurs propres, la matrice de** g **s'écrit :**

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

2. Il faut également se garder de croire que tout endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ est diagonalisable.

   Considérons par exemple l'endomorphisme h **de** $\mathbb{C}^2$ **dont la matrice dans la base canonique s'écrit :**

$$M(h) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   On a

$$P_h(X) = (X-1)^2.$$

   La seule valeur propre est donc 1 **et un calcul direct montre que le sous-espace propre** V_1 **est engendré par le vecteur** $(1,0)$**. Il n 'est donc pas de dimension** 2**, et** h **n'est donc pas diagonalisable** [3]**.**

3. Une fois calculé le polynôme caractéristique, on pouvait déduire directement ce dernier résultat sans calcul, en remarquant directement sur la matrice que le vecteur $(1,0)$ est un vecteur propre dont la valeur propre associée est 1. Si V_1 était de dimension 2, alors h serait l'application identique, ce qui n'est pas le cas...

4.2 Exercices

Exercice 13 *Soit E un espace vectoriel de dimension impaire n sur $\mathbb{R}$, et f un endomorphisme de E. Montrer que f a au moins une valeur propre.*

Remarquons que ce résultat est faux en général si n est pair, comme nous l'avons vu dans les rappels de cours. Nous avons également rappelé que si $K = \mathbb{C}$, tout endomorphisme de E a admet n racines, chacune comptée avec sa multiplicité, donc au moins une racine !

Solution - C'est très facile ! Soit P le polynôme caractéristique de f. C'est un polynôme de degré n. Comme n est impair, P s'annule au moins une fois.

Rappelons pourquoi : si P est de degré n, on peut écrire

$$P(X) = a_n X^n + ... + a_0.$$

Donc

$$\lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty, \lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty.$$

Comme P est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, P s'annule au moins une fois.

Donc P admet au moins une racine. Or chaque racine de P est une valeur propre de f. En utilisant le théorème 11, on déduit que f admet au moins une valeur propre.

Exercice 14 *Montrer que la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

n'est diagonalisable ni dans $\mathbb{R}$ ni dans $\mathbb{C}$.

Solution - Le polynôme caractéristique $P_A(X)$ de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

est donné par :

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} -X & -1 & 0 \\ 4 & 4-X & 0 \\ -2 & -1 & 2-X \end{vmatrix} \\ &= (2-X)(-X(4-X)+4) = -(X-2)^3. \end{aligned}$$

La seule valeur propre de A est donc 2. Montrons pas l'absurde que la matrice A ne peut pas être diagonalisable. Si A était diagonalisable, 2 serait une valeur propre d'ordre 3, *(puisque c'est la seule valeur propre !)*, et donc A serait semblable a la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3.$$

Il existerait donc une matrice inversible P telle que

$$A = PBP^{-1} = P(2I_3)P^{-1} = 2P(I_3)P^{-1} = 2I_3PP^{-1} = 2I_3.$$

Comme A n'est manifestement pas égale à $2I_3$, A n'est pas diagonalisable.

Exercice 15 *Soit a un nombre réel. Pour quelles valeurs de a la matrice*

$$B = \begin{pmatrix} 3-2a & 1-a & 1 \\ -2+4a & 2a & -2 \\ 3-2a & 3-a & 5 \end{pmatrix}.$$

est-elle diagonalisable ?

Solution - Le polynôme caractéristique de la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 3-2a & 1-a & 1 \\ -2+4a & 2a & -2 \\ 3-2a & 3-a & 5 \end{pmatrix}$$

est :

$$\begin{aligned} P_B(X) &= \det(B - XI_3) = \begin{vmatrix} 3-2a-X & 1-a & 1 \\ -2+4a & 2a-X & -2 \\ 3-2a & 3-a & 5-X \end{vmatrix} \\ &\overset{L_2+2L_1}{=} \begin{vmatrix} 3-2a-X & 1-a & 1 \\ 2(2-X) & 2-X & 0 \\ 3-2a & 3-a & 5-X \end{vmatrix} = (2-X)\begin{vmatrix} 3-2a-X & 1-a & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3-2a & 3-a & 5-X \end{vmatrix} \\ &\overset{C_1-2C_2}{=} (2-X)\begin{vmatrix} 1-X & 1-a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3-a & 5-X \end{vmatrix} = -(X-2)^2(X-4). \end{aligned}$$

Appliquons le théorème 11. Comme 4 est une racine simple du polynôme caractéristique de B, le sous-espace propre E_4 (associé à la valeur propre 4) est de dimension 1. Comme 2 est une racine double du polynôme caractéristique de B, le sous-espace propre E_2 (associé à la valeur propre 2) a une dimension comprise entre 1 et 2. La matrice B est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ si et seulement si la dimension du sous-espace propre E_2 est 2. Déterminons donc la dimension de E_2.

$$(x,y,z) \in E_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1-2a & 1-a & 1 \\ -2+4a & 2(a-1) & -2 \\ 3-2a & 3-a & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

Ainsi

$$(x,y,z) \in E_2 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcll} (1-2a)x + (1-a)y + z & = & 0 & (1) \\ 2(2a-1)x - 2(a-1)y - 2z & = & 0 & (2) \\ (3-2a)x + (3-a)y + 3z & = & 0 & (3) \end{array} \right.$$

On remarque que $(2) = -2(1)$ et donc

$$(x,y,z) \in E_2 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} (1-2a)x + (1-a)y + z & = & 0 \\ (3-2a)x + (3-a)y + 3z & = & 0 \end{array} \right.$$

La dimension de E_2 est égale à deux si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 1-2a & 1-a \\ 3-2a & 3-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-2a & 1 \\ 3-2a & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-a & 1 \\ 3-a & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ce système est équivalent à $a = 0$. En conclusion, B est diagonalisable si et seulement si $a = 0$.

Exercice 16 *On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer le polynôme caractéristique P_f de f et les valeurs propres de f.*
2. *Montrer que f est diagonalisable et déterminer une base de vecteurs propres.*
3. *Vérifier que $P_f(f) = 0$ et en déduire l'inverse de f.*
4. *Calculer, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la matrice de f^n dans la base canonique.*

Solution -

1. Le polynôme caractéristique $P_f(X)$ de f est donné par

$$\begin{aligned}
P_f(X) &= \det(f - XId_{\mathbb{R}^3}) = \begin{vmatrix} 3-X & 1 & 1 \\ -2 & -X & -2 \\ 3 & 3 & 5-X \end{vmatrix} \\
&\overset{C_3-C_2}{=} \begin{vmatrix} 3-X & 1 & 0 \\ -2 & -X & X-2 \\ 3 & 3 & 2-X \end{vmatrix} = (X-2)\begin{vmatrix} 3-X & 1 & 0 \\ -2 & -X & 1 \\ 3 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\
&\overset{L_3+L_2}{=} (X-2)\begin{vmatrix} 3-X & 1 & 0 \\ -2 & -X & 1 \\ 1 & 3-X & 0 \end{vmatrix} \\
&= -(X-2)\left((X-3)^2-1\right) = -(X-2)^2(X-4).
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de f sont 2 (de multiplicité 2) et 4 (de multiplicité 1).

2. Explicitons maintenant les sous-espaces propres E_2 et E_4.

- Le vecteur $V = (x, y, z)$ appartient à E_2 si et seulement si $AV = 2V$, c'est à dire :
$$(A - 2I_3)V = 0.$$
Donc,
$$V = (x,y,z) \in E_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$
Ainsi
$$V = (x,y,z) \in E_2 \quad \Leftrightarrow \quad x + y + z = 0.$$
E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2 dont une base est donnée par $\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$.
- De la même façon, un vecteur $W = (x, y, z)$ appartient à E_4 si et seulement si $AW = 4W$, c'est à dire
$$A - 4I_3 = 0.$$
Donc,
$$W = (x,y,z) \in E_4 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & -4 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$
Ainsi
$$W = (x,y,z) \in E_4 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcll} -x + y + z & = & 0 & (L1) \\ -2x - 4y - 2z & = & 0 & (L2) \\ 3x + 3y + z & = & 0 & (L3) \end{array} \right.$$

En remarquant que $(L3) = -(L1) - (L2)$, on obtient

$$(x, y, z) \in E_4 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -x + y + z & = 0 \quad (1) \\ -2x - 4y - 2z & = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Le mineur $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 6$ est non nul. Par suite, le rang de ce système homogène est 2, l'espace des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension $3-2=1$. Ainsi E_4 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1 dont le vecteur de coordonnées $(1, -2, 3)$ est une base.

Donc, $\mathcal{B} = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1), (1, -2, 3)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de f. Le Théorème 11 implique que l'endomorphisme f est diagonalisable. Sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. En développant P_f, on obtient

$$P_f(X) = -(X^3 - 8X^2 + 20X - 16).$$

Un calcul direct donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 6 \\ -12 & -8 & -12 \\ 18 & 18 & 22 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 36 & 28 & 28 \\ -56 & -48 & -56 \\ 84 & 84 & 92 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que

$$P_f(A) = -(A^3 - 8A^2 + 20A - 16I_3) = 0,$$

ce qui équivaut à

$$P_f(f) = 0.$$

Donc

$$f^3 - 8f^2 + 20f = 16Id_{\mathbb{R}^3}. \tag{4.9}$$

L'équation 4.9 s'écrit encore

$$f \circ \frac{1}{16}(f^2 - 8f + 20Id_{\mathbb{R}^3}) = \frac{1}{16}(f^2 - 8f + 20Id_{\mathbb{R}^3}) \circ f = Id_{\mathbb{R}^3}.$$

De cette relation, on déduit que f est inversible, *(c'est un isomorphisme)* et que

$$f^{-1} = \frac{1}{16}(f^2 - 8f + 20Id_{\mathbb{R}^3}).$$

4. La matrice de passage P de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$ s'écrit :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On a

$$A = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On déduit que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la matrice de f^n dans la base canonique est

$$A^n = P \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix} P^{-1}. \tag{4.10}$$

Pour expliciter A^n nous devons maintenant P^{-1}. On pourrait calculer l'inverse de P en utilisant le Théorème 3. Nous allons ici utiliser une méthode directe, *(qui donnera évidemment le même résultat!)* Pour cela, notons (v_1, v_2, v_3) les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ et (e_1, e_2, e_3) les vecteurs de la base canonique. On a :

$$\begin{cases} v_1 &= e_1 - e_3, \\ v_2 &= e_2 - e_3, \\ v_3 &= e_1 - 2e_2 + 3e_3, \end{cases}$$

Résolvons ce système. On obtient :

$$\begin{cases} e_1 &= \frac{1}{2}(v_1 + 2v_2 + v_3), \\ e_2 &= \frac{1}{2}(-v_1 + 4v_2 + v_3), \\ e_3 &= \frac{1}{2}(-v_1 + 2v_2 + v_3), \end{cases}$$

Ainsi,

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On déduit de 4.10 par un calcul direct :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} + \frac{1}{2}4^n & -2^{n-1} + \frac{1}{2}4^n & -2^{n-1} + \frac{1}{2}4^n \\ 2^n - 4^n & 2^{n+1} - 4^n & 2^n - 4^n \\ -3 \times 2^{n-1} + \frac{3}{2}4^n & -3 \times 2^{n-1} + \frac{3}{2}4^n & -2^{n-1} + \frac{3}{2}4^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 17 *Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des matrices carrées symétriques réelles d'ordre 2 et*

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

un élément de E. Soit

$$\phi : E \longrightarrow E$$

l'application définie par

$$\phi(M) = BM + MB, \quad \text{pour tout } M \in E.$$

1. *Montrer que ϕ est un endomorphisme de E.*
2. *Calculer la matrice $\mathcal{A}$ de ϕ dans la base*

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

3. *Calculer le polynôme caractéristique P_ϕ de ϕ.*
4. *Montrer que ϕ est diagonalisable.*
5. *Pour quelles valeurs de α l'endomorphisme ϕ est-il bijectif ?*

Solution -

1. • Rappelons que la somme et le produit de deux matrices symétriques sont symétriques. Donc, comme B est symétrique, il est clair que, pour toute matrice symétrique M, $\phi(M)$ est une matrice symétrique. Par conséquent, ϕ est bien une application à valeur dans E.
   • Vérifions que ϕ est linéaire :
   Soient M et N deux éléments de E. On a :

$$\begin{aligned} \phi(M+N) &= B(M+N) + (M+N)B \\ &= BM + BN + MB + NB \\ &= \phi(M) + \phi(N). \end{aligned}$$

   De même, si α est un nombre réel quelconque,

$$\phi(\alpha M) = B(\alpha M) + (\alpha M)B = \alpha BM + \alpha MB = \alpha(BM + MB).$$

En définitive, ϕ est linéaire.

2. On a

$$\begin{aligned}
\phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 2 \end{pmatrix}, \\
\phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Posons

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \epsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les relations précédentes s'écrivent :

$$\begin{array}{rclcll}
\phi(\epsilon_1) & = & 2\alpha\epsilon_1 & + & \epsilon_2, & \\
\phi(\epsilon_2) & = & 2\alpha\epsilon_1 & + & \alpha\epsilon_2 & +2\epsilon_3 \\
\phi(\epsilon_3) & = & & & \epsilon_2. &
\end{array}$$

Ainsi

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2\alpha & 2 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Le polynôme caractéristique P_ϕ est donné par

$$\begin{aligned}
P_\phi(X) &= \det(\phi - XId_E) = \begin{vmatrix} 2\alpha - X & 2 & 0 \\ 1 & \alpha - X & 1 \\ 0 & 2 & -X \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} 2\alpha - X & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - X \begin{vmatrix} 2\alpha - X & 2 \\ 1 & \alpha - X \end{vmatrix} \\
&= -X^3 + 3\alpha X^2 + (4 - 2\alpha^2)X - 4\alpha \\
&= -X^3 + \alpha X^2 + 2\alpha X^2 - 2\alpha^2 X + 4X - 4\alpha \\
&= (X - \alpha)(-X^2 + 2\alpha X + 4).
\end{aligned}$$

4. Le polynôme caractéristique de ϕ admet les trois racines réelles $\alpha, \alpha + \sqrt{\alpha^2+4}, \alpha - \sqrt{\alpha^2+4}$. Pour toute valeur de α, on vérifie sans peine que ces trois racines sont distinctes (et simples). Par conséquent, ϕ est diagonalisable, (en vertu du Corollaire 3).

5. ϕ est bijective si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de ϕ. Or 0 est valeur propre de ϕ si et seulement si $\alpha = 0$. Donc ϕ est bijective si et seulement si $\alpha \neq 0$.

Exercice 18 *Soient f, g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement A et B, où*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que $f \circ g = g \circ f$.*
2. *Montrer que f et g sont diagonalisables.*
3. *Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres communs à f et g.*
4. *Montrer que $f \circ g$ est diagonalisable.*
5. *Construire un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ de degré 1 tel que $P(f) = g$.*

Solution - On a :

1. $f \circ g = g \circ f$ si et seulement si $AB = BA$. Or

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & -18 \\ 0 & -9 & 0 \\ -9 & -9 & 9 \end{pmatrix}, \\ BA &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 9 & -18 \\ 0 & -9 & 0 \\ -9 & -9 & 9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi f et g commutent.

2. Calculons les valeurs propres et les sous-espace propres de f et de g. Les polynômes caractéristiques de f et g sont donnés par

$$\begin{aligned} P_f(X) &= \det(f - XId_{\mathbb{R}^3}) = \begin{vmatrix} 4-X & 1 & -2 \\ 0 & 3-X & 0 \\ -1 & -1 & 5-X \end{vmatrix} \\ &= (3-X)((4-X)(5-X)-2) = -(X-3)^2(X-6). \\ P_g(X) &= \det(g - XId_{\mathbb{R}^3}) = \begin{vmatrix} -1-X & 2 & -4 \\ 0 & -3-X & 0 \\ -2 & -2 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= -(X+3)^2(X-3). \end{aligned}$$

Ces deux polynômes caractéristiques sont scindés dans $\mathbb{R}$.

Notons E_3^f et E_6^f les sous-espaces propres de f associés respectivement aux valeurs propres 3 et 6. On a

$$(x,y,z) \in E_3^f \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0.$$

On obtient alors

$$E_3^f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - 2z = 0\}.$$

E_3^f est donc un plan de $\mathbb{R}^3$, c'est à dire un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$.

De la même manière on obtient

$$E_6^f = \{(x, 0, -x) / x \in \mathbb{R}\}.$$

E_6^f est donc une droite de $\mathbb{R}^3$, c'est à dire un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$.

Un calcul analogue donne

$$E_{-3}^g = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y-2z = 0\} \quad \text{et} \quad E_3^g = \{(x,0,-x)/x \in \mathbb{R}\}.$$

Comme les polynômes caractéristiques de f et de g sont scindés dans $\mathbb{R}$ et comme la dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre correspondante, f et g sont diagonalisables, (en vertu du Théorème 11).

3. D'après la question 2 on remarque que $E_3^f = E_{-3}^g$ et $E_6^f = E_3^g$ ce qui entraîne f et g sont diagonalisables dans une même base de $\mathbb{R}^3$. Voici par exemple une base qui diagonalise à la fois f et g :

$$\mathcal{B} = \{(0,2,1), (2,0,1), (1,0,1)\}.$$

4. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est

$$D_f = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

et la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ est

$$D_f = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Par suite la matrice de $f \circ g$ dans $\mathcal{B}$ est $D_f D_g$, c'est à dire

$$\begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}.$$

Donc $f \circ g$ est diagonalisable.

5. Comme on peut trouver une même base qui diagonalise f et g, il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (la même pour A et B), telle que

$$A = P \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{et} \quad B = P \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Soit Q est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré 1. Posons

$$Q(X) = aX + b.$$

On a

$$\begin{aligned} Q(A) = aA + b = aP \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} P^{-1} + bI \\ = P \begin{pmatrix} 3a & 0 & 0 \\ 0 & 3a & 0 \\ 0 & 0 & 6a \end{pmatrix} P^{-1} + bP^{-1}IP \\ = P \begin{pmatrix} 3a+b & 0 & 0 \\ 0 & 3a+b & 0 \\ 0 & 0 & 6a+b \end{pmatrix} P^{-1}. \end{aligned}$$

On cherche à déterminer Q tel que

$$Q(f) = g,$$

c'est à dire qu'on cherche un polynôme Q tel que

$$Q(A) = B.$$

On doit donc résoudre le système

$$\begin{cases} 3a + b & = -3 \\ 6a + b & = 3. \end{cases}$$

Ce système admet une solution unique :

$$\begin{cases} a & = 2 \\ b & = -9 \end{cases}$$

Le polynôme Q défini par

$$Q(X) = 2X - 9$$

vérifie donc $Q(f) = g$.

Exercice 19 *Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ l'équation*

$$Z^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.11}$$

On pourra commencer par diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution -

1. Pour résoudre cette équation, commençons par diagonaliser dans $\mathbb{C}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Le polynôme caractéristique de A est

$$P_A(X) = X^2 + 1 = (X - \imath)(X + \imath).$$

Puisque A a deux racines simples $\imath$ et $-\imath$, A est diagonalisable, (en vertu du Corollaire 3. Chaque sous-espace propre est une droite vectorielle.

- Pour déterminer un vecteur propre associé à la valeur propre $\imath$, nous devons résoudre le système

$$AV = \imath V. \tag{4.12}$$

Le vecteur $V_\imath = (1, -\imath)$ est solution de 4.12. C'est donc un vecteur propre associé à la valeur propre $\imath$.

- De la même façon, pour déterminer un vecteur propre associé à la valeur propre $-\imath$, nous devons résoudre le système

$$AV = -\imath V. \tag{4.13}$$

Le vecteur $V_{-\imath} = (1, -\imath)$ est solution de 4.13. C'est donc un vecteur propre associé à la valeur propre $-\imath$.

- La matrice de passage P de la base canonique dans la base $(V_\imath, V_{-\imath})$ s'écrit donc :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\imath & \imath \end{pmatrix}.$$

Remarquons qu'un calcul direct, utilisant par exemple le Théorème 3), donne

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \imath \\ 1 & -\imath \end{pmatrix}.$$

- Finalement, la matrice A est semblable à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} \imath & 0 \\ 0 & -\imath \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$B = PAP^{-1}. \tag{4.14}$$

2. Soit $Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Posons

$$Y = P^{-1}ZP. \tag{4.15}$$

On déduit de 4.14 et 4.15 :

$$Z^2 = A \Leftrightarrow Y^2 = P^{-1}ZPP^{-1}ZP = P^{-1}Z^2P = P^{-1}AP = B.$$

Donc

$$Z^2 = A \Leftrightarrow Y^2 = B. \tag{4.16}$$

Résolvons maintenant l'équation

$$Y^2 = B. \tag{4.17}$$

Cette équation est plus facile à résoudre que 4.11 puisque la matrice considérée est maintenant diagonale. Posons

$$Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

La matrice Y est solution de 4.16 si et seulement si (a, b, c, d) vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} b(a+d) & = 0 \quad (L1) \\ c(a+d) & = 0 \quad (L2) \\ a^2 + bc & = \imath \quad (L3) \\ d^2 + bc & = -\imath \quad (L4) \end{cases}$$

De $(L3)$ et $(L4)$ on déduit que

$$a + d \neq 0,$$

puis en utilisant $(L1)$ et $(L2)$,

$$b = c = 0.$$

Par suite

$$a = \frac{\epsilon_1}{\sqrt{2}}(1+i), \ d = \frac{\epsilon_2}{\sqrt{2}}(1-i),$$

où $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{1, -1\}$. Ainsi les solutions de 4.16 sont les quatre matrices

$$\begin{pmatrix} \frac{\epsilon_1}{\sqrt{2}}(1+i) & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon_2}{\sqrt{2}}(1-i) \end{pmatrix}, \quad \epsilon_1, \epsilon_2 \in \{1, -1\}.$$

Comme Z est solution 4.11 si et seulement si $Y = P^{-1}ZP$ est solution de 4.17, on déduit que 4.11 admet les quatre solutions de $Z = PYP^{-1}$ où Y parcourt l'ensemble des solutions de 4.17. Un calcul immédiat implique que 4.11 admet les quatre solutions

$$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \imath & \imath \\ -\imath & \imath \end{pmatrix}.$$

Exercice 20 *A la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ *on associe l'endomorphisme* ϕ_A : $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *défini par*

$$\phi_A(B) = AB - BA, \quad \textit{pour tout } B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

1. *Calculer la matrice* $\mathcal{A}$ *de* ϕ_A *dans la base*

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

2. *Calculer le polynôme caractéristique* P_ϕ *de* ϕ_A.
3. *Montrer que* ϕ_A *est diagonalisable.*
4. *Quelle relations peut-on observer entre les valeurs propres de* A *et celles de* ϕ_A ?

Solution -

1. Pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\phi_A\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c-b & d-a \\ a-d & b-c \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

En particulier,

$$\phi\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \tag{4.18}$$

$$\phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{4.19}$$

$$\phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \tag{4.20}$$

$$\phi\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.21}$$

En posant

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\epsilon_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \epsilon_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

les égalités 4.18, 4.19, 4.20, 4.21 s'écrivent :

$$\begin{array}{lcrcl} \phi(\epsilon_1) & = & -\epsilon_2 & + & \epsilon_3; \\ \phi(\epsilon_2) & = & -\epsilon_1 & + & \epsilon_4; \\ \phi(\epsilon_3) & = & \epsilon_1 & - & \epsilon_4; \\ \phi(\epsilon_4) & = & \epsilon_2 & - & \epsilon_3. \end{array}$$

Ainsi

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Le polynôme caractéristique P de ϕ_A est donné par

$$\begin{aligned}
P(X) &= \det(\phi_A - XId_E) = \begin{vmatrix} -X & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -X & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -X & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -X \end{vmatrix} \\
&\overset{L_3+L_2}{=} \begin{vmatrix} -X & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -X & 0 & 1 \\ 0 & -X & -X & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -X \end{vmatrix} \\
&= -X \begin{vmatrix} -X & 0 & 1 \\ -X & -X & 0 \\ 1 & -1 & -X \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -X & -X & 0 \\ 1 & -1 & -X \end{vmatrix} \\
&= -X(-X^3 + 2X) - 2X^2 = X^2(X-2)(X+2).
\end{aligned}$$

3. Le polynôme caractéristique de ϕ_A étant scindé dans $\mathbb{R}$ et les valeurs propres 2 et -2 étant simples, ϕ_A est diagonalisable si et seulement si le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 (c'est-à-dire le noyau de ϕ_A) est de dimension 2), (en vertu du Théorème 11). Or

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{Ker } \phi_A \Leftrightarrow c = b \text{ et } d = a.$$

Ainsi Ker ϕ_A [4] est le sous-espace vectoriel engendré par les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il est donc de dimension 2. Ainsi ϕ_A est diagonalisable.

4. Le polynôme caractéristique de A est

$$P_A(X) = X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3).$$

Si l'on note λ_1 et λ_2 les valeurs propres de A, on peut remarquer que les valeurs propres de ϕ_A sont

$$(\lambda_i - \lambda_j)_{1 \leq i,j \leq 2}.$$

Ce résultat sera généralisé dans l'exercice 21.

Exercice 21 *Soit B une matrice diagonalisable de $\mathcal{M}_n(K)$ où $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que l'endomorphisme*

$$\phi_B : \mathcal{M}_n(K) \longrightarrow \mathcal{M}_n(K),$$

4. Remarquons que Ker ϕ_A est le sous-espace vectoriel des matrices qui commutent avec A.

défini en posant pour tout $A \in \mathcal{M}_n(K)$

$$\phi_B(A) = AB - BA$$

est diagonalisable.

Solution -
Puisque B est diagonalisable il existe une matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_i & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que

$$B = PDP^{-1}.$$

Pour tout $1 \leq i, j \leq n$, on note E_{ij} la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la i-ième ligne de la j-ième colonne qui vaut 1 :

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

On sait que l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(K)$ est de dimension n^2, et que les n^2 matrices $(E_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ forment une base de $\mathcal{M}_n(K)$. Montrons que l'ensemble des matrices $\left(PE_{ij}P^{-1}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ se compose de n^2 éléments qui forment une base de vecteurs propres de ϕ_B.

- Montrons d'abord que l'ensemble des matrices $\left(PE_{ij}P^{-1}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ se compose de n^2 éléments. Pour cela, remarquons d'abord que puisque P et P^{-1} sont des bijections, toutes les matrices $\left(PE_{ij}P^{-1}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ sont différentes, et forment donc un ensemble de n^2 éléments. En effet, si

$$PE_{ij}P^{-1} = PE_{kl}P^{-1},$$

alors, en composant à gauche par P^{-1} et à droite par P, on déduit $E_{ij} = E_{kl}$. Comme il y a n^2 matrices $E_{ij}, (1 \leq i, j \leq n)$, il y a n^2 éléments $PE_{ij}P^{-1}, 1 \leq i, j \leq n$.

- Montrons que les n^2 matrices $PE_{ij}P^{-1}, 1 \leq i, j \leq n$ forment une famille libre de $\mathcal{M}_n(K)$. Pour cela, supposons qu'il existe une famille

$$\{a_{ij} \in K, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$$

telle que

$$\sum_{ij} a_{ij} PE_{ij}P^{-1} = 0.$$

En multipliant par P^{-1} à gauche et par P à droite l'égalité précédente, on obtient :

$$\sum_{ij} a_{ij} E_{ij} = 0.$$

Puisque les matrices $E_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$ forment une base de $\mathcal{M}_n(K)$, on déduit que tous les coefficients $a_{ij}, 1 \leq i, j \leq n$ sont nuls. Donc la famille

$$\{PE_{ij}P^{-1}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$$

est libre.

- Comme cette famille se compose de n^2 éléments, c'est une base de $\mathcal{M}_n(K)$.
- Montrons ensuite que chaque matrice $\left(PE_{ij}P^{-1}\right)$ est un vecteur propre de ϕ_B. Calculons, pour tout $1 \leq i, j \leq n$,

$$\phi_B(PE_{ij}P^{-1}) = PE_{ij}P^{-1}B - BPE_{ij}P^{-1}. \tag{4.22}$$

On a

$$\begin{array}{rclcl} PE_{ij}P^{-1}B & = & PE_{ij}P^{-1}PDP^{-1} & = & PE_{ij}DP^{-1} \\ BPE_{ij}P^{-1} & = & PDP^{-1}PE_{ij}P^{-1} & = & PDE_{ij}P^{-1}. \end{array} \tag{4.23}$$

Or

$$E_{ij}D = \lambda_j E_{ij} \quad \text{et} \quad DE_{i,j} = \lambda_i E_{ij}. \tag{4.24}$$

On déduit de 4.22, 4.23 et 4.24 que pour tout $1 \leq i, j \leq n$,

$$\phi_B(PE_{ij}P^{-1}) = (\lambda_j - \lambda_i)PE_{ij}P^{-1}.$$

En définitive, l'ensemble des matrices $\left(PE_{ij}P^{-1}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de vecteurs propres de ϕ_B, *(la valeur propre associée au vecteur propre $PE_{ij}P^{-1}$ est $(\lambda_j - \lambda_i)$)*. Par conséquent, ϕ_B est diagonalisable.

Exercice 22 *Soit $\alpha_1, ..., \alpha_n$ n nombres réels. On suppose qu'il existe $i \in \{1, ..., n-1\}$ tel que $\alpha_i \neq 0$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique $(e_1, ..., e_n)$ est*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

1. *Montrer que M est diagonalisable.*
2. *Montrer que le rang de M est 2.*

   Indication : on évitera d'étudier le polynôme caractéristique de M.

3. *Soit*
   $$x = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_{n-1} e_{n-1}.$$
   Montrer que x et e_n engendrent l'image de f.
4. *Montrer que le plan Q engendré par x et e_n est stable par f.*
5. *Montrer que la restriction de f à Q est diagonalisable.*
6. *Diagonaliser M.*

Solution -

1. Comme M est symétrique, M est diagonalisable, (en vertu du théorème 13).
2. On a :
   $$\begin{cases} f(e_1) & = \alpha_1 e_n, \\ f(e_2) & = \alpha_2 e_n, \\ \vdots & = \vdots \\ f(e_{n-1}) & = \alpha_2 e_n, \\ f(e_n) & = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... \alpha_{n-1} e_{n-1} + \alpha_n e_n. \end{cases}$$
   Comme il existe $i \in \{1, ..., n-1\}$ tel que $\alpha_i \neq 0$, l'image de f est engendrée par les deux vecteurs linéairement indépendants e_n et $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n$. Par conséquent, le rang de f (et donc de M) est 2.
3. Posons
   $$\alpha = \alpha_1^2 + ... + \alpha_n^2.$$
   On a $\alpha > 0$ et un calcul direct donne :

$$\begin{cases} f(x) & = \alpha e_n, \\ f(e_n) & = x + \alpha_n e_n. \end{cases}$$

d'où l'on déduit que le plan Q engendré par x et e_n est stable par f. Mieux, on a

$$f(Q) = Q.$$

4. Dans la base (x, e_n), la matrice N de la restriction de f à P s'écrit :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de M s'écrit :

$$P_N(X) = X^2 - \alpha_n X - \alpha.$$

Le discriminant de l'équation

$$X^2 - \alpha_n X - \alpha = 0$$

est $\alpha_n^2 + 4\alpha > 0$. Donc le polynôme $P_N(X)$ admet deux racines distinctes, ce qui signifie que N est diagonalisable. Un calcul direct montre que ses deux valeurs propres sont

$$\mu_1 = \frac{\alpha_n + \sqrt{\alpha_n^2 + 4\alpha}}{2}, \mu_2 = \frac{\alpha_n - \sqrt{\alpha_n^2 + 4\alpha}}{2}.$$

5. Puisque le rang de f est 2, la dimension du noyau de f est $(n-2)$. Comme le plan Q est stable par f, on a :

$$\mathbb{R}^n = Q \oplus \text{Ker } f,$$

et M est semblable à la matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

où μ_1 et μ_2 sont les deux valeurs propres déterminées dans la question précédente.

Exercice 23 *Déterminer dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ les matrices symétriques qui ne sont pas diagonalisables.*

On sait que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable, (d'après le théorème 13). Cet exercice montre que ce résultat n'est plus vrai si l'on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.

Solution - Rappelons que toute matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ admet au moins une valeur propre, puisque son polynôme caractéristique est toujours scindé.

Posons

$$A = \begin{pmatrix} x & z \\ z & y \end{pmatrix}.$$

1. Si le polynôme caractéristique de A admet deux valeurs propres distinctes, alors A admet deux valeurs propres distinctes, et A est diagonalisable.
‘
2. Sinon, le polynôme caractéristique de A admet une racine double, et A admet une valeur propre double, c'est-à-dire que l'équation

$$P_A(X) = (x - X)(y - X) - z^2 = 0 \tag{4.26}$$

a un discriminant Δ nul :

$$\Delta = (x - y)^2 + 4z^2 = 0.$$

dans $\mathbb{C}$, cette dernière équation s'écrit encore :

$$y = x \pm 2iz,$$

et donc

$$A = \begin{pmatrix} x & z \\ z & x \pm 2iz \end{pmatrix}.$$

Deux cas peuvent alors se produire.

- Si le sous-espace propre associé à cette valeur propre est de dimension 2, alors A est proportionnelle à la matrice Identité, et A est symétrique. C'est le cas où $z = 0$.
- Si le sous-espace propre associé à cette valeur propre est de dimension 1, alors A est symétrique et non diagonalisable. La matrice A s'écrit alors

$$A = \begin{pmatrix} x & z \\ z & x \pm 2iz \end{pmatrix},$$

avec $z \neq 0$.

La réciproque est immédiate. Par conséquent, les matrices

$$A = \begin{pmatrix} x & z \\ z & x \pm 2iz \end{pmatrix},$$

à coefficients complexes tels que $z \neq 0$ sont symétriques et non diagonalisables. Par exemple, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix},$$

est de ce type.

Chapitre 5

Polynômes annulateurs

5.1 Rappels de cours

Dans tout ce chapitre,

$$f : E \to E$$

désigne un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et M une matrice (n, n) à coefficients dans K.

5.1.1 Définition

Définition 12 *On dit qu'un polynôme P est* **annulateur** *de f si*

$$P(f) = 0.$$

De la même façon, on dit qu'un polynôme P est **annulateur** *de M si*

$$P(M) = 0.$$

Voici deux exemples :

- **Considérons l'endomorphisme**

  $$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

  défini par

  $$f(e_1) = e_2$$
  $$f(e_2) = -e_1,$$

  où (e_1, e_2) est la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Il est alors clair que $f^2 = -\mathbf{Id}$, d'où l'on déduit que

  $$f^2 + \mathbf{Id} = 0.$$

  Par suite, le polynôme

  $$P(X) = X^2 + 1$$

est un polynôme annulateur de f. Naturellement, ce polynôme n'est pas unique : tout polynôme Q qui est un multiple de P est aussi un polynôme annulateur de f.

- **De la même façon considérons la matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par**

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$M^2 = 2\ \mathbf{Id}.$$

Par suite, le polynôme

$$P(X) = X^2 - 2$$

est un polynôme annulateur de M. Comme précédemment, il n'est évidemment pas unique.

La mise en évidence d'un polynôme annulateur permet de déduire tout de suite des informations intéressantes sur le spectre de l'endomorphisme f :

Proposition 1 *Si P est un polynôme annulateur de f, alors toute valeur propre de f est racine de P*[1]*.*

5.1.2 Le théorème d'Hamilton-Cayley

Théorème 14 *Le polynôme caractérisque P_f est toujours un polynôme annulateur de f :*

$$P_f(f) = 0.$$

Vérifions ce théorème sur un exemple[2] **: considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique s'écrit :**

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique $P_f(X) = P_M(X)$ s'écrit :

$$P_f(X) = P_M(X) = X^2 - 1.$$

Un calcul immédiat donne

$$M^2 - \mathbf{Id} = \mathbf{Id} - \mathbf{Id} = 0,$$

ce qui est en accord avec le Théorème 14.

1. Attention, la réciproque est fausse en général !
2. ... ce qui ne constitue pas une preuve, naturellement ...

5.1.3 Une condition de diagonalisation

Théorème 15 *L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme annulateur de f scindé et n'ayant que des racines simples*[3].

On déduit du théorème 15 le

Corollaire 4 *Pour que l'endomorphisme f soit diagonalisable, il faut et il suffit que f annule le polynôme*

$$\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} (X - \lambda),$$

où $Sp(f)$ est le spectre de f.

Attention ! ce corollaire est très élégant, mais il ne dit pas comment diagonaliser f, puisqu'il ne précise pas les dimensions des sous-espaces propres ...
Il peut cependant être utile pour conclure qu'une matrice n'est pas diagonalisable. Considérons par exemple la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Son polynôme caractéristique est

$$P_M(X) = (X-1)^2(X+1)^2.$$

Un calcul direct montre que

$$(M - \mathrm{Id})(M + \mathrm{Id}) \neq 0,$$

donc M n'est pas diagonalisable[4]**.**

3. On dit qu'une racine est simple si sa multiplicité est 1.
4. En revanche, nous verrons dans le chapitre suivant que M est trigonalisable dans $\mathbb{R}$, puisque son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{R}$.

5.2 Exercices

Exercice 24 *Soit A une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), n \geq 1$, (c'est-à-dire telle qu'il existe un entier $r \geq 1$ tel que $A^r = 0$). On définit les matrices :*

$$\cos A = \sum_{k=0}^{[\frac{r}{2}]} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k}, \qquad \cosh A = \sum_{k=0}^{[\frac{r}{2}]} \frac{1}{(2k)!} A^{2k},$$
$$\sin A = \sum_{k=0}^{[\frac{r}{2}]} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1}, \qquad \sinh A = \sum_{k=0}^{[\frac{r}{2}]} \frac{1}{(2k+1)!} A^{2k+1},$$

où $[\frac{r}{2}]$ désigne la partie entière de $\frac{r}{2}$. Montrer que

$$\cos^2 A + \sin^2 A = \cosh^2 A - \sinh^2 A = I_n. \tag{5.1}$$

On pourra utiliser la formule de Newton : pour tous nombres réels x et y, et tout entier k,

$$(x+y)^k = \sum_{l=0}^{l=k} C_l^k x^l y^{k-l}. \tag{5.2}$$

Solution - Puisque la matrice est nilpotente, toutes les puissances A^p, où $p \geq r$ sont nulles. On peut donc écrire pour des raisons de commodité

$$\cos A = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{(2k)!} A^{2k} \quad \text{et} \quad \sin A = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\cos^2 A &= \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \frac{(-1)^{p+q}}{(2p)!(2q)!} A^{2(p+q)} \\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}} (-1)^m \left(\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2, p+q=m} \frac{1}{(2p)!(2q)!} \right) A^{2m} \\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}} (-1)^m \left(\sum_{p=0}^{m} \frac{1}{(2p)!(2m-2p)!} \right) A^{2m} \\
&= \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \left(\sum_{p=0}^{m} C_{2m}^{2p} \right) A^{2m}. \\
\sin^2 A &= \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \frac{(-1)^{p+q}}{(2p+1)!(2q+1)!} A^{2(p+q+1)} \\
&= -\sum_{m\in\mathbb{N}^*} (-1)^m \left(\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2, p+q+1=m} \frac{1}{(2p+1)!(2q+1)!} \right) A^{2m} \\
&= -\sum_{m\in\mathbb{N}^*} (-1)^m \left(\sum_{p=0}^{m} \frac{1}{(2p+1)!(2m-2p-1)!} \right) A^{2m} \\
&= -\sum_{m\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \left(\sum_{p=0}^{m} C_{2m}^{2p+1} \right) A^{2m}.
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\cos^2 A + \sin^2 A = I_n + \sum_{m\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \left(\sum_{p=0}^{m} (C_{2m}^{2p} - C_{2m}^{2p+1}) \right) A^{2m}.$$

Utilisons la formule de Newton 5.2 : pour tous nombres réels x et y,

$$(x+y)^{2m} = \sum_{l=0}^{l=2m} C_l^{2m} x^l y^{2m-l}.$$

Posons $x = 1, y = -1$. Il vient

$$0 = (1-1)^{2m} = \sum_{p=0}^{m} (C_{2m}^{2p} - C_{2m}^{2p+1}) = \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_{2m}^k,$$

d'où l'on déduit :

$$\cos^2 A + \sin^2 A = I_n.$$

Un calcul analogue permet de montrer que

$$\cosh^2 A - \sinh^2 A = I_n.$$

Remarque : pour le lecteur familier des séries de matrices, ce calcul donnerait une formule analogue pour toute matrice, nilpotente ou non.

Exercice 25 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie.*

1. *Soit u un endomorphisme de E tel que*
$$u^3 = u.$$
Montrer que u est diagonalisable. Quelles sont les valeurs propres possibles de u ?
2. *Déterminer les endomorphismes v de E tel que*
$$\begin{cases} v^3 &= v \\ v^4 &= 3v^3 - 2v^2 + 6v. \end{cases} \tag{5.3}$$

Solution -

1. Soit u un endomorphisme de E vérifiant
$$u^3 = u.$$
Le polynôme
$$P(X) = X^3 - X$$
annule u. Or
$$P(X) = X(X-1)(X+1)$$
est scindé et n'admet que des racines simples. D'après le théorème 15, u est donc diagonalisable et ses valeurs propres appartiennent à l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$.
2. De la même façon, si v vérifie 5.3, v annule le polynôme
$$P(X) = X^3 - X = X(X-1)(X+1),$$
et le polynôme
$$Q(X) = X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 6X = X(X-3)(X^2+1).$$
L'endomorphisme v est diagonalisable d'après la question précédente, et ses valeurs propres appartiennent à la fois à l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$

des racines de P et à l'ensemble $\{0,3\}$ des racines de Q. Donc la seule valeur propre de v est 0. Comme v est diagonalisable, v est l'endomorphisme nul. En définitive, le seul endomorphisme v vérifiant 5.3 est l'endomorphisme nul.

Exercice 26 *Déterminer les endomorphismes v de $\mathbb{R}^n, n \geq 3$, qui annulent polynôme*

$$P(X) = X(X-1)(X-2),$$

et dont le déterminant est égal à 4.

Solution - Si v est un endomorphisme qui satisfait aux hypothèses, alors v annule un polynôme scindé n'ayant que des racines simples, et par conséquent v est diagonalisable d'après le théorème 15. D'autre part, si λ est une valeur propre de v, λ est une racine de P, donc $\lambda \in \{0,1,2\}$. Comme le déterminant de v est 4, la seule possibilité est la suivante : la matrice M de v dans une base de vecteurs propres $(e_i, 1 \leq i \leq n)$ est une matrice diagonale qui a pour expression, (a l'ordre près des vecteurs de la base) :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 \end{pmatrix}.$$

En d'autres termes, l'endomorphisme v répond à la question si et seulement s'il existe une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\begin{cases} u(e_1) & = 2e_1, \\ u(e_2) & = 2e_2, \\ u(e_3) & = u(e_4) = ... = u(e_n) = 1. \end{cases}$$

Exercice 27 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie, et u un endomorphisme de E de rang 1. Montrer que*

$$Im\ u \subset Ker\ u$$

si et seulement si u n'est pas diagonalisable.

Solution -

Comme le rang de u est 1, Im u est une droite et Ker u est un hyperplan [5]. Donc, deux cas seulement sont à envisager :

— soit Im u et Ker u sont en somme directe, soit

— soit Im $u \subset$ Ker u.

Etudions ces deux cas.

- Si Im u et Ker u sont en somme directe, c'est à dire si

$$E = \text{Im } u \oplus \text{Ker } u,$$

alors on peut trouver une base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de E telle que e_1 soit une base de Im u et $(e_2, ..., e_n)$ soit une base de Ker u. Or, $u(e_1) \in$ Im u , donc il existe un nombre réel λ (non nul) tel que

$$u(e_1) = \lambda e_1,$$

et

$$u(e_2) = ... = u(e_n) = 0.$$

La matrice de u dans cette base s'écrit :

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc dans ce cas, u est diagonalisable.

- Si Im $u \subset$ Ker u, alors $u^2 = 0$, ce qui signifie que le polynôme X^2 annule u. Appliquons la proposition 1. Comme 0 est la seule racine de ce polynôme, 0 est la seule valeur propre possible de u. Donc si u était diagonalisable, toutes ses valeurs propres seraient nulles, et u serait nulle, ce qui est impossible puisque le rang de u est 1. Donc dans ce cas, u n'est pas diagonalisable.

En définitive,

$$\text{Im } u \subset \text{Ker } u$$

si et seulement si u n'est pas diagonalisable.

Exercice 28 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie, et f_1, f_2, f_3 trois endomorphismes de E tels que :*

$$\begin{cases} f_1 + f_2 + f_3 & = \text{Id}_E \\ f_i \circ f_j & = 0 \text{ si } i \neq j. \end{cases} \tag{5.4}$$

5. Par définition, un hyperplan d'un espace vectoriel de dimension n est un sous-espace vectoriel de dimension $n - 1$.

1. *Calculer* f_1^2, f_2^2, f_3^2 *en fonction de* f_1, f_2, f_3.
2. *On pose*
$$f = f_1 + f_2 - 2f_3.$$
Calculer
$$f^2 + f - 2Id_E.$$
3. *En déduire que* f *est diagonalisable.*

Solution -

1. • On déduit de 5.4 :
$$f_1^2 = f_1.$$
En effet,
$$\begin{array}{rcl} f_1 & = & f_1 \circ \mathrm{Id}_E = f_1 \circ (f_1 + f_2 + f_3) \\ & = & f_1 \circ f_1 + f_1 \circ f_2 + f_1 \circ f_3 \quad = \quad f_1^2. \end{array}$$
• De la même façon,
$$f_2^2 = f_2, \quad f_3^2 = f_3.$$
En d'autres termes, f_1, f_2, f_3 sont des projecteurs.
2. On a :
$$f^2 = f_1 + f_2 + 4f_3,$$
d'où l'on déduit :
$$f^2 + f - 2\mathrm{Id}_E = 0.$$
3. D'après la question précédente, le polynôme
$$P(X) = X^2 + X - 2$$
annule f. Or
$$P(X) = (X-1)(X+2).$$
P est donc scindé sur $\mathbb{R}$ et n'admet que des racines simples. L'endomorphisme f admet donc le polynôme annulateur P qui est scindé et n'a que des racines simples. D'après le théorème 15, f est diagonalisable.

Exercice 29 *Soit* A *la matrice de* $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *définie par :*
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer le polynôme caractéristique de A.*
2. *En déduire que*
$$A^3 - 6A^2 + 11A - 6I = 0.$$

Solution -

1. Le polynôme caractéristique de A s'écrit :
$$P_A(X) = X^2 - 3X + 2.$$
2. Effectuons la division euclidienne du polynôme
$$Q(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$$
par $P_A(X)$. Il vient
$$Q(X) = (X - 3)P_A(X).$$
Or, d'après le théorème d'Hamilton Cayley 14,
$$P_A(A) = 0.$$
Donc
$$Q(A) = 0,$$
c'est à dire
$$A^3 - 6A^2 + 11A - 6I = 0.$$

Exercice 30 *Soient E un espace vectoriel sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et u un endomorphisme de E.*

1. *Soient*
$$a_1, \dots, a_{n+1},$$
$n+1$ éléments de K deux à deux distincts.
   (a) *Montrer que le reste μ de la division euclidienne du polynôme*
   $$(X - a_2)...(X - a_{n+1})$$
   par le monôme $(X - a_1)$ est un élément de K non nul.
   (b) *Déduire de la question 1a qu'il existe un polynôme $Q \in K[X]$ tel que*
   $$\frac{1}{\mu}(u - a_2 I_E) \dots (u - a_{n+1} I_E) - \frac{1}{\mu} Q(u) \circ (u - a_1 I_E) = I_E. \quad (5.5)$$

2. *On suppose qu'il existe n éléments de K, $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, deux à deux distincts, tels que*

$$(u - \lambda_1 I_E) \circ ... \circ (u - \lambda_n I_E) = 0. \tag{5.6}$$

Montrer que

$$E = \bigoplus_{j=1}^{n} Ker\ (u - \lambda_j I_E). \tag{5.7}$$

Indication : On pourra raisonner par récurrence sur n [6].

Solution -

1. (a) Comme le diviseur du polynôme $(X - a_2)...(X - a_{n+1})$ est de degré 1, le reste μ de la division euclidienne est de degré 0. C'est donc un élément de K. Supposons que μ soit nul. Alors on pourrait écrire

$$(X - a_2)...(X - a_{n+1}) = Q(X)(X - a_1),$$

(où Q est un polynôme de degré $n - 1$). Dans ce cas, $(X - a_1)$ diviserait $(X - a_2)...(X - a_{n+1})$, ce qui est impossible puisque les a_i sont deux à deux distincts. En définitive, μ est un élément non nul de K.

   (b) D'après la question 1a, il existe un polynôme Q tel que

$$(X - a_2)...(X - a_{n+1}) = Q(X)(X - a_1) + \mu,$$

d'où l'on déduit, en posant $X = u$,

$$\frac{1}{\mu}(u - a_2 I_E) \dots (u - a_{n+1} I_E) - \frac{1}{\mu} Q(u) \circ (u - a_1 I_E) = Id_E. \tag{5.10}$$

2. Comme l'indique l'énoncé, nous allons montrer 5.7 par récurrence sur n.

---

6. Pour être plus précis, la récurrence peut s'énoncer comme suit : si E est un espace vectoriel et u un endomorphisme de E tel qu'il existe n éléments de K, $\lambda_1, ..., \lambda_n$, deux à deux distincts, vérifiant

$$(u - \lambda_1 I_E) \circ ... \circ (u - \lambda_n I_E) = 0, \tag{5.8}$$

alors

$$E = \bigoplus_{j=1}^{n} \text{Ker}\ (u - \lambda_j I_E). \tag{5.9}$$

- Montrons la propriété 5.7 si $n = 1$. Par hypothèse, il existe un élément λ_1 de K tel que

$$u - \lambda_1 I_E = 0.$$

Ceci signifie que pour tout $x \in E$,

$$(u - \lambda_1 I_E)(x) = 0,$$

c'est à dire

$$E = \text{Ker } (u - \lambda_1 I_E).$$

La propriété 5.7 est donc vérifiée pour $n = 1$.

- Supposons que la propriété soit vraie jusqu'au rang n, c'est à dire :

si un endomorphisme u sur un espace vectoriel E sur K est tel qu'il existe n éléments de K deux à deux distincts $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ satisfaisant

$$(u - \lambda_1 I_E) \circ \ldots \circ (u - \lambda_n I_E) = 0,$$

alors

$$E = \bigoplus_{j=1}^{n} \textbf{Ker } (u - \lambda_j I_E). \tag{5.11}$$

Montrons que la propriété est vraie au rang $n + 1$. Pour cela, considérons un endomorphisme u défini sur un espace vectoriel E sur K, et

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$$

$n + 1$ éléments de K deux à deux distincts tels que

$$(u - \lambda_1 I_E) \circ \ldots \circ (u - \lambda_{n+1} I_E) = 0. \tag{5.12}$$

— Nous allons montrer dans un premier temps qu'alors

$$E = \text{Ker } (E - \lambda_1 I_E) \oplus \text{Ker } [(u - \lambda_2 I_E) \circ \ldots \circ (u - \lambda_{n+1} I_E)].$$

— Commençons par montrer que tout élément $x \in E$ est somme d'un élément de

$$\text{Ker } (E - \lambda_1 I_E)$$

et d'un élément de

$$\text{Ker } [(u - \lambda_2 I_E) \circ \ldots \circ (u - \lambda_{n+1} I_E)].$$

Pour cela, effectuons la division euclidienne du polynôme

$$(X - \lambda_2) \ldots (X - \lambda_{n+1})$$

par $(X-\lambda_1)$: d'après la question 1a il existe un polynôme Q et un scalaire $\mu \in K$ non nul tels que

$$(X-\lambda_2)\dots(X-\lambda_{n+1}) = Q(X)(X-\lambda_1)+\mu. \tag{5.13}$$

On déduit de 5.13 :

$$\frac{1}{\mu}(X-\lambda_2)\dots(X-\lambda_{n+1}) - \frac{1}{\mu}Q(X)(X-\lambda_1) = 1. \tag{5.14}$$

En posant $X = u$, on déduit de 5.14 :

$$\frac{1}{\mu}(u-\lambda_2 I_E)\dots(u-\lambda_{n+1}I_E) - \frac{1}{\mu}Q(u)\circ(u-\lambda_1 I_E) = Id_E, \tag{5.15}$$

et donc tout $x \in E$ s'écrit :

$$x = \frac{1}{\mu}(u-\lambda_2 I_E)\circ\dots\circ(u-\lambda_{n+1}I_E)(x) - \frac{1}{\mu}Q(u)\circ(u-\lambda_1 I_E)(x). \tag{5.16}$$

D'après 5.12, le vecteur

$$\frac{1}{\mu}(u-\lambda_2 I_E)\circ\dots\circ(u-\lambda_{n+1}I_E)(x)$$

appartient au noyau de $(u-\lambda_1 I_E)$.

D'autre part, montrons que le vecteur

$$\frac{1}{\mu}Q(u)\circ(u-\lambda_1 I_E)(x)$$

appartient au noyau de

$$(u-\lambda_2 I_E)\circ\dots\circ(u-\lambda_{n+1}I_E).$$

En effet, comme $Q(u)$ est un polynôme en u,

$$\frac{1}{\mu}Q(u)\circ(u-\lambda_1 I_E) = \frac{1}{\mu}(u-\lambda_1 I_E)\circ Q(u),$$

et toujours en utilisant 5.12,

$$\begin{aligned}(u-\lambda_2 I_E)\circ\dots\circ(u-\lambda_{n+1}I_E)[Q(u)\circ(u-\lambda_1 I_E)(x)] &= \\ (u-\lambda_1 I_E)\circ(u-\lambda_2 I_E)\circ\dots\circ(u-\lambda_{n+1}I_E)[Q(u)(x)] &= 0.\end{aligned} \tag{5.17}$$

Ceci entraîne :

$$E = \mathrm{Ker}(u-\lambda_1 I_E) + \mathrm{Ker}\ \left((u-\lambda_2 I_E)\circ\dots\circ(u-\lambda_{n+1}I_E)\right).$$

— Montrons maintenant que

$$\mathrm{Ker}(E-\lambda_1 I_E)\cap\mathrm{Ker}\ \left((u-\lambda_2 I_E)\circ\ldots\circ(u-\lambda_{n+1}I_E)\right)=0.$$

Soit

$$x\in\mathrm{Ker}(E-\lambda_1 I_E)\cap\mathrm{Ker}\left((u-\lambda_2 I_E)\circ\ldots\circ(u-\lambda_{n+1}I_E)\right).$$

d'après 5.12 et 5.5, on a nécessairement $x=0$, ce qui établit la relation souhaitée.

En définitive,

$$E=\mathrm{Ker}(E-\lambda_1 I_E)\oplus\mathrm{Ker}\ \left((u-\lambda_2 I_E)\circ\ldots\circ(u-\lambda_{n+1}I_E)\right). \tag{5.18}$$

— Il reste à montrer que

$$\mathrm{Ker}[(u-\lambda_2 I_E)\circ\ldots\circ(u-\lambda_{n+1}I_E)]=\bigoplus_{j=2}^{n+1}\mathrm{Ker}(u-\lambda_j I_E).$$

Pour cela, nous allons utiliser l'hypothèse de récurrence. Considérons le sous-espace vectoriel

$$\tilde{E}=\mathrm{Ker}\left((u-\lambda_2 I_E)\circ\ldots\circ(u-\lambda_{n+1}I_E)\right).$$

Soit $\tilde{u}$ la restriction de l'endomorphisme u à $\tilde{E}$. Montrons que $\tilde{u}$ est un endomorphisme de $\tilde{E}$, c'est à dire que pour tout $x\in\tilde{E}$,

$$\tilde{u}(x)\in\tilde{E}.$$

Si $x\in\tilde{E}$,

$$[(u-\lambda_2 I_E)\circ\ldots\circ(u-\lambda_{n+1}I_E)]u(x)=u[(u-\lambda_2 I_E)\circ\ldots\circ(u-\lambda_{n+1}I_E)](x)=0,$$

donc $u(x)\in\tilde{E}$. Donc $\tilde{u}$ est un endomorphisme $\tilde{E}$.

Ainsi, l'espace vectoriel $\tilde{E}$, l'endomorphisme $\tilde{u}$ et les n scalaires $\lambda_2,...,\lambda_{n+1}$ vérifient l'hypothèse de récurrence, et donc

$$\tilde{E}=\bigoplus_{j=2}^{n+1}\mathrm{Ker}(\tilde{u}-\lambda_j I_{\tilde{E}}).$$

Enfin, pour tout $j=2,...,n+1$,

$$\mathrm{Ker}(\tilde{u}-\lambda_j I_{\tilde{E}})=\tilde{E}\cap\mathrm{Ker}(u-\lambda_j I_E)\ \text{et}\ \mathrm{Ker}(u-\lambda_j I_E)\subset\tilde{E},$$

$$\mathrm{Ker}(\tilde{u}-\lambda_j I_{\tilde{E}})=\mathrm{Ker}(u-\lambda_j I_E).$$

Finalement,

$$E = \bigoplus_{j=1}^{n+1} \mathrm{Ker}(u - \lambda_j I_E).$$

Ceci montre la propriété à l'ordre $n+1$.

En définitive, la propriété est vérifiée pour tout n et 5.7 est démontré.

Exercice 31 *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont le polynôme caractéristique $P(A)$ admet n racines deux à deux distinctes $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par les matrices $(A^m)_{m\in\mathbb{N}}$ est de dimension n.*

Solution -

Ecrivons le polynôme caractéristique de A sous la forme

$$P(X) = (-1)^n X^n + \alpha_1 X^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} X + \alpha_n,$$

où $\alpha_1, ..., \alpha_n$ sont des nombres complexes. D'après le théorème de Hamilton-Cayley 14, P annule A, c'est-à-dire :

$$(-1)^n A^n + \alpha_1 A^{n-1} + \ldots + \alpha_n I_n = 0, \tag{5.19}$$

ce qui implique :

$$A^n = (-1)^{n+1} \left(\alpha_1 A^{n-1} + \ldots + \alpha_n I_n\right). \tag{5.20}$$

Notons E_A le sous-espace vectoriel engendré par les matrices $(A^m)_{m\in\mathbb{N}}$. Montrons que

$$\{I_n, A, \ldots, A_{n-1}\}$$

est une base de E_A.

- Montrons d'abord que $\{I_n, A, \ldots, A_{n-1}\}$ est une famille génératrice de E_A. Pour cela, il suffit de montrer que toute matrice de la forme $A^m, m \geq n$ appartient à E_A.
  Vérifions d'abord que A^{n+1} appartient à E_A. De la relation 5.20, on déduit :

$$\begin{aligned} A^{n+1} = A^n A &= (-1)^{n+1} \left(\alpha_1 A^{n-1} + \ldots + \alpha_n I_n\right) A \\ &= (-1)^{n+1} \left(\alpha_1 A^n + \ldots + \alpha_n A\right) \\ &= (-1)^{n+1} \left(\alpha_1 [\alpha_1 A^{n-1} + \ldots + \alpha_n I_n] + \ldots + \alpha_n A\right). \end{aligned}$$

  Par suite A^{n+1} est une combinaison linéaire de $\{I_n, A, \ldots, A_{n-1}\}$. Une récurrence immédiate permet de conclure que pour tout $m \geq n$, A^m est une combinaison linéaire de $\{I_n, A, \ldots, A_{n-1}\}$. Donc $\{I_n, A, \ldots, A_{n-1}\}$ est une famille génératrice de E_A.

- Montrons ensuite que $\{I_n, A, \ldots, A_{n-1}\}$ est une famille libre. Raisonnons par absurde et supposons que

$$\{I_n, A, \ldots, A_{n-1}\}$$

est une famille liée. Il existerait alors des nombres complexes $(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n-1})$ non tous nuls tels que

$$\mu_0 I_n + \mu_1 A + \ldots + \mu_{n-1} A^{n-1} = 0. \tag{5.21}$$

Or, pour tout $j = 1, \ldots, n$, λ_j est une valeur propre de A. Par suite, il existe $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que

$$Ax = \lambda_j x.$$

En appliquant la relation 5.21 à x, on obtient

$$(\mu_0 + \mu_1 \lambda_j x + \ldots + \mu_{n-1} \lambda_j^{n-1})x = 0,$$

soit

$$P(\lambda_j) = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{5.22}$$

où P est le polynôme

$$P(X) = \mu_0 + \mu_1 X + \ldots + \mu_{n-1} X^{n-1}.$$

Ce polynôme n'est pas nul (puisque l'un au moins des μ_i est différent de 0), et son degré est inférieur ou égal à $n-1$. De plus, d'après 5.22, il admet n racines distinctes, ce qui est absurde. Par conséquent,

$$\{I_n, A, \ldots, A_{n-1}\}$$

est une famille libre.

En définitive, la famille

$$\{I_n, A, \ldots, A_{n-1}\}$$

est une base de E_A. En particulier, E_A est un sous-espace vectoriel de dimension n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 32 *En utilisant le théorème de Hamilton-Cayley, calculer l'inverse des matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 1 & 0 \\ 4 & -9 & 2 & 0 \\ 8 & -20 & 5 & 0 \\ 10 & -22 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solution -

1. Le polynôme caractéristique P_A de la matrice A est donné par

$$\begin{aligned}
P_A(X) &= \begin{vmatrix} 2-X & 1 & 4 \\ -1 & -1-X & 1 \\ 2 & -1 & 1-X \end{vmatrix} \overset{L_3+L_1}{=} \begin{vmatrix} 2-X & 1 & 4 \\ -1 & -1-X & 1 \\ 4-X & 0 & 5-X \end{vmatrix} \\
&= (4-X)(5+4X)+(5-X)((X-2)(X+1)+1) \\
&= -X^3+2X^2+7X+15.
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Hamilton-Cayley 14,

$$P_A(A) = -A^3+2A^2+7A+15I_3 = 0.$$

De cette relation, on déduit que A est inversible et que son inverse vérifie :

$$A^{-1} = \frac{1}{15}(A^2-2A-7I_3).$$

On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 11 & -3 & 13 \\ 1 & -1 & -4 \\ 7 & 2 & 8 \end{pmatrix},$$

et donc

$$A^{-1} = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 0 & -5 & 5 \\ 3 & -6 & -6 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Le polynôme caractéristique P_B de la matrice B est donné par

$$\begin{aligned}
P_B(X) &= \begin{vmatrix} 5-X & -10 & 1 & 0 \\ 4 & -9-X & 2 & 0 \\ 8 & -20 & 5-X & 0 \\ 10 & -22 & 6 & -1-X \end{vmatrix} \\
&= -(X+1)\begin{vmatrix} 5-X & -10 & 1 \\ 4 & -9-X & 2 \\ 8 & -20 & 5-X \end{vmatrix} \\
&\overset{L_2-2L_1}{=} -(X+1)\begin{vmatrix} 5-X & -10 & 1 \\ 2X-6 & 11-X & 0 \\ 8 & -20 & 5-X \end{vmatrix} \\
&= -(X+1)\,[-20(2X-6)-8(11-X) \\
&+ (5-X)((5-X)(11-X)+10(2X-6))] \\
&= -(X+1)(-X^3+X^2-7X+7) = X^4+6X^2-7.
\end{aligned}$$

D'après le théorème de Hamilton-Cayley

$$P_B(B) = B^4 + 6B^2 - 7I_4 = 0.$$

De cette relation, on déduit que B est inversible et que son inverse vérifie :

$$B^{-1} = \frac{1}{7}(B^3 + 6B).$$

On a

$$B^2 = \begin{pmatrix} -7 & 20 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^3 = \begin{pmatrix} -35 & 90 & -17 & 0 \\ -28 & 71 & -18 & 0 \\ -56 & 140 & -35 & 0 \\ -70 & 178 & -44 & -1 \end{pmatrix},$$

donc

$$B^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 & 30 & -11 & 0 \\ -4 & 17 & -6 & 0 \\ -8 & 20 & -5 & 0 \\ -10 & 46 & -8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 33 *Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.*

1. *Montrer que*

$$M^2 - (\mathrm{tr}M)M + (\det M)I_2 = 0. \tag{5.23}$$

Rappelons que la trace de M, (notée tr$M$) est la somme des éléments diagonaux de M.

2. *Soit A la matrice suivante :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que

$$X^2 + X = A. \tag{5.24}$$

Solution -

1. Posons

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Alors le polynôme caractéristique de M s'écrit :

$$P_M(X) = \begin{pmatrix} a - X & b \\ c & d - X \end{pmatrix} = X^2 - (a + d)X + (ad - bc).$$

Par conséquent,

$$P_M(X) = X^2 - (\text{tr } M)X + \det M. \tag{5.25}$$

Le théorème d'Hamilton-Cayley implique donc

$$M^2 - (\text{tr } M)M + (\det M)I_2 = 0. \tag{5.26}$$

2. Soit $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant l'équation 5.24. Comme det A = 0, on déduit :

$$\det(X^2 + X) = \det[X(X + Id)] = \det X \det(X + Id) = 0.$$

- Si $\det X = 0$, on déduit de 5.23 :

$$X^2 - (\text{tr } X)X = 0. \tag{5.27}$$

Posons

$$\alpha = \text{tr } X.$$

On déduit de 5.23 et 5.27 que toute matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant 5.24 satisfait :

$$\begin{cases} X(X + Id) & = A \\ X^2 & = \alpha X. \end{cases} \tag{5.28}$$

Ceci implique :

$$(1 + \alpha)X = A. \tag{5.29}$$

Par suite,

$$\alpha \neq -1.$$

On déduit alors de 5.24 :

$$(\frac{1}{1+\alpha})^2 A^2 + \frac{1}{1+\alpha} A = A. \tag{5.30}$$

Comme

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

5.30 implique

$$2(\frac{1}{1+\alpha})^2 + \frac{1}{1+\alpha} = 1. \tag{5.31}$$

Par suite,

$$\frac{1}{1+\alpha} = -1 \text{ ou } \frac{1}{1+\alpha} = \frac{1}{2}.$$

Donc d'après 5.29, $X = -A$ ou $X = \frac{1}{2}A$. Réciproquement, on vérifie que $X = -A$ et $X = \frac{1}{2}A$ sont solutions de 5.24.

- Si det $(X + Id) = 0$, posons

  $$Y = -X - Id.$$

  on déduit de 5.24 :

  $$Y^2 + Y = A.$$

  Par suite, l'étude menée précédemment conduit à :

  $$Y = -A \text{ et } Y = \frac{1}{2}A,$$

  d'où

  $$X = -A - Id \text{ ou } X = \frac{1}{2}A - Id.$$

  Réciproquement, on vérifie que $X = -A - Id$ et $X = \frac{1}{2}A - Id$ sont solutions de 5.24.

En définitive, l'équation 5.24 a quatre solutions :

$$\{-A, \frac{1}{2}A, -A - Id, \frac{1}{2}A - Id\}.$$

Chapitre 6

Trigonalisation

6.1 Rappels de cours

Nous avons vu au chapitre 4 que certaines matrices sont semblables à des matrices diagonales, d'autres ne le sont pas. Dans ces derniers cas, on peut tout de même essayer de réduire ces matrices, (c'est-à-dire trouver des matrices les plus simples possibles) qui leur sont semblables. On peut par exemple chercher des matrices dont tous les termes au dessus (ou au dessous) de la diagonale sont nuls. De telles matrices sont dites triangulaires supérieures (ou inférieures). Précisons :

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est *triangulaire supérieure* si elle s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{ji} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

En d'autres termes, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est triangulaire supérieure si tous ses termes au dessous de la diagonale sont nuls.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est *triangulaire inférieure* si elle s'écrit :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & \dots & \dots & a_{ji} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

En d'autres termes, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est triangulaire inférieure si tous ses termes au dessus de la diagonale sont nuls.

Ceci conduit à poser la

Définition 13
- *On dit qu'un endomorphisme $f : E \to E$ d'un espace vectoriel de dimension fini sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire (inférieure ou supérieure)*[1].
- *De même, on dit qu'un matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire (inférieure ou supérieure).*

On peut alors montrer le

Théorème 16 *Soit $f : E \to E$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension fini sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors f est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.*

En particulier, puisque tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ est scindé,
- Si E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, tout endomorphisme sur $\mathbb{C}$ est trigonalisable.
- Toute matrice carrée à coefficients complexes est semblable à une matrice triangulaire.

Considérons par exemple la matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique $P_M(X)$ satisfait :

$$P_M(X) = -(X-1)^2(X+2).$$

On peut commencer par se demander si M est diagonalisable. La réponse est négative, puisque la dimension de l'espace propre associé à V_1 est de dimension $1 < 2$. La recherche de vecteurs propres montre en effet que
- **V_{-2} est engendré par le vecteur**

$$\epsilon_1 = (0, 0, 1).$$

- **V_1 est engendré par le vecteur**

$$\epsilon_2 = (3, -6, 20),$$

Le polynôme $P_M(X)$ est scindé dans $\mathbb{R}$, donc M est trigonalisable. Pour

déterminer une matrice triangulaire semblable à M, on fait le raisonnement suivant : considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base

1. En fait on peut montrer facilement que s'il existe une base de E telle que f soit triangulaire supérieure, alors il existe une base de E telle que f soit triangulaire inférieure, et réciproquement.

canonique (e_1, e_2, e_3) est M. Déterminons une base dans laquelle la matrice de f soit triangulaire supérieure. Il est plus simple de déterminer une base dont les premiers vecteurs sont ϵ_1 et ϵ_2. Si ϵ_3 complète ces deux vecteurs pour former une base de $\mathbb{R}^3$, la matrice T de f dans la base $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ aura pour expression :

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$

qui est bien une matrice triangulaire supérieure. En définitive n'importe quel vecteur ϵ_3 tel que $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ convient.

En revanche la matrice $N \in \mathcal{M}_2(R)$ définie par :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

n'est pas trigonalisable dans $\mathbb{R}$, puisque son polynôme caractéristique $P_N(X)$, égal à $X^2 + 1$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$.

6.2 Exercices

Exercice 34 *Soit E un espace vectoriel sur ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Soit r un nombre entier supérieur ou égal à 1. Un endomorphisme u de E est dit nilpotent d'ordre r si $u^r = 0$ et $u^{r-1} \neq 0$* [2].

1. (a) *Montrer que si u est un endomorphisme nilpotent d'ordre $r \geq 1$, alors pour tout vecteur x tel que $u^{r-1}(x) \neq 0$,*

$$\{u^{r-1}(x), u^{r-2}(x), \ldots, u(x), x\}$$

est une famille libre de E.

(b) *On suppose que E est de dimension finie $n \geq 1$. Soit u est un endomorphisme de E nilpotent d'ordre r.*

i. *Montrer que $r \leq n$.*

ii. *Montrer que $u^n = 0$.*

(c) *Si E est de dimension finie n et u est un endomorphisme nilpotent d'ordre n montrer que pour tout vecteur x tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$,*

$$\mathcal{B}_x = \{u^{n-1}(x), u^{n-2}(x), \ldots, u(x), x\}$$

est une base de E et écrire la matrice de u dans cette base.

2. **Application :** *Trigonaliser les matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 \\ 5 & 1 & -11 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 7 & 4 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 10 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution -

1. Soit u un endomorphisme (non nul) de E nilpotent d'ordre $r \geq 1$, et x un vecteur tel que

$$u^{r-1}(x) \neq 0.$$

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r) \in K^r$ tels que

$$\lambda_1 x + \lambda_2 u(x) + \ldots + \lambda_r u^{r-1}(x) = 0. \tag{6.1}$$

En appliquant l'endomorphisme u^{r-1} à la relation 6.1, on obtient

$$\lambda_1 u^{r-1}(x) = 0,$$

2. Plus généralement, on dira qu'un endomorphisme u de E est dit nilpotent s'il existe un entier $r \geq 1$ tel que $u^r = 0$ et $u^{r-1} \neq 0$.

soit $\lambda_1 = 0$. La relation 6.1 s'écrit alors

$$\lambda_2 u(x) + \ldots + \lambda_r u^{r-1}(x) = 0. \tag{6.2}$$

En appliquant l'endomorphisme u^{r-2} à la relation 6.2, on obtient

$$\lambda_2 u^{r-1}(x) = 0,$$

soit $\lambda_2 = 0$.
En itérant ce procédé autant de fois que nécessaire, on obtient finalement :

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0.$$

Ceci montre que la famille

$$\{u^{r-1}(x), u^{r-2}(x), \ldots, u(x), x\}$$

est libre.

2. (a) Dans un espace vectoriel de dimension finie n, le nombre de vecteurs dans une famille libre et toujours inférieur ou égal à n. Ainsi, d'après la première question, la famille

   $$\{u^{r-1}(x), u^{r-2}(x), \ldots, u(x), x\}$$

   est libre et contient r vecteurs et donc $r \leq n$.

   (b) Puisque $u^r = 0$, où $r \leq n$, on a $u^n = u^{n-r} \circ u^r = 0$, avec $n - r \geq 0$. Donc,

   $$u^n = 0.$$

3. Soit u un endomorphisme nilpotent d'ordre n dans un espace vectoriel de dimension n. Soit $x \in E$ tel que

   $$u^{n-1}(x) \neq 0.$$

   D'après 1, la famille

   $$\{u^{n-1}(x), u^{n-2}(x), \ldots, u(x), x\}$$

   est libre et son cardinal est égal à la dimension de E. C'est donc une base de E.
   On a

   $$u(u^{n-1}(x)) = u^n(x) = 0,$$

   et pour tout $j \in \{0, \ldots, n-2\}$,

   $$u(u^j(x)) = u^{j+1}(x).$$

Donc la matrice de u dans la base $\mathcal{B}_x$ est la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

4. (a) Un calcul direct donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -5 \\ -6 & 6 & -30 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après ce qui précède, A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Un calcul direct donne

$$B^3 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 8 \\ -4 & -8 & 4 & -16 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \\ 2 & 4 & -2 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En vertu de ce qui précède, B est donc semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 35 *Soit E un K-espace vectoriel de dimension 3, (où $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et u un endomorphisme non nul de E.*

1. *On suppose que $u^2 = 0$.*

   (a) *Montrer que*

   $$\mathrm{Im}u \subset \mathrm{Ker}u,$$

   et que

   $$\mathrm{dimKer}u = 2.$$

(b) *Soit x et y deux éléments de E tels que $u(x) \neq 0$ et $y \in \mathrm{Ker} u$. On suppose que $\{u(x), y\}$ est une base de* Keru. *Montrer que*

$$\mathcal{B} = \{u(x), x, y\}$$

est une base de E.

(c) *Ecrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ définie dans la question 1b.*

(d) Application : *Trigonaliser la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 20 & -4 \\ -3 & -15 & 3 \\ -11 & -55 & 11 \end{pmatrix}.$$

2. *On suppose que $u^3 = 0$. Montrer qu'il existe une base de E telle que la matrice de E dans cette base ait l'une des expressions suivantes :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour traiter cette dernière question, on pourra utiliser le résultat suivant, démontré dans l'exercice 34, question 1c : si E est de dimension finie n et u est un endomophisme nilpotent d'ordre n, alors pour tout vecteur x tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$,

$$\mathcal{B}_x = \{u^{n-1}(x), u^{n-2}(x), \ldots, u(x), x\}$$

est une base de E.

Solution -

1. (a) De la relation $u^2 = 0$, on déduit que pour tout $x \in E$,

$$u(u(x)) = 0,$$

et donc

$$\mathrm{Im}\ u \subset \mathrm{Ker}\ u. \tag{6.3}$$

Appliquons le théorème du rang :

$$\dim \mathrm{Ker}\ u + \dim \mathrm{Im}\ u = 3 \tag{6.4}$$

On déduit de 6.3 et 6.4

$$\dim \mathrm{Im}\ u \leq 3 - \dim \mathrm{Im}\ u,$$

c'est-à-dire,

$$\dim \mathrm{Im} u \leq \frac{3}{2}.$$

Puisque $u \neq 0$, en déduit que $\dim \mathrm{Im}\ u = 1$, et donc

$$\dim \mathrm{Ker}\ u = 3 - \dim \mathrm{Im}\ u = 2.$$

(b) Soit x et y deux éléments de E vérifiant les hypothèses de l'énoncé. On a en particulier $u(x) \neq 0$ et $y \in \mathrm{Ker} u$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois scalaires tels que

$$\lambda_1 u(x) + \lambda_2 x + \lambda_3 y = 0. \tag{6.5}$$

En appliquant u à l'égalité 6.5 et en utilisant le fait que $u^2 = 0$ et $y \in \mathrm{Ker}\ u$, on obtient

$$\lambda_2 u(x) = 0.$$

Puisque $u(x) \neq 0$, on déduit :

$$\lambda_2 = 0.$$

L'égalité 6.5 s'écrit donc

$$\lambda_1 u(x) + \lambda_3 y = 0. \tag{6.6}$$

Puisque $\{u(x), y\}$ est une base de Ker u, l'égalité 6.6 implique

$$\lambda_1 = \lambda_3 = 0.$$

Le système $\{u(x), x, y\}$ est donc un système libre à trois éléments dans un espace vectoriel de dimension 3. Par suite c'est une base de E.

(c) La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Un calcul direct donne $A^2 = 0$ et donc, d'après ce qui précède, A est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Si $u^3 = 0$, trois situations peuvent se produire :

(a) $u = 0$ et la matrice de u dans une base quelconque s'écrit : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) $u^2 = 0$ et $u \neq 0$. Alors d'après la question 1c, il existe une base de E telle que la matrice A de u dans cette base s'écrive $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(c) $u^3 = 0$ et $u^2 \neq 0$. Utilisons l'indication de l'énoncé. Si x est un élément de E tel que $u^2(x) \neq 0$, alors $\{u^2(x), u(x), x\}$ est une base de E. La matrice de u dans cette base s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 36 *Soit E un espace vectoriel sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension 4 et u un endomorphisme non nul de E tel que $u^2 = 0$.*

1. (a) *Montrer que Im $u \subset$ Ker u.*

   (b) *Montrer que la dimension de Ker u est égale à 2 ou 3.*

2. (a) *On suppose que* $\dim Ker\, u = 2$.

   i. *Montrer que Im $u =$ Ker u.*

   ii. *Montrer que si x et y sont deux éléments de E tels que $\{u(x), u(y)\}$ soit une base de Im u alors $\mathcal{B} = \{u(x), u(y), x, y\}$ est une base de E.*

   (b) *On suppose que* $\dim Ker\, u = 3$. *Soit x, y, z trois éléments de E tels que $u(x) \neq 0$, $y, z \in$ Ker u. On suppose que $\{u(x), y, z\}$ est une base de Ker u. Montrer que*

$$\mathcal{B} = \{u(x), y, z, x\}$$

   est une base de E.

3. (a) *On suppose que* $\dim Ker\, u = 2$. *Ecrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ définie dans la question précédente.*

   (b) *On suppose que* $\dim Ker\, u = 3$. *Ecrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ définie dans la question précédente.*

4. **Application :**

   (a) *Trigonaliser la matrice*

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & -6 & 2 & -1 \\ 17 & -38 & 10 & -3 \\ 13 & -28 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

(b) *Trigonaliser la matrice*

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & 2 & -1 \\ \frac{3}{2} & -3 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -3 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & -6 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solution -

1. (a) De la relation $u^2 = 0$, on déduit que pour tout $x \in E$, $u(u(x)) = 0$ et donc

$$\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u. \tag{6.7}$$

(b) Le théorème du rang s'écrit ici :

$$\dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u = 4. \tag{6.8}$$

On déduit 6.7 et 6.8 :

$$\dim \operatorname{Im} u \leq \dim \operatorname{Ker} u = 4 - \dim \operatorname{Im} u,$$

ce qui implique,

$$\dim \operatorname{Im} u \leq \frac{4}{2} = 2.$$

Puisque $u \neq 0$, on déduit que

$$\dim \operatorname{Im} u = 1, \text{ ou } \dim \operatorname{Im} u = 2,$$

et donc

$$\dim \operatorname{Ker} u = 3 \text{ ou } \dim \operatorname{Ker} u = 2.$$

2. (a) Si $\dim \operatorname{Ker} u = 2$ alors $\dim \operatorname{Im} u = 4 - 2 = 2$. Comme

$$\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u,$$

on déduit que

$$\operatorname{Ker} u = \operatorname{Im} u.$$

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ des scalaires tels que

$$\lambda_1 u(x) + \lambda_2 u(y) + \lambda_3 x + \lambda_4 y = 0. \tag{6.9}$$

En appliquant u des deux côtés de cette égalité, et en utilisant le fait que $u^2 = 0$, on obtient

$$\lambda_3 u(x) + \lambda_4 u(y) = 0.$$

Comme $\{u(x), u(y)\}$ est une base de Ker u, on déduit :

$$\lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

La relation 6.9 s'écrit alors :

$$\lambda_1 u(x) + \lambda_2 u(y) = 0,$$

ce qui entraîne $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, toujours puisque $\{u(x), u(y)\}$ est une base de Ker u. Le système $\{u(x), u(y), x, y\}$ est un système libre de quatre éléments dans un espace vectoriel de dimension 4. C'est donc une base de E.

(b) Un raisonnement analogue au précédent montre que $\{u(x), y, z, x\}$ est une base de E.

3. (a) Supposons que $\dim \mathrm{Ker}\ u = 2$. La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Supposons que $\dim \mathrm{Ker}\ u = 3$. La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Notons u et v les endomorphismes de $\mathbb{R}^4$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement A et B. Un calcul direct donne $A^2 = B^2 = 0$ et donc $u^2 = v^2 = 0$.

(a) Les vecteurs $(0, 2, 10, 8)$ et $(-1, -1, -3, -3)$ sont deux vecteurs libres appartenant à l'image de u. On déduit de la première question que le rang de u est 2, et donc que $\dim \mathrm{Ker}\ u = 2$. On déduit alors de la question 3a que A est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) L'image de v est engendré par $(2, 1, 1, 2)$. Donc le rang de u est 1, et $\dim \mathrm{Ker}\ u = 3$ On déduit alors de la question 3b que B est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 37 *Soit E un K-espace vectoriel, ($K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$) de dimension 4 et u un endomorphisme de E tel que $u^3 = 0$ et $u^2 \neq 0$.*

1. *Montrer que*
$$\text{Im } u^2 \subset \text{Ker } u \subset \text{Ker } u^2, \tag{6.10}$$
et que
$$\text{Im } u^2 \subset \text{Im } u \subset \text{Ker } u^2. \tag{6.11}$$
2. *Déduire de la question précédente que*
   (a)
$$\dim \text{ Im } u^2 = 1, \tag{6.12}$$
   (b)
$$\text{Im } u \cap \text{ Ker } u = \text{Im } u^2, \tag{6.13}$$
   (c)
$$\dim \text{ Ker } u = \dim \text{ Im } u = 2. \tag{6.14}$$
3. *Soit $y \in E$ tel que $u^2(y)$ soit un générateur de* $\text{Im}u^2$ *et $x \in$* $\text{Ker}u$. *On suppose que $\{u^2(y), x\}$ est une base de* $\text{Ker}u$. *Montrer qu'alors*
$$\mathcal{B} = \{u^2(y), u(y), y, x\}$$
est une base de E.
4. *Ecrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ définie dans la question précédente.*
5. Application : *Trigonaliser la matrice*
$$A = \begin{pmatrix} -5 & 12 & -3 & 1 \\ -\frac{7}{2} & 8 & -2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{15}{2} & 16 & -4 & \frac{1}{2} \\ -9 & 20 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution -

1. Les inclusions découlent immédiatement de la relation $u^3 = 0$:
   - Soit $y \in \text{Im } u^2$. Alors il existe $x \in E$ tel que
$$u^2(x) = y.$$
Par suite,
$$u(y) = u^3(x) = 0.$$

Donc
$$y \in \text{Ker } u.$$
Comme on a toujours
$$\text{Ker } u \subset \text{Ker } u^2,$$
on déduit
$$\text{Im } u^2 \subset \text{Ker } u \subset \text{Ker } u^2.$$

- Soit $y \in \text{Im } u^2$. Alors il existe $x \in E$ tel que
$$u^2(x) = y.$$
Donc $y = u(z)$, où $z = u(x)$, donc
$$\text{Im } u^2 \subset \text{Im } u.$$
Soit maintenant $w \in \text{Im } u$. Il existe $t \in E$ tel que
$$w = u(t).$$
On a donc
$$u^2(w) = u^3(t) = 0,$$
et par conséquent,
$$\text{Im } u \subset \text{Ker } u^2.$$
On déduit
$$\text{Im } u^2 \subset \text{Im } u \subset \text{Ker } u^2.$$

2. (a) Montrons par l'absurde que
$$\dim \text{Im } u^2 = 1.$$
D'après la question précédente,
$$\text{Im } u^2 \subset \text{Ker } u^2.$$
De plus, le théorème du rang s'écrit ici :
$$\dim \text{Im } u^2 + \dim \text{Ker } u^2 = 4.$$
On déduit que
$$1 \leq \dim \text{Im } u^2 \leq 2.$$
Supposons que $\dim \text{Im } u^2 = 2$. Dans ce cas,
$$\text{Im } u^2 = \text{Ker } u^2.$$

Les relations 6.10 et 6.11 impliquent alors

$$\text{Im } u = \text{Ker } u,$$

ce qui entraîne que $u^2 = 0$, qui est contraire à l'hypothèse. Donc

$$\dim \text{Im } u^2 = 1.$$

(b) D'après 6.12, on a

$$\dim \text{Im } u^2 = 1,$$

et donc

$$\dim \text{Ker } u^2 = 4 - 1 = 3.$$

Par conséquent, en utilisant 6.10 et 6.11,

$$1 \leq \dim \text{Im } u \leq 3 \text{ et } 1 \leq \dim \text{Im } u \leq 3. \tag{6.15}$$

Montrons par l'absurde que

$$\text{Im } u \cap \text{Ker } u = \text{Im } u^2.$$

D'après 6.10 et 6.11, on a

$$\text{Im } u^2 \subset \text{Im } u \cap \text{Ker } u.$$

Comme $\dim \text{Im } u^2 = 1$, il suffit de montrer que

$$\dim(\text{Im } u \cap \text{Ker } u) = 1.$$

Supposons que

$$\dim(\text{Im } u \cap \text{Ker } u) \geq 2.$$

Puisque

$$\text{Im } u \cap \text{Ker } u \subset \text{Im } u \text{ et } \text{Im } u \cap \text{Ker } u \subset \text{Ker } u,$$

on a :

$$\dim \text{Im } u \geq 2 \text{ et } \dim \text{Ker } u \geq 2.$$

D'un autre côté, le théorème du rang implique ici :

$$\dim \text{Im } u + \dim \text{Ker } u = 4.$$

On aurait alors, en utilisant 6.15 :

$$\text{Im } u = \text{Ker } u,$$

et par suite $u^2 = 0$, ce qui en contradiction avec l'hypothèse. Ainsi

$$\text{Im } u \cap \text{Ker } u = \text{Im } u^2.$$

(c) Montrons par l'absurde que

$$\dim \operatorname{Im}\, u = \dim \operatorname{Ker}\, u = 2.$$

D'après 6.10 et 6.11,

$$\dim \operatorname{Im}\, u^2 = 1,$$

et le théorème du rang implique encore une fois

$$\dim \operatorname{Im}\, u + \dim \operatorname{Ker}\, u = 4.$$

Si

$$\dim \operatorname{Im}\, u \neq 2 \text{ ou } \dim \operatorname{Ker}\, u \neq 2,$$

alors d'après 6.15 et le théorème du rang,

$$\operatorname{Im}\, u = \operatorname{Im}\, u^2$$

ou

$$\operatorname{Ker}\, u = \operatorname{Im}\, u^2.$$

Montrons qu'aucune de ces deux situations ne peut se produire.

- Si $\operatorname{Im}\, u = \operatorname{Im}\, u^2$, on aurait d'après 6.10 et 6.11, $\operatorname{Im}\, u \subset \operatorname{Ker}\, u$ et donc $u^2 = 0$, ce qui contredirait l'hypothèse $u^2 \neq 0$.
- Si $\operatorname{Ker}\, u = \operatorname{Im}\, u^2$, on aurait d'après 6.10,

$$\operatorname{Ker}\, u \subset \operatorname{Im}\, u \text{ et } \dim \operatorname{Ker}\, u = 1.$$

  Soit $\{x, u(y), u(z)\}$ une base de $\operatorname{Im}\, u$ où x est un générateur de $\operatorname{Ker}\, u$. Puisque $u^2(y) \in \operatorname{Im}\, u^2$ et $u^2(z) \in \operatorname{Im}\, u^2$ qui est de dimension 1, il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ tel que

$$\lambda_1 u^2(y) + \lambda_2 u^2(z) = 0,$$

  c'est-à-dire,

$$u(\lambda_1 u(y) + \lambda_2 u(z)) = 0,$$

  et donc

$$\lambda_1 u(y) + \lambda_2 u(z) \in \operatorname{Ker}\, u,$$

  ce qui contredit le fait que $\{x, u(y), u(z)\}$ une famille libre.

Finalement

$$\dim \operatorname{Im}\, u = \dim \operatorname{Ker}\, u = 2.$$

3. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in K^4$ tel que

$$\lambda_1 u^2(y) + \lambda_2 u(y) + \lambda_3 y + \lambda_4 x = 0. \tag{6.16}$$

Appliquons u^2 à cette relation. Puisque $u^3 = 0$, on obtient

$$\lambda_3 u^2(y) = 0,$$

soit $\lambda_3 = 0$. L'égalité 6.16 s'écrit alors

$$\lambda_1 u^2(y) + \lambda_2 u(y) + \lambda_4 x = 0. \tag{6.17}$$

Appliquons u à cette relation en utilisant encore le fait que $u^2(y)$ n'est pas nul, puisqu'il engendre un sous-espace vectoriel de dimension 1, et que $u^3 = 0$. On obtient

$$\lambda_2 u^2(y) = 0,$$

ce qui implique que

$$\lambda_2 = 0.$$

La relation 6.17 s'écrit alors

$$\lambda_1 u^2(y) + \lambda_4 x = 0,$$

et donc

$$\lambda_1 = \lambda_4 = 0,$$

puisque $\{u^2(y), x\}$ est une base de Ker u. Ainsi $\mathcal{B}$ est un système libre de quatre vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 4. C'est donc une base de E.

4. La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Un calcul direct donne

$$A^2 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & 8 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -16 & 4 & -1 \\ \frac{7}{2} & -8 & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et $A^3 = 0$. D'après ce qui précède A est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 38 *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice B dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ s'écrit*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer le polynôme caractéristique P_f de f et déduire que f n'est pas diagonalisable.*
2. *Pour toute valeur propre λ de f, calculer $(f-\lambda Id_{\mathbb{R}^3})^2$ et $(f-\lambda Id_{\mathbb{R}^3})^3$.*
3. *Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est triangulaire.*

Pour résoudre cette dernière question, on pourra utiliser le résultat suivant, qui se déduit immédiatement de l'exercice 34 : si u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $u^3 = 0$, et x un élément de $\mathbb{R}^3$ tel que $u^2(x) \neq 0$, alors

$$(u^2(x), u(x), x)$$

est une base de $\mathbb{R}^3$.

Solution -

1. Le polynôme caractéristique $P_f(X)$ de f s'écrit :

$$\begin{aligned} P_f(X) &= \det(f - XId_{\mathbb{R}^3}) = \begin{vmatrix} -X & -1 & 0 \\ 4 & 4-X & 0 \\ -2 & -2 & 2-X \end{vmatrix} \\ &= (2-X)(X(X-4)+4) = -(X-2)^3. \end{aligned}$$

La seule valeur propre de f est 2, qui est d'ordre 3. Si f était diagonalisable, alors on aurait $f = 2Id_{\mathbb{R}^3}$, ce qui est évidemment erroné. Donc f n'est pas diagonalisable.

2. On a $(B - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $(B-2I_3)^3 = 0$.

3. Soit $e_1 = (1, 0, 0)$ le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Posons

$$u = f - 2Id_{\mathbb{R}^3}.$$

Puisque $(f - 2Id_{\mathbb{R}^3})^3 = 0$ et $(f - 2Id_{\mathbb{R}^3})^2(e_1) \neq 0$, on a

$$u^3 = 0, \text{ et } u^2(e_1) \neq 0.$$

Alors, en utilisant l'indication donnée dans l'énoncé,

$$\mathcal{B} = \{u^2(e_1), u(e_1), e_1\}$$

est une base de $\mathbb{R}^3$, c'est à dire que

$$\mathcal{B} = \{(f - 2Id_{\mathbb{R}^3})^2(e_1), (f - 2Id_{\mathbb{R}^3})(e_1), e_1\}$$

est une base de $\mathbb{R}^3$.
D'autre part, puisque $(f - 2Id_{\mathbb{R}^3})^3 = 0$, on a

$$\begin{array}{rcl} f\left((f - 2Id_{\mathbb{R}^3})^2(e_1)\right) & = & 2(f - 2Id_{\mathbb{R}^3})^2(e_1), \\ f\left((f - 2Id_{\mathbb{R}^3})(e_1)\right) & = & (f - 2Id_{\mathbb{R}^3})^2(e_1) + 2(f - 2Id_{\mathbb{R}^3})(e_1), \\ f(e_1) & = & (f - 2Id_{\mathbb{R}^3})(e_1) + 2e_1, \end{array}$$

et donc la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 39 *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice B dans la base canonique $\mathcal{B}_0$ s'écrit :*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer le polynôme caractéristique P_f de f et déduire que f n'est pas diagonalisable.*
2. *Pour toute valeur propre λ de f de multiplicité α, montrer que*

$$N_\lambda = (Ker f - \lambda Id_{\mathbb{R}^4})^\alpha$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension α.

3. *Montrer que*

$$\mathbb{R}^4 = \sum_{\lambda \in Spect(f)} N_\lambda.$$

4. *Déduire de ce qui précède une base de $\mathbb{R}^4$ dont laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.*

Pour résoudre cette question, on pourra encore une fois utiliser le résultat suivant, qui se déduit immédiatement de l'exercice 34 : si u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que $u^2 = 0$, et x un élément de $\mathbb{R}^2$ tel que $u(x) \neq 0$, alors $(u(x), x)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Solution -

1. Le polynôme caractéristique de f est donné par

$$\begin{aligned}
P_f(x) &= \begin{vmatrix} 1-X & -2 & -1 & 1 \\ -1 & -X & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -X & 0 \\ 3 & -3 & -1 & -1-X \end{vmatrix} \\
&\overset{L_2-L_1}{=} \begin{vmatrix} 1-X & -2 & -1 & 1 \\ -2+X & 2-X & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -X & 0 \\ 3 & -3 & -1 & -1-X \end{vmatrix} \\
&= -\begin{vmatrix} -2+X & 2-X & 1 \\ 1 & -2 & -X \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix} - (X+1)\begin{vmatrix} 1-X & -2 & -1 \\ -2+X & 2-X & 1 \\ 1 & -2 & -X \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Achevons ce calcul en deux parties.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} -2+X & 2-X & 1 \\ 1 & -2 & -X \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix} &\overset{L_3+L_1}{=} \begin{vmatrix} -2+X & 2-X & 1 \\ 1 & -2 & -X \\ 1+X & -1-X & 0 \end{vmatrix} \\
&= (X+1)\begin{vmatrix} -2+X & 2-X & 1 \\ 1 & -2 & -X \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\
&\overset{C_2+C_1}{=} (X+1)\begin{vmatrix} -2+X & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -X \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (X+1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1-X & -2 & -1 \\ -2+X & 2-X & 1 \\ 1 & -2 & -X \end{vmatrix} &\overset{L_2+L_1}{=} \begin{vmatrix} 1-X & -2 & -1 \\ -1 & -X & 0 \\ 1 & -2 & -X \end{vmatrix} \\
&= -(X+2) - X(X(X-1)-2) \\
&= -X^3 + X^2 + X - 2.
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$P_f(X) = (X+1)^2(X-1)^2.$$

Déterminons le sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 1. On a

$$(x,y,z,t) \in E_1 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} -2y-z+t &=& 0 & (1) \\ -x-y+t &=& 0 & (2) \\ x-2y-z &=& 0 & (3) \\ 3x-3y-z-2t &=& 0 & (4) \end{array} \right.$$

(2) + (3) − (1) implique que

$$y = 0 \text{ et } x = z = t.$$

Ainsi E_1 est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1, 0, 1, 1)$. Comme la valeur propre 1 est de multiplicité 2, on déduit que f n'est pas diagonalisable.

2. Les matrices de $(f - Id_{\mathbb{R}^4})^2$ et $(f + Id_{\mathbb{R}^4})^2$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ sont respectivement

$$(B - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ -4 & 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad (B + I_4)^2 = \begin{pmatrix} 8 & -7 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -6 & 0 & -1 \\ 8 & -7 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$(x, y, z, t) \in \operatorname{Ker}(f - Id_{\mathbb{R}^4})^2 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y - 4t & = & 0 & (1) \\ 4x - 4t & = & 0 & (2) \\ x + 2y - t & = & 0 & (3) \\ -4x + 5y + 4t & = & 0 & (4) \end{cases}$$

Ce système équivaut à

$$y = 0 \text{ et } x = t.$$

Ainsi

$$N_1 = \operatorname{Ker}(f - Id_{\mathbb{R}^4})^2 = \{(x, 0, z, x) \in \mathbb{R}^4, x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}.$$

N_1 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2 dont une base est $\{(1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 1)\}$.
Un calcul analogue donne

$$N_{-1} = \operatorname{Ker}(f + Id_{\mathbb{R}^4})^2 = \{(24z - 7t, 20z - 8t, 13z, 13t) \in \mathbb{R}^4, z \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\}.$$

N_{-1} est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2 dont une base est $\{(24, 20, 13, 0), (-7, -8, 0, 13)\}$.

3. Un calcul direct donne

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 24 & -7 \\ 0 & 0 & 20 & -8 \\ 0 & 1 & 13 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 13 \end{vmatrix} = -208 \neq 0,$$

et donc

$$\{(1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 1), (24, 20, 13, 0), (-7, -8, 0, 13)\}$$

est une base de $\mathbb{R}^4$. Ceci montre que $\mathbb{R}^4 = N_1 \oplus N_{-1}$.

4. Notons g_1 la restriction de $(f - Id_{\mathbb{R}^4})$ à N_1 et g_{-1} la restriction de $(f + Id_{\mathbb{R}^4})$ à N_{-1}. On a $g_1 \neq 0$ et $g_1^2 = 0$. En utilisant l'indication de l'énoncé, on déduit que $\{g_1(1,0,0,1),(1,0,0,1)\}$ est une base de N_1. De la même manière, on déduit que $\{g_{-1}(-7,-8,0,13),(-7,-8,0,13)\}$ est une base de N_{-1}. Ainsi

$$\mathcal{B} = \{g_1(1,0,0,1),(1,0,0,1),g_{-1}(-7,-8,0,13),(-7,-8,0,13)\}$$

est une base de $\mathbb{R}^4$. La matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Chapitre 7

Réduction de Jordan

7.1 Rappels de cours

7.1.1 Polynôme minimal

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie n. Le théorème 14 d'Hamilton Cayley, (rappelé au Chapitre 5), affirme que f annule son polynôme caractéristique :

$$P_f(f) = 0.$$

Naturellement, ce polynôme n'est pas l'unique polynôme annulé par f. On montre qu'il en existe un (non nul) de degré minimum. Si l'on impose de surcroît que le coefficient de son terme de plus haut degré soit 1, alors il est unique. Ceci conduit à la

Définition 14 *Le polynôme minimal de f est le polynôme (non nul) $m_f(X)$ de plus bas degré tel que*

1. $m_f(f) = 0$ *;*
2. *le coefficient du terme de plus haut degré de $m_f(X)$ est* 1 *;*
3. *tout polynôme annulateur de f a un degré plus grand ou égal à celui de $m_f(X)$.*

Théorème 17 *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie.*

1. *Tout polynôme qui annule f est alors un multiple de $m_f(X)$.*
2. *Les racines de $m_f(X)$ sont celles de $P_f(X)$, avec des ordres de multiplicité inférieurs ou égaux à ceux de $P_f(X)$.*
3. *En particulier, $m_f(X)$ divise $P_f(X)$.*
4. *L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si $m_f(X)$ est scindé et n'admet que des racines simples.*

Voici un exemple : Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont le polynôme caractéristique s'écrit :

$$P_f(f) = (-1)^3(X-\pi)(X-2)^3.$$

Alors son polynôme minimal est
- **soit $m_f^1(X) = (X-\pi)(X-2)$;**
- **soit $m_f^2(X) = (X-\pi)(X-2)^2$;**
- **soit $m_f^3(X) = (X-\pi)(X-2)^3$.**

A priori, on ne peut rien dire de plus. Si l'on veut savoir "lequel des trois est le bon",
- **on calcule d'abord $m_f^1(f)$. Si $m_f^1(f) = 0$, alors c'est le polynôme minimal de f.**
- **Sinon, on calcule $m_f^2(f)$. Si $m_f^2(f) = 0$, alors c'est le polynôme minimal de f.**
- **Sinon, c'est m_f^3.**

Pour que f soit diagonalisable, le théorème 17 affirme qu'il faut et il suffit que son polynôme minimal soit $(X-\pi)(X-2)$.

7.1.2 La réduction de Jordan

Notion de *bloc de Jordan*

Soit f un endomorphisme de E sur K, et λ une valeur propre de f.

Définition 15 *On appelle* bloc de Jordan *associé à la valeur propre λ toute matrice carrée $J(\lambda)$ de la forme suivante :*
- *si $J(\lambda)$ est d'ordre 1,*

$$J(\lambda) = (\lambda);$$

- *si $J(\lambda)$ est d'ordre strictement supérieur à 1,*

$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Voici les blocs de Jordan d'ordre $1, 2, 3$:

$$(1); \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Le théorème de réduction de Jordan

Théorème 18 *Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; Soit f un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé :*

$$P_f(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)^{\alpha_1} ... (X - \lambda_p)^{\alpha_p},$$

où $\lambda_1, ..., \lambda_p$ sont les valeurs propres de f, de multiplicités respectives

$$\alpha_1, ..., \alpha_p,$$

avec

$$\alpha_1 + ... + \alpha_p = n;$$

soit

$$m_f(X) = (X - \lambda_1)^{\beta_1} ... (X - \lambda_p)^{\beta_p}$$

le polynôme minimal de f ;

soit γ_i la dimension de l'espace propre E_i associé à la valeur propre $\lambda_i, 1 \leq i \leq p$.

1. *Alors il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f s'écrit :*

$$\begin{pmatrix} \tilde{J}(\lambda_1) & & & \\ & \tilde{J}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{J}(\lambda_p) \end{pmatrix}$$

où chaque terme $\tilde{J}(\lambda_i)$ est une matrice carrée d'ordre α_i, de la forme :

$$\tilde{J}_{\lambda_i} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_i) & & & \\ & J_2(\lambda_i) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\gamma_i}(\lambda_i) \end{pmatrix}$$

où chaque terme $J_k(\lambda_i)$ est un bloc de Jordan.

2. *De plus, pour i fixé, l'ordre du plus grand bloc $J_k(\lambda_i)$ est toujours β_i.*
3. *Enfin, cette reduction de f est unique, à l'ordre des facteurs près.*

En "jonglant" avec les théorèmes 17, 18, et avec un peu d'astuce, on peut parfois réduire une matrice très rapidement. Voici un exemple : soit M une matrice carrée d'ordre 4. On suppose que son polynôme minimal s'écrive

$$m_M(X) = (X - e)(X - 2)^2.$$

Déterminons sa réduite de Jordan. En appliquant le théorème 17, on voit que M admet les deux valeurs propres 2 et e. De plus, M n'est pas

diagonalisable puisque son polynôme minimal admet une racine double. Donc la matrice

$$J = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

est une[1] **matrice réduite de Jordan de M, ce qui revient à dire qu'il existe une matrice inversible P telle que $J = P^{-1}MP$.**

1. Nous préférons dire "une" matrice réduite de Jordan que "la" matrice réduite de Jordan, puisqu'on peut toujours modifier l'ordre des blocs de Jordan.

7.2 Exercices

Exercice 40 *Calculer le polynôme minimal des endomorphismes suivants :*

1. $$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
   dont la matrice dans la base canonique est
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. $$u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
   dont la matrice dans la base canonique est
   $$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. $$v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
   dont la matrice dans la base canonique est
   $$\begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. $$w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
   dont la matrice dans la base canonique est
   $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solution - Dans cet exercice, nous utiliserons systématiquement la Définition 14 et le Théorème 17.

1. Le polynôme caractéristique de f s'écrit

$$\begin{aligned} P_f(X) &= \det(f - XI_{\mathbb{R}^2}) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 \\ -2 & 2-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)(2-X) + 2 = X^2 - 3X + 4. \end{aligned}$$

Le polynôme minimal m_f de f est un polynôme unitaire de $\mathbb{R}[X]$ qui annule f et divise P_f. Or, le discriminant de P_f est

$$\Delta = 9 - 16 < 0,$$

et donc P_f est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. Par suite,

$$m_f(X) = P_f(X) = X^2 - 3X + 4.$$

2. Le polynôme caractéristique de u s'écrit

$$\begin{array}{rcl} P_u(X) & = & \det(u - XI_{\mathbb{R}^3}) = \begin{vmatrix} 1-X & 3 & 3 \\ 0 & 4-X & 0 \\ 1 & -1 & 3-X \end{vmatrix} \\ & = & (4-X)\begin{vmatrix} 1-X & 3 \\ 1 & 3-X \end{vmatrix} \\ & = & (4-X)\left((1-X)(3-X)-3\right) = -X(X-4)^2. \end{array}$$

Le polynôme minimal m_u de u est un polynôme unitaire de $\mathbb{R}[X]$ qui a les mêmes racines que P_u. Ainsi, m_u est égal à $X(X-4)$ ou à $X(X-4)^2$. Le degré du polynôme $X(X-4)$ est évidemment strictement inférieur à celui du polynôme $X(X-4)^2$.
Calculons $u \circ (u - 4I_{\mathbb{R}^4})$. La matrice de cet endomorphisme dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc le polynôme $X(X-4)$ annule u. Naturellement, le polynôme $X(X-4)^2$ annule également u. Comme le polynôme minimal de u a un degré minimum parmi ceux qui annulent u, on déduit que

$$m_u(X) = X(X-4).$$

3. Le polynôme caractéristique de v s'écrit

$$\begin{array}{rcl} P_v(X) & = & \det(v - XI_{\mathbb{R}^3}) = \begin{vmatrix} -1-X & 5 & -3 \\ 0 & 4-X & 0 \\ -1 & 1 & -3-X \end{vmatrix} \\ & = & (4-X)\begin{vmatrix} -1-X & -3 \\ -1 & -3-X \end{vmatrix} \\ & = & (4-X)\left((1+X)(3+X)-3\right) = -X(X-4)(X+4). \end{array}$$

Le polynôme minimal m_v de v est un polynôme unitaire de $\mathbb{R}[X]$ qui a les mêmes racines que P_v. Ainsi,

$$m_v(X) = -P_v(X) = X(X-4)(X+4).$$

4. Le polynôme caractéristique de w s'écrit

$$\begin{aligned} P_w(X) &= \det(w - XI_{\mathbb{R}^3}) = \begin{vmatrix} 1-X & -1 & -1 \\ 0 & 2-X & 0 \\ 1 & 1 & 3-X \end{vmatrix} \\ &= (2-X)\begin{vmatrix} 1-X & -1 \\ 1 & 3-X \end{vmatrix} \\ &= (2-X)\left((1-X)(3-X)+1\right) = -(X-2)^3. \end{aligned}$$

Le polynôme minimal m_w de w est un polynôme unitaire de $\mathbb{R}[X]$ qui a les mêmes racines que P_w. Ainsi, m_v est
- soit égal à $(X-2)$,
- soit à $(X-2)^2$,
- soit à $(X-2)^3$.

Le polynôme m_w ne peut pas être égal à $X-2$ car sinon on aurait

$$w - 2I_{\mathbb{R}^3} = 0,$$

et donc on aurait

$$w = 2I_{\mathbb{R}^3},$$

ce qui n'est pas le cas, (puisque la matrice de w dans la base canonique n'est pas égale à deux fois l'identité).
Calculons maintenant $(w - 2I_{\mathbb{R}^3})^2$. La matrice de $(w - 2I_{\mathbb{R}^3})^2$ dans la base canonique s'écrit

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc le polynôme $(X-2)^2$ annule w, et naturellement le polynôme $(X-2)^3$ également. Comme le polynôme minimal de w a un degré minimum parmi ceux qui annulent w, le polynôme minimal de w est

$$m_w(X) = (X-2)^2.$$

Exercice 41 *Soient* $P(X) = X^4 + 6X^3 + 13X^2 + 12X + 4$ *et*

$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4,$$

l'endomorphisme défini par

$$f(e_1) = e_2, \quad f(e_2) = e_3, \quad f(e_3) = e_4 \quad \textit{et} \quad f(e_4) = -(4e_1 + 12e_2 + 13e_3 + 6e_4),$$

où (e_1, e_2, e_3, e_4) *est la base canonique de* $\mathbb{R}^4$.

1. *Vérifier que $P(f) = 0$.*
2. *Montrer que si un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à 3 annule f, (c'est-à-dire $Q(f) = 0$), alors $Q = 0$.*
3. *Calculer le polynôme minimal de f.*
4. *Vérifier que -1 est une racine double de P. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?*

Solution -

1. Pour vérifier que $P(f) = 0$, nous allons vérifier que $P(f)(e_i) = 0$ pour $i = 1, \ldots, 4$.
   On a
$$\begin{cases} f(e_1) & = e_2, \\ f^2(e_1) & = f(f(e_1)) = f(e_2) = e_3, \\ f^3(e_1) & = f(f^2(e_1)) = f(e_3) = e_4, \\ f^4(e_1) & = f(f^3(e_1)) = f(e_4) = -(4e_1 + 12e_2 + 13e_3 + 6e_4). \end{cases} \tag{7.1}$$
   De ces relations, on déduit
$$\begin{aligned} P(f)(e_1) &= f^4(e_1) + 6f^3(e_1) + 13f^2(e_1) + 12f(e_1) + 4e_1 \\ &= -(4e_1 + 12e_2 + 13e_3 + 6e_4) + 6e_4 + 13e_3 + 12e_2 + 4e_1 = 0. \end{aligned}$$
   Pour $i = 2, 3, 4$, on a
$$e_i = f^{i-1}(e_1),$$
   et donc, puisque
$$f^{i-1} \circ P(f) = P(f) \circ f^{i-1},$$
   il vient
$$P(f)(e_i) = P(f)(f^{i-1}(e_1)) = f^{i-1}(P(f)(e_1)) = 0.$$
   On conclut alors que
$$P(f) = 0.$$
2. Soit
$$Q(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$$
   un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à 3 tel que $Q(f) = 0$.
   Il vient
$$\begin{aligned} 0 &= Q(f)(e_1) = af^3(e_1) + bf^2(e_1) + cf(e_1) + de_1 \\ &\overset{7.1}{=} ae_4 + be_3 + ce_2 + de_1, \end{aligned}$$

soit
$$ae_4 + be_3 + ce_2 + de_1 = 0.$$
Puisque (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de $\mathbb{R}^4$, on déduit que
$$a = b = c = d = 0,$$
et donc $Q = 0$, ce qui est le relation souhaitée.

3. Par définition, le polynôme minimal m_f annule f, et le théorème 17 affirme que tout polynôme qui annule f est un multiple de m_f.
   - Dans un premier temps, on déduit donc de la première question que P est un multiple du polynôme minimal m_f de f. Par conséquent, le degré de m_f est inférieur ou égal à 4.
   - D'un autre côté, comme m_f n'est pas nul, la deuxième question implique que m_f est un polynôme de degré exactement égal à 4.
   - Enfin, par définition, le coefficient du terme du plus haut degré de m_f est égal à 1.

   En définitive,
   $$m_f = P.$$
4. En effectuant la division euclidienne de P par $(X+1)^2$, on trouve :
   $$P(x) = (X+1)^2(X^2 + 4X + 4).$$
   Par conséquent, -1 est racine double de P. Comme P est le polynôme minimal de f, f n'est pas diagonalisable, d'après le Théorème 17.

Exercice 42 *On considère l'endomorphisme*
$$f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$$
dont la matrice dans la base canonique est
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.*
2. *Montrer que f est diagonalisable et calculer son polynôme minimal.*
3. *En déduire que f est inversible et calculer son inverse.*

Solution -

1. Le polynôme caractéristique de f s'écrit

$$\begin{aligned}
P_f(X) &= \det(f - XI_{\mathbb{R}^4}) = \begin{vmatrix} 1-X & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -X & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -X & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -1-X \end{vmatrix} \\
&\overset{\substack{L_3-L_2 \\ L_4-2L_2}}{=} \begin{vmatrix} 1-X & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -X & 1 & -1 \\ 0 & X+1 & -(X+1) & 0 \\ 0 & 2X-1 & -1 & 1-X \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Simplifions :

$$\begin{aligned}
P_f(X) &= (X+1)\begin{vmatrix} 1-X & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -X & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2X-1 & -1 & 1-X \end{vmatrix} \\
&\overset{\substack{L_2-L_1 \\ L_3+L_1 \\ L_4+L_1}}{=} (X+1)\begin{vmatrix} 1-X & -1 & 1 & 0 \\ X & 1-X & 0 & -1 \\ 1-X & 0 & 0 & 0 \\ 1-X & 2(X-1) & 0 & 1-X \end{vmatrix} \\
&= (X+1)(1-X)(1-X)\begin{vmatrix} 1-X & -1 & 1 & 0 \\ X & 1-X & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (X+1)(X-1)^2\begin{vmatrix} X & 1-X & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (X+1)(X-1)^2(-1)\begin{vmatrix} 1-X & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (X+1)^2(X-1)^2.
\end{aligned}$$

Les valeurs propres de f sont 1 et -1, toutes deux de multiplicité 2. Déterminons maintenant les sous-espaces propres $E_1 = \text{Ker } (f - I_{\mathbb{R}^4})$ et $E_{-1} = \text{Ker } (f + I_{\mathbb{R}^4})$.
On a

$$(x,y,z,t) \in E_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} -y+z & = & 0, \\ x-y+z-t & = & 0, \\ x+y-z-t & = & 0, \\ 2x-y+z-2t & = & 0. \end{cases}$$

En "injectant" la première égalité dans les autres équations, on obtient que le système est équivalent à $x = t$ et $y = z$. Donc,

$$E_1 = \{(x, y, y, x) \in \mathbb{R}^4, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

La dimension du sous-espace vectoriel E_1 est évidemment 2, (c'est un plan vectoriel). D'un autre côté,

$$(x, y, z, t) \in E_{-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} 2x-y+z & = & 0, \\ x+y+z-t & = & 0, \\ x+y+z-t & = & 0, \\ 2x-y+z & = & 0. \end{cases}$$

Ce système est équivalent à

$$\begin{cases} y+z & = & t-x, \\ -y+z & = & 2x. \end{cases}$$

Ainsi,

$$E_{-1} = \{(x, \frac{1}{2}(t-3x), \frac{1}{2}(t+x), t) \in \mathbb{R}^4, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}.$$

La dimension du sous-espace vectoriel E_{-1} est évidemment 2, (c'est un plan vectoriel).

2. Le polynôme caractéristique de f est scindé sur $\mathbb{R}$ et la dimension des sous-espaces propres est égale à la multiplicité des valeurs propres correspondantes. Donc f est diagonalisable.

   Appliquons le Théorème 17 : le polynôme minimal m_f de f divise P_f, et ses racines sont celles de P_f. De plus, puisque f est diagonalisable, m_f n'admet que des racines simples. Donc

$$m_f(X) = (X+1)(X-1) = X^2 - 1.$$

3. Par définition, le polynôme minimal d'un endomorphisme annule cet endomorphisme. On a donc $m_f(f) = 0$, c'est-à-dire :
$$f^2 - I_{\mathbb{R}^4} = 0.$$
De cette relation, on déduit que f est inversible et que
$$f^{-1} = f.$$

Exercice 43 *Calculer le polynôme minimal et la réduite de Jordan de l'endomorphisme*
$$u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,$$
dont la matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solution -
Le polynôme caractéristique de u s'écrit

$$\begin{aligned} P_u(X) &= \det(u - XI_{\mathbb{R}^3}) = \begin{vmatrix} 3-X & -1 & 3 \\ 2 & -X & 2 \\ 1 & -1 & 1-X \end{vmatrix} \\ &\overset{L_2-2L_3}{=} \begin{vmatrix} 3-X & -1 & 3 \\ 0 & 2-X & 2X \\ 1 & -1 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= (3-X)\left((2-X)(1-X)+2X\right) + \left(-2X - 3(2-X)\right) = -X(X-2)^2. \end{aligned}$$

D'après le Théorème 17, le polynôme caractéristique de u est un multiple du polynôme m_u. De plus, ce dernier a les mêmes racines que celles de P_u. Par conséquent, m_u est l'un des deux polynômes suivants :
- $X(X-2)$
- ou $X(X-2)^2$.

Calculons l'endomorphisme $u \circ (u - 2I_{\mathbb{R}^3})$. La matrice de cet endomorphisme dans la base canonique est la matrice
$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, le polynôme $X(X-2)$ n'annule pas l'endomorphisme u. Donc il ne peut pas être le polynôme minimal de u. Par suite, on a nécessairement

$$m_u(X) = X(X-2)^2.$$

Comme le polynôme minimal de u admet une racine double, le Théorème 17 implique que u n'est pas diagonalisable. Appliquons alors le Théorème 18 de Jordan, (et en particulier le point 2 de ce théorème) : il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 44 *Calculer le polynôme minimal et la réduite de Jordan des matrices suivantes :*

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

2. $B = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 9 \\ 4 & -5 & 5 \\ -4 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$

Solution -

1. Le polynôme caractéristique de A s'écrit

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \det(A - XI_3) = \begin{vmatrix} 2-X & -1 & 1 \\ 1 & -X & 1 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)\begin{vmatrix} 2-X & -1 \\ 1 & -X \end{vmatrix} = -(X-1)^3. \end{aligned}$$

Comme le polynôme caractéristique P_A de A est un multiple du polynôme minimal m_A et comme ce dernier a les mêmes racines que P_A, on déduit que m_A est l'un des trois polynômes suivants :
- $(X-1)$,
- $(X-1)^2$,
- ou $(X-1)^3$.

Le polynôme minimal m_A ne peut pas être égal à $X-1$. En effet, puisque $m_A(A) = 0$, on aurait dans ce cas

$$A = I,$$

ce qui n'est pas visiblement le cas. Calculons maintenant $(A - I_3)^2$. On a

$$(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $(X - 1)^2$ annule A et donc nécessairement

$$m_A(X) = (X - 1)^2.$$

On déduit du Théorème 18 de Jordan (et en particulier le point 2 de ce théorème) que A est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effet, l'ordre du plus grand bloc de Jordan associé à la valeur propre 1 est égal à la mulitiplicité de la racine 1 de m_A, c'est-à-dire 2.

2. Le polynôme caractéristique de B s'écrit

$$\begin{aligned}
P_B(X) &= \det(B - XI_3) = \begin{vmatrix} 6-X & -7 & 9 \\ 4 & -5-X & 5 \\ -4 & 3 & -7-X \end{vmatrix} \\
&\overset{L_3+L_2}{=} \begin{vmatrix} 6-X & -7 & 9 \\ 4 & -5-X & 5 \\ 0 & -2-X & -2-X \end{vmatrix} \\
&= -(X+2) \begin{vmatrix} 6-X & -7 & 9 \\ 4 & -5-X & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&\overset{C_2-C_3}{=} -(X+2) \begin{vmatrix} 6-X & -16 & 9 \\ 4 & -10-X & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(X+2) \begin{vmatrix} 6-X & -16 \\ 4 & -10-X \end{vmatrix} \\
&= -(X+2)^3.
\end{aligned}$$

Comme le polynôme caractéristique de B est un multiple du polynôme minimal m_B et comme ce dernier à les mêmes racines que P_B, on déduit que m_B est égal à l'un des polynômes suivants :

- $(X + 2)$,
- $(X + 2)^2$,
- ou $(X + 2)^3$.

Le polynôme minimal m_B ne peut pas être égal à $X+2$. En effet, puisque $m_B(B)=0$, on aurait dans ce cas

$$B = -2I_3,$$

ce qui n'est pas visiblement le cas. Calculons maintenant $(B+2I_3)^2$. On a

$$(B+2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 8 & -7 & 9 \\ 4 & -3 & 5 \\ -4 & 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -7 & 9 \\ 4 & -3 & 5 \\ -4 & 3 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -8 & -8 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $(X+2)^2$ n'annule pas B. Donc nécessairement

$$m_B(X) = (X+2)^3.$$

Le théorème 18 de Jordan implique que B est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

puisque l'ordre du plus grand bloc de Jordan associé à la valeur propre -2 est égal à la multiplicité de la racine -2 de m_B, c'est-à-dire 3.

Exercice 45 *Calculer le polynôme minimal et la réduite de Jordan de la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Solution - Le polynôme caractéristique de A s'écrit

$$P_A(X) = \det(A - XI_4) = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1-X & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -X & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2-X \end{vmatrix}.$$

Donc

$$P_A(X) = (X-1)^2 \begin{vmatrix} -X & 1 \\ -1 & -2-X \end{vmatrix} = (X-1)^2(X+1)^2.$$

Comme le polynôme caractéristique de A est un multiple du polynôme minimal m_A et comme ce dernier à les mêmes racines que P_A, on déduit que m_A est l'un des polynômes suivants :

- $(X-1)(X+1)$,
- $(X-1)^2(X+1)$,
- $(X-1)(X+1)^2$
- $(X-1)^2(X+1)^2$.

On a

$$\begin{aligned}
(A-I_4)(A+I_4) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A-I_4)^2(A+I_4) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A-I_4)(A+I_4)^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}^2 \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 12 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On déduit de ce calcul qu'aucun des polynômes

$$(X-1)(X+1), (X-1)^2(X+1), (X-1)(X+1)^2,$$

n'annule A. Donc nécessairement

$$m_A(X) = (X-1)^2(X+1)^2.$$

Par suite, d'après le théorème 18 de Jordan, A est semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$