Cours Maîtrise MASI
Théorie de la mesure

Mohamed Boucetta

Table des matières

Chapitre 1

Mesure de Lebesgue sur la droite réelle

1.1 Mesure extérieure de Lebesgue dans $\mathbb{R}$

Il est naturel de "mesurer" un intervalle de $\mathbb{R}$ par sa longueur, finie ou infinie selon que l'intervalle est borné ou non. A partir de là, il est aussi naturel de définir la "mesure" d'une réunion finie, ou infinie dénombrable, d'intervalles deux à deux disjoints comme la somme des longueurs de ces intervalles.

D'un autre côté, il est moins évident de concevoir une extension naturelle de cette notion élémentaire de longueur d'un intervalle qui permettrait de "mesurer" une partie quelconque de $\mathbb{R}$. C'est pourtant ce que nous allons tenter de faire, dans un premier temps, par le procédé suivant qui parait raisonnable mais dont nous verrons qu'il échouera en partie.

Nous désignerons par $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des intervalles ouverts bornés de $\mathbb{R}$, donc de type $I =]a, b[$ où $a \leq b$, de sorte que $\emptyset \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}}$. On définit l'application longueur $\lambda : \mathcal{I}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ par $\lambda(]a, b[) = b - a$ si bien que $\lambda(\emptyset) = 0$.

Comme $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}]-k, k[$, il est clair que toute partie de $\mathbb{R}$ peut être recouverte par une suite d'éléments de $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}$, ce qui donne un sens à la définition suivante.

Définition 1 *On appelle mesure extérieure de Lebesgue dans $\mathbb{R}$ l'application $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ définie pour tout $A \subset \mathbb{R}$ par :*

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n);\ (I_n)_{n\geq 1} \text{ suite de } \mathcal{I}_{\mathbb{R}}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\}.$$

L'élément $\lambda^*(A)$ de $\overline{\mathbb{R}}_+$ ainsi défini est la mesure extérieure de Lebesgue de l'ensemble A.

Une première propriété de la mesure extérieure est sa monotonie vis à vis de l'inclusion des ensembles.

Proposition 1 $A \subset B \subset \mathbb{R} \Rightarrow \lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$.

Preuve : C'est une conséquence immédiate de la définition.□

Définition 2 *Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite Lebesgue-négligeable (ou λ-négligeable, ou simplement négligeable) si $\lambda^*(A) = 0$.*

On note $\mathcal{N}_\lambda$ l'ensemble des parties négligeables de $\mathbb{R}$.

Remarques. 1) $\emptyset \in \mathcal{N}_\lambda$.

2) On a la caractérisation suivante des éléments de $\mathcal{N}_\lambda$:

$$A \text{ négligeable} \Leftrightarrow \left(\forall \epsilon, \exists (I_n)_{n\geq 1} \text{ suite de } \mathcal{I}_{\mathbb{R}}, A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) \leq \epsilon \right).$$

□

Un ensemble négligeable est donc, en un certain sens, une petite partie de $\mathbb{R}$. Mais, d'un autre point de vue, on peut en dire autant d'une partie dénombrable de $\mathbb{R}$. Le résultat suivant indique un lien entre ces deux notions d'ensembles "petits" dont nous verrons qu'elles ne sont pas équivalentes.

Théorème 1 (Borel)- *Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors :*

$$A \textit{ dénombrable} \Rightarrow A \textit{ négligeable.}$$

Preuve : Comme A est supposé dénombrable, il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de $\mathbb{R}$ telle que $A = \{x_n; n \in \mathbb{N}^*\}$.

Si $\epsilon > 0$ est fixé, on lui associe la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}$ définie par

$$I_n = \left] x_n - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}, x_n + \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \right[, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Les relations $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon$ montre que $\lambda^*(A) \leq \epsilon$; et ceci pour tout $\epsilon > 0$, ce qui prouve que $\lambda^*(A) = 0$.□

Remarques. 1) En particulier $\{x\}$ est négligeable pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $\mathbb{Q}$ est négligeable.

2) La réciproque du Théorème 1.1 est fausse, car par exemple, l'ensemble de Cantor $\mathcal{K}$ est négligeable alors qu'il n'est pas dénombrable. En effet, si l'on se reporte à la construction de $\mathcal{K}$, on voit que, pour chaque $n \geq 0$, $\mathcal{K}$ est contenu dans K_n et par conséquent dans la réunion de la suite d'intervalles $(J_m)_{m\geq 1}$ dont les 2^n premiers termes sont les intervalles compacts constituant K_n tandis que tous les autres sont vides. mais on trouve facilement que la somme des longueurs des ces intervalles est $(2/3)^n$ et peut donc être rendue aussi petite que l'on veut.□

Le lemme suivant va permettre de prouver que la fonction "mesure extérieure" λ^* prolonge la fonction "longueur" λ.

Lemme 1 *Soit* $[a,b] \subset \bigcup_{n=1}^{p} I_n$ *où* $I_n \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}}$ *pour* $n = 1, 2, \ldots, p$. *Alors :*

$$b - a < \sum_{n=1}^{p} \lambda(I_n).$$

Preuve : Posons $I_n =]a_n, b_n[$. Alors il existe $n_1 \in \{1, 2, \ldots, p\}$ tel que $a \in I_{n_1}$ et, si $b_{n_1} \leq b$, il existe $n_2 \in \{1, 2, \ldots, p\}$ tel que $b_{n_1} \in I_{n_2}$. On continue de même si $b_{n_2} \leq b$, etc. Mais les I_{n_k} ainsi obtenus sont tous distincts et pris parmi les I_n qui sont en nombre fini et dont l'un au moins contient b. On finira donc par obtenir un I_{n_q}, avec $1 \leq q \leq p$, tel que $b < b_{n_q}$. Des inégalités $a_{n_1} < a < b_{n_1}$, $a_{n_{k+1}} < b_{n_k} < b_{n_{k+1}}$, pour $k = 1, 2, \ldots, q-1$, et $a_{n_q} < b < b_{n_q}$, on déduit :

$$\begin{aligned} b - a < b_{n_q} - a_{n_1} &= b_{n_1} - a_{n_1} + \sum_{k=1}^{q-1} (b_{n_{k+1}} - b_{n_k}) \leq b_{n_1} - a_{n_1} + \sum_{k=1}^{q-1} (b_{n_{k+1}} - a_{n_{k+1}}) \\ &= \sum_{k=1}^{q} (b_{n_k} - a_{n_k}) \leq \sum_{n=1}^{p} \lambda(I_n). \end{aligned}$$

□

Théorème 2 *Pour tout* $I \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}}$: $\lambda^*(I) = \lambda(I)$.

Preuve : a) $\lambda^*(I) \leq \lambda(I)$. En effet, il suffit d'écrire $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ où $I_1 = I$ et $I_n = \emptyset$ pour $n \geq 2$, et il vient $\lambda^*(I) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) = \lambda(I)$.

b) $\lambda(I) \leq \lambda^*(I)$. Distinguons deux cas.

1^{er} cas : $I = \emptyset$. Alors $\lambda(I) = 0 = \lambda^*(I)$.

2^{e} cas : $I =]a, b[$, $a < b$. A un $\epsilon \in \left]0, \frac{b-a}{2}\right[$ associons l'intervalle compact $I_\epsilon = [a + \epsilon, b - \epsilon] \subset I$. Si $(I_n)_{n \geq 1}$ est une suite de $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}$ qui recouvre I, elle recouvre aussi I_ϵ et le théorème de Borel-Lebesgue permet d'affirmer l'existence d'un entier $p \geq 1$ tel que $I_\epsilon \subset \bigcup_{n=1}^{p} I_n$. Il en résulte alors du Lemme 1.1 que

$$b - a - 2\epsilon < \sum_{n=1}^{p} \lambda(I_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n),$$

et ceci pour tout $\epsilon \in]0, \frac{b-a}{2}[$, ce qui impose $b - a \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n)$. Cette inégalité étant vérifiée par toute suite $(I_n)_{n \geq 1}$ de $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}$ qui recouvre I, on obtient finalement $b - a \leq \lambda^*(I)$, c'est à dire $\lambda(I) \leq \lambda^*(I)$.□

La non-dénombrabilité de $\mathbb{R}$, dont une démonstration figure au chapitre 0, se déduit facilement de ce qui précède.

Corollaire 1 (Cantor)- *Aucun intervalle non vide de* $\mathbb{R}$ *n'est dénombrable. En particulier,* $\mathbb{R}$ *n'est pas dénombrable.*

Corollaire 2 *Quels que soient les réels* $a \leq b$ *:*

$$\lambda^*([a,b]) = \lambda^*(]a,b]) = \lambda^*([a,b[) = b-a.$$

Preuve : De la Proposition 1.1 et du Théorème 1.2, on déduit, pour tout $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned} b-a &= \lambda(]a,b[) = \lambda^*(]a,b[) \leq \lambda^*([a,b]) \leq \lambda^*(]a-\epsilon, b+\epsilon[) \\ &= \lambda(]a-\epsilon, b+\epsilon[) = b-a+2\epsilon, \end{aligned}$$

d'où il résulte $\lambda^*([a,b]) = b-a$. Les autres égalités s'obtiennent alors facilement en utilisant les inclusions $]a,b[\subset [a,b[\subset [a,b]$ et la monotonie de λ^*. On procède de même pour $]a,b]$.□

Corollaire 3 *Pour tout intervalle non borné* I *:* $\lambda^*(I) = +\infty$*. En particulier,* $\lambda^*(\mathbb{R}) = +\infty$.

Corollaire 4 *Tout ensemble négligeable est d'intérieur vide. En particulier, un ouvert négligeable est nécessairement vide.*

Nous verrons plus loin que la réciproque de ce corollaire est fausse.

Corollaire 5 *(*$A \subset \mathbb{R}$ *et* A *est borné)* $\Rightarrow \lambda^*(A) < +\infty$*. En particulier on a* $\lambda^*(K) < +\infty$ *pour tout compact* $K \subset \mathbb{R}$.

On traduit la propriété suivante en disant que la mesure extérieure λ^* est sous-σ-additive.

Théorème 3 $\left(A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \mathbb{R}\right) \Rightarrow \lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n).$

Preuve : Rappelons que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)$ a toujours un sens (cf. chapitre 0). Si $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n) = +\infty$, l'inégalité est évidente. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n) < +\infty$, alors $\lambda^*(A_n) < +\infty$ pour tout $n \geq 1$ et, $\epsilon > 0$ étant fixé, il existe une suite $(I_{n,k})_{k \geq 1}$ de $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}$ telle que :

$$A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n,k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(I_{n,k}) < \lambda^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Finalement, on obtient un recouvrement $A \subset \bigcup_{n,k=1}^{\infty} I_{n,k}$, tandis que l'ensemble $\{I_{n,k}; (n,k) \in \mathbb{N}^{*2}\}$ est dénombrable et peut donc être numéroté en une suite de $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}$ qui recouvre A. Il en résulte les relations

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{n,k=1}^{\infty} \lambda(I_{n,k}) < \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n) + \epsilon,$$

et ceci pour tout $\epsilon > 0$, ce qui établit l'inégalité annoncée.□

L'énoncé suivant exprime que λ^* est sous-additive.

Corollaire 6 *Quels que soient $A, B \subset \mathbb{R}$: $\lambda^*(A \cup B) \leq \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$.*

Corollaire 7 *L'ensemble $\mathcal{N}_\lambda$ des parties négligeables est stable par réunions dénombrables.*

Remarque. De l'un quelconque des deux corollaires ci-dessus on peut déduire que la réciproque du Corollaire 1.4 est fausse. Un contre-exemple fait l'objet de l'exercice suivant. □

Exercice. Montrer que $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ est d'intérieur vide mais n'est pas négligeable.□

1.2 Tribu $\mathcal{B}_\lambda$ des ensembles Lebesgue-mesurables

La sous-σ-additivité et la sous-additivité sont des propriétés précieuses de λ^*, mais elles ne suffisent pas à faire de cette fonction un moyen satisfaisant de "mesurer" toutes les parties de $\mathbb{R}$ d'une manière cohérente. Au moins est-on en droit d'exiger que λ^* soit additive tout comme la longueur des intervalles, c'est à dire que l'inégalité du Corollaire 1.6 soit une égalité dès que B et C sont disjoints, mais il est malheureusement impossible d'établir cette propriété. Cependant, nous allons voir que la restriction de λ^* à un ensemble convenable de parties de $\mathbb{R}$ - et dont montrerons par la suite qu'il inclut largement $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}$- jouit de propriétés remarquables.

Définition 3 *Une partie $B \subset \mathbb{R}$ est dite Lebesgue-mesurable (ou mesurable) si :*

$$\forall A \subset \mathbb{R},\ \lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(A \setminus B).$$

On désigne par $\mathcal{B}_\lambda$ l'ensemble des parties Lebesgue-mesurables.

Les parties mesurables sont donc celles qui réalisent un "bon" partage de chaque partie de $\mathbb{R}$.

Exemples. 1) $\mathbb{R} \subset \mathcal{B}_\lambda$. En effet, tout $A \subset \mathbb{R}$ vérifie :

$$\lambda^*(A \cap \mathbb{R}) + \lambda^*(A \setminus \mathbb{R}) = \lambda^*(A) + \lambda^*(\emptyset) = \lambda^*(A).$$

2) $\mathcal{N}_\lambda \subset \mathcal{B}_\lambda$; en particulier $\emptyset \in \mathcal{B}_\lambda$. Car quels que soient $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathcal{N}_\lambda$, nous avons

$$\lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(A \setminus B) \leq \lambda^*(B) + \lambda^*(A) = \lambda^*(A)$$

et puisque, on a par sous-additivité

$$\lambda^*(A \cap B) + \lambda^*(A \setminus B) \geq \lambda^*(A)$$

on a l'égalité souhaitée.□

Nous allons maintenant établir que l'ensemble $\mathcal{B}_\lambda$ possède d'intéressantes propriétés de stabilité vis-à-vis de certaines opérations ensemblistes.

Proposition 2 *Quels que soient $B, C \in \mathcal{B}_\lambda$, on $B \setminus C \in \mathcal{B}_\lambda$. En particulier, $\mathcal{B}_\lambda$ est stable par passage au complémentaire, i.e., $B \in \mathcal{B}_\lambda \Rightarrow \mathbb{R} \setminus B \in \mathcal{B}_\lambda$.*

Preuve :

La propriété résulte de la succession d'égalité suivantes où A est une partie quelconque de $\mathbb{R}$, où E^c désigne, de façon générale, le complémentaire de E dans $\mathbb{R}$, et où les égalité (α) et (γ) exploitent que $C \in \mathcal{B}_\lambda$, tandis que l'égalité (β) utilise que $B \in \mathcal{B}_\lambda$:

$$\begin{aligned}
\lambda^*(A \cap (B \setminus C)) + \lambda^*(A \setminus (B \setminus C)) &= \lambda^*(A \cap B \cap C^c) + \lambda^*(A \cap (C \cup B^c)) \\
&\overset{(\alpha)}{=} \lambda^*(A \cap B \cap C^c) + \lambda^*(A \cap (C \cup B^c) \cap C) \\
&+ \lambda^*(A \cap (C \cup B^c) \cap C^c) \\
&= \lambda^*(A \cap C)) + \lambda^*(A \cap B \cap C^c) + \lambda^*(A \cap B^c \cap C^c) \\
&\overset{(\beta)}{=} \lambda^*(A \cap C) + \lambda^*(A \cap C^c) \overset{(\gamma)}{=} \lambda^*(A).
\end{aligned}$$

□

Corollaire 8 *Quels que soient $B, C \in \mathcal{B}_\lambda$, on a à la fois $B \cap C \in \mathcal{B}_\lambda$ et $B \cup C \in \mathcal{B}_\lambda$.*

Preuve : La première conclusion résulte de l'écriture $B \cap C = B \setminus (B \setminus C)$ et de la Proposition 2.1 ; la seconde se déduit de la première et de la Proposition 2.1, en utilisant l'égalité $B \cup C = (B^c \cap C^c)^c$.□

Les stabilités énoncées au Corollaire 2.1 s'étendent immédiatement au cas d'un ensemble fini de parties mesurables. Nous allons voir qu'elles restent valables pour une suite quelconque de telles parties. La démonstration s'appuie sur le résultat auxiliaire suivant.

Lemme 2 *Pour tout $A \subset \mathbb{R}$, et quels que soient les $B_n \in \mathcal{B}_\lambda$, $n = 1, \ldots, p$, mutuellement disjoints, on a :*

$$\lambda^*(A \cap \bigcup_{n=1}^{p} B_n) = \sum_{n=1}^{p} \lambda^*(A \cap B_n).$$

Preuve : On procède par récurrence. La propriété vaut pour $p = 1$. Supposons-la vraie pour le rang $p-1$. En utilisant que $B_p \in \mathcal{B}_\lambda$, il vient :

$$\lambda^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{p} B_n\right) = \lambda^*\left((A \cap \bigcup_{n=1}^{p} B_n) \cap B_p\right) + \lambda^*\left((A \cap \bigcup_{n=1}^{p} B_n) \setminus B_p\right)$$

$$= \lambda^*(A \cap B_p) + \lambda^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{p-1} B_n\right) = \lambda^*(A \cap B_p) + \sum_{n=1}^{p-1} \lambda^*(A \cap B_n) = \sum_{n=1}^{p} \lambda^*(A \cap B_n),$$

ce qui établit la propriété au rang p.□

Théorème 4 *Toute suite $(B_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{B}_\lambda$ est telle que $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}_\lambda$.*

Preuve : 1) Cas particulier. $(B_n)_{n\geq 1}$ est une suite disjointe, c'est à dire que les B_n sont mutuellement disjoints. Alors, si $A \subset \mathbb{R}$, on peut écrire pour tout entier $p \geq 1$:

$$\begin{aligned} \lambda^*(A) &\overset{(\alpha)}{=} \lambda^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{p} B_n\right) + \lambda^*\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{p} B_n\right) \overset{(\beta)}{\geq} \lambda^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{p} B_n\right) + \lambda^*\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \\ &\overset{(\gamma)}{=} \sum_{n=1}^{p} \lambda^*(A \cap B_n) + \lambda^*\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right), \end{aligned}$$

où l'on utilise successivement en (α) le Corollaire 2.1, en (β) la Proposition 1.1 et en (γ) le Lemme 2.1. Il en résulte, à l'aide de la sous-σ-additivité de λ^*

$$\lambda^*(A) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A \cap B_n) + \lambda^*\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \geq \lambda^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) + \lambda^*\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right),$$

et ceci pour tout $A \subset \mathbb{R}$, de sorte que $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}_\lambda$ car l'autre inégalité est toujours vérifiée en vertu de la sous-additivité.

2) Cas général. La suite $(B_n)_{n\geq 1}$ étant quelconque, on prend $\widetilde{B_1} = B_1$ et, pour chaque entier $n \geq 2$, on pose $\widetilde{B_n} = B_n \setminus (\bigcup_{k=1}^{n-1} B_k)$. D'après la Proposition 2.1 et son corollaire, chaque $\widetilde{B_n}$ est mesurable. De plus la suite $(\widetilde{B_n})_{n\geq 1}$ est disjointe et $\bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{B_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Le résultat désiré provient alors du cas particulier précédent.□

Corollaire 9 *Toute suite $(B_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{B}_\lambda$ est telle que $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}_\lambda$.*

Preuve : C'est une conséquence de la Proposition 2.1 et du Théorème 2.1 puisque

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus B_n) \right).$$

□

Les propriétés précédentes font apparaitre que $\mathcal{B}_\lambda$ possède une structure remarquable qui répond au concept général suivant.

Définition 4 *Soit E un ensemble et soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$. On dit que $\mathcal{B}$ est une tribu sur E si :*
(T_1) $\emptyset \in \mathcal{B}$;
(T_2) $B \in \mathcal{B} \Rightarrow E \setminus B \in \mathcal{B}$ *;*
(T_3) $(B_n)_{n \geq 1}$ *suite de* $\mathcal{B} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$.

Exemples. 1) $\{\emptyset, E\}$ et $\mathcal{P}(E)$ sont des tribus sur E, respectivement la plus "pauvre" et la plus "riche" des tribus sur E.

2) Si $A \subset E$, $\{\emptyset, A, E \setminus A, E\}$ est une tribu sur E. Plus généralement, si Ω une partition (finie ou infinie) de E (c'est à dire un recouvrement de E par des parties non vides deux à deux dijoints), il est facile de voir que

$$\mathcal{B}_\omega = \left\{ \bigcup_{B \in \omega} B; \omega \subset \Omega \right\}$$

est une tribu sur E.□

Des propriétés (T_1), (T_2) et (T_3) on déduit :

Proposition 3 *Toute tribu $\mathcal{B}$ sur un ensemble E possède les propriétés :*
(T_4) $E \in \mathcal{B}$ *;*
(T_5) $B, C \in \mathcal{B} \Rightarrow (B \cup C, B \cap C$ *et* $B \setminus C \in \mathcal{B}$ *;*
(T_6) $(B_n)_{n \geq 1}$ *suite de* $\mathcal{B} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$.

Preuve : Découle immédiatement de la définition d'une tribu.□

Remarque. Il faut bien noter qu'une tribu n'est pas stable, en général, par réunions et intersections quelconques de ses éléments, mais seulement par réunions ou intersections de suites des ses éléments. En cela au moins, une tribu se comporte différemment de l'ensemble des ouverts d'un espace topologique puisque cet ensemble est stable par réunions quelconque (et intersections finies).□

Pour conclure, on résume les propiétés de $\mathcal{B}_\lambda$ démontrées ci-dessus.

Théorème 5 *L'ensemble $\mathcal{B}_\lambda$ des parties Lebesgue-mesurables est une tribu sur $\mathbb{R}$.*

1.3 Tribu borélienne de $\mathbb{R}$

Nous avons déjà donné quelques exemples d'ensembles mesurables. Nous allons maintenant montrer comment, à partir des ouverts de $\mathbb{R}$, ou plus simplement à partir de $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}$, il est possible de trouver toute une classe de parties mesurables. Pour cela nous nous appuierons sur les résultats généraux suivant.

Proposition 4 *Soit $\mathcal{B}_{i\in I}$ une famille quelconque (fini ou non, dénombrable ou non) de tribus sur un même ensemble E. Alors $\bigcap\limits_{i\in I}\mathcal{B}_i$ est une tribu sur E.*

Preuve : On vérifie facilement que l'intersection vérifie les axiomes (T_1), (T_2) et (T_3) des tribus.□

Corollaire 10 *Si E est un ensemble et si $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E)$, il existe une plus petite tribu sur E contenant $\mathcal{E}$.*

Définition 5 *Soit E un ensemble et soit $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E)$. On appelle tribu sur E engendrée par $\mathcal{E}$ la plus petite tribu sur E contenant $\mathcal{E}$. Elle sera notée $\tau_E(\mathcal{E})$.*

Définition 6 *Soit $(E, \mathcal{O})$ un espace topologique. On appelle tribu borélienne de cet espace topologique la tribu sur E engendré par l'ensemble $\mathcal{O}$ des ouverts. Elle sera notée $\mathcal{B}_E$. Les éléments de $\mathcal{B}_E$ sont les boréliens de l'espace topologique.*

Remarque. La tribu borélienne d'un espace topologique contient donc l'ensemble $\mathcal{O}$ des ouverts et, par passage au complémentaire, l'ensemble $\mathcal{F}$ des fermés. Mais elle contient aussi toutes les intersections de suites d'ouverts, et toutes les réunions de suites de fermés, et toutes les réunions et intersections de suites d'ensembles des types précédents. Il s'agit d'une classe d'ensembles relativement riche.□

Pour mieux cerner la tribu borélienne dans le cas de $\mathbb{R}$, nous utiliserons le lemme topologique suivant.

Lemme 3 *1) Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est la réunion d'une suite de $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}$.*

2) Tout ouvert de $\mathbb{R}$ de mesure extérieure finie est la réunion d'une suite de $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}$ disjointe.

Preuve : 1) Remarquons d'abord que l'ensemble

$$\mathcal{I}^* = \left\{ \left] r - \frac{1}{n}, r + \frac{1}{n} \right[; r \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

est dénombrable puisque'il existe une surjection évidente de $\mathbb{Q} \times \mathbb{N}^*$ (dénombrable) sur $\mathcal{I}^*$.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$, supposé non vide (le cas $U = \emptyset$ est trivial), et soit $x \in U$. Il existe un $\epsilon > 0$ tel que $]x-\epsilon, x+\epsilon[\subset U$, puis un entier $n \geq 1$ tel que $\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\epsilon}{2}$, et enfin un

$$r \in \mathbb{Q} \cap \left]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right[.$$

On voit alors facilement que

$$x \in \left]r - \frac{1}{n}, r + \frac{1}{n}\right[\subset]x-\epsilon, x+\epsilon[\subset U.$$

A chaque $x \in U$ on a donc associé un intervalle $I_x \in \mathcal{I}^*$ tel que $x \in I_x \subset U$, si bien que $U = \bigcup_{x \in U} I_x$. Mais $\mathcal{I}^*$ est dénombrable ainsi que, par conséquent, l'ensemble des I_x distincts participant à cette réunion qui peut donc s'écrire comme celle d'une suite de $\mathcal{I}^* \subset \mathcal{I}_{\mathbb{R}}$.

2) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Une conséquence de 1) est que l'ensemble des composantes connexes de U (qui sont des ouverts mutuellement disjoints) est dénombrable puisque, si $(I_n)_{n\geq 1}$ est une suite de $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}$ telle que $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, l'application qui, à chaque I_n, associe la composante connexe qui le contient, est évidemment surjective. Il reste à observer que, d'après la Proposition 1.1 et le Corollaire 1.3, toutes les composantes connexes de U sont bornées si la mesure extérieure de U est finie.$\square$

L'énoncé suivant indique quelques générations de la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ autres que celle de la Définition 3.2.

Proposition 5 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \tau_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}_{\mathbb{R}}) = \tau_{\mathbb{R}}(\{[a,b]; a,b \in \mathbb{R}\})$ *(et deux autres générarions en remplaçant* $[a,b]$ *par* $[a,b[$*, puis par* $]a,b]$*)*

$$= \tau_{\mathbb{R}}(\{]-\infty, a[; a \in \mathbb{R}\})$$

(et trois autres générarions en remplaçant $]-\infty,a[$ *par* $]-\infty,a]$*, puis* $]a,+\infty]$*, et enfin par* $[a,+\infty[$*).*

Preuve : Notons $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$. Alors :

$$\mathcal{I}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \quad \Rightarrow \quad \tau_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}_{\mathbb{R}}) \subset \tau_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_{\mathbb{R}}) = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

D'autre part, l'inclusion $\mathcal{O}_{\mathbb{R}} \subset \tau_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}_{\mathbb{R}})$ qui résulte du Lemme 3.1, on déduit :

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \tau_{\mathbb{R}}(\mathcal{O}_{\mathbb{R}}) \subset \tau_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}_{\mathbb{R}}).$$

Pour les sept générations restant à prouver, on se contentera de démontrer, par exemple, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \tau_{\mathbb{R}}(\{]a,b]; a,b \in \mathbb{R}\})$, les autres s'établissant de manière analogue.

D'abord, $]a,b] =]a,b[\cup \{b\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (réunion d'un ouvert et d'un fermé), et par suite :

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \supset \tau_{\mathbb{R}}(\{]a,b]; a,b \in \mathbb{R}\}).$$

Par ailleurs,

$$]\alpha,\beta[= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left]\alpha, \beta - \frac{1}{n}\right] \quad \Rightarrow \quad]\alpha,\beta[\in \tau_{\mathbb{R}}(\{]a,b]; a,b \in \mathbb{R}\}),$$

d'où il résulte :

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \tau_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}_{\mathbb{R}}) \subset \tau_{\mathbb{R}}(\{]a,b]; a,b \in \mathbb{R}\}).$$

$\square$

Lemme 4 *Quels que soient $I, J \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}}$:*

$$\lambda^*(I) = \lambda^*(I \cap J) + \lambda^*(I \setminus J).$$

Preuve : Si $I \cap J = \emptyset$, ou si $I \subset J$, c'est évident puisque $\lambda^*(\emptyset) = 0$. Autrement, il suffit d'examiner les différents cas, selon les dispositions relatives de I et de J. Par exemple : $I =]a,b[$, $J =]c,d[$, $a < c < b < d$. Dans ce cas :

$$\lambda^*(I) = b-a, \quad \lambda^*(I \cap J) = \lambda^*(]c,b[) = b-c, \quad \lambda^*(I \setminus J) = \lambda^*(]a,c]) = c-a$$

et finalement $\lambda^*(I \setminus J) + \lambda^*(I \cap J) = (c-a) + (b-c) = b-a = \lambda^*(I)$.$\square$

Ce lemme va servir à établir le résultat important de ce paragraphe :

Théorème 6 *Tout borélien de $\mathbb{R}$ est Lebesgue-mesurable : $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{B}_{\lambda}$.*

Preuve : Comme $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \tau_{\mathbb{R}}(\mathcal{I}_{\mathbb{R}})$ (Proposition 3.3), et que $\mathcal{B}_{\lambda}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$ (Théorème 2.2), il suffit de prouver que $\mathcal{I}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{B}_{\lambda}$, c'est-à-dire que chaque $J \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}}$ est Lebsgue-mesurable, ce qui sera le cas si, pour chaque $A \subset \mathbb{R}$, l'inégalité $\lambda^*(A) \geq \lambda^*(A \cap J) + \lambda^*(A \setminus J)$ est vérifiée.

Si $\lambda^*(A) = +\infty$, cette inégalité est évidente. Si $\lambda^*(A) < +\infty$, fixons $\epsilon > 0$. Par définition de $\lambda^*(A)$, il existe une suite $(I_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}$ telle que :

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \qquad \text{et} \qquad \lambda^*(A) + \epsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n).$$

Il en résulte les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\lambda^*(A) + \epsilon \quad & \geq \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) \overset{(\alpha)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda^*(I_n \cap J) + \lambda^*(I_n \setminus J)) \\
& = \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(I_n \cap J) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(I_n \setminus J) \overset{(\beta)}{\geq} \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n \cap J)\right) + \lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n \setminus J)\right) \\
& \overset{(\lambda)}{\geq} \quad \lambda^*(A \cap J) + \lambda^*(A \setminus J),
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé en (α) le Lemme 3.2, en (β) la sous-σ-additivité de λ^*, et en (λ) la monotonie de λ^* ; et ceci pour tout $\epsilon > 0$, ce qui établit l'inégalité désirée.$\square$

1.4 Mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}$

Nous allons maintenant montrer que, restreinte à $\mathcal{B}_\lambda$, la mesure extérieure λ^* jouit d'une bonne propriété qu'elle ne possède pas sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Comme $\mathcal{I}_\mathbb{R} \subset \mathcal{B}_\lambda$, et comme λ^* coïncide avec λ sur $\mathcal{I}_\mathbb{R}$, nous noterons λ la restriction de λ^* à $\mathcal{B}_\lambda$.

Théorème 7 *Si* $(B_n)_{n\geq 1}$ *est une suite de* $\mathcal{B}_\lambda$ *disjointe, alors :*

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n).$$

Preuve : Dans les conditions ci-dessus, et d'après la partie 1) de la démonstration du Théorème 2.1, nous pouvons écrire pour tout $A \subset \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\lambda^*(A) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A \cap B_n) + \lambda^*\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \geq \lambda^*\left(A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) + \lambda^*\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)\\
&\geq \lambda^*(A)
\end{aligned}$$

(où la dernière inégalité provient de la sous-additivité de λ^*, et est même une égalité puisque $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}_\lambda$), ce qui entraîne

$$\lambda^*(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A \cap B_n) + \lambda^*\left(A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right).$$

Mais, dans le cas particulier où $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, cette égalité devient :

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(B_n).$$

□

Cette propriété remarquable fait de la restriction λ de λ^* à $\mathcal{B}_\lambda$ un exemple important du concept général de mesure.

Définition 7 *Soit E un ensemble et $\mathcal{B}$ une tribu sur E. On appelle mesure (positive) sur $\mathcal{B}$ toute application $\mu : \mathcal{B} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ telle que :*

(M_1) $\mu(\emptyset) = 0$;

(M_2) si $(B_n)_{n\geq 1}$ est une suite de $\mathcal{B}$ disjointe, alors :

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n).$$

Cette dernière propriété exprime que μ est σ-additive.

Définition 8 *On appelle :*

a) espace mesurable tout couple $(E, \mathcal{B})$ *où* E *est un ensemble et* $\mathcal{B}$ *est une tribu sur* E *;*

b) espace mesuré tout triplet $(E, \mathcal{B}, \mu)$ *où* $(E, \mathcal{B})$ *est un espace mesurable et où* μ *est une mesure sur* $\mathcal{B}$.

On notera $\mathcal{N}_\mu = \{B; B \in \mathcal{B}, \mu(B) = 0\}$ *l'ensemble des parties* μ*- négligeables.*

Exemples. Soit $(E, \mathcal{B})$ un espace mesurable.

1) La fonction identiquement nulle sur $\mathcal{B}$ est une mesure (mesure nulle).

2) Si $E \neq \emptyset$, un autre exemple trivial de mesure est celui de la fonction μ définie sur $\mathcal{B}$ par $\mu(\emptyset) = 0$ et $\mu(B) = +\infty$ pour tout $B \in \mathcal{B}$ et non vide.

3) En posant

$$\mu(B) = \begin{cases} card(B) & \text{si} \quad B \quad \text{est fini}, \\ +\infty & \text{si} \quad B \quad \text{est infini}, \end{cases}$$

on définit sur $\mathcal{B}$ une mesure appelée mesure de dénombrement.

4) Si $(E, \mathcal{B})$ est un espace mesurable et si $a \in E$, l'application δ_a définie sur $\mathcal{B}$ par $\delta_a(B) = 1$ ou 0 selon que $a \in B$ ou $a \notin B$, est une mesure sur $\mathcal{B}$. On dit que δ_a est la mesure de Dirac sur $\mathcal{B}$ définie par la masse unité placée au point $a \in E$.

5) Plus généralement, si $\{a_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ est une partie dénombrable de E et si $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est une suite de $\mathbb{R}_+$, en posant, pour tout $B \in \mathcal{B}$,

$$\mu(B) = \sum_{n \in \widetilde{B}} \alpha_n, \quad \text{où} \quad \widetilde{B} = \{n; n \in \mathbb{N}^*, a_n \in B\},$$

on définie une mesure sur $\mathcal{B}$. C'est la mesure discrète définie sur $\mathcal{B}$ par les masses α_n placées aux points $a_n \in E$. Nous reviendrons sur ce type de mesure au chapitre 6.□

L'énoncé suivant rassemble les propriétés élémentaires des mesures, conséquences des axiomes (M_1) et (M_2).

Théorème 8 *Considérons un espace mesuré* $(E, \mathcal{B}, \mu)$*, des ensembles* $B, C \in \mathcal{B}$ *et* $(B_n)_{n \geq 1}$ *une suite de* $\mathcal{B}$*. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(M_3) $B \cap C = \emptyset \Rightarrow \mu(B \cup C) = \mu(B) + \mu(C)$ *(*μ *est additive) ;*

(M_4) $B \subset C \Rightarrow \mu(B) \leq \mu(C)$ *(*μ *est monotone) ;*

(M_5) $\mu(B \cup C) \leq \mu(B) + \mu(C)$ *(*μ *est sous-additive) ;*

(M_6) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$ *(*μ *est sous-*σ*-additive) ;*

(M_7) *si* $(B_n)_{n \geq 1}$ *est croissante :* $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sup_{n \geq 1} \mu(B_n) = \lim_{n \to +\infty} \mu(B_n)$ *;*

(M_8) *si* $(B_n)_{n\geq 1}$ *est décroissante et si* $\inf\limits_{n\geq 1} \mu(B_n) < +\infty$ *(ce qui équivaut à l'existence d'un* $n \geq 1$ *tel que* $\mu(B_n) < +\infty$*) :*

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \inf_{n\geq 1} \mu(B_n) = \lim_{n\to+\infty} \mu(B_n).$$

Preuve : (M_3) On considère la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ définie par $B_1 = B$ et $B_2 = C$ et $B_n = \emptyset$ pour $n \geq 3$:

$$\mu(B \cup C) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \overset{(M_2)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \overset{(M_1)}{=} \mu(B) + \mu(C).$$

(M_4) $\mu(C) = \mu(B \cup (C \setminus B)) = \mu(B) + \mu(C \setminus B) \geq \mu(B)$, et l'égalité $\mu(C) = \mu(B) + \mu(C \setminus B)$ équivaut à $\mu(C \setminus B) = \mu(C) - \mu(B)$ si $\mu(B) < +\infty$.

(M_5) $\mu(B \cup C) = \mu(B \cup (C \setminus B)) \overset{(M_3)}{=} \mu(B) + \mu(C \setminus B) \overset{(M_4)}{\leq} \mu(B) + \mu(C)$.

(M_7)

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) &= \mu\left(B_1 \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (B_k \setminus B_{k-1})\right) \overset{(M_3)}{=} \mu(B_1) + \sum_{k=2}^{\infty} \mu(B_k \setminus B_{k-1}) \\
&= \sup_{n\geq 2}\left(\mu(B_1) + \sum_{k=2}^{n} \mu(B_k \setminus B_{k-1})\right) \overset{(M_3)}{=} \sup_{n\geq 1} \mu(B_n).
\end{aligned}$$

(M_6)

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{p=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=1}^{p} B_n\right)\right) \overset{(M_7)}{=} \sup_{p\geq 1}\left(\bigcup_{n=1}^{p} B_n\right) \\
&\overset{(M_5)}{\leq} \sup_{p\geq 1} \sum_{n=1}^{p} \mu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n).
\end{aligned}$$

(M_8) Soit $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mu(B_{n_0}) < +\infty$. Compte tenu de la décroissance de la suite $(B_n)_{n\geq 1}$, on écrit

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) &= \mu\left(B_{n_0} \setminus \left(B_{n_0} \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right)\right) = \mu\left(B_{n_0} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_{n_0} \setminus B_n)\right) \\
&\overset{(M_4)}{=} \mu(B_{n_0}) - \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_{n_0} \setminus B_n)\right) \overset{(M_7)}{=} \mu(B_{n_0}) - \sup_{n\geq 1} \mu(B_{n_0} \setminus B_n) \\
&= \inf_{n\geq 1} (\mu(B_{n_0}) - \mu(B_{n_0} \setminus B_n) = \inf_{n\geq n_0} (\mu(B_{n_0}) - \mu(B_{n_0} \setminus B_n) \\
&= \inf_{n\geq n_0} \mu(B_n) = \inf_{n\geq n_0} \mu(B_n).
\end{aligned}$$

$\square$

Remarques. 1) Il convient de noter la dissymétrie des comportements de la mesure à l'égard des suites croissantes et des suites décroissantes d'ensemble. Nous donnerons un contre-exemple prouvant que la propriété (M_8) est fausse en général si la condition spéciale de l'énoncé n'est pas réalisée. Considérons la suite décroissante $(B_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{B}_\lambda$ définie par $B_n = [n, +\infty[$ pour chaque $n \geq 1$. Alors $\lambda(B_n) = +\infty$ pour tout $n \geq 1$ et, par conséquent, $\inf_{n\geq 1} \lambda(B_n) = +\infty$. Cependant :

$$\lambda\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lambda(\emptyset) = 0.$$

2) Il résulte de (M_5) que $\mathcal{N}_\mu$ est stable par réunion finie, et de (M_6), plus généralement, que $\mathcal{N}_\mu$ est stable par réunion dénombrable.$\square$

Théorème 9 *1) La restricition λ de λ^* à $\mathcal{B}_\lambda$ est une mesure sur $\mathcal{B}_\lambda$.*

2) La restricition β de λ^* à $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est une mesure sur $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Preuve : Conséquences des Théorèmes 3.1 et 4.1.$\square$

Définition 9 *1) La restricition λ de λ^* à $\mathcal{B}_\lambda$ est appelée mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}$.*

1) La restricition β de λ^* à $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est appelée mesure de Borel dans $\mathbb{R}$.

Remarque. Dans ses grandes lignes, le procédé utilisé pour passer de la mesure extérieure de Lebesgue à la mesure de Lebesgue reproduit, dans un cas particulier, celui conçu par Carathéodory pour obtenir plus généralement, à partir d'une mesure extérieure ν sur $\mathcal{P}(E)$ (c'est à dire une application de $\mathcal{P}(E)$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ nulle sur le vide, monotone et sous-σ-additive), une mesure définie sur la tribu $\mathcal{B}_\nu$ des ensembles ν-mesurables (au sens de la Définition 2.1).

Définition 10 *Soit $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré. La mesure est dite :*

a) finie si $\mu(E) < +\infty$ (d'où résulte $\mu(B) < +\infty$ pour tout $B \in \mathcal{B}$) ;

b) σ-finie s'il existe une suite $(B_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{B}$ telle que

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \qquad \textit{et} \qquad \mu(B_n) < +\infty \textit{ pour tout } n \geq 1;$$

c) complète si : $(A \subset B \in \mathcal{B}, \mu(B) = 0) \Rightarrow A \subset \mathcal{B}$ (et par suite $\mu(B) = 0$).

Remarques. 1) Toute mesure finie est σ-finie.

2) La suite $(B_n)_{n\geq 1}$ intervanant dans la définition de la σ-finitude de μ peut être supposée croissante. Au besoin, on peut en effet lui substituer la suite $(C_n)_{n\geq 1}$ où $C_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ pour tout $n \geq 1$, suite croissante possédant par ailleurs les propriétés requises.

3) La mesure de dénombrement sur un ensemble non dénombrable E n'est pas σ-finie. Dans ce cas, en effet, E ne peut être la réunion d'une suite d'ensemble de mesure finie puisque chacun de ceux-ci devrait être fini.

Proposition 6 *1) La mesure de Lebesgue est non finie, σ-finie et complète.*

Preuve : 1) a) On a $\lambda(\mathbb{R}) = +\infty$ ce qui entraîne la non finitude.
b) Pour obtenir la σ-finitude de λ il suffit de remarquer que

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [-n, +n] \quad \text{avec} \quad \lambda([-n, n]) = 2n < +\infty.$$

c) La complétude de λ résulte des implications

$$\begin{aligned}(A \subset B \in \mathcal{B}_\lambda, \lambda(B) = 0) \quad &\Rightarrow \quad 0 \leq \lambda^*(A) \leq \lambda^*(B) = \lambda(B) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \lambda^*(A) = 0 \Rightarrow A \in \mathcal{N}_\lambda \subset \mathcal{B}_\lambda.\end{aligned}$$

□

Remarque. 1) La démonstration de la Proposition 4.1 prouve aussi bien que la mesure de Borel β est également à la fois non finie et σ-finie. En revanche, la mesure de Borel n'est pas complète. En effet, si c'était le cas, toute partie de l'ensemble de Cantor $\mathcal{K}$ serait un borélien, puisque $\mathcal{K}$ est un borélien. Mais $\mathcal{P}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ est impossible.
□

Théorème 10 *Les mesures de Lebesgue λ et de Borel β sont invariantes par translations $(x \mapsto x + x_0)$ et par symétrie $(x \mapsto -x)$.*

Preuve : Le translaté de $A \subset \mathbb{R}$ par $x_0 \in \mathbb{R}$ est l'ensemble

$$A + x_0 = \{a + x_0; a \in A\}.$$

Il résulte alors, de la définition 1.1 d'une part, et la conservation de la longueur des intervalles par translations d'autre part, que

$$\lambda^*(A) = \lambda^*(A + x_0).$$

De même, il est clair que : $\lambda^*(A) = \lambda^*(-A)$ si $-A = \{-a, a \in A\}$.

Il reste donc à vérifier que $\mathcal{B}_\lambda$ et $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ se conservent par translation et par symétrie. Or, si $B \in \mathcal{B}_\lambda$, il vient, pour tout $A \subset \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\lambda^*(A) &= \lambda^*(A - x_0) = \lambda^*((A - x_0) \cap B) + \lambda^*((A - x_0) \setminus B) \\ &= \lambda^*(((A - x_0) \cap B) + x_0) + \lambda^*(((A - x_0) \setminus B) + x_0) \\ &= \lambda^*(A \cap (B + x_0)) + \lambda^*(A \setminus (B + x_0)),\end{aligned}$$

ce qui prouve que $B + x_0 \in \mathcal{B}_\lambda$. De façon analogue, on obtient que $\mathcal{B}_\lambda$ se conserve par symétrie.

En ce qui concerne $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, la propriété résulte simplement de ce que les translations et la symétrie sont des homéomorphismes de $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle.□

1.5 Exercices corrigés

Exercice 1. Interprétation ensembliste de $\liminf$ **et** $\limsup$
Soit E *un ensemble et* $(A_n)_{n\geq 1}$ *une suite de parties de* E*. On définit*

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left[\bigcup_{m\geq n} A_m\right] \quad \textit{et} \quad \liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\bigcap_{m\geq n} A_m\right].$$

a) Etudier $\liminf$ *et* $\limsup$ *lorque* $E=\mathbb{R}$ *et* $A_n =]-\infty, a_n]$*, où* $(a_n)_{n\geq 1}$ *est une suite de réels.*

b) Montrer que $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

c) Montrer que l'on a

$$\liminf A_n \cap \limsup B_n \subset \limsup(A_n\cap B_n) \subset \limsup B_n.$$

$$\liminf A_n \subset \liminf(A_n \cup B_n) \subset \limsup A_n \cup \liminf B_n.$$

d) Montrer que $1_{\limsup A_n} = \limsup 1_{A_n}$.

e) Décrire $\liminf A_n$ *et* $\limsup A_n$ *lorsque* $(A_n)_{n\geq 1}$ *est une suite monotone de parties de* E*.*

f) Calculer $\liminf A_n$ *et* $\limsup A_n$ *lorsque* $A_n = [-1, 2+\dfrac{1}{n}]$ *si* n *est pair non nul et* $A_n = [-2-\dfrac{1}{n}, 1]$ *si* n *est impair.*

Solution : Remarquons que $\limsup A_n = \{x, x$ appartient à une infinité de $A_n\}$ et $\liminf A_n = \{x, x$ appartient à tous les A_n à partir d'un rang $n_0\}$.

a) Il semble naturel de comparer $\liminf A_n$ à $]-\infty, \liminf a_n]$ et $\limsup A_n$ à $]-\infty, \limsup a_n]$. On a

$$]-\infty, \liminf a_n[\subset \liminf A_n \subset]-\infty, \liminf a_n] \quad \text{et}$$

$$]-\infty, \limsup a_n[\subset \limsup A_n \subset]-\infty, \limsup a_n].$$

En effet,

$$\begin{aligned} x \in]-\infty, \liminf a_n[\quad &\Leftrightarrow \quad x < \liminf a_n = \sup_{n\geq 1}(\inf_{k\leq n} a_k) \\ &\Rightarrow \quad \exists n\geq 1, \quad x \leq \inf_{k\geq n} a_k \\ &\Leftrightarrow \quad \exists n \geq 1, \forall k\geq n, \quad x\leq a_k \\ &\Leftrightarrow \quad x\in \liminf A_n. \end{aligned}$$

D'un autre côté, on a

$$\begin{aligned} x\in \liminf A_n \quad &\Leftrightarrow \quad \exists n\geq 1, \forall k \geq n, \quad x\leq a_k \\ &\Leftrightarrow \quad \exists n\geq 1, \quad x\leq \inf_{k\geq n} a_k \\ &\Rightarrow \quad x\leq \liminf a_n = \sup_{n\geq 1}(\inf_{k\leq n} a_k) \\ &\Leftrightarrow \quad x\in]-\infty, \liminf a_n]. \end{aligned}$$

Les autres inclusions se démontrent de la même manière. En général, $\liminf A_n$ peut être égal soit à $]-\infty, \liminf a_n]$ soit à $]-\infty, \liminf a_n[$ comme le montre les exemples suivants :

i) On prends $a_n = -\dfrac{1}{n}$. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$\bigcap_{m \geq n}]-\infty, -\frac{1}{m}] =]-\infty, -\frac{1}{n}] \quad \text{et} \quad \liminf A_n =]-\infty, 0[=]-\infty, \liminf a_n[.$$

ii) Si on prend la suite constante $a_n = c$, on a $\liminf A_n =]-\infty, \liminf a_n]$.

b) On a

$$\begin{aligned} x \in \liminf A_n &\Leftrightarrow \exists n \geq 1, \forall m \geq n, x \in A_m \\ &\Rightarrow \forall p \geq 1, \exists m \geq p, x \in A_m \\ &\Leftrightarrow x \in \limsup A_n. \end{aligned}$$

Donc $\liminf A_n \subset \limsup A_n$.

c) Soit $x \in \liminf A_n \cap \limsup B_n$. Ceci équivaut à x appartient à tous les A_m à partir d'un certain rang n_0 et une infinité de B_n. Ceci entraine que x appartient à une infinité de $A_n \cap B_n$ et donc $x \in \limsup(A_n \cap B_n)$. Donc $\liminf A_n \cap \limsup B_n \subset \limsup(A_n \cap B_n)$.

Puisque $A_n \cap B_n \subset B_n$, on a naturellement $\limsup(A_n \cap B_n) \subset \limsup B_n$. De même, on a $\liminf A_n \subset \liminf(A_n \cup B_n)$.

Soit $x \in \liminf(A_n \cup B_n)$. On a x appartient à $A_n \cup B_n$ à partir d'un rang n_0. Donc, ou bien x appartient à une infinité de A_n sinon il va appartenir à B_n à partir d'un certain rang et donc $x \in \limsup A_n \cup \liminf B_n$ et par suite $\liminf(A_n \cup B_n) \subset \limsup A_n \cup \liminf B_n$.

d) Soit $x \in E$. Si $x \in \limsup A_n$, on ax appartient à A_n une infinité de fois et donc la suite $(1_{A_n}(x))_{n \geq 1}$ (qui ne prend que deux valeurs 0 et 1) prend la valeur 1 une infinité de fois et donc sa limite supérieure est égale à 1.

Si $x \notin \limsup A_n$, alors $x \in \liminf A_n^c$ et donc x appartient à A_n^c à partir d'un certain rang et donc la suite $(1_{A_n}(x))_{n \geq 1}$ s'annule à partir de ce même rang et donc sa limite supérieure est nulle. Donc on a

$$1_{\limsup A_n} = \limsup 1_{A_n}.$$

e) Si $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite croissante, on a

$$\liminf A_n = \limsup A_n = \bigcup_{n \geq 1} A_n$$

et si $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite décroissante, on a

$$\liminf A_n = \limsup A_n = \bigcap_{n \geq 1} A_n.$$

f) Il est facile de vérifier que

$$\liminf A_n = [-1,1] \qquad \text{et} \qquad \limsup A_n = [-2,2].\square$$

Exercice 2. *Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels. Montrer l'équivalence :*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \liminf_{n\longrightarrow+\infty} a_n = \limsup_{n\longrightarrow+\infty} a_n = a.$$

Solution : ($\Rightarrow$). Supposons que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est donc bornée et les suites $(b_n)_{n\geq 1}$ et $(c_n)_{n\geq 1}$ définies, pour tout $n \geq 1$, par

$$b_n = \sup_{k\geq n} a_k \qquad \text{et} \qquad c_n = \inf_{k\geq n} a_k$$

sont finies. Soit $\epsilon > 0$. Il existe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $a - \epsilon \leq a_n \leq a + \epsilon$. On en déduit que pour tout $n \geq n_0$, on a $a - \epsilon \leq b_n \leq a + \epsilon$ et $a - \epsilon \leq c_n \leq a + \epsilon$. Puisque $\liminf a_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} c_n$ et $\limsup a_n = \lim_{n\longrightarrow+\infty} b_n$, on déduit le résultat souhaité.

($\Leftarrow$) Supposons que $\liminf_{n\longrightarrow+\infty} a_n = \limsup_{n\longrightarrow+\infty} a_n = a$. On a, pour tout $n \geq 1$,

$$\inf_{k\geq n} a_k \leq a_n \leq \sup_{k\geq n} a_k.$$

Puisque les deux membres extrêmes de cette inégalité convergent vers a la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ va converger vers a.$\square$

Exercice 3. *Calculer les limites supérieures et inférieures des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par*

$$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad b_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n+1} + (-1)^n\right).$$

Solution : La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ étant convergente vers 0, on a alors $\limsup a_n = \liminf a_n = 0$.

Remarquons, que pour tout $n \geq 1$, on $\inf\limits_{m\geq n} b_m = -\infty$ et donc $\liminf b_n = -\infty$.

D'un autre côté, on a, pour tout $n \geq 1$,

$$\sup_{m\geq n} b_m = \begin{cases} \ln(2 + \frac{1}{2k+1}) & \text{si} \quad n = 2k, \\ \ln(2 + \frac{1}{2k+3}) & \text{si} \quad n = 2k+1, \end{cases}$$

de sorte que $\limsup b_n = \ln 2$.$\square$

Exercice 4. *Soit X un ensemble non vide et $(A_n)_{n\geq 1}$ et $(B_n)_{n\geq 1}$ deux suites de parties de X telles que, pour tout n, $\{A_n, B_n\}$ forme une partition* *de X. On suppose de plus que la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ et croissante et que la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ et décroissante. Prouver alors que*

$$\{\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n, \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n\}$$

forme aussi une partition de X.

Solution : Nous allons montrer que la réunion des ensembles $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ et $B = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n$ ont une intersection vide et une réunion égale à X.

Soit $x \in A \cap B$. Il existe un $n_0 \geq 0$ tel que $x \in A_{n_0}$ et $x \in B_n$ pour tout $n \geq 0$. Ainsi $x \in A_{n_0} \cap B_{n_0}$, or cet ensemble est vide car (A_{n_0}, B_{n_0}) forme une partition de X.

Soit $x \in X$. Ou bien, il existe un $n_0 \geq 0$ tel que $x_i n A_{n_0}$ et donc $x \in A$ et donc $x \in A \cup B$. Si pour tout $n \geq 0$ $x \notin A_n$, on aura $x \in B_n$ pour tout $n \geq 0$ car pour tout $n \geq 0$ (A_n, B_n) forme une partition de X. Par suite $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n$ ce qui permet de conclure.$\square$

Exercice 5. *Montrer que $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ est d'intérieur vide mais n'est pas négligeable.*

Solution : Soit $x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$. Pour tout $\epsilon > 0$, l'intervalle $]x - \epsilon, x + \epsilon[$ contient un rationnel et donc ne peut pas être contenu dans $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ et donc $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ est d'intérieur vide.

D'un autre côté, $[0,1] \setminus \mathbb{Q} \in \mathbb{B}_\lambda$ et $[0,1] \cap \mathbb{Q} \in \mathbb{B}_\lambda$ et $[0,1]$ qui est un Lebesgue-mesurable est une réunion disjointe de ces deux ensembles et on puisque la mesure extérieure est additive sur $\mathbb{B}_\lambda$, on a

$$\lambda([0,1]) = 1 = \lambda([0,1] \setminus \mathbb{Q}) + \lambda([0,1] \cap \mathbb{Q}) = \lambda([0,1] \setminus \mathbb{Q})$$

car $[0,1] \cap \mathbb{Q}$ est négligeable.$\square$

Exercice 6. *Soit E un ensemble. Montrer que*

$$\mathbb{B} = \{B \subset E; B \textit{ dénombrable ou } E \setminus B \textit{ dénombrable}\}$$

est une tribu sur E. Comparer cette tribu à la tribu engendrée par les singletons $\{x\}$ où x décrit E.

On suppose que E est non dénombrable. On définit $\mu : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\mu(B) = 0$ ou 1 selon que B ou $E \setminus B$ est dénombrable. Montrer que μ est une mesure sur $\mathbb{B}$.

Solution : 1) $\mathbb{B}$ est une tribu.

(T_1) On a clairement que $\emptyset \in \mathbb{B}$.

(T_2) Soit $B \in \mathbb{B}$. Si B est dénombrable, on aura $B = E \setminus (E \setminus B)$ est dénombrable et donc $E \setminus B \in \mathbb{B}$. Si c'est $E \setminus B$ qui est dénombrable, on aura aussi $E \setminus B \in \mathbb{B}$.

(T_3) Soit $(B_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{B}$. Si Pour tout $n \geq 1$, B_n est dénombrable alors $\bigcup\limits_{n\geq 1} B_n$ est dénombrable et donc $\bigcup\limits_{n\geq 1} B_n \in \mathbb{B}$. S'il existe un $n_0 \geq 1$ tel que $E \setminus B_{n_0}$ est dénombrable, on aura $E \setminus (\bigcup\limits_{n\geq 1} B_n)$ qui est contenu dans $E \setminus B_{n_0}$ est dénombrable et donc $\bigcup\limits_{n\geq 1} B_n \in \mathbb{B}$.

$\mathbb{B}$ est une tribu.

On note $\mathbb{C}$ la tribu engendrée par les singletons $\{x\}$ quand x décrit E. Puisque, pour tout $x \in E$, $\{x\} \in \mathbb{B}$, on aura donc que $\mathbb{C} \subset \mathbb{B}$. Vérifions maintenant l'autre inclusion. Soit $B \in \mathbb{B}$. Si B est dénombrable, on aura $B = \{x_n, n \geq 1\} = \bigcup\limits_{n\geq 1}\{x_n\}$ et donc $B \in \mathbb{C}$. Si $E \setminus B$ est dénombrable, on aura donc $E \setminus B \in \mathbb{C}$ et puisque $\mathbb{C}$ est une tribu, on aura $B \in \mathbb{C}$.

On suppose que E n'est pas dénombrable. On considère $\mu : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\mu(B) = 0$ si B est dénombrable et 1 si $E \setminus B$ est dénombrable. Cette application est bien définie car E étant non dénombrable B et $E \setminus B$ ne peuvent pas être tous les deux dénombrables en même temps. Montrons que μ est une mesure positive sur $\mathbb{B}$. On clairement que μ est positive.

(M_1) On a clairement $\mu(\emptyset) = 0$.

(M_2) Soit $(B_n)_{n\geq 1}$ une suite disjointe d'éléments de $\mathbb{B}$. Si tous les B_n sont dénombrables, $\bigcup\limits_{n\geq 1} B_n$ est dénombrable et donc $\mu(\bigcup\limits_{n\geq 1} B_n) = 0$ et puisque pour tout $n \geq 1$, $\mu(B_n) = 0$, on a trivialement

$$\mu(\bigcup_{n\geq 1} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n).$$

S'il exist un $n_0 \geq 1$ tel que B_{n_0} est non dénombrable. Dans ce cas $E \setminus B_{n_0}$ et dénombrable et pour tout $n \geq 1$ et $n \neq n_0$, on a $B_n \subset E \setminus B_{n_0}$ (la suite étant disjointe) et par suite B_n est dénombrable. On a donc $\mu(B_n) = 0$ pour tout $n \neq n_0$ et $\mu(B_{n_0} = 1$. D'un autre côté, $\bigcup\limits_{n\geq 1} B_n$ est non dénombrable et donc $\mu(\bigcup\limits_{n\geq 1} B_n) = 1$. On a donc aussi

$$\mu(\bigcup_{n\geq 1} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n).\Box$$

Exercice 6. *On considère un espace topologique $(E, \mathcal{O})$ séparé dont la topologie admet une base dénombrable, une tribu $\mathbb{B}$ sur E contenant $\mathcal{O}$ et une mesure sur $\mathbb{B}$ non nulle et ne prenant que les valeurs 0 et 1 sur les ouverts.*

1) Montrer qu'il existe un plus grand ouvert U_0 tel que $\mu(U_0) = 0$.

2) Montrer que $U_0 \neq E$ et que $E \setminus U_0$ est réduit à un seul point.

3) En déduire que μ est une mesure de Dirac.

Solution : Commençons par remaquer que si E contient un seul point, on aura nécessairement $\mathbb{B} = \{\{x\}, \emptyset\}$ et $\mu(\{x\}) = 1$ sinon la mesure serait nulle et donc μ est une mesure de Dirac en $\{x\}$. On suppose que E contient au moins deux points distincts.

1) On considère

$$I = \{U; U \text{ ouvert de } E \text{ et } \mu(U) = 0\}.$$

I est non vide. En effet, soient x et y deux points distincts de E. Puisque E est séparé, il existe deux ouverts disjoints U_x et U_y qui contient respectivement x et y. L'un des ouverts U_x, U_y est de mesure nulle puisque $\mu(U_x \cup U_y) = \mu(U_x) + \mu(U_y)$ et μ ne prend que les valeurs 0 et 1 sur les ouverts. Donc I est non vide et considérons l'ouvert

$$U_0 = \bigcup_{U \in I} U.$$

Nous allons montrer que U_0 est de mesure nulle. Puisque la topologie de E admet une base dénombrable d'ouverts, tout ouvert $U \in I$ vérifie $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ où les (B_n) sont des ouverts de la base. Puisque chaque $B_n \subset U$, on aura $\mu(B_n) = 0$. U_0 sera donc réunion dénombrable d'ouverts de mesure nulle et donc U_0 est de mesure nulle et c'est le plus grand ouvert de mesure nulle.

2) On a évidemment $U_0 \neq E$ sinon la mesure serait nulle. Montrons maintenant que $E \setminus U_0$ est réduit à un seul point.Supposons que $E \setminus U_0$ contient deux points distincts x et y. Comme auparavant, il existe deux ouverts disjoints U_x et U_y contenant x et y et l'un d'eux est de mesure nulle par exemple U_x. U_x serait contenu dans U_0 ce qui est absurde puisque $x \notin U_0$.

3) Montrons que μ est une mesure de Dirac. Pour cela, notons x_0 l'unique élément de $E \setminus U_0$ et verifions que $B \in \mathbb{B}$, on a $\mu(B) = 1$ ou 0 selon que $x_0 \in B$ ou non.

Puisque E est un ouvert et U_0 est contenu strictement dans E, on aura $\mu(E) = 1$ et par suite $\mu(\{x_0\} = 1$. Soit $B \in \mathbb{B}$. Si $x_0 \in B$, on aura $1 = \mu(\{x_0\}) \leq \mu(B) \leq \mu(E) = 1$ et donc $\mu(B) = 1$. Si $x_0 \notin B$, on aura $B \subset U_0$ et donc $\mu(B) = 0$.$\square$

Exercice 7. *Soit $A \subset \mathbb{B}_\lambda$. Montrer que*

$$\lambda(A) = \inf\{\lambda(U); U \text{ ouvert de } \mathbb{R}, A \subset U\} = \sup\{\lambda(K); K \text{ compact de } \mathbb{R}, K \subset A\}.$$

Solution : 2) a) Avec les ouverts. La propriété est claire si $\lambda(A) = +\infty$. Supposons maintenant que $\lambda(A) < +\infty$.

Pour tout entier $k \geq 1$ il existe une suite $(I_{k,n})_{n\geq 1}$ de $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}$ telle que

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{k,n} \qquad \text{et} \qquad \lambda(A) \leq \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_{k,n}\right) \overset{(M_6)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_{k,n}) \leq \lambda(A) + \frac{1}{k}.$$

Mais alors, en remarquant que $U_k = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_{k,n}$ est un ouvert, on obtient

$$\lambda(A) \leq \inf\{\lambda(U); U \text{ ouvert de } \mathbb{R}, A \subset U\} \leq \inf\{\lambda(U_k); k \geq 1\} = \lambda(A).$$

b) Avec les compacts. Supposons d'abord que A soit borné. Alors A est contenu dans un intervalle compact K_0 de sorte que $\lambda(A) \leq \lambda(K_0) < +\infty$. Alors (M_6) et le a) ci-dessus permetttent d'écrire :

$$\begin{aligned}
\lambda(K_0) - \lambda(A) &= \lambda(K_0 \setminus A) = \inf\{\lambda(U); U \text{ ouvert de } \mathbb{R}, (K_0 \setminus A) \subset U\} \\
&= \inf\{\lambda(U \cap K_0); U \text{ ouvert de } \mathbb{R}, (K_0 \setminus A) \subset U\} \\
&= \inf\{\lambda(U \cap K_0); U \text{ ouvert de } \mathbb{R}, (K_0 \setminus U) \subset A\}
\end{aligned}$$

ce qui conduit au résultat par :

$$\begin{aligned}
\lambda(A) &= \lambda(K_0) - \inf\{\lambda(U \cap K_0); U \text{ ouvert de } \mathbb{R}, (K_0 \setminus U) \subset A\} \\
&= \sup\{\lambda(K_0 \setminus (U \cap K_0)); U \text{ ouvert de } \mathbb{R}, (K_0 \setminus U) \subset A\} \\
&= \sup\{\lambda(K_0 \setminus U); U \text{ ouvert de } \mathbb{R}, (K_0 \setminus U) \subset A\} \\
&\leq \sup\{\lambda(K); K \text{ compact}, K \subset A\} \leq \lambda(A).
\end{aligned}$$

Si A n'est pas borné, on profite quand même du résultat ci-dessus en écrivant :

$$\begin{aligned}
\lambda(A) &\overset{(M_7)}{=} \sup\{\lambda(A) \cap [-n, n]; n \in \mathbb{N}\} \\
&= \sup\{\sup\{\lambda(K); K \text{ compact}, K \subset A \cap [-n, n]\}; n \in \mathbb{N}\} \\
&\leq \sup\{\lambda(K); K \text{ compact}, K \subset A\} \leq \lambda(A).
\end{aligned}$$

□

Exercice 8. *Soit $(E, \mathbb{B})$ un espace mesuré et $\mu : \mathbb{B} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$. Montrer que μ est une mesure si et seulement si :*

1) $\mu(\emptyset) = 0$;

2) μ est additive i.e. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ si $A \cap B = \emptyset$;

3) μ est σ-sous-additive.

Solution : Ona déjà vu que si μ est une mesure, elle vérifie 1), 2) et 3). Pour la réciproque. Soit $\mu : \mathbb{B} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ qui vérifie 1), 2) et 3). L'axiome (T_1) est vérifiée.

D'après 2), on peut montrer par recurrence que pour toute famille $(B_1, \dots, B_p)$ d'éléments de $\mathbb{B}$ deux à deux disjoints, on a

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{p} B_n) = \sum_{n=1}^{p} \mu(B_n).$$

On peut montrer aussi à partir de 2) que si A et B deux éléments de $\mathbb{B}$ tels que $A \subset B$ alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(T_2) Considèrons une suite disjointe $(B_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{B}$. On a

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n\geq 1} B_n \supset \bigcup_{n=1}^{p} B_n \quad & \Rightarrow \quad \mu(\bigcup_{n\geq 1} B_n) \geq \mu(\bigcup_{n=1}^{p} B_n) \\
& \Rightarrow \quad \mu(\bigcup_{n\geq 1} B_n) \geq \sum_{n=1}^{p} \mu(B_n) \\
& \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \mu(\bigcup_{n\geq 1} B_n)
\end{aligned}$$

d'autre part d'après la sous-σ-additivité de μ on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \geq \mu(\bigcup_{n\geq 1} B_n)$ d'où le résultat.□

Exercice 9. *Plaçons-nous sur l'ensemble $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; considérons $\mathbb{B} = \{A \subset E : \text{ si } f \in A \text{ alors, pour tout } t \in \mathbb{R}, f_t \in A\}$, où f_t est définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par la relation $f_t(x) = f(x+t)$. Montrer que $\mathbb{B}$ est une tribu et donner les éléments de $\mathbb{B}$ de cardinal fini.*

Solution : $\mathbb{B}$ est une tribu.

(T_1) Il est clair que $\emptyset \in \mathbb{B}$.

(T_2) Soit $A \in \mathbb{B}$. vérifions que le complémentaire A^c de A est dans $\mathbb{B}$. Soit $f \in A^c$ et soit $t \in \mathbb{R}$. Si f_t n'est pas dans A^c, elle sera dans A et donc $(f_t)_{-t} \in A$. Or $(f_t)_{(-t)} = f$ ce qui est absurde.

(T_3) Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{B}$. Soit $f \in \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Il existe $n_0 \geq 1$ tel que $f \in A_{n_0}$ et par suite, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_t \in A_{n_0}$ et donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_t \in \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Donc $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{B}$.

Caractérisons maintenant les éléments de $\mathbb{B}$ qui sont de cardinal fini. Nous allons montrer qu'une partie $A \in \mathbb{B}$ est de cardinal fini si et seulement si A est formée de fonctions constante. Pour cela, nous allons vérifier que si une fonction $f \in E$ est telle que l'ensemble $\{f_t ; t \in \mathbb{R}\}$ est fini alors f est constante. Soit $f \in E$ telle que $\{f_t; t \in \mathbb{R}\} = \{f, f^1, \ldots, f^{n-1}\}$. Notons pour tout $i = 1, \ldots, n-1$, $E_i = \{t \in \mathbb{R}; f_t = f^i$ et $E_0 = \{t \in \mathbb{R}; f_t = f\}$.

$(E_0, E_1, \ldots, E_{n-1})$ est une partition de $\mathbb{R}$. Pour tout $i, j = 0, \ldots, n-1$, on pose

$$E_i \star E_j = \{x + y, x \in E_i \text{ et } \quad y \in E_j\}.$$

L'ensemble $\{E_0, E_1, \ldots, E_{n-1}\}$ muni de la loi $\star$ est un groupe.

- La loi est interne i.e. que pour tout $i, j = 0, \ldots, n-1$, il existe $0 \leq k \leq n-1$ tel que $E_i \star E_j = E_k$.

Soit $x_0 \in E_i$ et $y_0 \in E_j$. Il existe $0 \leq k \leq n-1$ tel que $f_{x_0+y_0} = f^k$. Montrons que $E_i \star E_j = E_k$. Soient $x \in E_i$ et $y \in E_j$. Remarquons que $f^k = f_{x_0+y_0} = (f_{x_0})_{y_0} = (f^i)_{y_0} = (f^j)_{x_0}$. On a

$$f_{x+y} = (f^i)_y = ((f^k)_{-y_0})_y = f_{x_0+y}$$

et le même calcul donnerait donc que $f_{x+y} = f_{x_0+y_0}$ et on a le résultat est vérifié.

- E_0 est clairement l'élément neutre de $\star$.

- La loi $\star$ est clairement associative et commutative.

- Montrons que tout élément admet un symétrique. Soit $i = 1, \ldots, n-1$ et soit $x_0 \in E_i$. Il existe $0 \leq \bar{i} \leq n-1$ tel que $f_{-x} = f^{\bar{i}}$. Il est facile alors de montrer que $E_i \star E_{\bar{i}} = E_0$.

Ainsi $(\{E_0, E_1, \ldots, E_{n-1}\}, \star)$ est un groupe fini d'ordre n et par suite pour tout $0 \leq i \leq n-1$, $nE_i = E_0$ et puisque $\{E_0, E_1, \ldots, E_{n-1}\}$ est une partition de $\mathbb{R}$ $n\mathbb{R} = E_0$ et donc $\mathbb{R} = E_0$ et donc f est constante.□

Exercice 10. *Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est appelée un F_σ (resp. G_δ) lorqu'elle est réunion (resp. intersection) dénombrable de fermés (resp. d'ouverts).*

1) Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}$ des F_σ est stable par réunion dénombrable et par intersection finie.

2) Montrer que l'ensemble $\mathcal{D}$ des G_δ est stable par intersection dénombrable et par réunion finie.

3) Donner un exemple de G_δ qui n'est ni ouvert ni fermé.

4) Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est un F_σ et que tout fermé de $\mathbb{R}$ est un G_δ.

5) Comparer la tribu engendrée par les F_σ à celle engendrée par les G_δ. Comparer ces deux tribus à la tribu $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$.

Solution : 1) Soit $(A_n)_{n\geq}$ une suite dans $\mathcal{S}$. Pour tout $n \geq 1$, il existe une suite $(F_{n,k})_{k\geq 1}$ de fermés telle que $A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{n,k}$. On a donc que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n,k}^{\infty} F_{n,k}$ et puisque $\{F_{n,k}; (n,k) \in \mathbb{N}^*\}$ est dénombrable alors $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ est un F_σ.

Montrons que $\mathcal{S}$ est stable par intersection finie. Pour cela, il suffit de le vérifier pour deux éléments. Soit (A_1, A_2) deux élément de $\mathcal{S}$. Pour tout $1 \leq j \leq 2$, il existe une suite $(F_{j,k})_{k\geq 1}$ de fermés telle que $A_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_{j,k}$. On a

$$A_1 \cap A_2 = (\bigcup_{k=1}^{\infty} F_{1,k}) \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} F_{2,k}) = \bigcup_{(n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} (F_{1,n} \cap F_{2,k}).$$

Comme une intersection finie de fermés est un fermé et que $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable, $A_1 \cap A_2$ est bien dans $\mathcal{S}$.

2) Comme le complémentaire d'un G_σ est un F_σ et vice versa, le résultat est une conséquence de 1).

3) $[0, 1[$ n'est ni ouvert ni fermé. Par contre $[0, 1[$ est un G_σ, d'après l'égalité $[0, 1[= \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}] - \frac{1}{n}, 1[$.

4) Montrons que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est un F_σ. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$, on sait que O est une réunion dénombrable d'intervalle ouvert borné (voir cours). Pour avoir le résultat, il suffit de montrer que tout intervalle ouvert borné est réunion dénombrable de fermés. Or $]a, b[$ $(a < b)$ est un intervalle ouvert borné, on a

$$]a, b[= \bigcup_{n\geq 1} [a + \frac{b-a}{2^n}, b - \frac{b-a}{2^n}].$$

5) Montrons que la tribu $\tau_{\mathbb{R}}(\mathcal{S})$ engendrée par les F_σ est égale à $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$.

Puique, tout élément de $\mathcal{S}$ est une réunion dénombrable de fermés donc il est dans $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ et donc $\tau_{\mathbb{R}}(\mathcal{S}) \subset \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$. D'un autre côté, d'après 4), tout ouvert de $\mathbb{R}$ est dans $\mathcal{S}$ et donc on a l'autre inclusion.

On montre de la même façon que la tribu engendrée par les $G\sigma$ est égale à $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$.$\square$

Exercice 11. *Montrer que*

$$\mathbb{B}_{\mathbb{R}} = \tau_{\mathbb{R}}(\{] - \infty, a] : a \in \mathbb{Q}\ \}) \quad \text{et} \quad \mathbb{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \tau_{\overline{\mathbb{R}}}(\{]a, +\infty] : a \in \mathbb{Q}\ \}).$$

Solution : On a, pour tout $a \in \mathbb{Q}$, $] - \infty, a] \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ et donc $\mathbb{B}_{\mathbb{R}} \supset \tau_{\mathbb{R}}(\{] - \infty, a] : a \in \mathbb{Q}\ \})$. Inversement, pour tout $a \in \mathbb{R}$, i existe une suite $(r_n)_{n\geq 1}$ décroissante dans $\mathbb{Q}$ telle que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} r_n = a$. Il s'ensuit donc que $] - \infty, a] = \bigcap_{n=1}^{\infty}] - \infty, r_n] \in \tau_{\mathbb{R}}(\{] - \infty, a] : a \in \mathbb{Q}\ \})$ et par suite $\mathbb{B}_{\mathbb{R}} \subset \tau_{\mathbb{R}}(\{] - \infty, a] : a \in \mathbb{Q}\ \})$ car $\mathbb{B}_{\mathbb{R}} = \tau_{\mathbb{R}}(\{] - \infty, a] : a \in \mathbb{R}\ \})$. On a donc démontrer que

$$\mathbb{B}_{\mathbb{R}} = \tau_{\mathbb{R}}(\{] - \infty, a] : a \in \mathbb{Q}\ \}).$$

L'autre égalité se démontre de la même manière.$\square$

Exercice 12. *Pour $A \subset \mathbb{R}$, montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) $A \in \mathbb{B}_\lambda$;

2) $\exists B \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}, \exists N \in \mathcal{N}_\lambda, A = B \setminus N$;

2') $\exists B \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}, \exists N \in \mathcal{N}_\lambda, A = B \setminus N, N \subset B$;

3) $\exists B \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}, \exists N \in \mathcal{N}_\lambda, A = B \cup N$;

3') $\exists B \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}, \exists N \in \mathcal{N}_\lambda, A = B \cup N, N \cap B = \emptyset$.

De plus en (2), (2'), (3) et (3'), $\lambda(A) = \lambda(B)$.

Déduire de ce qui précède que, pour toute partie Lebesgue-mesurable A, il existe deux boréliens B_1 et B_2 tels que

$$B_1 \subset A \subset B_2 \quad \textit{et} \quad \lambda_1(B_1) = \lambda(B_2) = \lambda(A).$$

Solution : On commence par remarquer que l'égalité s'obtient facilement dans chacun des cas par :

$$\begin{aligned}
\lambda(A) &= \lambda(B \setminus N) = \lambda(B \setminus (B \cap N)) = \lambda(B) - \lambda(B \cap N) = \lambda(B) \\
\lambda(A) &= \lambda(B \cup N) = \lambda(B \cup (N \setminus B)) = \lambda(B) - \lambda(N \setminus B) = \lambda(B).
\end{aligned}$$

Les implications $2') \Rightarrow 2)$ et $3') \Rightarrow 3)$ sont triviales.

$1) \Rightarrow 2')$. Premier cas : $\lambda(A) < +\infty$. Alors d'après l'exercice 7), il existe une suite $(U_k)_{k \geq 1}$ d'ouverts contenant A tels que, pour tout entier $k \geq 1$, on ait : $\lambda(A) \leq \lambda(U_k) \leq \lambda(A) + \dfrac{1}{k}$.

Posons alors $B = \displaystyle\bigcap_{k=1}^{\infty} U_k \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$. Il est clair que $A \subset B$ et que, pour tout entier $k \geq 1$, $\lambda(A) \leq \lambda(B) \leq \lambda(A) + \dfrac{1}{k}$.

On en déduit que $\lambda(A) = \lambda(B) = \lambda(A) + \lambda(B \setminus A)$, si bien que le résultat désiré est obtenu avec $N = B \setminus A$.

Deuxième cas : $\lambda(A) = +\infty$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $A_n = A \cap [-n, n]$. On a $A = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. De plus par application à A_n du cas précédent (puisque $\lambda(A_n) \leq 2n < +\infty$), il existe $B_n \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ et $N_n \in \mathcal{N}_\lambda$ tel que $N_n \subset B_n$ et $A_n = B_n \setminus N_n$, de sorte que $B_n = A_n \cup N_n$ et ceci pour tout $n \geq 1$. Il en résulte :

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \right) = A \cup \left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \right) \setminus A \right).$$

Par suite :

$$A = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \setminus \left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n\right) \setminus A\right) \quad \text{où} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n\right) \setminus A \in \mathcal{N}_\lambda.$$

2) $\Rightarrow$ 3′). On suppose que $A = B \setminus N$ avec $B \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}etN \in \mathcal{N}_\lambda \subset \mathbb{B}_\lambda$. En appliquant à N l'étude du premier cas ci-dessus, on obtient l'existence d'un $N' \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ tel que $N \subset N'$ et $\lambda(N) = \lambda(N') = 0$. I suffit alors d'écrire

$$A = B \setminus N = (B \setminus N') \cup (B \cap (N' \setminus N))$$

où l'on a bien $B \setminus N' \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ et $B \cap (N' \setminus N) \in \mathcal{N}_\lambda$ et $(B \setminus N') \cap (B \cap (N' \setminus N)) = \emptyset$.

3) $\Rightarrow$ 1). C'est immédiat puisque $\mathbb{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{B}_\lambda$ et $\mathcal{N}_\lambda \subset \mathbb{B}_\lambda$.□

Exercice 13. *Soit E un ensemble non vide et $\mathbb{C}$ une partie de $\mathcal{P}(E)$.*

1) Montrer que

$$\tau_E(\mathbb{C}) = \tau_E(b(\mathbb{C}))$$

où $b(\mathbb{C})$ est l'algèbre de Boole engendrée par $\mathbb{C}$.

On dira que $\mathbb{C}$ est une classe monotone si pour toute suite croissante $(A_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathbb{C}$, $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathbb{C}$ et pour toute suite décroissante $(B_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathbb{C}$, $\bigcap_{n\geq 1} B_n \in \mathbb{C}$.

2) Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Boole sur E. Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu si, et seulement si, $\mathcal{A}$ est une classe monotone.

(Une partie $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ est dite algèbre de Boole si $E \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ stable par passage au complémentaire et stabe par réunion finie.)

Solution : 1) Ona clairement que $\tau_E(\mathbb{C})$ est une algèbre de Boole qui contient $\mathbb{C}$ et donc $b(\mathbb{C}) \subset \tau_E(\mathbb{C})$ et par suite $\tau_E(\mathbb{C}) \supset \tau_E(b(\mathbb{C}))$. D'un autre côté, on a $\mathbb{C} \subset b(\mathbb{C})$ et donc $\tau_E(\mathbb{C}) \subset \tau_E(b(\mathbb{C}))$.

2) Il est clair que si $\mathcal{A}$ est une tribu alors $\mathcal{A}$ est une classe monotone.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de Boole qui est aussi une classe monotone. Montrons que $\mathcal{A}$ est une tribu. Les axiomes (T_1) et (T_2) sont clairement vérifiés. Vérifions l'axiome (T_3). Soit $(B_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $\mathcal{A}$. On pose pour tout $p \geq 1$, $A_p = \bigcup_{n=1}^{p} B_n$. Puisque $\mathcal{A}$ est une algèbre de Boole, on a, pour tout $p \geq 1$, $A_p \in \mathcal{A}$. D'un autre côté, la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$ et donc $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$. Puisque $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, on déduit l'axiome (T_3).□

Exercice 14. *Soit $(E, \mathbb{B})$ un espace mesurable et $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite de mesures telles que pour tout $A \in \mathbb{B}$ on ait*

$$\mu_1(A) \leq \mu_2(A) \leq \ldots \leq \mu_n(A) \leq \ldots$$

Si $A \in \mathbb{B}$, on pose $\mu(A) = \sup_{n\geq 1} \mu_n(A)$. Montrer que μ est une mesure sur $(E, \mathbb{B})$.

Solution : En utilisant l'exercice 8), on va montrer que μ vérifie l'axiome (M_1), qu'elle est additive et sous-σ-additive.

(M_1). On clairement que $\mu(\emptyset) = \sup_{n\geq 1} \mu_n(\emptyset) = 0$.

μ est additive. Soient $A, B \in \mathbb{B}$ deux parties disjointes. On a

$$\mu(A \cup B) = \sup_{n\geq 1} \mu_n(A \cup B) = \sup_{n\geq 1}(\mu_n(A) + \mu_n(B) = \sup_{n\geq 1} \mu_n(A) + \sup_{n\geq 1} \mu_n(B) = \mu(A) + \mu(B).$$

μ est sous-σ-additive. Soit $(B_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $\mathbb{B}$. On a, pour tout $m \geq 1$,

$$\mu_m(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_m(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{k\geq 1} \mu_k(B_n).$$

Par suite

$$\sup_{m\geq 1} \mu_m(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{k\geq 1} \mu_k(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n).$$

□

Exercice 15. *Soit $(E, \mathbb{B}, \mu)$ un espace mesuré. On pose $\overline{N_\mu} = \{M ; \exists N \in N_\mu, M \subset N\}$.*

1) Montrer que $\mathbb{B}^\mu = \{B \cup M ; B \in \mathbb{B}, M \in \overline{N_\mu}\}$ est une tribu sur E contenant $\mathbb{B}$ et $\overline{N_\mu}$.

$\mathbb{B}^\mu$ est la tribu complétée de la tribu $\mathbb{B}$ par rapport à la mesure μ.

2) Montrer que $\overline{\mu} : \mathbb{B}^\mu \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ qui à $B \cup M \mapsto \mu(B)$ est une mesure complète.

$\overline{\mu}$ est la mesure complétée de la mesure μ et $(E, \mathbb{B}^\mu, \overline{\mu})$ est l'espace mesuré complété de l'espace mesuré $(E, \mathbb{B}, \mu)$.

3) Montrer que μ σ-finie $\Rightarrow$ $\overline{\mu}$ σ-finie.

4) Montrer que l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathbb{B}_\lambda, \lambda)$ est le complété de l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathbb{B}_{\mathbb{R}}, \beta)$.

Solution : 1) L'inclusion $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}^\mu$ (resp. $\overline{N_\mu} \subset \mathbb{B}^\mu$ est évidente puisque $\emptyset \in \overline{N_\mu}$ (resp. $\emptyset \in \mathbb{B}$). Vérifions que $\mathbb{B}^\mu$ est une tribu.

(T_1) $\emptyset \in \mathbb{B}^\mu$ puisque $\emptyset \in \mathbb{B}$ et $\mathbb{B} \subset \mathbb{B}^\mu$.

(T_2) Soit $B \cup M \in \mathbb{B}^\mu$ avec $B \in \mathbb{B}$ et $M \in \overline{N_\mu}$, et soit $N \in \mathcal{N}_\mu$ tel que $M \subset N$. Alors :

$$\begin{aligned} E \setminus (B \cup M) &= (E \setminus B) \cap (E \setminus M) = (E \setminus B) \cap ((E \setminus N) \cup (N \setminus M)) \\ &= ((E \setminus B) \cap (E \setminus N)) \cup ((E \setminus B) \cap (N \setminus M)), \end{aligned}$$

où $(E \setminus B) \cap (E \setminus N) \in \mathbb{B}$ et $(E \setminus B) \cap (N \setminus M) \subset N \in \mathcal{N}_\mu$ de sorte que $E \setminus (B \cup M) \in \mathbb{B}^\mu$.

(T_3) Soit $(B_n \cup M_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathbb{B}^\mu$, avec $B_n \in \mathbb{B}$ et $M_n \in \overline{N_\mu}$ pour tout $n \geq 1$. Alors :

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n \cup M_n) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right)$$

où $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathbb{B}$, et où $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \in \mathcal{N}_\mu$ si $M_n \in N_n \in \mathcal{N}_\mu$ pour tout $n \geq 1$, si bien que $\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n \cup M_n) \in \mathbb{B}^\mu$.

2) Comme un élément de $\mathbb{B}^\mu$ est susceptible de plusieurs représentations du type $B \cup M$ avec $B \in \mathbb{B}$ et $M \in \overline{N_\mu}$, il convient d'abord de s'assurer que la formule $\overline{\mu}(B \cup M) = \mu(B)$ définit bien une application sur $\mathbb{B}^\mu$, c'est-à-dire que l'on a toujours $\mu(B_1) = \mu(B_2)$ si $B_1 \cup M_1$ et $B_2 \cup M_2$ sont deux représentations d'un même élément de $\mathbb{B}^\mu$. Et c'est bien le cas car, si $M_2 \subset N_2 \in \mathcal{N}_\mu$, on a

$$B_1 \subset B_1 \cup M_1 = B_2 \cup M_2 \subset B_2 \cup N_2 \Rightarrow \mu(B_1) \leq \mu(B_2 \cup N_2) \leq \mu(B_2)+\mu(N_2) = \mu(B_2)$$

et symétriquement $\mu(B_2) \leq \mu(B_1)$ ce qui prouve l'égalité.

• $\overline{\mu}$ est une mesure sur $\mathbb{B}^\mu$.

Cette fonction prend bien ses valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

(M_1) Comme $\emptyset \in \mathbb{B} \cap \overline{N_\mu}$, il vient $\overline{\mu}(\emptyset) = \overline{\mu}(\emptyset \cup \emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$.

(M_2) Soit $(B_n \cup M_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathbb{B}^\mu$ disjointe, avec $B_n \in \mathbb{B}$ et $M_\in \overline{N_\mu}$ pour tout $n \geq 1$. Alors la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ de $\mathbb{B}$ est a fortiori disjointe et, compte tenu de la démonstration donnée ci-dessus (T_3), il en résulte :

$$\begin{aligned}\overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n \cup M_n)\right) &= \overline{\mu}\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(B_n \cup M_n).\end{aligned}$$

• $\overline{\mu}$ est complète. Soit $A \subset B \cup M \in \mathbb{B}^\mu$, avec $B \in \mathbb{B}$ et $M \subset N \in \mathcal{N}_\mu$ et supposons que $\overline{\mu}(B \cup M) = \mu(B) = 0$. Il vient $A \subset B \cup M \subset B \cup N \in \mathcal{N}_\mu$, si bien que $A \in \overline{N_\mu} \subset \mathbb{B}^\mu$.

3) C'est évident.

4) L'exercice 12) permet d'affirmer :

a) $\forall N \in \mathcal{N}_\lambda$, $\exists B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $N \subset B$ et $\beta(B) = 0$, c'est-à-dire $\mathcal{N}_\lambda = \overline{N_\beta}$, et

b) $A \in \mathcal{B}_\lambda \Leftrightarrow \exists B \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$, $\exists N \in \mathcal{N}_\lambda$, $A = B \cup N$, ce qui signifie que $\mathbb{B}_\lambda = (\mathbb{B}_{\mathbb{R}})^\beta$. L'égalité $\lambda = \overline{\beta}$ en résulte puisque λ prolonge β.□

Chapitre 2

Fonctions mesurables

Un espace mesuré $(E, \mathcal{B}, \mu)$ étant donné, la théorie de l'intégration a pour objet de déterminer, au moyen de μ et de façon naturelle, la "mesure" de fonctions numériques définies sur E. Mais de même que μ n'attribue pas une mesure à toute partie de E mais seulement à celles qui appartiennent à la tribu $\mathcal{B}$, seules les fonctions compatibles avec $\mathcal{B}$, en un certain sens, seront susceptibles d'être mesurées par μ. Cette nécessaire compatibilité correspond à la notion précise de "mesurabilité" qui est étudiée dans ce chapitre.

2.1 Généralités sur les fonctions mesurables

Définition 11 *Deux espaces mesurables $(E_i, \mathcal{B}_i)$, $i = 1, 2$, étant donnés, une fonction $f : E_1 \longrightarrow E_2$ est dite $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$-mesurable ou, simplement, mesurable, si $f^{-1}(\mathcal{B}_2) \subset \mathcal{B}_1$.*

Remarque 1 *La définition des fonctions mesurables entre deux espaces mesurables et à rapprocher de la caractérisation globale de la continuité d'une fonction entre deux espaces topologiques.*$\square$

Exemple. Toute fonction constante $f : E_1 \longrightarrow E_2$ est mesurable.$\square$

Proposition 7 *Considérons deux ensembles non vides E_1 et E_2, et une fonction $f : E_1 \longrightarrow E_2$. Soit $\mathcal{B}_2$ une tribu sur E_2. Alors :*
1) $f^{-1}(\mathcal{B}_2)$ est une tribu sur E_1 ;
2) pour tout $\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{P}(E_2)$: $f^{-1}(\tau_{E_2}(\mathcal{E}_2)) = \tau_{E_1}(f^{-1}(\mathcal{E}_2))$.

Preuve : 1) Cette propriété résulte sans difficulté du bon comportement de la fonction image réciproque vis-à-vis des opérations ensemblistes.

2) Soit $\mathcal{B}_1$ une tribu sur E_1 telle que $f^{-1}(\mathcal{E}_2) \subset \mathcal{B}_1$. Si l'on pose

$$\mathcal{C}_2 = \{C_2; C_2 \subset E_2, f^{-1}(C_2) \in \mathcal{B}_1\},$$

il est clair que $\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{C}_2$, et que $\mathcal{C}_2$ est une tribu sur E_2. Il en résulte que $\tau_{E_2}(\mathcal{E}_2) \subset \mathcal{C}_2$, et par suite $f^{-1}(\tau_{E_2}(\mathcal{E}_2)) \subset \mathcal{B}_1$. Mais d'une part, d'après 1),

$f^{-1}(\tau_{E_2}(\mathcal{E}_2))$ est une tribu sur E_1 et, d'autre part, $f^{-1}(\mathcal{E}_2) \subset f^{-1}(\tau_{E_2}(\mathcal{E}_2))$ puisque $\mathcal{E}_2 \subset \tau_{E_2}(\mathcal{E}_2)$. Ce qui précède démontre alors que $f^{-1}(\tau_{E_2}(\mathcal{E}_2))$ est la plus petite tribu sur E_1 contenant $f^{-1}(\mathcal{E}_2)$; autrement dit : $f^{-1}(\tau_{E_2}(\mathcal{E}_2)) = \tau_{E_1}(f^{-1}(\mathcal{E}_2))$.$\square$

Corollaire 11 *Considérons deux espaces mesurables $(E_i, \mathcal{B}_i)$, $i = 1, 2$, et $\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{B}_2$ vérifiant $\tau_{E_2}(\mathcal{E}_2) = \mathcal{B}_2$. Alors pour toute fonction $f : E_1 \longrightarrow E_2$, f est mesurable si et seulement si $f^{-1}(\mathcal{E}_2) \subset \mathcal{B}_1$.*

Corollaire 12 *On considère deux espaces topologiques $(E_i, \mathcal{O}_i)$, $i = 1, 2$, et une fonction continue $f : E_1 \longrightarrow E_2$. Alors f est $(\mathcal{B}_{E_1}, \mathcal{B}_{E_2})$-mesurable.*

Définition 12 *a) On considère deux espaces topologiques $(E_i, \mathcal{O}_i)$, $i = 1, 2$. Une fonction $f : E_1 \longrightarrow E_2$ est dite borélienne si elle est $(\mathcal{B}_{E_1}, \mathcal{B}_{E_2})$-mesurable.*

b) Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite Lebesgue-mesurable si elle est $(\mathcal{B}_\lambda, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-mesurable.

Remarque 2 *1) D'après le Corollaire 1.2, toute fonction continue entre deux espaces toplogiques quelconques est donc un cas particulier de fonction borélienne.*

2) Plus spécialement, toute fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est borélienne c'est à dire $(\mathcal{B}_\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-mesurable. Elle est donc a fortiori $(\mathcal{B}_\lambda, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-mesurable, c'est-à-dire Lebesgue-mesurable, mais elle ne sera en général ni $(\mathcal{B}_\mathbb{R}, \mathcal{B}_\lambda)$-mesurable, ni même $(\mathcal{B}_\lambda, \mathcal{B}_\lambda)$-mesurable.$\square$

Proposition 8 *Considérons trois espaces mesurables $(E_i, \mathcal{B}_i)$, $i = 1, 2, 3$, et deux fonctions $f : E_1 \longrightarrow E_2$ $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$-mesurable, et $g : E_2 \longrightarrow E_3$ $(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3)$-mesurable. Alors $g \circ f : E_1 \longrightarrow E_3$ est $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3)$-mesurable.*

Preuve : Conséquence immédiate de la Proposition 2.2 du chapitre 0.$\square$

Corollaire 13 *Considérons un espace mesurable $(E, \mathcal{B})$, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}$) une fonction $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-(resp. $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$-) mesurable, et $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (resp. $\overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$) une fonction continue.*

Alors, la fonction $\phi \circ f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}$) est $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-(resp. $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$-) mesurable.

2.2 Fonctions numériques mesurables

Définition 13 *Etant donné un espace mesurable $(E, \mathcal{B})$, une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ (resp. $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$) est dite $\mathcal{B}$-mesurable ou, simplement mesurable, si elle est $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$-mesurable (resp. $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$-mesurable).*

Remarque 3 *1) Soit $(E,\mathcal{B})$ un espace mesurable. Une fonction $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ telle que $f(E) \subset \mathbb{R}$ est $\mathcal{B}$-mesurable si et seulement si, considérée comme fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, elle est $(\mathcal{B},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-mesurable.*

La mesurabilité d'une fonction à valeurs réelles ne recèle donc aucune ambiguité, d'autant que, sauf mention expresse du contraire, elle est toujours relative à la tribu borélienne sur $\mathbb{R}$ (et non à $\mathcal{B}_\lambda$, autre tribu remarquable de $\mathbb{R}$).

2) Soit $(E,\mathcal{B})$ un espace mesurable. Comme $\{a\}$ est un fermé, donc borélien de $\mathbb{R}$, pour chaque $a \in \mathbb{R}$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}$), il vient $f^{-1}(a) \in \mathcal{B}$ pour toute fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}$) $\mathcal{B}$-mesurable.□

Notations. 1) Si $(E,\mathcal{B})$ est un espace mesurable, nous noterons $\mathcal{M}(E,\mathcal{B},\overline{\mathbb{R}})$ (resp. $\mathcal{M}(E,\mathcal{B},\overline{\mathbb{R}}_+)$, $\mathcal{M}(E,\mathcal{B},\mathbb{R})$, etc.) l'ensemble des fonctions numériques définies sur E et $\mathcal{B}$-mesurables, à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ (resp. $\overline{\mathbb{R}}_+$, $\mathbb{R}$, etc.).

2) Concernant $f, g : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, et $a \in \overline{\mathbb{R}}$, nous utiliserons des notations commodes et suggestives dont le principe est indiqué par les exemples suivants :

$$\begin{aligned}
\{f \le a\} &= f^{-1}([-\infty, a]) \\
\{f < g\} &= \{x \in E; f(x) < g(x)\} \\
\{f \ne g\} &= \{x \in E; f(x) \ne g(x)\}, \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Proposition 9 *Soit $(E,\mathcal{B})$ un espace mesurable. Pour une fonction $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) f est $\mathcal{B}$-mesurable ;
2) $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \{f < a\} \in \mathcal{B}$; 2') $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \{f \le a\} \in \mathcal{B}$;
2") $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \{f > a\} \in \mathcal{B}$; 2"') $\forall a \in \mathbb{R}, \quad \{f \ge a\} \in \mathcal{B}$.

Preuve : Par une démonstration analogue à celle de la Proposition 3.3 du chapitre 1, on peut établir que

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} &= \tau_{\overline{\mathbb{R}}}(\{[-\infty, a[;\ a \in \mathbb{R}\}) = \tau_{\overline{\mathbb{R}}}(\{[-\infty, a];\ a \in \mathbb{R}\}) \\
&= \tau_{\overline{\mathbb{R}}}(\{]a, +\infty];\ a \in \mathbb{R}\}) = \tau_{\overline{\mathbb{R}}}(\{[a, +\infty];\ a \in \mathbb{R}\}).
\end{aligned}$$

Il reste à appliquer le Corollaire 1.1□

Corollaire 14 *Toute fonction monotone $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est borélienne.*

Preuve : Supposons, par exemple, f croissante. Alors, si $a \in \mathbb{R}$:
- ou bien f est majorée par a, et dans ce cas $\{f \le a\} = \mathbb{R}$;
- ou bien f est strictement minoré par a, et dans ce cas $\{f \le a\} = \emptyset$;
- ou bien, enfin, aucun des cas ci-dessus n'est réalisé et alors, si

$$x_0 = \sup\{x; x \in \mathbb{R}, f(x) \le a\},$$

il vient $\{f \le a\} =]-\infty, x_0[$ ou $]-\infty, x_0]$ selon le cas. Ainsi $\{f \le a\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$, et le résultat est obtenu par la Proposition 2.1.□

Proposition 10 *Si* $(E, \mathcal{B})$ *est un espace mesurable :*

$$f, g \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}}) \Rightarrow \{f < g\}, \{f \leq g\}, \{f = g\}, \{f \neq g\} \in \mathcal{B}.$$

Preuve : En utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, on obtient :

$$\begin{aligned} x \in \{f < g\} \quad &\Leftrightarrow \quad f(x) < g(x) \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{Q},\ f(x) < r < g(x) \\ &\Leftrightarrow \quad \exists r \in \mathbb{Q},\ x \in \{f < r\} \cap \{r < g\} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{f < r\} \cap \{r < g\}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\{f < g\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{f < r\} \cap \{r < g\}$. Or, il résulte de la Proposition 2.1 que $\{f < r\} \cap \{r < g\} \in \mathcal{B}$ pour chaque $r \in \mathbb{Q}$. D'autre part, $\mathbb{Q}$ est dénombrable, on en conclut que $\{f < g\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{f < r\} \cap \{r < g\} \in \mathcal{B}$.

L'appartenance des autres ensembles à la tribu $\mathcal{B}$ se déduit de la propriété ci-dessus en utilisant successivement les égalités :

$$\{f \leq g\} = E \backslash \{f < g\},\ \{f = g\} = \{f \leq g\} \cap \{f \geq g\},\ \{f \neq g\} = E \backslash \{f = g\}.$$

□

Théorème 11 *Soit* $(E, \mathcal{B})$ *un espace mesurable. Si* $f, g \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}})$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$*, alors* $f + g$ *(si cette fonction est partout définie sur* E*),* αf *et* fg *sont* $\mathcal{B}$*-mseurables.*

En particulier, $\mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R})$ *est un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$*.*

Preuve : a) D'après la Proposition 2.1, pour tout $b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}}) \quad &\Leftrightarrow \quad \forall a \in \mathbb{R},\ \{b - g > b - a\} = \{g < a\} \in \mathcal{B} \\ &\Leftrightarrow \quad \forall c \in \mathbb{R}, \{b - g > c\} \in \mathcal{B} \Leftrightarrow b - g \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}}). \end{aligned}$$

Alors, par la Proposition 2.2 on obtient :

$$\forall b \in \mathbb{R},\ \{f + g < b\} = \{f < b - g\} \in \mathcal{B},$$

ce qui équivaut à $f + g \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}})$. (Proposition 2.1).

b) Pour obtenir $\alpha f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}})$, il suffit d'observer que $\alpha f = \phi \circ f$, où ϕ est la fonction continue $x \mapsto \lambda x$ de $\overline{\mathbb{R}}$ vers lui même, et d'appliquer le Corollaire 1.3.

c) Supposons que $f, g \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R})$, et notons que $f^2 \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R})$ (car $f^2 = \psi \circ f$, où ψ est la fonction continue $x \mapsto x^2$ de $\overline{\mathbb{R}}$ vers lui même, et d'appliquer le Corollaire 1.3). Ce résultat, combiné à ceux des parties a) et b) ci-dessus, permet alors d'exploiter l'identité

$$fg = \frac{1}{4}\left((f + g)^2 - (f - g)^2\right)$$

pour obtenir la mesurabilité de fg.

Dans le cas général où $f, g \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}})$, posons $E^* = \{f \in \mathbb{R}\} \cap \{g \in \mathbb{R}\}$ et désignons par f^* et g^* les restrictions de f et g à E^*. Pour chaque $a \in \mathbb{R}$, on peut écrire $\{fg < a\} = A \cup B \cup C$ où

(α) $A = \{fg < a\} \cap E^* = \{f^* g^* < a\} \in \mathcal{B} \cap E^* \subset \mathcal{B}$, d'après le Corollaire 1.3 et le cas particulier traité ci-dessus ;

$$(\beta) \quad B = \{fg < a\} \cap \{fg = 0\} = \begin{cases} \emptyset \in \mathcal{B} & \text{si} \quad a \leq 0 \\ \{g = 0\} \cup \{g = 0\} \in \mathcal{B} & \text{si} \quad a > 0. \end{cases}$$

$$\begin{array}{rcl} (\gamma) \qquad C & = & \{fg = -\infty\} \\ & = & (\{f = -\infty\} \cap \{g > 0\}) \cup (\{f = +\infty\} \cap \{g < 0\}) \\ & & \cup(\{f > 0\} \cap \{g = -\infty\}) \cup (\{f < 0\} \cap \{g = +\infty\}) \in \mathcal{B}, \end{array}$$

et on conclut par la Proposition 2.1.□

Remarque 4 *Le Théorème 2.1 a été établi sous la convention*

$$0 \times (\pm\infty) = (\pm\infty) \times 0 = 0$$

toujours observée en théorie de l'intégration.□

Proposition 11 *Soit $(E, \mathcal{B})$ un espace mesurable et soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de $\mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}})$. Alors, chacune des fonctions $\sup\limits_{n \geq 1} f_n$, $\inf\limits_{n \geq 1} f_n$, $\limsup\limits_{n \to +\infty} f_n$, $\liminf\limits_{n \to +\infty} f_n$, est $\mathcal{B}$-mesurable.*

Preuve : La mesurabilité de $\sup\limits_{n \geq 1} f_n$ résulte aussitôt de l'égalité

$$\left\{\sup_{n \geq 1} f_n \leq a\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n \leq a\}$$

valable pour tout $a \in \mathbb{R}$, et de la Proposition 2.1. Enuite, on écrit :

$$\inf_{n \geq 1} f_n = -\sup_{n \geq 1}(-f_n).$$

Enfin, on utilise les fromules de définition des limites supérieure et inférieure.□

Corollaire 15 *Soit $(E, \mathcal{B})$ un espace mesurable et soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de $\mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}})$ qui converge simplement vers la fonction $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Alors f est $\mathcal{B}$-mesurable.*

Corollaire 16 *Soit $(E, \mathcal{B})$ un espace mesurable et soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de $\mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}}_+)$. Alors la fonction $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ est $\mathcal{B}$-mesurable.*

Corollaire 17 *Soit* $(E, \mathcal{B})$ *un espace mesurable et soient* $f, g \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}})$. *Alors les fonctions* $\sup(f, g)$, $\inf(f, g)$ *et* $|f|$ *sont* $\mathcal{B}$*-mesurables.*

Remarque 5 *1) On appelle respectivement partie positive et partie négative de la fonction* f *les fonctions* $f^+ = \sup(f, 0)$ *et* $f^- = \sup(-f, 0)$. *Ces deux fonctions qui sont toutes les deux positives, vérifient*

$$f = f^+ - f^- \qquad \text{et} \qquad |f| = f^+ + f^-.$$

D'après le Corollaire 2.4, si f *est* $\mathcal{B}$*-mesurable, il en est de même pour* f^+ *et* f^-.

2) Nous venons d'établir :

$$f \quad \mathcal{B}\text{-mesurable} \quad \Rightarrow \quad |f| \quad \mathcal{B}\text{-mesurable}.$$

Mais la réciproque est fausse en général. En effet, si $(E, \mathcal{B})$ *est un espace mesurable où* $\mathcal{B} \neq \mathcal{P}(E)$, *et si* $A \in \mathcal{P}(E) \setminus \mathcal{B}$, *la fonction* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par* $f(x) = 1$ *ou* -1 *selon que* $x \in A$ *ou* $x \in E \setminus A$, *n'est pas mesurable (puisque* $f^{-1}(\{1\}) = A \notin \mathcal{B}$*), tandis que* $|f|$ *est mesurable puisque c'est une fonction constante.*□

Corollaire 18 *Soit* $(E, \mathcal{B})$ *un espace mesurable et soient* $f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R})$ *et un réel* $p > 0$. *Alors* $|f|^p \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R}_+)$.

Preuve : D'après le Corollaire 2.4, on a $|f| \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R}_+)$. Il reste à appliquer à $|f|$ le Corollaire 1.4 avec $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction continue définie par :

$$\phi(x) = \begin{cases} x^p & \text{si} \quad x \geq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

□

2.3 Fonctions étagées

Définition 14 *Soit* $(E, \mathcal{B})$ *un espace mesurable. Une fonction* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite étagée, si elle est* $\mathcal{B}$*-mesurable et ne prend qu'un ensemble fini de valeurs.*

Notations. 1) Nous désignerons par $\mathcal{E}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{E}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R}_+)$, etc.) l'ensemble des fonctions étagées (resp. étagées positives, etc.).

2) Si A est une partie d'un ensemble E, nous noterons 1_A la fonction indicatrice de A, définie par

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A, \\ 0 & \text{si} \quad x \in E \setminus A. \end{cases}$$

□

Exemple. Soit $(E,\mathcal{B})$ un espace mesurable. Pour tout $B \in \mathcal{B}$, 1_B est une fonction étagée.

En effet, 1_B ne prend que deux valeurs, et elle est mesurable car, pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\{1_B < a\} = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad a \leq 0, \\ E \setminus B & \text{si} \quad 0 < a \leq 1, \\ E & \text{si} \quad a > 1, \end{cases}$$

de sorte que $\{1_B < a\} \in \mathcal{B}$, et on conclut par la Proposition 2.1.□

Théorème 12 *Soit $(E,\mathcal{B})$ un espace mesurable. Pour une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) f est étagée ;

2) $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $\exists B_1,\ldots,B_n \in \mathcal{B}$, $\exists \beta_1,\ldots,\beta_n \in \mathbb{R}$, $f = \sum_{k=1}^{n} \beta_k 1_{B_k}$;

3) $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $\exists C_1,\ldots,C_p \in \mathcal{B}$, deux à deux disjoints $\exists \gamma_1,\ldots,\gamma_p \in \mathbb{R}$,

$$f = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k 1_{C_k} \qquad \textit{(représentation disjointe).}$$

Preuve : 1) $\Rightarrow$ 3). Si f est étagée et prend p valeurs distinctes $\gamma_1,\ldots,\gamma_p \in \mathbb{R}$, on vérifie facilement l'égalité

$$f = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k 1_{\{f=\gamma_k\}}$$

où $\{f = \gamma_k\} \in \mathcal{B}$ pour tout $k \in \{1,\ldots,k\}$ puisque f est mesurable et les $\{f = \gamma_k\}$ sont deux à deux disjoints puisque les γ_k sont distincts. Cette dernière propriété caractérise la représentation canonique de f, qui est une représentation disjointe particulière.

3) $\Rightarrow$ 2) est trivial.

2) $\Rightarrow$ 1). Pour chaque $k \in \{1,\ldots,n\}$, on a $B_k \in \mathcal{B}$ et, par suite, 1_{B_k} est mesurable et donc f est mesurable (Théorème 2.1). D'autre part, chaque $x \in E$ appartient à q ensemble B_k, $0 \leq q \leq n$, de sorte que chaque valeur prise par f est soit 0, soit une somme de q réels, $1 \leq q \leq n$, pris parmi les β_k. La fonction f prend donc au plus 2^n valeurs distinctes.□

Remarque 6 *1) Il ressort de l'énoncé du Théorème 3.1 et de sa démonstration qu'une même fonction étagée possède en général plusieurs représentations comme combinaison linéraire de fonctions indicatrices d'éléments de $\mathcal{B}$.*

2) Il résulte du Théorème 3.1 que $\mathcal{E}(E,\mathcal{B},\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}(E,\mathcal{B},\mathbb{R})$.

3) Si $E = \mathbb{R}$, on ne confondera pas les fonctions $\mathcal{B}_\lambda$- ou $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$-étagées avec les fonctions en escalier sur $\mathbb{R}$ qui sont des cas particuliers de fonctions étagées, du type $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k 1_{I_k}$ où les I_k sont des intervalles bornés.□

Le résultat suivant se révélera d'une importance capitale dans la construction de l'intégrale au chapitre 3.

Théorème 13 *Soit $(E, \mathcal{B})$ un espace mesurable. Toute fonction $f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}}_+)$ est limite simple d'une suite croissante $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions étagées positives.*

Preuve : Soit $f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}}_+)$. Pour tout entier $n \geq 1$ posons :

$$f_n = n 1_{\{f=+\infty\}} + \sum_{k=1}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} 1_{\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\}}.$$

a) Il est clair que f_n est étagée positive.
b) Pour tout $n \geq 1$ on a $f_n \leq f_{n+1}$. Soit $x \in E$.
1^{er} cas : $f(x) = 0$. résultat trivial.
2^e cas : $f(x) > 0$. Deux possibilités se présentent :
- ou bien $x \in \{f = +\infty\}$, il vient : $f_n(x) = n < n+1 = f_{n+1}(x)$;
- ou bien $x \in \left\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\right\}$ pour un $k \in \{1, 2, \ldots, n2^n - 1\}$, et alors :

$$f_n(x) = \frac{k}{2^n} \begin{cases} = f_{n+1}(x) & \text{si} \quad x \in \left\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right\}, \\ < \frac{2k+1}{2^{n+1}} = f_{n+1}(x) & \text{si} \quad x \in \left\{\frac{2k+1}{2^{n+1}} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\right\}. \end{cases}$$

c) Pour établir la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ vers f, on remarque d'abord que $f_n \leq f$ pour tout $n \geq 1$, ce qui résulte aussitôt de la définition de f_n. Considérons maintenant un $x \in E$. Deux cas sont à envisager.

1^{er} cas : $f(x) = +\infty$. Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty = f(x)$.

2^e cas : $0 \leq f(x) < +\infty$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe un entier $N \geq 1$ tel que, à la fois, $\dfrac{1}{2^N} < \epsilon$ et $f(x) < N$. Alors, tout entier $n \geq N$ est tel que $0 \leq f(x) < n$, de sorte qu'il existe un $k \in \{0, 1, \ldots, n2^n - 1\}$ pour lequel $\dfrac{k}{2^n} \leq f(x) < \dfrac{k+1}{2^n}$. Il en résulte :

$$0 \leq f(x) - f_n(x) = f(x) - \frac{k}{2^n} < \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^N} < \epsilon,$$

ce qui prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$.□

Remarque 7 *La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ étant croissante, on rappelle l'équivalence :*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = f \quad \Leftrightarrow \quad \sup_{n\geq 1} f_n = f.$$

□

Corollaire 19 *Soit $(E, \mathcal{B})$ un espace mesurable. Pour une fonction $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
1) f est mesurable ;
2) f est limite simple d'une suite de fonction étagées.

2.4 Propriétés vraies presque partout

Définition 15 *Soit $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et soit $\mathcal{P}$ une propriété relative aux éléments de E. (Nous écrirons "$\mathcal{P}(x)$" si $\mathcal{P}$ est vraie au point $x \in E$, "non $\mathcal{P}(x)$" dans le cas contraire.)*

On dit que $\mathcal{P}$ est vraie μ-presque tout $x \in E$, ou encore que $\mathcal{P}$ est vraie μ-presque partout dans E si :

$$\exists N \in \mathcal{N}_\mu, \{x \in E, non\, \mathcal{P}(x)\} \subset N,$$

on écrit alors : $\mathcal{P}$ $\mu - p.p.$

Remarque 8 *Dans $\mathbb{R}$, les conditions "λ-preseque partout" et "β-presque partout sont équivalentes (Exercice).*$\square$

Proposition 12 *Soit $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré. La relation d'égalité μ-preque partout entre les fonctions de E dans $\overline{\mathbb{R}}$, est transitive.*

Preuve : C'est une conséquence de la stabilité de $\mathcal{N}_\mu$ par réunions finies. En effet, si $f = g$ $\mu - p.p$ et $g = h$ $\mu - p.p$, il existe $N_1, N_2 \in \mathcal{N}_\mu$ tels que $\{f \neq g\} \subset N_1$ et $\{g \neq h\} \subset N_2$, d'où l'on déduit

$$\{f \neq h\} \subset \{f \neq g\} \cup \{g \neq h\} \subset N_1 \cup N_2 \in \mathcal{N}_\mu,$$

c'est-à-dire $f = h$ $\mu - p.p.$$\square$

Remarque 9 *A moins que la mesure μ ne soit complète, la condition $\mathcal{P}$ $\mu - p.p.$ n'entraîne pas nécessairement que l'ensemble $\{x \in E,\ non\, \mathcal{P}(x)\}$ soit μ négligeable, c'est-à-dire qu'il se peut que $\{x \in E,\ non\, \mathcal{P}(x)\} \notin \mathcal{B}$.*$\square$

Définition 16 *Considérons un espace mesuré $(E, \mathcal{B}, \mu)$, une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de fonctions $f_n : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, et une fonction $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.*

a) On dit que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge vers f μ-presque partout, et on écrit

$$\lim_{n \to +\infty} f_n = f \ \ \mu - p.p.,$$

si $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ $\mu - p.p.$

b) On dit que la série $\sum f_n$ converge μ-presque partout vers S si la suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} f_k\right)_{n \geq 1}$ converge μ-presque partout vers une fonction $S : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Remarque 10 *1) Etant donné un espace mesuré $(E, \mathcal{B}, \mu)$, pour une suite de fonctions numériques définies sur E, la convergence simple sur E est un cas particulier de convergence presque partout.*

2) Une limite presque partout n'est pas unique. Plus précisement, si $\lim_{n\to+\infty} f_n = f \ \ \mu - p.p.$*, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = g \ \ \mu - p.p. \Leftrightarrow f = g \ \mu - p.p.$$

3) La définition b) ci-dessus suppose implicitement que chaque somme $\sum_{k=1}^{n} f_k$ *a un sens.*□

Proposition 13 *Soit* $(E, \mathcal{B}, \mu)$ *un espace mesuré. On considère deux suites* $(f_n)_{n\geq 1}$ *et* $(g_n)_{n\geq 1}$ *de fonctions* $f_n, g_n : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *telles que :* $\forall n \geq 1, \ f_n = g_n \ \mu - p.p.$

1) Si T *est l'une des opérations* $\sup_{n\geq 1}$*,* $\inf_{n\geq 1}$*,* $\limsup_{n\to+\infty}$*,* $\liminf_{n\to+\infty}$*, alors :*

$$T((f_n)_{n\geq 1}) = T((g_n)_{n\geq 1}) \ \mu - p.p.$$

2) Si f *(resp.* S*):* $E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *est telle que*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n = f \quad \left(resp. \ \sum_{n=1}^{\infty} f_n = S \right) \ \mu - p.p.,$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty} g_n = f \quad \left(resp. \ \sum_{n=1}^{\infty} g_n = S \right) \ \mu - p.p.$$

Preuve : Pour tout $n \geq 1$, il existe un $N_n \in \mathcal{N}_\mu$ tel que $f_n(x) = g_n(x)$ en chaque $x \in E \setminus N_n$. Il en résulte que les suites $(f_n(x))_{n\geq 1}$ et $(g_n(x))_{n\geq 1}$ sont les mêmes pour tout $x \in E \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n)$, ce qui établit les propriétés annoncées puisque $\mathcal{N}_\mu$ est stable par réunions dénombrables.□

Proposition 14 *Soit* $(E, \mathcal{B}, \mu)$ *un espace mesuré où* μ *est complète. Alors :*

1) si $f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}})$ *et* $g : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *sont telles que* $f = g \ \mu - p.p.$*, alors* g *est mesurable ;*

2) si $(f_n)_{n\geq 1}$ *est une suite de* $\mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}})$ *et une fonction* $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *sont telles que* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n = f$ *μ-presque partout,* f *est mesurable.*

Preuve : 1) De la complétude de μ résulte que $\{f \neq g\} \in \mathcal{N}_\mu$, et par suite $\{f = g\} \in \mathcal{B}$. Alors ,pour tout $a \in \mathbb{R}$, il vient :

$$\{g < a\} = (\{g < a\} \cap \{f = g\}) \cup (\{g < a\} \cap \{f \neq g\})$$

où $\{g < a\} \cap \{f = g\} = \{f < a\} \cap \{f = g\} \in \mathcal{B}$ puisque f est mesurable et $\{f = g\} \in \mathcal{B}$, et où $\{g < a\} \cap \{f \neq g\} \subset \{f \neq g\} \in \mathcal{N}_\mu$, si bien que

$\{g < a\} \cap \{f \neq g\} \in \mathcal{B}$ daprès la complétude de μ. Il reste à appliquer la Proposition 2.1.

2) Posons $g = \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n$. Par hypothèse, il existe $N \in \mathcal{N}_\mu$ tel que :

$$\forall x \in E \setminus N,\ g(x) = \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = f(x).$$

Il résulte que $f = g$ μ-presque partout et, comme g est mesurable, f est mesurable d'après 1).$\square$

2.5 Exemples de fonctions numériques mesurables

Nous avons vu Remarque 1.2 que toute fonction continue $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est borélienne et donc Lebesgue-mesurable. La même conclusion peut encore se déduire de versions affaiblies de la continuité.

Théorème 14 *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

1) Si f est continue à droite sur $\mathbb{R}$ (ou continue à gauche), elle est borélienne.

2) Si f est continue à droite λ-presque partout (ou continue à gauche λ-presque partout), elle est Lebesgue-mesurable.

Preuve : 1) Traitons le cas où f est continue à droite.

Soit $[a, b[$, $a < b$. Pour des entiers $n \geq 1$ et $k \in \{1, \ldots, n\}$, posons $x_{n,k} = a + \dfrac{k}{n}(b - a)$ et considérons la fonction en escalier

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_{n,k}) 1_{[x_{n,k-1}, x_{n,k}[}.$$

Nous allons établir que $f1_{[a,b[} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n$ simplement sur $\mathbb{R}$.

La conséquence désirée est triviale pour $x_0 \in \mathbb{R} \setminus [a, b[$.

Pour $x_0 \in [a, b[$, fixons $\epsilon > 0$. D'après la continuité à droite de f en x_0, il existe un $\eta > 0$ tel que $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ pour tout $x \in [x_0, x_0 + \eta[$. Soit N un entier tel que $\dfrac{b-a}{N} < \eta$. Alors, pour chaque $n \geq N$, il existe un $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $x_0 \in [x_{n,k-1}, x_{n,k}[$ et qui, par conséquent, vérifie :

$$|x_0 - x_{n,k}| < x_{n,k} - x_{n,k-1} = \frac{b-a}{n} < \frac{b-a}{N} < \eta.$$

Il en résulte

$$|f(x_{n,k}) - f(x_0)| = |f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon,$$

ce qui prouve que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$.

Comme chaque fonction f_n est borélienne puisqu'elle est $\mathcal{B}_\mathbb{R}$-étagée, la fonction $f1_{[a,b[}$ est borélienne d'après le Corollaire 2.2. Il reste à observer que $f = \lim_{n \longrightarrow +\infty} f 1_{[-n,n[}$ simplement sur $\mathbb{R}$, pour obtenir, par une nouvelle application du Corollaire 2.2, que f est borélienne.

On fait une démonstration analogue dans le cas où f est continue à gauche.

2) Le résultat est acquis par la Proposition 4.3, puisque les convergences simples de la démonstration ci-dessus deviennent ici des convergences λ-presque partout.□

Corollaire 20 *Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue λ-presque partout est Lebesgue-mesurable.*

Corollaire 21 *Si une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable à droite sur $\mathbb{R}$ (resp. dérivable à gauche sur $\mathbb{R}$), sa dérivée à droite f'_d (resp. sa dérivée à gauche f'_g) est borélienne. En particulier, si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, f' est borélienne.*

Preuve : Prenons le cas où f est dérivable à droite et, pour tout $n \geq 1$, définissons la fonction $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = f(x + \frac{1}{n})$. La fonction f est, en particulier, continue à droite, donc borélienne d'après le Théorème 5.1. Il en résulte que chaque f_n est borélienne comme composée d'une fonction borélienne et d'une fonction continue. Par conséquent, sont également boréliennes les fonctions $g_n = n(f_n - f)$, et comme $f'_d = \lim_{n \longrightarrow +\infty} g_n$ simplement, le résultat désiré s'obtient par le Corollaire 2.2. La démonstration est analogue si f est dérivable à gauche.□

2.6 Exercices corrigés

Exercice 1. *Soit $(E, \mathbb{B})$ un espace mesurable, $(\mu_n)_{n \geq 1}$ une suite de probabilité sur $\mathbb{B}$ et $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombre réels non négatifs tels que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu_n$ est une probabilité sur $\mathbb{B}$.*

Solution : Posons $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu_n$ et pour tout $q \geq 1$ $\nu_q = \sum_{n=1}^{q} a_n \mu_n$. Alors $(\nu_q)_{q \geq 1}$ est une suite de mesures qui tend en croissant vers l'application $\mu : \mathbb{B} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$; d'après l'exercie 14 de la série 1), μ est une mesure. D'autre part, on a clairement $\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu_n(E) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ et donc μ est une probabilité sur $\mathbb{B}$.□

Exercice 2. *Soit $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$ un ensemble dénombrable, $\mathbb{B} = \mathcal{P}(E)$ et $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombre réels non négatifs tels que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.*

Montrer que la formule $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 1_A(e_n)$ *définit une mesure finie sur* $\mathbb{B}$. *Démontrer que toute suite finie sur* $\mathbb{B}$ *est de ce type pour une certaine suite* $(a_n)_{n\geq 1}$ *pour laquelle* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

Solution : • μ est une mesure.

(M_1) On a $\mu(\emptyset) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 1_{\emptyset}(e_n) = 0$ car $1_{\emptyset} = 0$.

(M_2) Soit $(B_n)_{n\geq 1}$ une suite disjointe dans $\mathbb{B}$. Notons $I = \{p \in \mathbb{N}^*; e_p \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\}$ et pour tout $q \geq 1$, $I_q = \{p \in \mathbb{N}^*; e_p \in B_q\}$. Il est clair que la suite $(I_q)_{q\geq 1}$ est disjointe et $I = \bigcup_{q=1}^{\infty} I_q$. D'un autre côté, on a $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n\in I} a_n$ et pour tout $n \geq 1$, $\mu(B_n) = \sum_{p\in I_n} a_p$. On en déduit facilement que $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$ ce qui donne le résultat souhaité.

• La mesure μ est fini. En effet, on a $\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 1_E(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

Inversement, soit μ une mesure finie sur $\mathbb{B}$. Posons $a_n = \mu(\{e_n\})$. Alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge (sa somme est $\mu(E)$) et on a clairement, pour tout $A \in \mathbb{B}$, $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 1_A(e_n)$.$\square$

Exercice 3. *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction Lebesgue-mesurable et soit* C *l'ensemble des* $x \in \mathbb{R}$ *où* f *est continue.*

1) Montrer que $\mathbb{R} \setminus C = \bigcup_{U\in\mathbb{U}} \left(f^{-1}(U) \setminus (f^{-1}(U))^\circ\right)$ *où* $\mathbb{U}$ *est une base de la topologie usuelle de* $\mathbb{R}$.

2) En déduire que $C \in \mathbb{B}_\lambda$.

Solution : 1) Soit $\mathbb{U}$ une base de la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ et soit $x \in \mathbb{R} \setminus C$. Par définition de la continuité d'une fonction en un point, et comme l'ensemble des U de $\mathbb{U}$ qui contiennent $f(x)$ constitue une base de voisinage de $f(x)$, il existe un $U \in \mathbb{U}$ tel que $f(x) \in U$ et $f^{-1}(U)$ n'est pas un voisinage de x. Un tel U vérifie donc

$$x \in f^{-1}(U) \setminus (f^{-1}(U))^\circ.$$

Réciproquement, si pour un $x \in \mathbb{R}$, il existe un $U \in \mathbb{U}$ pour laquelle a lieu la relation ci-dessus, alors f n'est pas continue en x. L'égalité proposée est donc démontrée.

2) Chaque $f^{-1}(U) \setminus (f^{-1}(U))^{\circ}$ est dans $\mathbb{B}_\lambda$ car c'est le cas pour $f^{-1}(U)$ (d'après la Lebesgue-mesurabilité de f) et pour $(f^{-1}(U))^{\circ}$ (ouvert, donc borélien, donc Lebesgue-mesurable). D'autre part, la topologie de $\mathbb{R}$ possède une base dénombrable et donc $\mathbb{R} \setminus C \in \mathbb{B}_\lambda$ et pr suite $C \in \mathbb{B}_\lambda$.□

Exercice 4. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ telle que $A \notin \mathbb{B}_\lambda$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ ou $-x$ selon que $x \in A$ ou $x \notin A$.*

1) Montrer que $\{f = a\} \in \mathbb{B}_\lambda$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

2) Prouver que, cependant, f n'est pas $\mathbb{B}_\lambda$-mesurable.

Solution : 1) Soit $a \in \mathbb{R}$. Quatre cas peuvent se présenter :

(α) $a \in A$ et $-a \in A$: $\{f = a\} = \{a\}$;

(β) $a \in A$ et $-a \notin A$: $\{f = a\} = \{a, -a\}$;

(γ) $a \notin A$ et $-a \in A$: $\{f = a\} = \emptyset$;

(λ) $a \notin A$ et $-a \notin A$: $\{f = a\} = \{-a\}$;

et dans chacun des cas $\{f = a\}$ est un borélien (c'est un fermé) et donc dans $\mathbb{B}_\lambda$.

2) Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x$ et remarquons que $\{f = g\} = A \cup \{0\}$ (car on a toujours $f(0) = 0$ que 0 appartient à A ou non). Mais comme A n'est pas dans $\mathbb{B}_\lambda$, il en de même pour $A \cup \{0\}$. Alors g étant une fonction croissante donc $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$-mesurable et donc $\mathbb{B}_\lambda$-mesurable, il est donc impossible que le soit aussi.□

Exercice 5. *On considère un espace mesurable $(E, \mathbb{B})$ et une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{M}(E, \mathbb{B}, \overline{\mathbb{R}})$ et $f \in \mathcal{M}(E, \mathbb{B}, \overline{\mathbb{R}})$. Montrer que*

$$\left\{x \in E; \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)\right\} \in \mathbb{B}.$$

Solution : Il suffit de remarquer que l'ensemble considéré coïncide avec

$$\left\{\limsup_{n \longrightarrow +\infty} f_n = \liminf_{n \longrightarrow +\infty} f_n\right\} \cap \left\{\limsup_{n \longrightarrow +\infty} f_n = f\right\}.□$$

Exercice 6. *On considère un espace mesuré $(E, \mathbb{B}, \mu)$ où la mesure μ est finie, une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{M}(E, \mathbb{B}, \mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{M}(E, \mathbb{B}, \mathbb{R})$.*

1) Soit A l'ensemble des $x \in E$ tels que $(f_n(x))_{n\geq 1}$ ne converge pas vers $f(x)$. Montrer que

$$A = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(\limsup_{n \longrightarrow +\infty} \left\{|f_n - f| \geq \frac{1}{m}\right\}\right).$$

2) En déduire que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge μ-presque partout vers f si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0,\ \mu(\limsup_{n\longrightarrow+\infty}\{|f_n - f| \geq \epsilon\}) = 0.$$

3) Montrer que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n = f \quad \mu - p.p. \quad \Rightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \lim_{n\longrightarrow+\infty} \mu(\{|f_n - f| \geq \epsilon\}) = 0.$$

Solution : 1) En écrivant la négation de la convergence de $(f_n(x))_{n\geq 1}$ vers $f(x)$ on obtient les équivalences :

$$\begin{aligned}
x \in A \quad & \Leftrightarrow \quad \exists \epsilon > 0, \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists n \geq k, |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon \\
& \Leftrightarrow \quad \exists m \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists n \geq k, |f_n(x) - f(x)| \geq \frac{1}{m} \\
& \Leftrightarrow \quad \exists m \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, \exists n \geq k, x \in \left\{|f_n - f| \geq \frac{1}{m}\right\} \\
& \Leftrightarrow \quad x \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(\limsup_{n\longrightarrow+\infty} \left\{|f_n - f| \geq \frac{1}{m}\right\}\right).
\end{aligned}$$

2) Remarquons que, de faoņ générale, si chaque B_n est dans $\mathbb{B}$, il en est de même de $\limsup B_n$. Alors par (M_7) on obtient :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n = f \quad \mu - p.p \quad & \Leftrightarrow \quad \mu(A) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty}\left(\limsup_{n\longrightarrow+\infty}\left\{|f_n - f| \geq \frac{1}{m}\right\}\right)\right) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \sup_{m\geq 1} \mu\left(\left(\limsup_{n\longrightarrow+\infty}\left\{|f_n - f| \geq \frac{1}{m}\right\}\right)\right) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \forall m \in \mathbb{N}^*, \mu\left(\left(\limsup_{n\longrightarrow+\infty}\left\{|f_n - f| \geq \frac{1}{m}\right\}\right)\right) = 0 \\
& \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \mu\left(\left(\limsup_{n\longrightarrow+\infty}\{|f_n - f| \geq \epsilon\}\right)\right) = 0.
\end{aligned}$$

3) Sous l'hypothèse $\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n = f$ μ-presque partout, en remarquant que la suite

$$\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} |f_n - f| \geq \epsilon\}\right)_{k\geq 1}$$

est décroissante et en utilisant (M_8), on obtient pour tout $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
0 \quad & = \quad \mu\left(\left(\limsup_{n\longrightarrow+\infty}\{|f_n - f| \geq \epsilon\}\right)\right) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}\{|f_n - f| \geq \epsilon\}\right)\right) \\
& = \quad \lim_{k\longrightarrow+\infty} \mu\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}\{|f_n - f| \geq \epsilon\}\right),
\end{aligned}$$

et le résultat souhaité provient alors des inégalités

$$0 \le \mu(\{|f_k - f| \ge \epsilon\}) \le \mu\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}\{|f_n - f| \ge \epsilon\}\right)$$

valable pour tout $k \ge 1$.

Le mode de convergence de $(f_n)_{n\ge 1}$ vers f apparaissant en 3) est la convergence en μ-mesure.□

Exercice 7. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction séparément continue.*
1) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\{f < a\} = \bigcup_{r<a, r\in\mathbb{Q}}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{y\in\mathbb{R}}\left(\{f(.,y) < r\} \times \left]y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}\right[\right)\right)\right).$$

2) En déduire que f est borélienne.

Solution : 1) Si $f(x,y) < a$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $f(x,y) < r < a$. De là il suit :
$(x_0, y_0) \in \{f < a\}$

$$\Rightarrow \quad (\exists r \in \mathbb{Q}\ , r < a), \forall n \in \mathbb{N}^*, (x_0, y_0) \in \{f(., y_0) < r\} \times \left]y_0 - \frac{1}{n}, y_0 + \frac{1}{n}\right[$$

$$\Rightarrow \quad (\exists r \in \mathbb{Q}\ , r < a), \forall n \in \mathbb{N}^*, (x_0, y_0) \in \bigcup_{y\in\mathbb{R}}\left(\{f(.,y) < r\} \times \left]y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}\right[\right)$$

$$\Rightarrow \quad (x_0, y_0) \in \bigcup_{\substack{r<a\\ r\in\mathbb{Q}}}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{y\in\mathbb{R}}\left(\{f(.,y) < r\} \times \left]y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}\right[\right)\right)\right).$$

Réciproquement, si (x_0, y_0) vérifie la dernière relation ci dessus, il existe un $r < a$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver un $y_n \in \mathbb{R}$ pour lequel

$$(x_0, y_0) \in \{f(., y_n) < r\} \times \left]y_n - \frac{1}{n}, y_n + \frac{1}{n}\right[.$$

La suite $(y_n)_{n\ge 1}$ ainsi obtenue vérifie donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} y_n = y_0$ (puisque $|y_n - y| \le \frac{1}{n}$) et, comme $f(x_0, y_n) < r$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par continuité de $f(x_0, .)$ il vient :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f(x_0, y_n) = f(x_0, y_0) \le r < a,$$

c'est-à-dire $(x_0, y_0) \in \{f < a\}$.

2) En faisant intervenir maintenant la continuité de $f(., y)$, nous voyons que, quels que soient $r \in \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{R}$ fixé, $\{f(., y) < r\}$ est un ouvert. Alors,

pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\{f(.,y) < r\} \times \left]y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}\right[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, de même par conséquent que

$$\bigcup_{y \in \mathbb{R}} \left(\{f(.,y) < r\} \times \left]y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}\right[\right).$$

A partir de là, par intersection et réunion dénombrable, il résulte de 1) que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\{f < a\}$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$, et la fonction f est borélienne.$\square$

Exercice 8. *Etant donné un espace mesuré $(E, \mathbb{B}, \mu)$ et une suite $(A_n)_{n \geq 1}$ de parties de $\mathbb{B}$. Montrer que l'on a l'inégalité*

$$\mu(\liminf_{n \geq 1} A_n) \leq \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \mu(A_n).$$

Solution : On pose pour tout $n \geq 1$, $B_n = \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$. On a pour tout $m \geq n \geq 1$, $B_n \subset A_m$ et $\mu(B_n) \leq \mu(A_m)$ pour tout $m \geq n$ ce qui entraîne que $\mu(B_n) \leq \inf_{m \geq n} \mu(A_m)$ et donc $\sup_{n \geq 1} \mu(B_n) \leq \sup_{n \geq 1}(\inf_{m \geq n} \mu(A_m)) = \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \mu(A_n)$. Or la suite $(B_n)_{n \geq 1}$ est croissante et $\liminf A_n = \bigcup_{n \geq 1} B_n$. D'après (M_7), on aura donc $\mu(\liminf A_n) = \sup_{n \geq 1} \mu(B_n)$ et le résultat souhaité est vérifié.$\square$

Exercice 9. *Soit $A_1, \ldots, A_p \subset [0,1]$ des parties $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$-mesurables telle que*

$$\bigcup_{i=1}^{p} A_i = [0,1].$$

Montrer qu'il existe alors un indice $i \in \{1, \ldots, p\}$ tel que $\lambda(A_i) \geq \frac{1}{p}$.

Solution : Supposons que pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $\lambda(A_i) < \frac{1}{p}$. On aura donc que $\sum_{i=1}^{p} \lambda(A_i) < 1$. Or, d'après l'hypothèse ci-dessus, on aura

$$\lambda([0,1]) = 1 = \lambda(\bigcup_{i=1}^{p} A_i) \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda(A_i)$$

ce qui constitue une contradiction avec ce qui précéde.$\square$

Exercice 10. *Soit $(E, \mathbb{B}, \mu)$ un espace mesuré tel que la mesure μ soit finie. Soit $f \in \mathcal{M}(E, \mathbb{B}, \mathbb{R})$. On appelle fonction de répartition de f l'application $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par*

$$F(t) = \mu(\{f < t\}).$$

Montrer que F est croissante, continue à gauche, tend vers 0 quand t tend vers $-\infty$ et vers $\mu(E)$ quand t tend vers $+\infty$. Montrer que F est continue en un point t si et seulement si $\mu(\{f = t\}) = 0$.

Solution : • F est croissante. Soient $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tel que $t_1 < t_2$. On aura alors $\{f < t_1\} \subset \{f < t_2\}$ et donc $\mu(\{f < t_1\} \leq \mu(\{f < t_2\}$ et alors $F(t_1) \leq F(t_2)$.

• F est continue à gauche. Soit $t \in \mathbb{R}$ et $(t_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels qui tend vers t telle que, pour tout $n \geq 1$, $t_n \leq t$. posons pour tout $n \geq 1$, $s_n = \inf\limits_{m\geq n} t_n$. On a pour tout $n \geq 1$, $s_n \leq t_n \leq t$ et donc $F(s_n) \leq F(t_n) \leq F(t)$. La suite $(s_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante qui tend vers t. Il s'ensuit que la suite d'ensemble $(\{f < s_n\})_{n\geq 1}$ est croissante et on a $\{f < t\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{f < s_n\}$ et par (M_7), on a $\mu(\{f < t\}) = \sup\limits_{n\geq 1} \mu(\{f < s_n\})$ et donc $F(t) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} F(s_n) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} F(t_n) = F(t)$.

• $\lim\limits_{t\longrightarrow-\infty} F(t) = 0$. On a, pour toute suite $(t_n)_{n\geq 1}$ qui tend vers $-\infty$ et si $(s_n)_{n\geq 1}$ est la suite définie par $s_n = \sup\limits_{m\geq n} t_n$, $\emptyset = \bigcap\limits_{n\geq 1} \{f < s_n\}$. Puisque la mesure est finie et la suite $(\{f < s_n\})_{n\geq 1}$ est décroissante, on peut appliquer (M_8) et avoir $0 = \mu(\emptyset) = \inf_{n\geq 1} \mu(\{f < s_n\}$. D'un autre côté, on a pour tout $n \geq 1$, $\{f < t_n\} \subset \{f < s_n\}$ et donc $0 \leq \mu(\{f < t_n\}) \leq \mu(\{f < s_n\})$ ce qui entraine d'après ce qui précéde le résultat souhaité.

Un raisonnement analogue permet d'avoir que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} F(t) = \mu(E)$.

• Supposons que F est continue en t. Prenons une suite $(t_n)_{n\geq 1}$ décroissante vers t. On a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} F(t_n) = F(t)$. La suite $(\{f < t_n\})_{n\geq 1}$ est décroissante et d'après (M_8) (la mesure étant finie), on a $\inf\limits_{n\geq 1} F(t_n) = \mu(\bigcap\limits_{n\geq 1} \{f < t_n\}) = \mu(\{f \leq t)$. On en déduit donc que $\mu(\{f < t\}) = \mu(\{f \geq t\})$ et donc $\mu(\{f = t\}) = \mu(\{f \geq t\}) - \mu(\{f < t\}) = 0$.

Inversement, supposons que $\mu(\{f = t\}) = 0$.

Soit $(t_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels qui converge vers t et telle que $t_n \geq t$ pour tout $n \geq 1$. On considère la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ avec $s_n = \sup\limits_{m\geq n} t_m$. $(s_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante qui tend vers t. Toujours d'après $(M8)$, on aura $\inf\limits_{n\geq 1} F(s_n) = \mu(\bigcap\limits_{n\geq 1} \{f < s_n\}) = \mu(\{f \leq t) = \mu(\{f < t\})$ i.e. que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} F(s_n) = F(t)$. Or, pour tout $n \geq 1$, $F(t) \leq F(t_n) \leq F(s_n)$ et donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} F(t_n) = F(t)$ et par suite F est continue en t.$\square$

Chapitre 3

Construction de l'intégrale

3.1 Multiplication dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ et intégration

En prolongeant la multiplication de $\mathbb{R}$ par les produits

$$x \times (\pm\infty) = (\pm\infty) \times x = \begin{cases} \pm\infty & \text{si} \quad x \in \overline{\mathbb{R}}_+^*, \\ \mp\infty & \text{si} \quad x \in \overline{\mathbb{R}}_-^*, \end{cases}$$

on obtient la continuité sur $\overline{\mathbb{R}}^*$ des fonctions $y \mapsto x \times y (= y \times x)$, et ceci pour chaque $x \in \overline{\mathbb{R}}^*$. En revanche, et même si l'on s'en tient seulement à $\overline{\mathbb{R}}_+^*$, il n'existe aucun choix de $a \in \overline{\mathbb{R}}_+$ tel que la définition $0 \times (+\infty) = (+\infty) \times 0 = a$ assure à la fois la continuité de $x \mapsto x \times (+\infty)$ en 0, et celle de $y \mapsto 0 \times y$ en $+\infty$. Aucun choix ne s'impose donc a priori sur de telles exigences de continuité, et cependant nous allons voir qu'il existe une valeur de a mieux adaptée que les autres au développement harmonieux de la théorie de l'intégration.

Le passage de la mesure des ensembles à celles des fonctions procède d'une idée simple : si $(E, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace mesuré, on attribue la mesure $\mu(B)$ à la fonction indicatrice 1_B d'un ensemble $B \in \mathcal{B}$. A partir de là, nous verrons qu'il est possible de définir avec cohérence la mesure $\Psi^*(f)$ de toute fonction $f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}}_+)$, la fonctionnelle Ψ^* possédant, entre autres, la propriété suivante : $\Psi^*(\alpha f) = \alpha \Psi^*(f)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Or cette proposition qui suppose la définition préalable de la multiplication dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, exige plus précisement, lorsque $\mu(E) = +\infty$, que l'on ait

$$a = 0 \times (+\infty) = 0 \times \mu(E) = 0 \times \Psi^*(1_E) = \Psi(0 \times 1_E) = \Psi^*(1_\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Ainsi, pour toute autre valeur de a, l'égalité $\Psi^*(\alpha f) = \alpha \Psi^*(f)$ cessera d'être valable avec $\alpha = 0$, ce qui est inhabituel pour une formule de genre. Nous adopterons donc la convention $a = 0$.

3.2 Intégration des fonctions étagées positives

Considérons un espace mesuré $(E, \mathcal{B}, \mu)$ et $f = \sum_{k=1}^{n} \beta_k 1_{B_k}$ une foncion $\mathcal{B}$-étagée positive, avec $\beta_k \geq 0$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$. Une telle écriture sera appelée représentation positive de la fonction étagée f (on observera qu'une représentation disjointe d'une fonction étagée positive est toujours une représentation positive). On peut associer à cette représentation positive de f l'élément $\sum_{k=1}^{n} \beta_k \mu(B_k)$ de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Cependant, on ne peut attribuer ainsi une mesure à f que si le résultat du calcul ci-dessus ne dépend pas de la représentation positive considérée. Le résultat suivant va dans le sens souhaitée.

Lemme 5 *Etant donné un espace mesuré* $(E, \mathcal{B}, \mu)$, *on considère*

$$\sum_{k=1}^{p} \beta_k 1_{B_k} = \sum_{k=1}^{q} \gamma_k 1_{C_k},$$

deux expressions disjointes d'un même élément de $\mathcal{E}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R}_+)$. *Alors*

$$\sum_{k=1}^{p} \beta_k \mu(B_k) = \sum_{k=1}^{q} \gamma_k \mu(C_k).$$

Preuve : Une preuve naturelle de ce résultat consiste à regrouper les B_i (resp. les C_i) correspondant à une même valeur des β_i (resp. des γ_i). Nous allons, au contraire, procéder par fractionnement des B_i et des C_i, préparant la démonstration du Théorème 2.1 où la même technique sera utilisée à deux reprises.

Pour cela posons :

$$B_0 = E \setminus \bigcup_{i=1}^{p} B_i, \qquad C_0 = E \setminus \bigcup_{i=1}^{q} C_i, \quad \beta_0 = \gamma_0 = 0.$$

Avec ces notations, on a

$$\forall i \in \{0, 1, \ldots, p\},\ B_i = \bigcup_{j=0}^{q} (B_i \cap C_j), \qquad \text{et} \qquad \forall j \in \{0, 1, \ldots, q\},\ C_j = \bigcup_{i=0}^{p} (C_j \cap B_i),$$

où les réunions ci-dessus sont disjointes, et il en résulte, pour la fonction étagée considérée, les nouvelles représentation disjointes

$$\sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{q} \beta_i 1_{B_i \cap C_j} = \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{q} \gamma_j 1_{B_i \cap C_j},$$

d'où l'on déduit :

$$B_i \cap C_j \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \beta_i = \gamma_j.$$

Cette propriété et l'additivité de μ permettent alors d'écrire :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p} \beta_i \mu(B_i) &= \sum_{i=0}^{p} \beta_i \mu(B_i) = \sum_{i=0}^{p} \beta_i \mu\left(\bigcup_{j=0}^{q}(B_i \cap C_j)\right) = \sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q} \beta_i \mu(B_i \cap C_j) \\
&= \sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q} \gamma_j \mu(B_i \cap C_j) = \sum_{i=0}^{q} \gamma_j \mu\left(\bigcup_{i=0}^{p}(B_i \cap C_j)\right) = \sum_{j=0}^{q} \gamma_j \mu(C_j) \\
&= \sum_{j=1}^{q} \gamma_j \mu(C_j).
\end{aligned}$$

□

Notation. Nous désignerons provisoirement par Ψ l'application de l'ensemble $\mathcal{E}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R}_+)$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, définie par

$$\Psi(f) = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \mu(B_i)$$

si $\sum_{i=1}^{p} \beta_i 1_{B_i}$ est une représentation disjointe quelconque de f.□

Théorème 15 *Soit $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré. Alors :*

1) $\forall B \in \mathcal{B},\ \Psi(1_B) = \mu(B)$;

2) $\forall f, g \in \mathcal{E}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R}_+), \forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \Psi(f+g) = \Psi(f) + \Psi(g), \Psi(\alpha f) = \alpha \Psi(f)$;

3) si $\sum_{i=1}^{p} \beta_i 1_{B_i}$ est une représentation positive quelconque de f, on a encore

$$\Psi(f) = \sum_{i=1}^{p} \beta_i \mu(B_i);$$

4) $(f, g \in \mathcal{E}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R}_+), f \leq g) \Rightarrow \Psi(f) \leq \Psi(g)$.

Preuve : 1) est évident.

2) La seconde égalité s'obtient immédiatement. Pour établir la première, supposons que $\sum_{i=1}^{p} \beta_i 1_{B_i}$ et $\sum_{j=1}^{q} \gamma_j 1_{C_j}$ sont deux représentations disjointes respectivement de f et g. Avec les mêmes notations on procède alors aux mêmes transformations que dans la démonstration du Lemme 2.1 et on obtient pour $f + g$ la représentation disjointe

$$\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q} (\beta_i + \gamma_j) 1_{B_i \cap C_j}.$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned}
\Psi(f+g) &= \sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q}(\beta_i+\gamma_j)\mu(B_i\cap C_j) \\
&= \sum_{i=0}^{p}\beta_i\left(\sum_{j=0}^{q}\mu(B_i\cap C_j)\right)+\sum_{j=0}^{q}\gamma_j\left(\sum_{i=0}^{p}\mu(B_i\cap C_j)\right) \\
&= \sum_{i=0}^{p}\beta_i\mu(B_i)+\sum_{j=0}^{q}\gamma_j\mu(C_j)=\Psi(f)+\Psi(g).
\end{aligned}$$

3) Conséquence de 1) et 2).

4) Avec les notations de 2) on fait encore la même transformation. Comme la condition $f \leq g$ impose $\beta_i \leq \gamma_j$, il vient

$$\Psi(f)=\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q}\beta_i\mu(B_i\cap C_j)\leq\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q}\gamma_j\mu(B_i\cap C_j)=\Psi(g).$$

□

3.3 Intégration des fonctions mesurables positives

Le passage du cas des fonctions étagées positives à celui, plus général, des fonctions mesurables positives, est fondé sur le Théorème 3.2 du Chapitre 2. Ce dernier affirme que si $f \in \mathcal{M}(E,\mathcal{B},\overline{\mathbb{R}}_+)$, il existe une suite croissante $(f_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{E}(E,\mathcal{B},\mathbb{R}_+)$ telle que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n = f$ simplement. Il est alors tentant de prolonger Ψ à $\mathcal{M}(E,\mathcal{B},\overline{\mathbb{R}}_+)$ en posant $\Psi(f) = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\Psi(f_n) = \sup\limits_{n\geq 1}\Psi(f_n)$. Cependant, se pose ici la question de savoir si $\Psi(f)$ dépend oui ou non de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$. Le résultat suivant permettra de résoudre ce problème.

Lemme 6 *Soit $(E,\mathcal{B},\mu)$ un espace mesuré. Si $f \in \mathcal{E}(E,\mathcal{B},\mathbb{R}_+)$ et si $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante de $\mathcal{E}(E,\mathcal{B},\mathbb{R}_+)$ telle que $f \leq \sup\limits_{n\geq 1} f_n$, alors $\Psi(f) \leq \sup\limits_{n\geq 1}\Psi(f_n)$.*

Preuve : 1) Cas particulier : $f = \beta 1_B$, $\beta \in \mathbb{R}_+$, $B \in \mathcal{B}$.

a) Si $\beta = 0$, alors $\Psi(f) = 0$ et l'inégalité est évidente.

b) Si $\beta > 0$, fixons $\alpha \in]0,\beta[$ et, pour tout $n \geq 1$, posons $B_n = B \cap \{f_n \geq \alpha\}$. Comme $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante de fonctions mesurables, il est clair que $(B_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante de $\mathcal{B}$. De plus $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ puisque

$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subset B$ est évident, et que :

$$\begin{aligned} x \in B \quad &\Rightarrow \quad (x \in B, \alpha < \beta = f(x) \leq \sup_{n\geq 1} f_n(x)) \\ &\Rightarrow \quad (\exists n \geq 1, x \in B \cap \{f_n \geq \alpha\} = B_n). \end{aligned}$$

Il en résulte que $\mu(B) = \sup_{n\geq 1} \mu(B_n)$ (d'après (M_7)).

Alors, puisque $f_n \geq \alpha 1_{B_n}$ (ce qui équivaut à $B_n \subset \{f_n \geq \alpha\}$ puisque $f_n \geq 0$), il vient, par le Théorème 2.1

$$\Psi(f_n) \geq \Psi(\alpha 1_{B_n}) = \alpha\mu(B_n),$$

et ceci pour tout $n \geq 1$. Par suite, on obtient

$$\sup_{n\geq 1} \Psi(f_n) \geq \alpha \sup_{n\geq 1} \mu(B_n) = \alpha\mu(B),$$

et ceci pour tout $\alpha \in]0, \beta[$, de sorte que, finalement :

$$\sup_{n\geq 1} \Psi(f_n) \geq \beta\mu(B) = \Psi(f).$$

2) Cas général : $f = \sum_{i=1}^{p} \beta_i 1_{B_i} \in \mathcal{E}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R}_+)$, représentation disjointe.

Notons d'abord que, d'après le Théorème 2.1 :

$$\Psi(f) = \sum_{i=1}^{p} \Psi(\beta_i 1_{B_i}). \tag{$*$}$$

Ensuite, la représentation de f étant disjointe :

$$f \leq \sup_{n\geq 1} f_n \;\Rightarrow\; \forall\{1, \ldots, p\}, \beta_i 1_{B_i} \leq \sup_{n\geq 1}(f_n 1_{B_i}),$$

où $(f_n 1_{B_i})_{n\geq 1}$ est une suite croissante de $\mathcal{E}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R}_+)$. Alors, d'après 1), on obtient pour chaque $i \in \{1, \ldots, p\}$:

$$\Psi(\beta_i 1_{B_i}) \leq \sup_{n\geq 1} \Psi(f_n 1_{B_i}). \tag{$**$}$$

Enfin, par le Théorème 2.1 :

$$\sum_{i=1}^{p} \Psi(f_n 1_{B_i}) = \Psi\left(\sum_{i=1}^{p} f_n 1_{B_i}\right) = \Psi\left(f_n 1_{\bigcup_{i=1}^{p} B_i}\right) \leq \Psi(f_n), \tag{$***$}$$

et comme les suites sont croissantes, on en déduit :

$$\begin{aligned}\sup_{n\geq 1}\left(\sum_{i=1}^{p}\Psi(f_n 1_{B_i})\right) &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\sum_{i=1}^{p}\Psi(f_n 1_{B_i})\right) = \sum_{i=1}^{p}\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty}\Psi(f_n 1_{B_i})\right)\\ &= \sum_{i=1}^{p}\left(\sup_{n\geq 1}\Psi(f_n 1_{B_i})\right) \qquad\qquad (****)\end{aligned}$$

En conclusion, on obtient :

$$\begin{aligned}\sup_{n\geq 1}\Psi(f_n) &\overset{(***)}{\geq} \sup_{n\geq 1}\left(\sum_{i=1}^{p}\Psi(f_n 1_{B_i})\right) \overset{(****)}{=} \sum_{i=1}^{p}\left(\sup_{n\geq 1}\Psi(f_n 1_{B_i})\right)\\ &\overset{(**)}{\geq} \sum_{i=1}^{p}\Psi(\beta_i 1_{B_i}) \overset{(*)}{=} \Psi(f).\end{aligned}$$

□

Nous pouvons maintenant établir le résultat fondamental suivant :

Théorème 16 *Soit $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré. Il existe une unique application*

$$\Psi^* : \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}}_+) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

vérifiant :

1) $\forall B \in \mathcal{B},\ \Psi^*(1_B) = \mu(B)$;

2) $\forall f, g \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}}_+),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}_+,\ \Psi^*(f+g) = \Psi^*(f)+\Psi^*(g),\ \Psi^*(\alpha f) = \alpha\Psi^*(f)$;

3) $(f, g \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}}_+), f \leq g) \Rightarrow \Psi^*(f) \leq \Psi^*(g)$;

4) pour toute suite croissante $(f_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}}_+)$:

$$\Psi^*(\sup_{n\geq 1} f_n) = \sup_{n\geq 1}\Psi^*(f_n).$$

Preuve : a) **Unicité.**

Si une telle application existe, les propriétés (1) et (2) montrent qu'elle coïncide avec Ψ sur $\mathcal{E}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R}_+)$.

Alors par le Théorème 3.2 du Chapitre 2, il existe une suite croissante $(f_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{E}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R}_+)$ telle que $f = \sup_{n\geq 1} f_n$ de sorte que $\Psi^*(f) = \sup_{n\geq 1}\Psi(f_n)$ d'après 4). La fonction Ψ^* est donc déterminée.

b) **Existence.**

b1) Définition de Ψ^*. Propriété 1).

Considérons $(f_n)_{n\geq 1}$ et $(g_n)_{n\geq 1}$ deux suites croissantes de $\mathcal{E}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R}_+)$ telles que $\sup\limits_{n\geq 1} f_n = \sup\limits_{n\geq 1} g_n$. Alors g_k est majoré par $\sup\limits_{n\geq 1} f_n$ et il vient, par le Lemme 3.1 :

$$\forall k \geq 1,\ g_k \leq \sup_{n\geq 1} f_n \Rightarrow \forall k \geq 1,\ \Psi(g_k) \leq \sup_{n\geq 1}\Psi(f_n) \Rightarrow \sup_{n\geq 1}\Psi(g_n) \leq \sup_{n\geq 1}\Psi(f_n)$$

et, par symétrie des rôles joués par les deux suites, il est clair que la dernière inégalité est une égalité.

Le Théorème 3.2 du Chapitre 2 permet donc de prolonger Ψ en une fonction ψ^* sur $\mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}}_+)$ en posant

$$\Psi^*(f) = \sup_{n \geq 1} \Psi(f_n)$$

si $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite croissante quelconque de $\mathcal{E}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R}_+)$ telle que $\sup_{n \geq 1} f_n = f$. Il est clair, en effet, que $\Psi^*(f) = \Psi(f)$ pour toute fonction $f \in \mathcal{E}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R}_+)$.

b2) Propriété 2) et 3).

Si $f, g \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}}_+)$, et si $\alpha \in \mathbb{R}_+$, considérons des suites croissantes $(f_n)_{n \geq 1}$ et $(g_n)_{n \geq 1}$ de $\mathcal{E}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R}_+)$ telles que $\sup_{n \geq 1} f_n = f$ et $\sup_{n \geq 1} g_n = g$. Alors $(f_n + g_n)_{n \geq 1}$ est une suite croissante de $\mathcal{E}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R}_+)$ telle que $\sup_{n \geq 1}(f_n + g_n) = f + g$ et du Théorème 2.1 il résulte :

$$\begin{aligned}
\Psi^*(f+g) &= \sup_{n \geq 1} \Psi(f_n + g_n) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} (\Psi(f_n) + \Psi(g_n)) \\
&= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \Psi(f_n) + \lim_{n \longrightarrow +\infty} \Psi(g_n) = \Psi^*(f) + \Psi^*(g).
\end{aligned}$$

De même $(\alpha f_n)_{n \geq 1}$ est une suite croissante de $\mathcal{E}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R}_+)$ telle que $\sup_{n \geq 1}(\alpha f_n) = \alpha f$, et il vient :

$$\Psi^*(\alpha f) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \Psi(\alpha f_n) = \alpha \lim_{n \longrightarrow +\infty} \Psi(f_n) = \alpha \Psi^*(f).$$

Enfin, d'après le Lemme 3.1 :

$$\begin{aligned}
f \leq g \;\Rightarrow\; \forall k \geq 1,\; f_k \leq \sup_{n \geq 1} g_n \quad &\Rightarrow \quad \forall k \geq 1,\; \Psi(f_k) \leq \sup_{n \geq 1} \Psi(g_n) = \Psi^*(g) \\
&\Rightarrow \quad \Psi^*(f) \leq \Psi^*(g).
\end{aligned}$$

b3) Propriété 4).

Considérons maintenant une suite croissante $(f_n)_{n \geq 1}$ de $\mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}}_+)$ et la fonction $f = \sup_{n \geq 1} f_n$. Par la Proposition 2.3 chapitre 2 nous savons que $f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}}_+)$. D'autre part le Théorème 3.2 du Chapitre 2 permet d'affirmer que, pour chaque $n \geq 1$, il existe une suite croissante $(f_{n,p})_{p \geq 1}$ de $\mathcal{E}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R}_+)$ telle que $\sup_{p \geq 1}(f_{n,p}) = f_n$.

Pour chaque $p \geq 1$, posons $g_p = \sup_{1 \leq n \leq p} f_{n,p}$. Alors $g_p \in \mathcal{E}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R}_+)$, car g_p ne prend qu'un ensemble fini de valeurs, et $g_p \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}}_+)$ d'après le Corollaire 2.4 du chapitre 2. De plus la suite $(g_p)_{p \geq 1}$ est croissante car, pour tout $p \geq 1$:

$$g_p = \sup_{1 \leq n \leq p} f_{n,p} \leq \sup_{1 \leq n \leq p} f_{n,p+1} \leq \sup_{1 \leq n \leq p+1} f_{n,p+1} = g_{p+1}.$$

Nous pouvons alors écrire successivement :

$$\forall p \geq 1,\ \forall n \in \{1, \ldots, p\}, \begin{cases} f_{n,p} \leq g_p = \sup\limits_{1\leq k\leq p} f_{k,p} \leq \sup\limits_{1\leq k\leq p} f_k = f_p \\ \Psi(f_{n,p}) \leq \Psi(g_p) \leq \Psi^*(f_p), \end{cases}$$

ce qui, quand p tend vers l'infini, conduit à

$$\forall n \geq 1, \begin{cases} f_n \leq \sup\limits_{p\geq 1} g_p \leq f \\ \Psi(f_n) \leq \sup\limits_{p\geq 1} \Psi(g_p) \leq \sup\limits_{p\geq 1} \Psi^*(f_p), \end{cases}$$

puis, quand ne tend vers l'infini :

$$\forall n \geq 1, \begin{cases} \sup\limits_{p\geq 1} g_p = f \\ \sup\limits_{p\geq 1} \Psi(g_p) = \sup\limits_{n\geq 1} \Psi^*(f_n), \end{cases}$$

et enfin, d'après la définition de Ψ^*

$$\Psi^*(f) = \sup_{p\geq 1} \Psi(g_p) = \sup_{n\geq 1} \Psi^*(f_n).$$

□

Définition 17 *Soit $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré. L'élément $\Psi^*(f)$ de $\overline{\mathbb{R}}_+$, attaché à chaque fonction $f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}}_+)$ par le Théorème 3.1, est appelée intégrale supérieure de f par rapport à la mesure μ, et est noté*

$$\int_E^* f d\mu$$

(ou $\displaystyle\int_E^* f(x) d\mu(x)$ si l'on veut faire apparaitre la "variable d'intégration" $x \in E$).

Si $B \in \mathcal{B}$, l'intégrale $\displaystyle\int_E^* f 1_B d\mu$ sera notée $\displaystyle\int_B^* f d\mu$.

L'énoncé qui suit n'est qu'une transcription du Théorème 3.1 à l'aide de la nouvelle notation introduite ci-dessus.

Théorème 17 *Soit $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré.*

$(IS1)$ $\forall B \in \mathcal{B}$, $\displaystyle\int_E^* 1_B d\mu = \mu(B)$.

$(IS2)$ $\forall f, g \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}}_+)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_E^* (f+g) d\mu = \int_E^* f d\mu + \int_E^* g d\mu, \int_E^* \alpha f d\mu = \alpha \int_E^* f d\mu.$$

$(IS3)$ $(f, g \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}}_+), f \leq g) \Rightarrow \displaystyle\int_E^* f d\mu \leq \int_E^* g d\mu$.

$(IS4)$ *Pour toute suite croissante* $(f_n)_{n\geq 1}$ *de* $\mathcal{M}(E,\mathcal{B},\overline{\mathbb{R}}_+)$ *:*

$$\int_E^* (\sup_{n\geq 1} f_n) d\mu = \sup_{n\geq 1} \int_E^* f_n d\mu \qquad (\text{ \textit{Propriété de Beppo Levi}}).$$

Corollaire 22 *Soit* $(E,\mathcal{B},\mu)$ *un espace mesuré. Pour toute suite* $(f_n)_{n\geq 1}$ *de* $\mathcal{M}(E,\mathcal{B},\overline{\mathbb{R}}_+)$ *:*

$$\int_E^* \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E^* f_n d\mu.$$

Théorème 18 (Lemme de Fatou). *Soit* $(E,\mathcal{B},\mu)$ *un espace mesuré. Toute suite* $(f_n)_{n\geq 1}$ *de* $\mathcal{M}(E,\mathcal{B},\overline{\mathbb{R}}_+)$ *vérifie :*

$$\int_E^* \left(\liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n\right) d\mu \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int_E^* f_n d\mu.$$

Preuve : En remaquant que $\left(\inf\limits_{n\geq p} f_n\right)_{p\geq 1}$ est une suite croissante de $\mathcal{M}(E,\mathcal{B},\overline{\mathbb{R}}_+)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\forall p \geq 1, \qquad & \forall k \geq p, f_k \geq \inf_{n\geq p} f_n \overset{(IS3)}{\Rightarrow} \forall p \geq 1, \forall k \geq p, \int_E^* f_k d\mu \geq \int_E^* \left(\inf_{n\geq p} f_n\right) d\mu \\
\Rightarrow \quad & \forall p \geq 1 \inf_{n\geq p} \int_E^* f_n d\mu \geq \int_E^* \left(\inf_{n\geq p} f_n\right) d\mu \\
\Rightarrow \quad & \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int_E^* f_n d\mu = \sup_{p\geq 1} \left(\inf_{n\geq p} \int_E^* f_n d\mu\right) \geq \sup_{p\geq 1} \int_E^* \left(\inf_{n\geq p} f_n\right) d\mu \\
\overset{(IS3)}{=} \quad & \int_E^* \sup_{p\geq 1} \left(\inf_{n\geq p} f_n\right) d\mu = \int_E^* \left(\liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n\right) d\mu.
\end{aligned}$$

□

Théorème 19 *Soit* $(E,\mathcal{B},\mu)$ *un espace mesuré et soit* $f \in \mathcal{M}(E,\mathcal{B},\overline{\mathbb{R}}_+)$. *Alors :*

$$\int_E^* f d\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = 0 \ \mu - p.p.$$

Preuve : " $\Rightarrow$ ". On remarque d'abord que

$$\{f \neq 0\} = \{f > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}$$

où la suite $\left(\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}\right)$ est croissante, puis l'implication suivante où l'inégalité du premier membre est évidente :

$$f \geq \frac{1}{n} 1_{\{f\geq\frac{1}{n}\}} \quad \Rightarrow \quad \int_E^* f d\mu \geq \frac{1}{n}\mu(\{f \geq \frac{1}{n}\}).$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned}\int_E^* f d\mu = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall n \geq 1,\ \mu(\{f \geq \frac{1}{n}\}) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \mu(\{f > 0\}) = \sup_{n\geq 1} \mu(\{f \geq \frac{1}{n}\}) = 0.\end{aligned}$$

" $\Leftarrow$ ". En observant que $f \leq \sup_{n\geq 1}(n1_{\{f>0\}})$, par $(IS3)$ et $(IS4)$ on obtient :

$$\int_E^* f d\mu \geq \sup_{n\geq 1}(n\mu(\{f > 0\}))$$

et par suite

$$\mu(\{f > 0\}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_E^* f d\mu = 0.$$

□

Corollaire 23 *Soit* $(E, \mathcal{B}, \mu)$ *un espace mesuré et soient* $f, g \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}}_+)$. *Alors :*

$$(1) \quad f \leq g \quad \mu - p.p. \quad \Rightarrow \quad \int_E^* f d\mu \leq \int_E^* g d\mu;$$

$$(2) \quad f = g \quad \mu - p.p. \quad \Rightarrow \quad \int_E^* f d\mu = \int_E^* g d\mu.$$

Preuve : 1) On écrit : $f = f1_{\{f\leq g\}} + f1_{\{f>g\}}$ où $\{f \leq g\}$ et $\{f > g\}$ appartiennent chacun à $\mathcal{B}$ (Proposition 2.2 chapitre 2), avec $\mu(\{f > g\}) = 0$ par hypothèse. En remarquant alors que $\int_E^* f1_{\{f>g\}} d\mu = 0$ d'après le Théorème 3.4, il vient par le Théorème 3.2 :

$$\begin{aligned}\int_E^* f d\mu &= \int_E^* f1_{\{f\leq g\}} d\mu + \int_E^* f1_{\{f>g\}} d\mu \\ &= \int_E^* f1_{\{f\leq g\}} d\mu \leq \int_E^* g1_{\{f\leq g\}} d\mu \leq \int_E^* g d\mu.\end{aligned}$$

2) Conséquence immédiate de 1).□

Théorème 20 *Soit* $(E, \mathcal{B}, \mu)$ *un espace mesuré et soit* $f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}}_+)$. *Alors :*

$$\int_E^* f d\mu < +\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) < +\infty \quad \mu - p.p.$$

Preuve : Remarquons que $f \geq \sup_{n\geq 1}(n1_{\{f=+\infty\}})$. Par le Théorème 3.2 il en résulte :

$$\int_E^* f d\mu \geq \sup_{n\geq 1}(n\mu(\{f = +\infty\})),$$

de sorte que

$$\mu(\{f = +\infty\}) > 0 \quad \Rightarrow \quad \int_E^* f d\mu = +\infty,$$

ce qui est le résultat de l'énoncé.□

Remarque 11 *La réciproque de ce théorème est fausse. C'est évident si $\mu(E) = +\infty$ puisqu'il suffit alors de considérer la fonction 1_E, mais c'est encore vrai si $\mu(E) < +\infty$. Prenons l'exemple de l'espace mesuré $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda_{[0,1]})$ et de la fonction*

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k 1_{]\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}]} = \sup_{n \geq 1} f_n,$$

où $f_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k 1_{]\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}]}$.

Alors $f \in \mathcal{M}([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \mathbb{R}_+)$ (remarquer que f ne prend, en effet, que des valeurs finies), et cependant, la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ étant croissante :

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} f d\lambda &= \sup_{n\geq 1} \int_{[0,1]} f_n d\lambda \\ &= \sup_{n\geq 1} \sum_{k=1}^{n} 2^k \left(\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^k} \right) = \sup_{n\geq 1} n = +\infty. \end{aligned}$$

□

3.4 Intégration des fonctions intégrables

Définition 18 *Soit $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré. Une fonction $f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R})$ est dite μ-intégrable (ou intégrable) si $\int_E^* |f| d\mu < +\infty$.*

L'ensemble de ces fonctions sera noté $\mathcal{L}^1(E, \mathcal{B}, \mu)$, ou $\mathcal{L}^1(\mu)$, ou simplement $\mathcal{L}^1$. En particulier, $\mathcal{L}^1(\lambda)$ est l'ensemble des fonctions Lebegue-intégrables et $\mathcal{L}^1(\beta)$ celui des fonctions Borel-intégrables.

Remarque 12 *Si la mesure μ est finie il résulte des propriétés $(IS1)$ et $(IS2)$ que toute fonction constante sur E est μ-intégrable.*□

Théorème 21 *Soit $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré.*

1) L'ensemble $\mathcal{L}^1$ des fonctions intégrables est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2) $f \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow |f| \in \mathcal{L}^1$.

3) $f \in \mathcal{L}^1 \Leftrightarrow (f^+ \in \mathcal{L}^1$ et $f^- \in \mathcal{L}^1)$.

Preuve : 1) On utilise le Théorème 3.2 :

$$\begin{array}{rcl} f,g\in\mathcal{L}^1 & \Rightarrow & \displaystyle\int_E^* |f+g|d\mu \le \int_E^* (|f|+|g|)d\mu = \int_E^* |f|d\mu + \int_E^* |g|d\mu < +\infty \\ & \Rightarrow & f+g\in\mathcal{L}^1; \\ (f\in\mathcal{L}^1,\ \alpha\in\mathbb{R}) & \Rightarrow & \displaystyle\int_E^* |\alpha f|d\mu = |\alpha|\int_E^* |f|d\mu < +\infty \\ & \Rightarrow & \alpha f\in\mathcal{L}^1. \end{array}$$

2) Résulte du Corollaire 2.4 chapitre 2 et de la Définition 4.1.
3) Si $f\in\mathcal{L}^1$, on déduit de 1) et 2) :

$$f_+ = \sup(f,0) = \frac{1}{2}(|f|+f)\in\mathcal{L}^1, \qquad \text{et} \qquad f_- = \sup(-f,0) = \frac{1}{2}(|f|-f)\in\mathcal{L}^1.$$

La réciproque est une conséquence de 1).□

Théorème 22 *Soit* $(E,\mathcal{B},\mu)$ *un espace mesuré. Il existe une unique forme linéaire* Φ *sur* $\mathcal{L}^1$ *telle que :*

$$(f\in\mathcal{L}^1, f\ge 0) \qquad \Rightarrow \qquad \Phi(f) = \int_E^* f d\mu.$$

Preuve : 1) **Unicité**. Soit $f\in\mathcal{L}^1$. On rappelle que $f=f^+-f^-$ d'où nécessairement :

$$\Phi(f) = \Phi(f^+) - \Phi(f^-) = \int_E^* f^+ d\mu - \int_E^* f^- d\mu.$$

Il en résulte l'unicité de Φ si elle existe.
2) **Existence.** Remarquons que si $f_1,f_2,g_1,g_2\in\mathcal{L}^1$ sont des fonctions positives, alors :

$$\begin{array}{rcl} f_1-f_2=g_1-g_2 & \Rightarrow & f_1+g_1=g_1+f_2 \\ & \Rightarrow & \displaystyle\int_E^* f_1d\mu + \int_E^* g_1d\mu = \int_E^* g_1d\mu + \int_E^* f_2d\mu \\ & \Rightarrow & \displaystyle\int_E^* f_1d\mu - \int_E^* f_2d\mu = \int_E^* g_1d\mu - \int_E^* g_2d\mu. \end{array}$$

Pour $f\in\mathcal{L}^1$, posons $\Phi(f) = \int_E^* f^+d\mu - \int_E^* f^-d\mu$. Il résulte de la remarque ci-dessus que, si $f=f_1-f_2$ avec $f_1,f_2\in\mathcal{L}^1$ positives, on a aussi

$$\Phi(f) = \int_E^* f_1d\mu - \int_E^* f_2d\mu.$$

Par suite, si $f, g \in \mathcal{L}^1$, il vient :

$$\begin{aligned}
\Phi(f+g) &= \Phi(f^+ + g^+ - (f^- + g^-)) = \int_E^* (f^+ + g^+)d\mu - \int_E^* (f^- + g^-)d\mu \\
&= \int_E^* f^+ d\mu - \int_E^* f^- d\mu + \int_E^* g^+ d\mu - \int_E^* g^- d\mu = \Phi(f) + \Phi(g).
\end{aligned}$$

De même, si $f \in \mathcal{L}^1$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\Phi(\alpha f) = \Phi(\alpha f^+ - \alpha f^-) = \int_E^* \alpha f^+ d\mu - \int_E^* \alpha f^- d\mu = \alpha\Phi(f),$$

et si $\alpha \in \mathbb{R}_-$

$$\begin{aligned}
\Phi(\alpha f) &= \Phi(-\alpha f^- + \alpha f^+) = \int_E^* (-\alpha f^-)d\mu - \int_E^* (-\alpha f^+)d\mu \\
&= (-\alpha)\left(\int_E^* f^- d\mu - \int_E^* f^+ d\mu\right) = \alpha\Phi(f).
\end{aligned}$$

Enfin, si $f \in \mathcal{L}^1$ et $f \geq 0$, alors $f^+ = f$ et $f^- = 0$, et par suite :

$$\Phi(f) = \int_E^* f^+ d\mu - \int_E^* f^- d\mu = \int_E^* f d\mu.$$

□

Définition 19 *Soit $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré. On appelle intégrale d'une fonction $f \in \mathcal{L}^1$ le nombre réel*

$$\int_E f d\mu = \int_E^* f^+ d\mu - \int_E^* f^- d\mu$$

encore noté $\int_E f(x)d\mu(x)$.

Si $B \in \mathcal{B}$, on pose $\int_B f d\mu = \int_E f 1_B d\mu$.

En particulier, si $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\lambda, \lambda)$, $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda$ est l'intégrale de Lebesgue de f.

Remarque 13 *1) Si μ est finie, toute fonction constante sur E, prenant la valeur α, est intégrable et d'intégrale $\alpha\mu(E)$.*

2) Par linéarité de l'intégrale, si $f \in \mathcal{L}^1$ et si $(B_k)_{1\leq k\leq n}$ est une partition de E par des éléments de $\mathcal{B}$, il vient :

$$\int_E f d\mu = \int_E f 1_{\bigcup_{k=1}^n B_k} d\mu = \int_E \sum_{k=1}^n (f 1_{B_k}) d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{B_k} f d\mu.$$

□

Théorème 23 *Considérons un espace mesuré* $(E, \mathcal{B}, \mu)$ *et* $f, g \in \mathcal{L}^1$.
1) $f \leq g \quad \mu - p.p. \Rightarrow \int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$;
$f = g \quad \mu - p.p. \Rightarrow \int_E f d\mu = \int_E g d\mu$.
2) $\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu$.

Preuve : 1) Résulte de la succession d'implications suivantes où l'on utilise le Théorème 3.4 :

$$\begin{aligned} f \leq g \quad & \mu - p.p. \;\Rightarrow\; g - f \geq 0 \; \mu - p.p. \;\Rightarrow\; (g-f)^- = 0 \; \mu - p.p. \\ \Rightarrow \quad & \int_E^* (g-f)^- d\mu = 0 \;\Rightarrow\; \int_E g d\mu - \int_E f d\mu = \int_E (g-f) d\mu \\ = \quad & \int_E^* (g-f)^+ d\mu - \int_E^* (g-f)^- d\mu = \int_E^* (g-f)^+ d\mu \geq 0. \end{aligned}$$

La seconde partie de 1) est une conséquence immédiate de la première.

2) Il suffit de faire apparaître les parties positive et négative de f

$$\begin{aligned} \left| \int_E f d\mu \right| &= \left| \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu \right| \leq \int_E^* f^+ d\mu + \int_E^* f^- d\mu \\ &= \int_E^* (f^+ + f^-) d\mu = \int_E^* |f| d\mu = \int_E |f| d\mu. \end{aligned}$$

□

3.5 Exercices corrigés

Exercice 1. *Etablir que si* f *et* g *sont deux fonctions étagées alors* $\sup(f, g)$ *et* $\inf(f, g)$ *sont étagées.*

Solution : On suppose que f et g sont mesurables et prennent un nombre fini de valeurs notées respectivement $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$. Alors les fonctions $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont mesurables (voir cours) et prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m\}$.□

Exercice 2.*Expliciter la définition de l'intégrale dans l'espace mesuré* $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_d)$ *où* μ_d *est la mesure du dénombrement sur l'ensemble* $\mathbb{N}$. *On montrera que pour toute une fonction* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *satisfaisant certaines hypothèses,*

$$\int_{\mathbb{N}}^* f d\mu_d = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n).$$

Solution : Remarquons tout d'abord, que toute fonction de $\mathbb{N}$ vers $\overline{\mathbb{R}}$ est $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \mathbb{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$-mesurable.

(i) Traitons tout d'abord le cas d'une fonction positive $f : \mathbb{N} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$. Grâce à l'égalité

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) 1_{\{n\}},$$

et par application de la propriété de Beppo Levi, nous avons ;

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{N}} f d\mu_d &= \int_{\mathbb{N}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f(n) 1_{\{n\}} \right) d\mu_d \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{N}} f(n) 1_{\{n\}} d\mu_d \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \mu_d(\{n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n).
\end{aligned}$$

(ii) Traitons maintenant le cas d'une fonction de signe quelconque. Une fonction f est μ_d-intégrable si $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} |f| d\mu_d < +\infty$, ce que l'on peut écrire, grâce au (i) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f(n)| < +\infty.$$

En d'autre terme $f \in \mathcal{L}^1(\mu_d)$ si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f(n)$ est absolument convergente. Si $f$est une telle fonction, alors :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{N}} f d\mu_d &= \int_{\mathbb{N}} f^+ d\mu_d - \int_{\mathbb{N}} f^- d\mu_d \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} f^+(n) - \sum_{n=0}^{\infty} f^-(n) \qquad \text{d'après} \quad (i) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} f(n).
\end{aligned}$$

Exercice 3. *Expliciter la définition de l'intégrale dans un espace mesuré par une mesure de Dirac.*

Solution : Soit $(E, \mathbb{B})$ un ensemble mesurable, $a \in E$ et δ_a la mesure de Dirac en a.

(i) Traitons d'abord le cas d'une fonction mesurable positive f et montrons que

$$\int_E f d\delta_a = f(a).$$

• Si f est une fonction indicatrice $f = 1_A$ avec $A \in \mathbb{B}$,

$$\int_E f d\delta_a = \delta_a(A) = 1_A(a) = f(a).$$

• Si f est une fonction étagée positive, on peut écrire f sous la forme $f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1_{A_i}$ (où $\lambda_i \geq 0$ et $A_i \in \mathbb{B}$, $i = 1, \ldots, n$). Alors

$$\int_E f d\delta_a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_E 1_{A_i} d\delta_a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1_{A_i}(a) = f(a).$$

• Si f est mesurable positive, alors, d'après le thèorème d'approximation, f est limite croissante d'une suite $(\phi_n)_{n\geq 1}$ de fonctions étagées positives. D'après la propriété de Beppo Levi, on a alors :

$$\int_E f d\delta_a = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_E \phi_n d\delta_a = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \phi_n(a) = f(a).$$

(ii) Traitons maintenant le cas d'une fonction mesurable de signe quelconque, notée f. $f \in \mathcal{L}^1(\delta_a)$ si et seulement si $\int_E |f| d\delta_a < +\infty$, ce qui s'écrit $|f(a)| < +\infty$. Dans ce cas, on a :

$$\int_E f d\delta_a = \int_E f^+ d\delta_a - \int_E f^- d\delta_a = f^+(a) - f^-(a) = f(a).$$

Exercice 4. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une application $(\mathbb{B}_{\mathbb{R}}, \mathbb{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$-mesurable. On suppose que f est positive ou que f λ-integrable. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$,*

$$\int_{\mathbb{R}}^{*} f(x+a) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}}^{*} f(x) d\lambda(x).$$

Solution : • Si f est une fonction indicatrice de la forme $f = 1_A$ où A est un borélien de $\mathbb{R}$. On a

$$\int_{\mathbb{R}} 1_A(x+a) d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} 1_{A-\{a\}}(x) d\lambda(x) = \lambda(A - \{a\}) = \lambda(A)$$

car la mesure de Lebesgue est invariante par les translations (voir cours).

• Le cas d'une fonction étagée positive se déduit par linéarité de l'intégrale du cas précédent.

• Supposons que $f$est mesurable positive ; d'après le théorème d'approximation, on peut écrire $f = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \phi_n$, où $(\phi_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante de fonctions étagées positives, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+.) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \phi_n(x+.)$, où $(\phi_n(x+.))_{n\geq 1}$ est une suite croissante de fonctions étagées positives. Le théorème de convergence monotone ainsi que l'étape précédent permettent d'affirmer

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x+a)d\lambda(x) &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_{\mathbb{R}} \phi_n(x+a)d\lambda(x)\\ &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_{\mathbb{R}} \phi_n(x)d\lambda(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\longrightarrow+\infty}\phi_n d\lambda(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)d\lambda(x).\end{aligned}$$

• Enfin, soit $f_i n\mathcal{L}^1(\beta)$, d'après ce qui précéde, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x+a)d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}} f^+(x+a)d\lambda(x) - \int_{\mathbb{R}} f^-(x+a)d\lambda(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}} f^+(x)d\lambda(x) - \int_{\mathbb{R}} f^-(x)d\lambda(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)d\lambda(x).\end{aligned}$$

Le résultat est donc démontré.□

Exercice 5. *Soient μ_1 et μ_2 deux mesures sur l'espace mesurable $(E,\mathbb{B})$.*

(i) *Si f est une fonction mesurable positive à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, montrer que*

$$\int_E^* fd(\mu_1+\mu_2) = \int_E^* fd\mu_1 + \int_E^* fd\mu_2.$$

(ii) *Que dire pour une fonction mesurable de signe quelconque ?*

Solution : On rappelle que l'application $\mu_1+\mu_2 : \mathbb{B} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ définie, pour tout $B \in \mathbb{B}$ par

$$(\mu_1+\mu_1)(B) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_1(B)+\mu_2(B),$$

est une mesure.

(i) Nous allons démontrer le résultat en trois étapes successives.

• Supposons que f est une fonction indicatrice de la forme $f = 1_A$ avec $A \in \mathbb{B}$.On a

$$\int_E 1_A d(\mu_1+\mu_2) = ((\mu_1+\mu_1)(A) = \mu_1(A)+\mu_2(A) = \int_E 1_A d\mu_1 + \int_E 1_A d\mu_2.$$

Donc, le résultat est vrai pour les fonctions indicatrices.

• Le résultat se généralise facilement aux fonctions étagées positives.

• Supposons que $f$est mesurable positive ; d'après le théorème d'approximation, on peut écrire $f = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \phi_n$, où $(\phi_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante de fonctions étagées positives. Le théorème de convergence monotone ainsi que l'étape précédent permettent d'affirmer

$$\begin{aligned}
\int_E f d(\mu_1+\mu_2) &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_E \phi_n d(\mu_1+\mu_2)\\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left[\int_E \phi_n d\mu_1+\int_E \phi_n d\mu_2\right]\\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_E \phi_n d\mu_1+\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_E \phi_n d\mu_2\\
&= \int_E f d\mu_1+\int_E f d\mu_2.
\end{aligned}$$

D'où le résultat est démontré pour toute fonction mesurable positive.

(ii) Nous avons, d'après (i), les équivalences suivantes pour une fonction $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mesurable :

$$\begin{aligned}
f\in\mathcal{L}^1(\mu_1+\mu_2) \quad &\Leftrightarrow \quad \int_E |f| d(\mu_1+\mu_2) < +\infty\\
&\Leftrightarrow \quad \int_E |f| d\mu_1+\int_E |f| d\mu_2 < +\infty\\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \int_E |f| d\mu_1 < +\infty\\ \int_E |f| d\mu_2 < +\infty\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \quad f\in\mathcal{L}^1(\mu_1)\cap\mathcal{L}^1(\mu_2).
\end{aligned}$$

Pour une telle fonction, on a alors :

$$\begin{aligned}
\int_E f d(\mu_1+\mu_2) &= \int_E f^+ d(\mu_1+\mu_2)-\int_E f^- d(\mu_1+\mu_2)\\
&= \int_E f^+ d(\mu_1)+\int_E f^+ d(\mu_2)-\int_E f^- d(\mu_1)-\int_E f^- d(\mu_2)\\
&= \int_E f d(\mu_1)+\int_E f d(\mu_2).
\end{aligned}$$

□

Exercice 6. *Soit f une application mesurable de E dans $\overline{\mathbb{R}}$ et B une partie mesurable de E.*

(i) *Montrer que si $f \geq 0$ alors*

$$\int_E^* f 1_B d\mu = \int_B f_{|B} d\mu_{|B}. \qquad (*)$$

(ii) *Montrer que si f est μ-intégrable alors $f_{|B}$ est $\mu_{|B}$-intégrable et l'égalité $(*)$ persiste.*

Solution : On a d'après le cours $f_{|B}$ est aussi mesurable. Si $f = 1_A$, nous avons

$$\int_E 1_A.1_B d\mu = \mu(A \cap B) \quad \text{et} \quad \int_B (1_A)_{|B} d\mu_{|B} = \int_B 1_{A\cap B} d\mu_{|B} = \mu(A \cap B).$$

Donc on obtient l'égalité $\int_E 1_A.1_B d\mu = \int_B (1_A)_{|B} d\mu_{|B}$. Par linéarité puis le théorème de convergence monotone, on conclut de manière classique que cette égalités s'étend aux fonctions mesurables positives.

(ii) Supposons que f est μ-intégrable. Alors par (i),

$$\int_B f_{|B}| d\mu_{|B} = \int_B |f|_{|B} d\mu_{|B} = \int_E |f| 1_B d\mu < +\infty,$$

et $f_{|B}$ est $\mu_{|B}$-intégrable. L'égalité $(*)$ se démontre alors de manière classique.$\square$

Exercice 7. *Soit f une fonction à valeurs réelles positive sur E ; on suppose que, pour tout $n \geq 1$, la fonction $x \mapsto f(x)^n$ est intégrable sur E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :*

$(A1)$ $\mu(\{f \geq 1\}) = 0$;

$(A2)$ *la série* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int_E f^n d\mu$ *converge ;*

$(A3)$ *la série* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int_E f^n d\mu$ *converge vers* $\int_E \frac{f}{f+1} d\mu$.

Solution : $(A1) \Rightarrow (A3)$. Considérons la suite de fonctions $(\delta_k)_{k\geq 1}$ définie, pour tout $x \in E$, par

$$\delta_k(x) = \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n+1} f(x)^n = f(x).\frac{1 - f(x)^{2k}}{1 + f(x)}.$$

Par hypothèse, la suite de fonctions $(\delta_k)_{k\geq 1}$ converge simplement μ-presque partout vers $\frac{f}{1+f}$. Mais d'autre part :

$$\delta_{k+1} - \delta_k(x) = f(x)^{2k+1}(1 - f(x)).$$

Si l'on pose $A = \{f \geq 1\}$, la suite $(\delta_k)_{k\geq 1}$ est donc, croissante sur $E \setminus A$. D'après la propriété de Beppo Levi, on a donc

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \int_{E\setminus A} \delta_k d\mu = \int_{E\setminus A} \frac{f}{f+1} d\mu.$$

Or, puisque A est de mesure nulle,

$$\int_{E\setminus A} \frac{f}{f+1} d\mu = \int_E \frac{f}{f+1} d\mu$$

et

$$\int_{E\setminus A} \delta_k d\mu = \int_E \delta_k d\mu = \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n+1} \int_E f^n d\mu.$$

Donc

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty} \sum_{n=1}^{2k} (-1)^{n+1} \int_E f^n d\mu = \int_E \frac{f}{f+1} d\mu. \qquad (*)$$

Par ailleurs, sur la partie non négligeable $E \setminus A$, $0 \leq f^n \leq f < 1$; donc sur $E \setminus A$ la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers la fonction nulle tout en étant dominée par la fonction intégrable f. Ainsi d'après le théorème de la convergence dominée

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_E f^n d\mu = 0. \qquad (**)$$

On a donc démontré que les sommes partielles de rang pair de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \int_E f^n d\mu$$

tendent vers $\displaystyle\int_E \frac{f}{f+1} d\mu$ (d'après $(*)$). Mais comme elles ne diffèrent des sommes partielles de rand impair que par une quantité qui tend vers 0 (d'après $(**)$), on est en droit d'affirmer que série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \int_E f^n d\mu$$

converge vers $\displaystyle\int_E \frac{f}{f+1} d\mu$.

$(A3) \Rightarrow (A2)$. Evident.

$(A2) \Rightarrow (A1)$. comme nous avons affaire à une série convergente, le terme général tend vers 0 ; donc,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_E f^n d\mu = 0.$$

Or nous avons :

$$\int_E f^n d\mu \geq \int_{\{f\geq 1\}} f^n d\mu,$$

et comme $f^n \geq 1$ sur $\{f \geq 1\}$, nous obtenons

$$\int_E f^n d\mu \geq \mu(\{f \geq 1\}).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, nous concluons : $\mu(\{f \geq 1\}) = 0.\square$

Exercice 8. *Soit* $(E, \mathbb{B}, \mu)$ *un espace mesuré et* $f : E \longrightarrow [0, +\infty]$ *une fonction mesurable. On définit l'application* ν *sur* $\mathbb{B}$ *par* $\nu(A) = \int_A^* f d\mu$.

1) Montrer que ν *est une mesure sur* $(E, \mathbb{B})$. *On dit que* ν *admet la densité* f *relativement à* μ *et on note* $d\nu(x) = fd\mu(x)$ *ou* $\nu = f.\mu$.

2) Montrer que, pour tout $\phi : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$, *on a* $\int_E^* \phi d\nu = \int_E^* f\phi d\mu$.

3) Caractériser les ensembles mesurables de mesure nulle de ν.

4) On suppose $E = [0, 1]$ *et* $\mathbb{B} = \mathbb{B}_{[0,1]}$. *On note* λ *la mesure de Lebesgue sur* E *et* δ_0 *la mesure de Dirac en 0. Existe-t-il une fonction positive mesurable* f *(resp.* g*) telle que pour tout* $A \in \mathbb{B}$ *on ait* $\lambda(A) = \int_A f d\delta_0$ *(resp.* $\delta_0(A) = \int_A g d\lambda$*) ?*

Solution : 1. (M_1) Si $A = \emptyset$ alors on sait que $\int_\emptyset f d\mu$ est toujours nulle, donc $\nu(\emptyset) = 0$.

(M_2) Si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{B}$ deux à deux disjoints alors

$$\nu(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = \int_{\bigcup_{n\geq 1} A_n} f d\mu = \int_E f 1_{\bigcup_{n\geq 1} A_n} d\mu.$$

Comme la suite $(f 1_{\bigcup_{k\leq n} A_k})_{n\geq 1}$ converge en croissant vers $f 1_{\bigcup_{n\geq 1} A_n}$, par la propriété de Beppo Levi, on a

$$\int_E f 1_{\bigcup_{n\geq 1} A_n} d\mu = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_E f 1_{\bigcup_{k\leq n} A_k} d\mu = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{k\leq n} \int_{A_k} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n).$$

2. On utilise la technique des fonctions étagées. Pour $\phi = 1_A$ où $A \in \mathbb{B}$ on a $\int_E 1_A d\nu = \nu(A) = \int_A f d\mu =_i nt_E f 1_A d\mu$. Si ϕ est uen fonction étagée positive de décomposition $\phi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$ alors la linéarité de l'intégrale donne le résultat :

$$\int_E \phi d\nu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_E 1_{A_i} d\nu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_E f 1_{A_i} d\mu = \int_E f\phi d\mu.$$

Enfin si ϕ est mesurable positive, alors il existe une suite $(\phi_n)_{n\geq 1}$ de fonctions étagées positives qui converge en croissant vers ϕ. Donc d'après la propriété de Beppo Levi

$$\int_E \phi d\nu = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_E \phi_n d\nu = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_E f\phi_n d\mu = \int_E f\phi d\mu.$$

3. Si A est une ensemble mesurable de mesure nulle pour ν, alors $\int_E f1_A d\mu = 0$. Donc $f1_A = 0$ μ-presque partout. Un ensemble mesurable est de mesure nulle pour ν si, et seulement si, $\{f \neq 0\} \cup A$ est de mesure nulle pour μ.

4. Pour toute fonction g mesurable positive, on a $\delta_0(\{0\}) = 1 \neq 0 = \int_{\{0\}} gd\lambda$. Donc δ_0 n'admet pas de densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

Si λ admet la densité f relativement à δ_0, alors pour $\phi = 1_{]0,1]}$, on a $\int_{[-1,1]} \phi d\lambda = 1 \neq 0 = \phi(0)f(0) = \int_{[-1,1]} \phi f d\delta_0$.$\square$

Exercice 9. *Soit $(E, \mathbb{B}, \mu)$ un espace mesuré.*

1) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives telle que $\int_E^* f_1 d\mu < +\infty$. Montrer que si la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers une fonction f alors f est mesurable et $\int_E^* f d\mu = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_E^* f_n d\mu < +\infty$.

Montrer par un exemple que l'hypothèse $\int_E^* f_1 d\mu < +\infty$ est nécessaire.

2) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables positives qui converge simplement vers f et telle que, pour tout $n \geq 1$, $\int_E^* f_n d\mu \leq M$ où M est une constante donnée. Montrer que $\int_E^* f d\mu \leq M$.

3) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante de fonctions mesurables positives telle que, pour tout $n \geq 1$, $\int_E^* f_n d\mu \leq M$ où M est une constante donnée.

a) Montrer que, pour presque partout x, $(f_n(x))$ est une suite bornée.

b) En déduire qu'il existe une fonction mesurable $f : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$, avec $\int_E^* f d\mu < +\infty$ telle que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers f presque partout et $\int_E^* f d\mu = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_E^* f_n d\mu$.

4. Soit $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une application mesurable telle que $\int_E^* f d\mu < +\infty$. Montrer que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{\{f>n\}} f d\mu = 0$.

Solution : 1) Comme $0 \leq f \leq f_1$, alors $\int_E f d\mu < +\infty$. La suite $(f_1 - f_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives qui converge simplement vers $f_1 - f$. D'après la propriété de Beppo Levi on a

$$\int_E (f_1 - f)d\mu = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_E (f_1 - f_n)d\mu$$

et comme $\int_E f_1 d\mu < +\infty$, on peut retrancher $\int_E f_1 d\mu < +\infty$ aux deux membres de l'égalité précédente et obtenir

$$\int_E f d\mu = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_E f_n d\mu.$$

La condition $\int_E f_1 d\mu < +\infty$ est nécessaire. En effet, si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n = 1_{[n,+\infty[}$, alors la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers la fonction nulle en décroissant mais $\int_{\mathbb{R}} 0 d\lambda = 0 \neq +\infty = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$.

2) La convergence de la suite vers f implique que $f = \liminf_{n \longrightarrow +\infty} f_n$ et le lemme de Fatou donne

$$\int_E f d\mu \leq \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \int_E f_n d\mu \leq M.$$

3) Puisque la suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ est croissante, la consdition nécessaire et suffisante pour qu'elle ne soit pas bornée est : $(\forall k \in \mathbb{N}^*), (\exists p \in \mathbb{N}), f_p(x) \geq k$. Si A est l'ensemble des x où la suite n'est pas bornée, alors

$$A = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \{f_p \geq k\}.$$

Pour tout $k \geq 1$ on a donc $A \in \mathbb{B}$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$k\mu(\{f_p \geq k\}) = \int_{\{f_p \geq k\}} k d\mu \leq \int_{\{f_p \geq k\}} f_p d\mu \leq \int_E f_p d\mu \leq M$$

d'où $\mu(\{f_p \geq k\}) \leq \dfrac{M}{k}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. Comme $(\{f_p \geq k\})_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante on a, par continuité monotone croissante de μ,

$$\lim_{p \longrightarrow +\infty} \mu(\{f_p \geq k\}) = \mu(\bigcup_{p \in \mathbb{N}} \{f_p \geq k\}) \leq \frac{M}{k}.$$

De plus $A \subset (\bigcup_{p \in \mathbb{N}} \{f_p \geq k\}$, pour tout $k_i n \mathbb{N}^*$ et donc $\mu(A) \leq \dfrac{M}{k}$ et par suite $\mu(A) = 0$ c'est-à-dire que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est bonrnée μ-presque partout.

b) Notons que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ étant croissante elle converge dans $\overline{\mathbb{R}}$. Si on pose $f = \lim_n f_n 1_{A^c}$, alors $f < +\infty$. D'après la question précédente, la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers μ-presque partout et le théorème de convergence monotone donne

$$\int_E f d\mu = \int_E \lim_n f_n d\mu = \lim_n \int_E f_n d\mu \leq M.$$

4) La suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $f_n = f 1_{\{f > n\}}$ est une suite décroissante de fonctions positives qui converge vers $f 1_{\{f = +\infty\}}$. Or $\int_E d d\mu <$

$+\infty$ donc $\{f = +\infty\}$ est de mesure nulle. De plus $\int_E f_1 d\mu < +\infty$ et par 1) on déduit que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{\{f>n\}} f d\mu = 0.$$

□

Exercice 10. *Soit $(E, \mathbb{B}, \mu)$ un espace mesuré et soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{M}(E, \mathbb{B}, \overline{\mathbb{R}}_+)$ vérifiant l'hypothèse (H) suivant : il existe une fonction $g \in \mathcal{M}(E, \mathbb{B}, \overline{\mathbb{R}}_+)$ telle que $\int_E^* g d\mu < +\infty$ et $f_n \leq g$ μ-presque partout pour tout $n \geq 1$.*

1) Montrer que : $\limsup_{n \longrightarrow +\infty} \int_E^* f_n d\mu \leq \int_E^* \limsup_{n \longrightarrow +\infty} f_n d\mu$. (On utilisera les fonctions $h_n = g 1_{\{g<+\infty\}} - f_n 1_{\{f_n \leq g\} \cap \{g<+\infty\}}$.)

2) Que peut-on conclure du cas particulier $(E, \mathbb{B}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathbb{B}_\lambda, \lambda)$ et $f_n = 1_{[n,2n]}$.

3) Revenant au cas général, on suppose que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge μ-presque partou vers une fonction $f \in \mathcal{M}(E, \mathbb{B}, \overline{\mathbb{R}}_+)$. Montrer que

$$\int_E^* f d\mu = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_E^- f_n d\mu < +\infty.$$

Solution : 1) Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction

$$h_n = g 1_{\{g<+\infty\}} - f_n 1_{\{f_n \leq g\} \cap \{g<+\infty\}} \tag{$*$}$$

qui d'après l'hypothèse (H) est dans $\mathcal{M}(E, \mathbb{B}, \overline{\mathbb{R}}_+)$ et vérifie

$$\liminf_{n \longrightarrow +\infty} h_n = g 1_{\{g<+\infty\}} - \limsup_{n \longrightarrow +\infty} f_n 1_{\{f_n \leq g\} \cap \{g<+\infty\}}. \tag{$**$}$$

Puisque $\int_E g d\mu < +\infty$ on a $g < +\infty$ μ-presque partout. Cette propriété, jointe à $f_n \leq g$ μ-presque partout, donne :

$$g 1_{\{g<+\infty\}} = g \quad \mu - p.p, \quad f_n 1_{\{f_n \leq g\} \cap \{g<+\infty\}} = f_n \quad \mu - p.p.$$

puis que

$$\limsup_{n \longrightarrow +\infty} f_n 1_{\{f_n \leq g\} \cap \{g<+\infty\}} = \limsup_{n \longrightarrow +\infty} f_n \quad \mu - p.p.$$

Le passage aux intégrales supérieures dans $(*)$ donne (en écrivant d'abord $(*)$ sous la forme

$$h_n + f_n 1_{\{f_n \leq g\} \cap \{g<+\infty\}} = g 1_{\{g<+\infty\}}$$

de manière à n'intégrer que des fonctions positives) :

$$\int_E^* h_n d\mu = \int_E^* g 1_{\{g<+\infty\}} d\mu - \int_E^* f_n 1_{\{f_n \leq g\} \cap \{g<+\infty\}} d\mu = \int_E^* g d\mu - \int_E^* f_n d\mu,$$

d'où l'on déduit

$$\liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int_E^* h_n d\mu = \int_E^* g d\mu - \limsup_{n\longrightarrow+\infty} \int_E^* f_n d\mu.$$

D'autres part, en passant aux intégrales supérieures dans (∗∗) et en utilisant le lemme de Fatou et l'égalité ci-dessus il vient :

$$\begin{aligned}\int_E^* g d\mu &= \int_E g 1_{\{g<+\infty\}} d\mu = \int_E^* \liminf_{n\longrightarrow+\infty} h_n d\mu + \int_E^* \limsup_{n\longrightarrow+\infty} (f_n 1_{\{f_n \leq g\} \cap \{g<+\infty\}}) d\mu \\ &\leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int_E^* h_n d\mu + \int_E^* \limsup_{n\longrightarrow+\infty} f_n d\mu = \int_E^* g d\mu - \limsup_{n\longrightarrow+\infty} \int_E^* f_n d\mu + \int_E^* \limsup_{n\longrightarrow+\infty} f_n d\mu\end{aligned}$$

et la comparaison des deux membres extrêmes, compte tenu de ce que l'intégrale supérieure de g est finie, donne l'inégalité souhaitée.

2) Dans ce cas :

$$\int_{\mathbb{R}}^* f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}}^* 1_{[n,2n]} d\lambda = n$$

et par conséquent

$$\limsup_{n\longrightarrow+\infty} \int_{\mathbb{R}}^* f_n d\lambda = +\infty.$$

Mais d'autre part, comme il est clair que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers 0, on a $\limsup_{n\longrightarrow+\infty} f_n = 0$ et par suite $\int_E^* \limsup_{n\longrightarrow+\infty} f_n d\lambda = 0$, si bien que l'inégalité 1) n'est pas vérifiée.

L'hypothèse (H) n'est pas réalisée dans ce cas. En effet, s'il existait une fonction $g \in \mathcal{M}(E, \mathbb{B}, \overline{\mathbb{R}}_+)$ telle que $f_n \leq g$ μ-p.p. pour tout $n \geq 1$, on voit facilement que g vérifierait aussi, pour tout $n \geq 1$:

$$g \geq \sum_{k=0}^{n} f_{2^k} \quad \mu - p.p.$$

et par conséquent :

$$\int_{\mathbb{R}}^* g d\lambda \geq \int_{\mathbb{R}}^* \sum_{k=0}^{n} f_{2^k} d\lambda = \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{k+1} - 1,$$

de sorte que $\int_{\mathbb{R}}^* g d\lambda = +\infty$.

Ce contre-exemple prouve donc que, à la différence du lemme de Fatou qui n'exige aucune condition particulière sur la suite considérée, l'hypothèse

(H) est essentielle pour assurer la validité de l'inégalité duale de celle de ce lemme écrite avec les limites supérieures.

3) Par hypothèse on a :

$$f = \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n = \limsup_{n \longrightarrow +\infty} f_n = \liminf_{n \longrightarrow +\infty} f_n \quad \mu - p.p.$$

Alors, en utilisant 1) et le lemme de Fatou on a :

$$\begin{aligned} \limsup_{n \longrightarrow +\infty} \int_E^* f_n d\mu &\leq \int_E^* \limsup_{n \longrightarrow +\infty} f_n d\mu = \int_E^* f d\mu = \int_E^* \liminf_{n \longrightarrow +\infty} f_n d\mu \\ &\leq \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \int_E^* f_n d\mu \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \int_E^* f d\mu &= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_E^* f_n d\mu = \limsup_{n \longrightarrow +\infty} \int_E^* f_n d\mu \leq \limsup_{n \longrightarrow +\infty} \int_E^* g d\mu \\ &= \int_E^* g d\mu < +\infty. \end{aligned}$$

□

Exercice 11. *Soit $(E, \mathbb{B}, \mu)$ un espace mesuré tel que pour tout $x \in E$, on ait $\{x\} \in \mathbb{B}$ et $\mu(\{x\}) > 0$.*

1) Donner l'exemple d'un tel esapce mesuré.

2) Soit $f \in \mathcal{L}^1$.

a) Montrer que $\{f \neq 0\}$ est dénombrable.

b) Si $\{f \neq 0\} = \{x_n; n \in \mathbb{N}^*\}$ où les x_n sont distincts, établir que

$$\int_E^* f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)\mu(x_n).$$

Cette série est-elle absolument convergente ?

Solution : 1) Un exemple d'espace mesuré ayant la propriété de l'énoncé est $(E, \mathcal{P}(E), \mu)$ où μ est la mesure du dénombrement.

2) On vérifie facilement que

$$\{f \neq 0\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \right)$$

où $A_{m,n} = \{x \in E, |f(x)| \geq \dfrac{1}{m}, \mu(\{x\}) \geq \dfrac{1}{n}\}$. La dénombrabilité de $\{f \neq 0\}$ découle immédiatement si on montre que les $A_{m,n}$ sont dénombrables. En fait chaque $A_{m,n}$ est fini. Car si $A_{m,n}$ comportait une infinité d'éléments, pour tout $p \geq 1$, on pourrait trouver dans cet ensemble p éléments distincts $a_1, \ldots, a_p$ et de l'inégalité

$$|f| \geq \sum_{k=1}^{p} |f(a_k)| 1_{\{a_k\}}$$

on déduirait :

$$\int_E^* |f| d\mu \geq \int_E^* \left(\sum_{k=1}^{p} |f(a_k)| 1_{\{a_k\}} \right) d\mu = \sum_{k=1}^{p} |f(a_k)| \mu(\{a_k\}) \geq \frac{p}{mn}$$

ce qui imposerait $\displaystyle\int_E^* f d\mu = +\infty$ et contredirait l'intégrabilité de f.

b) En remarquant que

$$f^+ = \sum_{n=1}^{\infty} f^+(x_n) 1_{\{x_n\}} \quad \text{et} \quad f^- = \sum_{n=1}^{\infty} f^-(x_n) 1_{(\{x_n\}}.$$

Il vient donc

$$\int_E^* f^+ d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f^+(x_n) \mu(\{x_n\}) \quad \text{et} \quad \int_E^* f^- d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f^(x_n) \mu(\{x_n\})$$

puis

$$\int_E^* f d\mu = \int_E^* f^+ d\mu - \int_E^* f^- d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) \mu(\{x_n\}).$$

Mais comme $|f|$ est également intégrable et que

$$\{|f| \neq 0\} = \{f \neq 0\},$$

le résultat ci-dessus appliqué à $|f|$ donne

$$\int_E |f| d\mu = \sum_{n=1} |f(x_n)| \mu(\{x_n\}),$$

si bien que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(x_n) \mu(\{x_n\})$ est absolument convergente.□

Exercice 12. *On considère l'espace mesuré* $(\mathbb{R}, \mathbb{B}_l a, \lambda)$ *et* $f \in \mathcal{L}^1$.

1) On suppose que $f(x)$ *admet une limite dans* $\overline{\mathbb{R}}$ *quand* x *tend vers* $+\infty$, *ou quand* x *tend vers* $-\infty$. *Montrer que ces limites sont nulles.*

2) Donner un exemple où f *est continue, non bornée. Dans un tel cas; est-il possible que* $f(x)$ *admette des limites quand* x *tend vers* $\pm\infty$.

3) On suppose que f *uniformément continue. Montrer que*

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

Solution : 1) Supposons que $\imath im_{x\longrightarrow+\infty}f(x)=a>0$ et considérons un b tel que $0<b<a$. On peut trouver un $x_0\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)\geq b$ pour tout $x\geq x_0$. Alors : $f^+\geq b1_{[x_0,+\infty[}$ et $\int_{\mathbb{R}}^* f^+d\lambda\geq b\lambda([x_0,+\infty[)=+\infty$, ce qui contredit l'intégrabilité de f. (On fera des démonstrations analogues dans les trois autres cas selon le signe de a et selon que x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$).

2) Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction paire telle que, pour tout entier $n\geq 2$, on ait

$$\begin{aligned} f(x) &= n^4(x-n) \quad \text{pour} \quad x\in\left[n,n+\frac{1}{n^3}\right] \\ \text{et}\quad f(x) &= -n^4\left(x-n-\frac{2}{n^3}\right) \quad \text{pour} \quad x\in\left[n+\frac{1}{n^3},n+\frac{2}{n^3}\right] \end{aligned}$$

tandis que $f(x)=0$ partout ailleurs sur $\mathbb{R}_+$.

On vérifie facilement que cette fonction est positive et continue sur $\mathbb{R}$ (donc borélienne, donc Lebesgue-mesurable). De plus pour tout $n\geq 2$, on a $f(n+\dfrac{1}{n^3})=n$ de sorte que f n'est pas bornée. Cependant f est Lebesgue-intégrable. En effet, elle est majorée par la fonction mesurable $g=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1_{[-n,-n-\frac{2}{n^3}]}+1_{[n,n+\frac{2}{n^3}]}\right)$ et donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}}^* fd\lambda &\leq \int_E^* gd\lambda=\sum_{n=1}^{\infty}n\int_{\mathbb{R}}^*\left(1_{[-n,-n-\frac{2}{n^3}]}+1_{[n,n+\frac{2}{n^3}]}\right)d\lambda \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}n\left(\lambda\left(\left[-n-\frac{2}{n^3},-n\right]\right)+\lambda\left(\left[n,n+\frac{2}{n^3}\right]\right)\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}<+\infty \end{aligned}$$

La condition $f(n+\dfrac{1}{n^3})=n$ interdit évidemment à f d'admettre une limite quand x tend vers $+\infty$ (et de même, par parité, quand x tend vers $-\infty$).

3) Supposons que $f(x)$ ne converge pas vers 0 tend vers $+\infty$. Comme il en est de même pour $|f(x)|$ il existe un $\epsilon>0$ tel que

$$\forall x\in\mathbb{R},(\exists y\in\mathbb{R},y>x),|f(y)|\geq 2\epsilon$$

et par suite :

$$\forall x\in\mathbb{R},\{y\in\mathbb{R},y\geq x+2,|f(y)|\geq 2\epsilon\}\neq\emptyset.$$

Un tel $\epsilon>0$ étant fixé, l'ensemble ci-dessus qui est minoré, et fermé car f continue, contient sa borne inférieure noté $\phi(x)$. On définit alors par récurrence une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de prenant en prenant x_1 quelconque tel que

$|f(x_1)| \geq 2\epsilon$, puis $x_{n+1} = \phi(x_n)$ pour tout $n \geq 1$. La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ vérifie donc $|f(x_n)| \geq 2\epsilon$ et $x_{n+1} \geq x_n + 2$, ceci pour tout $n \geq 1$.

Comme f est uniformément continue, on peut trouver $\eta \in]0,1[$ tel que $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$ dès que $|x - y| \leq \eta$. Alors, pour tout $n \geq 1$ et pour tout $x \in [x_n - \eta, x_n + \eta]$, on a $|f(x) - f(x_n)| \leq \epsilon$ d'où l'on déduit

$$|f(x)| = |f(x) - f(x_n) + f(x_n)| \geq |f(x_n)| - |f(x) - f(x_n)| \geq 2\epsilon - \epsilon = \epsilon.$$

Les intervalles $[x_n - \eta, x_n + \eta]$ étant mutuellement disjoints, on a la minoration $|f| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon 1_{[x_n-\eta, x_n+\eta]}$, laqualle entraîne

$$\int_{\mathbb{R}}^{*} |f| d\lambda \geq \int_{\mathbb{R}}^{*} \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon 1_{[x_n-\eta,x_n+\eta]} d\lambda = \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}}^{*} 1_{[x_n-\eta,x_n+\eta]} d\lambda = \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} 2\eta = +\infty,$$

si bien que $|f|$ n'est pas Lebesgue-intégrable et, par conséquent, f non plus. On fait une démonstration analogue si $f(x)$ ne converge pas vers 0 quand x tend vers $-\infty$.□

Exercice 13. *On suppose que f est une fonction mesurable à valeurs positives vérifiant $\int_E^* fg d\mu < +\infty$, pour toute fonction g mesurable à valeurs positives vérifiant $\int_E^* g d\mu < +\infty$.*

(i) On suppose que μ est une mesure finie ; montrer alors qu'il existe une constante réelle $M \geq M$ telle que $f \leq M$ p.p.

(ii) Montrer que le résultat subsiste encore si μ est une mesure σ-finie.

(iii) A l'aide d'un contre-exemple, montrer que le résultat n'est plus valable si μ n'est pas une mesure σ-finie.

Solution : $i)$ Nous allons démontrer la contraposée. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_n = \{f \geq n\};$$

alors, par les hypothèses, $0 < \mu(A_n) < +\infty$. Considérons alors la fonction mesurable

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \mu(A_n)} 1_{A_n}.$$

D'une part, par la propriété de Beppo Levi, on a

$$\int_E^* g d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \mu(A_n)} \int_E^* 1_{A_n} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty;$$

d'autre part, toujours grâce à la propriété de Beppo Levi

$$\int_E^* g f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \mu(A_n)} \int_{A_n}^* f d\mu \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Ainsi nous avons trouvé une fonction g mesurable positive telle que les intégrales $\int_E g d\mu$ et $\int_E fg d\mu$ soient respectivement finie et infinie.

ii) Comme la mesure μ est σ-finie, il existe une suite croissante $(B_p)_{p\geq 1}$ de parties mesurables de E telle que $\bigcup_{p\geq 1} B_p = E$ et telle que, pour tout $p \geq 1$, $\mu(B_p) < +\infty$. On pose comme dans la question *i*), pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_n = \{f \geq n\}.$$

Nous allons démontrer la contraposée : supposons que, pour tout $n \geq 1$, $\mu(A_n) > 0$. Pour n fixé, la suite $(A_n \cap B_p)_{p\geq 1}$ est croissante et

$$\lim_{p\longrightarrow+\infty} \mu(A_n \cap B_p) = \mu(\bigcup_{p=1}^{\infty} [A_n \cap B_p]) = \mu(A_n) > 0;$$

et donc, il existe un entier p_n tel que $\mu(A_n \cap B_{p_n}) > 0$. Posons alors

$$X_n = A_n \cap B_{p_n};$$

en utilisant la fonction $g = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \mu(X_n)} 1_{X_n}$, on conclut de la même manière qu'au *i*).

iii) Si la mesure μ n'est pas σ-finie, la conclusion n'est plus valable. Pour s'en convaincre, prenons $E = \mathbb{R}$ et $\mathbb{B} = \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ et μ la mesure définie par $\mu(A) = 0$ si A est un borélien dénombrable et $\mu(A) = +\infty$ si A est un borélien non dénombrable. Dans cette situation, une fonction g est μ-intégrable si $g = 0$ μ-p.p, et alors $fg = 0$ μ-p.p, ce qui entraîne $\int_E fg d\mu = 0 < +\infty$. L'hypothèse est donc satisfaite pour tout fonction f. En prenant par exemple la fonction valeur absolue, la conclusion n'est pas satisfaite.$\square$

Chapitre 4

Espaces $\mathcal{L}^p$, $p \in [1, +\infty]$

4.1 Semi-normes N_p et espaces $\mathcal{L}^p$, $p \in [1, +\infty[$

Lemme 7 *On considère deux réels $a, b \geq 0$, et deux réels conjuqués $p, q > 1$, c'est-à-dire que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Alors :*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Preuve : On vérifie facilement que, si une fonction réelle est croissante sur un intervalle I, alors quels que soient a et b dans I :

$$\int_a^b f(x)dx \geq (b-a)f(a).$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned}
\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} &= b^q + \frac{1}{p}(a^p - b^q) = b^q + \frac{1}{p}(a^p - b^{(q-1)p}) = b^q + \int_{b^{q-1}}^{a} x^{p-1}dx \\
&\geq b^q + (a - b^{q-1})b^{(p-1)(q-1)} = b^q + (a - b^{q-1})b = ab.
\end{aligned}$$

$\square$

Notation. Soit $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R})$. Pour tout réel $p \geq 1$, on pose :

$$N_p(f) = \left(\int_E^* |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

(Remarquer que l'intégrale ci-dessus a un sens d'après le Corollaire 2.5 chapitre 2.)

Théorème 24 *On considère un espace mesuré, deux fonctions $f; g \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R})$, et un réel $p \geq 1$.*

1) $f = 0 \ \mu - p.p. \Leftrightarrow N_p(f) = 0$;
2) $N_p(f) = N_p(|f|)$, *et* :$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $N_p(\alpha f) = |\alpha| N_p(f)$;
3) $|f| \leq |g| \ \mu - p.p. \Rightarrow N_p(f) \leq N_p(g)$
et : $|f| = |g| \ \mu - p.p. \Rightarrow N_p(f) = N_p(g)$;
4) si $p > 1$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:

$$N_1(fg) \leq N_p(f) N_q(g) \qquad \textit{(Inégalité de Hölder)};$$

en particulier, pour $p = 2$:

$$N_1(fg) \leq N_2(f) N_2(g) \qquad \textit{(Inégalité de Schwarz)};$$

Si $p, q, r \geq 1$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$:

$$N_r(fg) \leq N_p(f) N_q(g) \qquad \textit{(Inégalité de Hölder généralisée)};$$

5) $N_p(f + g) \leq N_p(f) + N_p(g)$ *(Inégalité de Minkowski).*

Preuve : 1) Conséquence du Théorème 3.4 chapitre 3.
2) Vérification immédiate.
3) Résulte du Corollaire 3.2 chapitre 3.
4) Nous distinguerons quatre cas :
1^{er} cas : $N_p(f) = 0$ ou $N_q(g) = 0$.
Alors, par exemple :

$$N_p(f) = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow} f = 0 \quad \mu - p.p. \Rightarrow fg = 0 \quad \mu - p.p. \overset{(1)}{\Rightarrow} N_1(fg) = 0.$$

2^e cas : $N_p(f) N_q(g) = +\infty$ et l'inégalité est vérifiée.
3^e cas : $N_p(f) = N_q(g) = 1$.
Du Lemme 1.1 il résulte

$$|fg| \leq \frac{1}{p}|f|^p + \frac{1}{q}|g|^q,$$

d'où l'on déduit par le Théorème 3.2 chapitre 3 :

$$\begin{aligned} N_1(fg) &= \int_E^* |fg| d\mu \leq \frac{1}{p} \int_E^* |f|^p d\mu + \frac{1}{q} \int_E^* |g|^q d\mu = \frac{1}{p}(N_p(f))^p + \frac{1}{q}(N_q(g))^q \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = N_p(f) N_q(g). \end{aligned}$$

4^e cas : $0 < N_p(f) < +\infty$ et $0 < N_q(g) < +\infty$.
Posons $f_1 = \frac{1}{N_p(f)} f$ et $g_1 = \frac{1}{N_q(g)} g$. D'après 2), $N_p(f_1) = N_q(g_1) = 1$, et il vient, par le 3^e cas :

$$\frac{1}{N_p(f) N_q(g)} N_1(fg) = N_1(f_1 g_1) \leq N_p(f_1) N_q(g_1) = 1,$$

d'où l'on déduit l'inégalité cherchée.

L'inégalité de Hölder généralisée s'obtient en remarquant que les réels $\frac{p}{r}$ et $\frac{q}{r}$ sont conjugués et en appliquant l'inégalité de Hölder avec ces exposants aux fonctions $|f|^r$ et $|g|^r$:

$$\begin{aligned} N_r(fg) &= \left(\int_E^* |fg|^r d\mu\right)^{\frac{1}{r}} = N_1(|fg|^r)^{\frac{1}{r}} \le (N_{\frac{p}{r}}(|f|^r))^{\frac{1}{r}}(N_{\frac{q}{r}}(|g|^r))^{\frac{1}{r}} \\ &= \left(\int_E^* |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E^* |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = N_p(f)N_q(g). \end{aligned}$$

5) Nous distinguerons deux cas :

1^{er} cas : $p = 1$.

Le résultat s'obtient facilement par :

$$\begin{aligned} N_1(f+g) &= \int_E^* |f+g| d\mu \le \int_E^* (|f|+|g|) d\mu = \int_E^* |f| d\mu + \int_E^* |g| d\mu \\ &= N_1(f) + N_1(g). \end{aligned}$$

2^e cas : $p > 1$.

On commence par une remarque préliminaire. Par convexité de la fonction $t \mapsto t^p$, tous les réels $a, b \ge 0$ vérifient :

$$(a+b)^p = 2^p(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b)^p \le 2^p\left(\frac{1}{2}a^p + \frac{1}{2}b^p\right) = 2^{p-1}(a^p + b^p);$$

de là il suit :

$$|f+g|^p \le (|f|+|g|)^p \le 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p),$$

puis

$$\begin{aligned} (N_p(f+g))^p &= \int_E^* |f+g|^p d\mu \le 2^{p-1}\left(\int_E^* |f|^p d\mu + \int_E^* |g|^p d\mu\right) \\ &= 2^{p-1}(N_p(f)^p + N_p(g)^p). \end{aligned}$$

Trois possibilités sont maintenant à envisager :

α) $N_p(f+g) = +\infty$. L'inégalité ci-dessus impose alors $N_p(f) = +\infty$ ou $N_p(g) = +\infty$, de sorte que l'inégalité 5) est vérifiée.

β) $N_p(f+g) = 0$. Alors l'inégalité 5) est trivialement réalisée.

γ) $0 < N_p(f+g) < +\infty$. On écrit :

$$\begin{aligned} (N_p(f+g))^p &= \int_E^* |f+g|^p d\mu = \int_E^* |f+g|^{p-1}|f+g| d\mu \\ &\le \int_E^* |f+g|^{p-1}(|f|+|g|) d\mu = \int_E^* |f+g|^{p-1}|f| d\mu + \int_E^* |f+g|^{p-1}|g| d\mu. \end{aligned}$$

Il reste à majorer chacun des deux termes du dernier membre par l'inégalité de Hölder en prenant $q = \dfrac{p}{p-1}$:

$$\begin{aligned}
\int_E^* |f+g|^{p-1}|f|d\mu &= N_1(|f+g|^{p-1}f) \leq N_p(f)N_q(|f+g|^{p-1}) \\
&= N_p(f)\left(\int_E^* |f+g|^{(p-1)q}d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= N_p(f)\left(\int_E^* |f+g|^{p}d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= N_p(f)(N_p(f+g))^{p-1}.
\end{aligned}$$

On obtient de même

$$\int_E^* |f+g|^{p-1}|g|d\mu \leq N_p(g)(N_p(f+g))^{p-1}.$$

Il en résulte :

$$(N_p(f+g))^p \leq (N_p(f)+N_p(g))(N_p(f+g))^{p-1},$$

et on divise les deux membres par $(N_p(f+g))^{p-1}$.$\square$

Définition 20 *On considère un espace mesuré $(E,\mathcal{B},\mu)$ et un réel $p \geq 1$. Une fonction $f \in \mathcal{M}(E,\mathcal{B},\mathbb{R})$ est dite de puissance p-intégrable si $N_p(f) < +\infty$. L'ensemble de ces fonctions sera noté $\mathcal{L}^p(E,\mathcal{B},\mu)$, ou $\mathcal{L}^p(\mu)$, ou simplement $\mathcal{L}^p$.*

Théorème 25 *On considère un espace mesuré $(E,\mathcal{B},\mu)$ et un réel $p \geq 1$.*

1) $\mathcal{L}^p$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$;

2) $(\mathcal{L}^p, N_p)$ est un espace semi-normé ;

3) $f \in \mathcal{L}^p \Leftrightarrow (f \in \mathcal{M}(E,\mathcal{B},\mathbb{R}),\ |f|^p \in \mathcal{L}^1)$;

4) $(f \in \mathcal{L}^p, g \in \mathcal{M}(E,\mathcal{B},\mathbb{R}), f = g\ \mu - p.p.) \Rightarrow g \in \mathcal{L}^p$;

5) $(f \in \mathcal{L}^p, g \in \mathcal{M}(E,\mathcal{B},\mathbb{R}), |g| \leq |f|\ \mu - p.p.) \Rightarrow g \in \mathcal{L}^p$;

6) $f, g \in \mathcal{L}^p \Rightarrow \sup(f,g), \inf(f,g), f^+, f^- \in \mathcal{L}^p$;

7) $\left(p > 1, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1, f \in \mathcal{L}^p, g \in \mathcal{L}^q\right) \Rightarrow fg \in \mathcal{L}^1$;

en particulier : $f, g \in \mathcal{L}^2 \Rightarrow fg \in \mathcal{L}^1$;

8) $\left(p, q, r \geq 1, \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{r}, f \in \mathcal{L}^p, g \in \mathcal{L}^q\right) \Rightarrow fg \in \mathcal{L}^r$;

9) $(\mathcal{L}^2, N_2)$ est l'espace semi-normé associé à l'espace préhilbertien $(\mathcal{L}^2, \phi)$ où ϕ est le produit scalaire hermitien défini sur $(\mathcal{L}^2)^2$ par $\phi(f,g) = \int_E fg d\mu$.

Preuve : 1) et 2) résultent des propriétés 2) et 5) du Théorème 1.1.

3) se déduit de la définition de $\mathcal{L}^p$ et des égalités :

$$N_p(f) = N_p(|f|) = (N_1(|f|^p))^{\frac{1}{p}}.$$

4) et 5) proviennent de la définition de $\mathcal{L}^p$ et du Théorème 1.1 3).

6) résulte de 1), 3) et des égalités :

$$\sup(f,g) = \frac{1}{2}(f+g+|f-g|), \inf(f,g) = \frac{1}{2}(f+g-|f-g|), f^+ = \sup(f,0), f^- = \sup(-f,0).$$

7) est une conséquence de l'inégalité de Hölder.

8) est une conséquence de l'inégalité de Hölder généralisée.

9) La fonction ϕ, définie d'après 7), est bilinéaire symétrique et telle que $\phi(f,f) = (N_2(f))^2$ pour tout $f \in \mathcal{L}^2$.$\square$

Remarque 14 *1) En général N_p n'est pas une norme sur $\mathcal{L}^p$ car, d'après le Théorème 1.1 1), on a seulement*

$$N_p(f) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad f = 0 \ \mu - p.p.$$

2) $\mathcal{L}^p$ n'est pas stable par multiplication en général, et le point 7) du Théorème 1.2 dit tout autre chose.

3) Si la mesure μ est finie, toute fonction mesurable et bornée est dans $\mathcal{L}^p$ pour tout $p \geq 1$. C'est une conséquence du Théorème 1.1. 3).$\square$

Théorème 26 *Soit $(E, \mathcal{B}, \mu)$ un espace mesuré où la mesure μ est finie.*

1) Si p_1 et p_2 sont deux réels tels que $1 \leq p_1 \leq p_2$, alors :

1.1) Pour toute fonction $f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R})$:

$$N_{p_1}(f) \leq (\mu(E))^{(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2})} N_{p_2}(f).$$

1.2) $\mathcal{L}^{p_1} \subset \mathcal{L}^{p_2}$.

1.3) Toute suite $(f_n)_{n \geq 1}$ qui converge dans $(\mathcal{L}^{p_2}, N_{p_2})$ converge vers la même limite dans $(\mathcal{L}^{p_1}, N_{p_1})$.

2) En particulier : $\mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}^1$. pour tout réel $p \geq 1$.

Preuve : Le cas $p_1 = p_2$ étant trivial, on suppose que $p_1 < p_2$ et on applique l'inégalité de Hölder avec $p = \frac{p_2}{p_1}$ et q tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$:

$$\begin{aligned}(N_{p_1}(f))^{p_1} &= N_1(|f|^{p_1}) = N_1(|f|^{p_1} 1_E) \leq N_p(|f|^{p_1}) N_q(1_E) \\ &= \left(\int_E^* |f|^{pp_1} d\mu\right)^{\frac{1}{p}} (\mu(E))^{\frac{1}{q}} = (N_{p_2}(f))^{p_1} (\mu(E))^{(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2})p_1},\end{aligned}$$

d'où il résulte

$$N_{p_1}(f) \leq (\mu(E))^{(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2})} N_{p_2}(f).$$

1.2) et 1.3) sont des conséquences immédiates de 1.1) et 2) est un cas particulier de 1.2).$\square$

Remarque 15 *1) L'inclusion 1.2) du Théorème 1.3 peut s'obtenir plus simplement à partir de l'égalité*

$$|f|^{p_1} = |f|^{p_1} 1_{\{f \leq 1\}} + |f|^{p_1} 1_{\{f > 1\}}$$

qui, par le Théorème 3.2 chapitre 3, conduit à la majoration :

$$\begin{aligned}
\int_E^* |f|^{p_1} d\mu &= \int_E^* |f|^{p_1} 1_{\{f \leq 1\}} d\mu + \int_E^* |f|^{p_1} 1_{\{f > 1\}} d\mu \\
&\leq \mu(\{f > 1\}) + \int_E^* |f|^{p_2} 1_{\{f > 1\}} d\mu \leq \mu(E) \leq \mu(E) + \int_E^* |f|^{p_2} d\mu.
\end{aligned}$$

2) D'après le Théorème 1.3 1) -et par conséquent sous réserve que la mesure μ soit finie, l'injection canonique de $\mathcal{L}^{p_2}$ dans $\mathcal{L}^{p_1}$ est continue de $(\mathcal{L}^{p_2}, N_{p_2})$ dans $(\mathcal{L}^{p_1}, N_{p_1})$.

3) L'inclusion 1.2) du Théorème 1.3 est fausse en générale si la mesure μ n'est pas finie. Par exemple, si l'on considère l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\lambda, \lambda)$ et la fonction

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} 1_{[n,n+1[},$$

cette fonction positive mesurable n'est pas intégrable car

$$\int_{\mathbb{R}}^* f d\lambda = \sup_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty,$$

mais elle appartient à $\mathcal{L}^2$ car on obtient de même

$$\int_{\mathbb{R}}^* f^2 d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

□

4.2 Suites dans les espaces $\mathcal{L}^p$, $p \in [1, +\infty[$

Avec ce paragraphe et les trois qui suivent, nous atteignons la partie centrale du cours d'intégration.

Entre autres problèmes importants, nous y traiterons de celui posé par la situation suivante fréquemment rencontrée :

$(E, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace mesuré, $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite de $\mathcal{L}^p$,
$f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R})$ et $\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n = f \quad \mu - p.p.$

Question 2.1 : Peut-on affirmer que $f \in \mathcal{L}^p$?

Réponse : Non en général.

Prenons $(E, \mathcal{B}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_\lambda, \lambda)$ et $f_n = 1_{[-n,n]}$. La fonction $\mathcal{B}_\lambda$-étagée f_n est dans $\mathcal{L}^1$ puisque

$$\int_{\mathbb{R}}^* |f_n| d\lambda = \int_E^* 1_{[-n,n]} d\lambda = \lambda([-n,n]) = 2n < +\infty.$$

De plus $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n = 1_{\mathbb{R}}$ simplement, donc λ-presque partout. Mais $1_{\mathbb{R}} \notin \mathcal{L}^1$ puisque $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}^* 1_{\mathbb{R}} d\lambda = \lambda(\mathbb{R}) = +\infty$.

Question 2.2 : Si $f \in \mathcal{L}^p$, est t-il vrai que $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_E |f_n|^p d\mu = \int_E |f|^p d\mu$?

Réponse : Non, en général.

Prenons $(E, \mathcal{B}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_\lambda, \lambda)$ et $f_n = n^2 1_{]0, \frac{1}{n}]}$. On a $f_n \in \mathcal{L}^1$, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} f_n = 0$ simplement, donc λ-preque partout, avec évidemment $0 \in \mathcal{L}^1$.

Mais la fonction nulle est d'intégrale nulle, tandis que

$$\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = n^2 \lambda(]0, \frac{1}{n}]) = n,$$

si bien que $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_E f_n d\mu = +\infty$.

Dans la suite nous allons en particulier indiquer des hypothèses sous lesquelles les réponses aux questions 2.1 et 2.2 seront positives.

Le premier de ces résultats est aussi le plus simple.

Théorème 27 (Théorème de Fatou) *On considère un espace mesuré $(E, \mathcal{B}, \mu)$, un réel $p \geq 1$ et une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de $\mathcal{L}^p$ qui converge μ-presque partout vers une fonction $f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R})$. Alors :*

$$(N_p(f_n))_{n \geq 1} \quad \textit{ne tend pas vers} \quad +\infty \;\Rightarrow\; \quad f \in \mathcal{L}^p.$$

Preuve : $(N_p(f_n))_{n \geq 1}$ ne tend pas vers $+\infty$ entraîne que $(N_p(f_n)^p)_{n \geq 1}$ ne tend pas vers $+\infty$ ce qui entraîne

$$\liminf_{n \longrightarrow +\infty} \int_E^* |f_n|^p d\mu = \liminf_{n \longrightarrow +\infty} (N_p(f_n))^p < +\infty.$$

D'autre part :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n = f \;\; \mu - p.p. \quad \Rightarrow \quad \liminf_{n \longrightarrow +\infty} |f_n|^p = \lim_{n \longrightarrow +\infty} |f_n|^p = |f|^p \quad \mu - p.p.$$

Il résulte alors du lemme de Fatou et du Corollaire 3.2 chapitre 3 :

$$\int_E^* |f|^p d\mu = \int_E^* \liminf_{n \longrightarrow +\infty} |f_n|^p d\mu \leq \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \int_E^* |f_n|^p d\mu < +\infty$$

ce qui, compte tenu de la mesurabilité de f, prouve que $f \in \mathcal{L}^p$.$\square$

Remarque 16 *1) Il est remarquable que la condition du Théorème de Fatou est obtenue sous une hypothèse qui autorise la suite* $(N_p(f_n))_{n\geq 1}$ *à se comporter de façon absolument quelconque, pourvu qu'elle ne tende pas vers* $+\infty$. *Cette condition est réalisée en particulier dans les cas suivants de plus en plus restrictifs :*

$$(N_p(f_n))_{n\geq 1} \quad \textit{majorée, ou convergente, ou constante.}$$

2) La démonstration du Théorème de Fatou fournit la majoration

$$\int_E |f|^p d\mu \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int_E |f_n|^p d\mu$$

qui, dans le cas particulier $p = 1$ *et par le Théorème 4.3 2) du chapitre 3, conduit à*

$$\left|\int_E |f| d\mu\right| \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int_E |f_n| d\mu.$$

□

Nous allons maintenant introduire un nouveau mode de convergence des suites de $\mathcal{L}^p$.

Définition 21 *Considérons un espace mesuré* $(E, \mathcal{B}, \mu)$*et un réel* $p \geq 1$. *On dit qu'une suite* $(f_n)_{n\geq 1}$ *de* $\mathcal{L}^p$ *converge en moyenne d'ordre p vers une fonction* $f \in \mathcal{L}^p$ *si* $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge vers* f *dans l'espace semi-normé* $(\mathcal{L}^p, N_p)$, *ce qui sera traduit par*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n = f \quad \textit{dans} \quad (\mathcal{L}^p, N_p).$$

Cas particulier : la convergence en moyenne d'ordre p est appelée :
- *convergence en moyenne si* $p = 1$,
- *convergence en moyenne quadratique si* $p = 2$.

Remarque 17 *1) La convergence en moyenne d'odre p de* $(f_n)_{n\geq 1}$ *vers* f *équivaut donc à* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} N_p(f_n - f) = 0$, *ou encore* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_E^* |f_n - f|^p d\mu = 0$.

2) Du Théorème 1.1 et des propriétés générales des espaces semi-normés, on déduit que, si $\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n = f$ *dans* $(\mathcal{L}^p, N_p)$, *alors :*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n = g \quad \textit{dans} \quad (\mathcal{L}^p, N_p) \quad \Leftrightarrow \quad (g \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R}) \textit{ et } g = f \ \mu - p.p.).$$

3) Lorsque μ *est finie, la convergence uniforme entraîne la convergence en moyenne d'ordre p. En effet, si* $(f_n)_{n\geq 1}$ *est une suite de* $\mathcal{L}^p$ *qui converge uniformément sur E vers une fonction* f, *cette fonction est mesurable d'après le Corollaire 2.2 du chapitre 2. De plus, si* $\epsilon > 0$ *est fixé, il existe un entier* N *tel que*

$$\forall n \geq N, \ \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

D'une part, d'après le Théorème 1.2 5), on en déduit que $f_N - f \in \mathcal{L}^p$ *puisque la constante* ϵ *est dans* $\mathcal{L}^p$ *(*μ *est finie), puis que* $f \in \mathcal{L}^p$ *car* $f = f_N - (f_N - f)$ *et* $\mathcal{L}^p$ *est un espace vectoriel.*

D'autre part, dès que $n \geq N$ *on a* $\int_E |f_n - f|^p d\mu < \epsilon^p \mu(E)$*, de sorte que la convergence en moyenne d'ordre* p *de* $(f_n)_{n\geq 1}$ *vers* f *est établie.*□

Proposition 15 *On considère un espace mesuré* $(E, \mathcal{B}, \mu)$*, un réel* $p \geq 1$ *et une suite* $(f_n)_{n\geq 1}$ *de* $\mathcal{L}^p$ *qui converge en moyenne d'ordre* p *vers* $f \in \mathcal{L}^p$*. Alors :*

1) Pour tout $p \geq 1$ *:* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} N_p(f_n) = N_p(f)$*;*

2) Pour $p = 1$*, on a de plus :* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$*.*

Preuve : 1) Résulte de l'inégalité

$$|N_p(f_n) - N_p(f)| \leq N_p(f_n - f).$$

2) Il suffit d'écrire, à l'aide du Théorème 4.3 chapitre 3 :

$$\left| \int_E f_n d\mu - \int_E f d\mu \right| = \left| \int_E (f_n - f) d\mu \right| \leq \int_E |f_n - f| d\mu = N_1(f_n - f).$$

□

4.3 Relation entre la convergence presque partout et la convergence en moyenne

L'introduction de la convergence en moyenne, s'ajoutant à la convergence presque partout, pose le problème des rapports entre ces deux modes de convergence lorsque les fonctions considérées sont dans même espace $\mathcal{L}^p$.

La question qui vient d'abord à l'esprit est celle de savoir si l'une de ces convergence est plus forte que l'autre. La réponse est négative :

Aucune des deux convergence, en moyenne et presque partout, n'entraîne l'autre.

Nous avons déjà vu sur un exemple que la convergence presque partout n'entraîne pas la convergence en moyenne.

Voici un autre contre-exemple pour se convaincre que la réciproque est également fausse.

Sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\lambda, \lambda)$ considérons la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ des fonctions $\mathcal{B}$-étagées intégrables suivantes :

$$\begin{array}{rcll} f_1 & = & 1_{[0,1]}, & \\ f_2 & = & 1_{[0,\frac{1}{2}]}, & f_3 = 1_{[\frac{1}{2},1]}, \\ f_4 & = & 1_{[0,\frac{1}{3}]}, & f_5 = 1_{[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]}, f_6 = 1_{[\frac{2}{3},1]} \\ f_7 & = & 1_{[0,\frac{1}{4}]}, & \text{etc.} \\ \dots & & & \\ f_{1+\frac{k(k-1)}{2}} & = & 1_{[0,\frac{1}{k}]}, & \text{etc.} \end{array}$$

Il est clair que $\int_{\mathbb{R}} |f_n - 0| d\lambda$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, c'est-à-dire que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge en moyenne la fonction nulle. En revanche, cette suite ne converge presque partout vers aucune fonction. En effet, la suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ ne converge pour aucun $x \in [0,1]$ car, pour un tel x, elle contient toujours une sous-suite constante dont les termes sont nuls, et une autre dont les termes sont égaux à 1, de sorte que

$$0 = \liminf_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) < \limsup_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = 1,$$

et ceci interdit bien la convergence presque partout puisque $\lambda([0,1]) > 0$.

Malgré ces propriétés négatives, nous énoncerons plus loin des théorèmes relatifs au "passage" de la convergence presque partout vers la convergence en moyen, mais il faut insister sur le fait que ce passage n'existe pas en dehors d'hypothèses supplémentaires. Quant au passage en sens inverse, nous l'obtienderons sans condition spéciale, mais sous une forme affaiblie.

Le théorème suivant énonce un peu plus que la complétude de $(\mathcal{L}^p, N_p)$ et sera à l'origine de plusieurs autres résultats importants.

Théorème 28 (Théorème de Riesz-Fischer) *On considère un espace mesuré $(E, \mathcal{B}, \mu)$, un réel $p \geq 1$, et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy de $(\mathcal{L}^p, N_p)$. Alors :*

1) la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ possède une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ qui converge μ-presque partout vers une fonction $f \in \mathcal{L}^p$;

2) la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers f en moyenne d'ordre p. En particulier : l'espace semi-normé $(\mathcal{L}^p, N_p)$ est complet.

On utilise le lemme suivant :

Lemme 8 *Dans un espace semi-normé $(E, |\ |)$ toute suite de Cauchy $(x_n)_{n\geq 1}$ possède une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ telle que, pour tout $k \geq 1$, on ait*

$$|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}| < \frac{1}{2^k}.$$

Preuve du Lemme : Une suite de Cauchy $(x_n)_{n\geq 1}$ dans $(E, |;|)$ est telle que

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall p, q \geq N, |x_p - x_q| < \epsilon,$$

d'où il résulte :

$$\forall \epsilon > 0, \forall r \geq 1, \exists s \geq r, \forall p \geq s, |x_p - x_s| < \epsilon.$$

On peut alors trouver successivement :

$$\begin{array}{rll} n_1 \geq 1 & \text{tel que :} & \forall p \geq n_1, |x_p - x_{n_1}| < \dfrac{1}{2} \\ n_2 \geq n_1 & \text{tel que :} & \forall p \geq n_2, |x_p - x_{n_2}| < \dfrac{1}{2^2} \\ \dots & & \\ n_k \geq n_{k-1} & \text{tel que :} & \forall p \geq n_k, |x_p - x_{n_k}| < \dfrac{1}{2^k}, etc. \end{array}$$

La suite $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ ainsi obtenue est une sous-suite de $(x_n)_{n\geq 1}$ et elle possède la propriété requise.□

Preuve du théorème : D'après le Lemme qu'on vient de démontrer, la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ possède une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ telle que :

$$\forall k \geq 1, \quad N_p(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) < \frac{1}{2^k}.$$

Nous allons prouver que cette sous-suite possède la propriété annoncée.

Pour cela, posons $g = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| = \sup_{m\geq 1} \sum_{k=1}^{m} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|$.

D'après le Théorème 2.1, les Corollaires 2.3 et 2.4 du chapitre 2, il résulte que $g \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}}_+)$, d'où l'on déduit par le Corollaire 2.5 chapitre 2 que $g^p \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \overline{\mathbb{R}}_+)$ puisqu'on peut écrire :

$$g^p = (g1_{\{g<+\infty\}})^p + (+\infty)1_{\{g=+\infty\}}.$$

De plus :

$$\begin{aligned} \int_E^* g^p d\mu &= \int_E^* \left(\sup_{m\geq 1} \sum_{k=1}^{m} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \right)^p d\mu \overset{(IS4)}{=} \sup_{m\geq 1} \int_E^* (\sum_{k=1}^{m} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|)^p d\mu \\ &= \sup_{m\geq 1} \left(N_p \left(\sum_{k=1}^{m} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \right) \right)^p \overset{(SN2)}{\leq} \sup_{m\geq 1} \left(\sum_{k=1}^{m} N_p(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) \right)^p \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} N_p(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) \right)^p < \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \right)^p = 1. \end{aligned}$$

Par le Théorème 3.5 chapitre 3, on obtient alors $g^p < +\infty$ μ-presque partout, et par suite $g < +\infty$ μ-presque partout. Autrement dit, la série de fonctions

$\sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ est absolument convergente, donc convergente, μ-presque partout. C'est à dire qu'il existe $N \in \mathcal{N}_\mu$ tel que la série $\sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})1_{E\setminus N}$ converge simplement sur E vers une fonction $h \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R})$.

On a donc μ-presque partout :

$$h = \sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{m}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$$

avec $\sum_{k=1}^{m}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) \in \mathcal{L}^p$ (qui est un espace vectoriel) et

$$N_p\left(\sum_{k=1}^{m}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})\right) \leq \sum_{k=1}^{m} N_p(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} N_p(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) < 1$$

ceci pour tout $m \geq 1$.

Le Théorème de Fatou permet alors d'affirmer que $h \in \mathcal{L}^p$. Et comme aussi $h + f_{n_1} \in \mathcal{L}^p$, le résultat souhaité est atteint avec $f = h + f_{n_1}$ puisque

$$h+f_{n_1} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})\right)+f_{n_1} = \lim_{m \longrightarrow +\infty}\left(\left(\sum_{k=1}^{m-1}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})\right) + f_{n_1}\right) = \lim_{m \longrightarrow +\infty} f_{n_m},$$

ceci μ-presque partout.

2) La fonction f ci-dessus vérifie pour tout entier $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} |f - f_{n_k}| &= |h + f_{n_1} - f_{n_k}| = |\sum_{m=k}^{\infty}(f_{n_{m+1}} - f_{n_m})| \\ &\leq \sum_{m=k}^{\infty}|(f_{n_{m+1}} - f_{n_m})| = \sup_{r \geq k}\sum_{m=k}^{r}|(f_{n_{m+1}} - f_{n_m})| \quad \mu - \text{presque partout.} \end{aligned}$$

Par un calcul analogue à celui fait plus haut pour majorer $\int_E^* g^p d\mu$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} N_p(f - f_{n_k}) &= \left(\int_E^* |f - f_{n_k}|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E^* \left(\sup_{r \geq k}\sum_{m=k}^{r}|(f_{n_{m+1}} - f_{n_m})|\right)^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{r \geq 1} N_p\left(\sum_{m=k}^{r}|(f_{n_{m+1}} - f_{n_m})|\right) \leq \sup_{r \geq 1}\sum_{m=k}^{r} N_p(f_{n_{m+1}} - f_{n_m}) \leq \sum_{m=k}^{\infty}\frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^{k-1}} \end{aligned}$$

de sorte que $\lim_{k \longrightarrow +\infty} N_p(f - f_{n_k}) = 0$.

Autrement dit : la sous-suite $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ de la suite de Cauchy $(f_n)_{n \geq 1}$ de l'espace semi-normé $(\mathcal{L}^p, N_p)$, converge dans cet espace vers $f \in \mathcal{L}^p$, d'où il résulte que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ elle-même converge vers f dans $(\mathcal{L}^p, N_p)$.□

Remarque 18 *Comme 2) affirme la convergence en moyenne d'ordre p de* $(f_n)_{n\geq 1}$ *vers* f*, il ne faut pas oublier que les conclusions de la Proposition 2.1 sont valables.*$\square$

Corollaire 24 *On considère un espace mesuré* $(E, \mathcal{B}, \mu)$*et un réel* $p \geq 1$*. Si une suite* $(f_n)_{n\geq 1}$ *de* $\mathcal{L}^p$ *est telle que, à la fois*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n = f \textit{ dans } (\mathcal{L}^p, N_p) \qquad \textit{et} \qquad \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n = g \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R}) \ \mu\text{−}p.p.,$$

alors :

1) $f = g \ \mu - p.p.$ *;*

2) $g \in \mathcal{L}^p$.

Preuve : 1) Grâce au Théorème de Riesz-Fischer, nous obtenons que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n = f$ dans $(\mathcal{L}^p, N_p)$ entraîne que $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $(\mathcal{L}^p, N_p)$ ce qui entraîne qu'il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(f_n)_{n\geq 1}$ et $h \in \mathcal{L}^p$, $\lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} f_{n_k} = h$ μ-presque partout et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n = h$ dans $(\mathcal{L}^p, N_p)$.

Mais d'après une remarque ci-dessus nous avons

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n = f \quad \text{dans} \quad (\mathcal{L}^p, N_p) \\ \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n = h \quad \text{dans} \quad (\mathcal{L}^p, N_p) \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad f = h \quad \mu - p.p.$$

D'autre part,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n = g \quad \mu - p.p. \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_{n_k} = g \quad \mu - p.p.,$$

ce qui, rapproché de $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_{n_k} = h \quad \mu\text{−}p.p.$, entraîne $g = h \ \mu\text{−}p.p.$. Alors, par transitivité de l'égalité μ-preque partout (Proposition 4.1 chapitre 2), il vient $f = g$ μ-preque partout.

2) Résulte de 1) et du Théorème 1.2.$\square$

Corollaire 25 (Passage de la convergence en moyenne à la convergence presque partout) *On considère un espace mesuré* $(E, \mathcal{B}, \mu)$*, un réel* $p \geq 1$ *et* $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite de* $\mathcal{L}^p$ *qui converge en moyenne d'ordre p vers* $f \in \mathcal{L}^p$*.*

Alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ *de* $(f_n)_{n\geq 1}$ *qui converge* μ*-presque partout vers* f*.*

Preuve : Grâce au Théorème de Riesz-Fischer, nous obtenons que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n = f$ dans $(\mathcal{L}^p, N_p)$ entraîne que $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $(\mathcal{L}^p, N_p)$ ce qui entraîne qu'il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(f_n)_{n\geq 1}$ et $g \in \mathcal{L}^p$, $\lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} f_{n_k} = g$ μ-presque partout et $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n = g$ dans $(\mathcal{L}^p, N_p)$.

Alors, de même que dans la démonstration du corollaire précédent, nous obtenons que $f = g$ μ-presque partout et maintenant

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} f_{n_k} = f \quad \mu - p.p \\ f = g \quad \mu - p.p. \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{k\longrightarrow+\infty} f_{n_k} = f \quad \mu - p.p.$$

□

Remarque 19 *Il faut bien remarquer que le passage annoncé, de la convergence en moyenne à la convergecne presque partout, n'est que partiellement réalisé : la convergence presque partout obtenue n'est pas celle de la suite* $(f_n)_{n\geq 1}$ *mais celle d'une sous-suite, ce qui n'est pas la même chose.*□

A la différence du précédent, le corollaire suivant va, lui, établir un "vrai" passage de la convergence presque partout vers la convergence en moyenne, la condition nécessaire que la suite considérée soit de Cauchy dans $(\mathcal{L}^p, N_p)$ se révélant suffisante.

Corollaire 26 (Passage de la convergence presque partout à la convergence en moyenne) *On considère un espace mesuré* $(E, \mathcal{B}, \mu)$*, un réel* $p \geq 1$ *et* $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite de Cauchy de* $(\mathcal{L}^p, N_p)$ *qui converge presque partout vers une fonction* $f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R})$*. Alors :*

1) $f \in \mathcal{L}^p$ *;*

2) $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge vers* f *en moyenne d'ordre* p*.*

Preuve : L'espace semi-normé $(\mathcal{L}^p, N_p)$ étant complet (Théorème de Riesz-Fischer), il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^p$ telle que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n = g$ dans $(\mathcal{L}^p, N_p)$. Mais comme, par ailleurs, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n = f$ μ-presque partout, le Corollaire 3.1 assure que $f \in \mathcal{L}^p$.

2) Le Corollaire 3.1 indique encore que $f = g$ μ-presque partout, de sorte que f, tout comme g, est limite de $(f_n)_{n\geq 1}$ en moyenne d'ordre p.□

Remarque 20 *1) Le fait que* $f \in \mathcal{L}^p$ *peut encore s'obtenir par le Théorème de Fatou. En effet, la suite* $(f_n)_{n\geq 1}$ *étant une suite de Cauchy de* $(\mathcal{L}^p, N_p)$*, l'inégalité* $|N_p(f_r) - N_p(f_s)| \leq N_p(f_r - f_s)$ *assure que* $(N_p(f_n))_{n\geq 1}$ *est une suite de Cauchy dans* $\mathbb{R}$ *et qu'elle ne tend donc pas vers* $+\infty$*.*

2) Rappelons que l'on peut ajouter au point 2) du Corollaire 3.3 les conclusions de la Proposition 2.1. Dans le cas $p = 1$*, la supériorité de ce corollaire sur le Théorème de Fatou réside donc en ceci qu'il n'affirme pas seulement l'appartenance de* f *à* $\mathcal{L}^p$*, mais qu'il permet encore d'obtenir l'intégrale de* f *comme limite de celles des* f_n*.*

Cependant, ce corollaire possède surtout un intérêt théorique car l'hypothèse de Cauchy n'est pas d'une vérification facile dans la pratique. Au contraire,les théorèmes principaux des deux paragraphes suivants constituent *des outils d'un usage fréquent et sont, de ce fait, d'une particulière importance. Leurs hypothèses sont des conditions suffisantes commodes pour que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ considérée soit de Cauchy dans $(\mathcal{L}^p, N_p)$, de sorte que les conclusions sont les mêmes que celle du Corollaire 3.3.*$\square$

4.4 Convergence monotone

Lemme 9 *Considérons trois réels a, b, p tels que $0 \leq a \leq b$ et $p \geq 1$. Alors*

$$(b-a)^p \leq b^p - a^p.$$

Preuve : Le résultat est trivial si $b = 0$. Si $b > 0$, on utilise :

$$(0 \leq \alpha \leq 1, p \geq 1) \quad \Rightarrow \quad \alpha^p \leq \alpha.$$

Il vient alors :

$$\left(1 - \frac{a}{b}\right)^p \leq 1 - \frac{a}{b} \leq 1 - \left(\frac{a}{b}\right)^p,$$

et il reste à multiplier chacun des membres extrêmes par b^p.$\square$

Théorème 29 (Théorème de Bepp Levi ou de la convergence monotone) *On considère un espace mesuré $(E, \mathcal{B}, \mu)$, un réel $p \geq 1$ et $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite monotone dans $\mathcal{L}^p$ vérifiant*

$$(a) \qquad \sup_{n\geq 1} N_p(f_n) < +\infty,$$

ou encore, dans le cas particulier $p = 1$,

$$(a'). \qquad \sup_{n\geq 1} \left| \int_E f_n d\mu \right| < +\infty,$$

Alors :

1) il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^p$ telle que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers g à la fois μ-presque partout et en moyenne d'ordre p ;

2) si $f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R})$ est telle que $(f_n)_{n\geq 1}$ converge μ-presque partout vers f :

(2.1) $f \in \mathcal{L}^p$,

(2.2) $(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers f en moyenne d'ordre p.

Preuve : 1) Commençons par remarquer que, dans le cas particulier $p = 1$ et compte tenu de la monotonie de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$, les hypothèses (a) et (a') sont équivalentes. D'abord, il résulte clairement du Théorèeme 4.3 2) du chapitre 3 que (a) implique (a').

Pour la réciproque, on utilise la décomposition $f_n = f_n^+ - f_n^-$. Alors si, par exemple, la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{L}^1$ est croissante, $(f_n^-)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante de fonctions positives dans $\mathcal{L}^1$, de sorte que la suite décroissante

$\left(\int_E f_n^- d\mu\right)_{n\geq 1}$ est bornée (cf. Théorème 4.1 et 4.3 chapitre 3). Sous l'hypothèse (a'), la suite $\left(\int_E |f_n| d\mu\right)_{n\geq 1}$ sera donc également bornée puisque

$$\int_E |f_n| d\mu = \int_E f_n^+ d\mu + \int_E f_n^- d\mu = \int_E f_n d\mu + 2\int_E f_n^- d\mu.$$

On utilise un argument analogue si $(f_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

Il suffit donc s'intéresser à l'hypothèse générale (a).

Supposns encore $(f_n)_{n\geq 1}$ croissante et posons $g_n = f_n - f_1 \geq 0$. La suite $(g_n)_{n\geq 1}$ est croissante, de même que $(N_p(g_n))_{n\geq 1}$ (Théorème 1.1 3)). De plus, on a $N_p(g_n) \leq N_p(f_1) + N_p(f_n)$ pour tout $n \geq 1$, et par conséquent :

$$\sup_{n\geq 1} N_p(g_n) \leq N_p(f_1) + \sup_{n\geq 1} N_p(f_n) < +\infty.$$

Alors $(N_p(g_n))_{n\geq 1}$, suite croissante et bornée de $\mathbb{R}$, est convergente, de même que la suite $(N_p(g_n))^p_{n\geq 1}$ qui est donc une suite de Cauchy :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall s \geq r \geq N, \quad \int_E g_s^p d\mu - \int_E g_r^p d\mu < \epsilon^p.$$

Mais d'après le Lemme 4.1 :

$$\begin{aligned} 0 \leq g_r \leq g_s \quad &\Rightarrow \quad (g_s - g_r)^p \leq g_s^p - g_r^p \\ &\Rightarrow \quad (N_p(g_s - g_r))^p = \int_E (g_s - g_r)^p d\mu \leq \int_E g_s^p d\mu - \int_E g_r^p d\mu < \epsilon^p. \end{aligned}$$

Finalement, en remarquant que $f_r - f_s = g_r - g_s$, on obtient :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall s \geq r \geq N, \quad N_p(f_r - f_s) = N_p(f_r - f_s) < \epsilon,$$

c'est-à-dire que $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy de $(\mathcal{L}^p, N_p)$. La même conclusion s'obtient de façon analogue si la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

Alors, d'après le Théorème de Riesz-Fischer, la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge en moyenne d'ordre p vers une fonction $g \in \mathcal{L}^p$ qui est aussi limite presque partout d'une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ de $(f_n)_{n\geq 1}$. Mais on voit facilement qu'une suite monotone de réels dont une sous-suite converge est elle-même convergente vers la même limite, et il en résulte que la suite monotone $(f_n)_{n\geq 1}$ converge aussi presque partout vers g.

2) La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy de $(\mathcal{L}^p, N_p)$ d'après 1), et le résultat s'obtient en appliquant le Corollaire 3.3.□

Remarque 21 *1) Rappelons encore que l'on peut ajouter à l'énoncé du Théorème de Beppo Levi les conclusions de la Proposition 2.1.*□

Corollaire 27 (Intégration d'une série terme à terme selon Beppo Levi) *Soit espace mesuré* $(E, \mathcal{B}, \mu)$*et soit* $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite de* $\mathcal{L}^1$ *telle que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| d\mu < +\infty.$$

Alors

1) La série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *converge absolument presque partout, sa somme étant égale presque partout à une fonction* $f \in \mathcal{L}^1$.

2) $\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu.$

Preuve : La suite $\left(\sum_{n=1}^{k} f_n^+\right)_{k\geq 1}$ est une suite croissante de $\mathcal{L}^1$ telle que

$$0 \leq \int_E \left(\sum_{n=1}^{k} f_n^+\right) d\mu = \sum_{n=1}^{k} \int_E f_n^+ d\mu \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| d\mu < +\infty.$$

Par le Théorème de Beppo Levi, cette suite converge donc presque partout et en moyenne vers une fonction $g \in \mathcal{L}^1$.

De même la suite $\left(\sum_{n=1}^{k} f_n^-\right)_{k\geq 1}$ converge presque partout et en moyenne vers une fonction $h \in \mathcal{L}^1$.

Dans ces conditions, la suite $\left(\sum_{n=1}^{k} f_n\right)_{k\geq 1} = \left(\sum_{n=1}^{k} f_n^+ - \sum_{n=1}^{k} f_n^-\right)_{k\geq 1}$ converge presque partout et en moyenne vers une fonction $f = g - h \in \mathcal{L}^1$, et de la Proposition 2.1 il résulte :

$$\int_E f d\mu = \lim_{k \longrightarrow +\infty} \int_E \left(\sum_{n=1}^{k} f_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu.$$

De plus, la suite $\left(\sum_{n=1}^{k} |f_n|\right)_{k\geq 1} = \left(\sum_{n=1}^{k} f_n^+ + \sum_{n=1}^{k} f_n^-\right)_{k\geq 1}$ converge presque partout vers $g+h$, de sorte que la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ est non seulement convergente, mais absolument convergente presque partout.□

Remarque 22 *1) La conclusion 1) du Corollaire 4.1 résulte encore directe-*

ment du Lemme de Fatou puisque

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|\right) d\mu = \int_E \left(\lim_{k\longrightarrow+\infty} \sum_{n=1}^{k} |f_n|\right) d\mu$$

$$\leq \liminf_{k\longrightarrow+\infty} \int_E \left(\sum_{n=1}^{k} |f_n|\right) d\mu \leq \sup_{k\geq 1} \left(\sum_{n=1}^{k} \int_E |f_n| d\mu\right) \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| d\mu < +\infty.$$

2) Sous la même hypothèse, les conclusions du Corollaire 4.1 sont évidemment valables pour la série $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$.

3) Sous les hypothèses du Corollaire 4.1 et si l'on sait déjà que la série des f_n *converge presque partout, sa somme coïncidant presque partout avec une fonction* $f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R})$*, ce corollaire permet alors de conclure à la convergence absolue presque partout de la série des* f_n *et à l'intégrabilité de* f *dont l'intégrale est la somme des intégrales des* f_n.$\square$

4.5 Convergence dominée

Théorème 30 (Théorème de Lebesgue ou de la convergence dominée) *On considère un espace mesuré* $(E, \mathcal{B}, \mu)$*, un réel* $p \geq 1$*, et* $(f_n)_{n\geq 1}$ *une suite de* $\mathcal{L}^p$ *qui converge presque partout vers* $f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R})$*. On fait de plus l'hypothèse suivante :*

$$\exists g \in \mathcal{L}^p, \forall n \geq 1,\ |f_n| \leq g\ \mu - p.p. \quad \textit{(condition de domination)}$$

Alors :

1) $f \in \mathcal{L}^p$ *;*

2) $(f_n)_{n\geq 1}$ *converge vers* f *en moyenne d'ordre* p.

Preuve : Il est clair que les hypothèses imposent $|f| \leq g$ preque partout, ce qui, joint à $f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R})$, assure que $f \in \mathcal{L}^p$ (Théorème 1.2 5)).

Comme $\int_E |f_n - f|^p d\mu \geq 0$ pour tout $n \geq 1$, la convergence en moyenne d'ordre p de $(f_n)_{n\geq 1}$ vers f équivaut à $\limsup_{n\longrightarrow+\infty} \int_E |f_n - f|^p d\mu \leq 0$. Pour prouver cette inégalité, il suffit de remarquer que

$$\liminf_{n\longrightarrow+\infty} ||2g|^p - |f_n - f|^p| = |2g|^p \quad \mu - p.p.$$

et

$$||2g|^p - |f_n - f|^p| = |2g|^p - |f_n - f|^p \quad \mu - p.p.,$$

puis écrire, en appliquant le Lemme de Fatou et les propriétés des limites supérieure et inférieure :

$$\begin{aligned}
\int_E |2g|^p d\mu &= \int_E \liminf_{n\longrightarrow+\infty} ||2g|^p - |f_n - f|^p|\, d\mu \leq \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int_E (|2g|^p - |f_n - f|^p) d\mu \\
&= \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \left(\int_E |2g|^p d\mu - \int_E |f_n - f|^p d\mu \right) \\
&= \int_E |2g|^p d\mu - \limsup_{n\longrightarrow+\infty} \int_E |f_n - f|^p d\mu,
\end{aligned}$$

et enfin de comparer les deux membres extrêmes.□

Remarque 23 *1) Rappelons une nouvelle fois que les conclusions de la Proposition 2.1 s'ajoutent à celle du Théorème de Lebesgue.*

2) Pour énoncer la condition de domination il ne serait pas restrictif d'imposer à g d'être positive presque partout puis que à la fonction g on peut évidemment substituer g^+ (ou $|g|$).

3) Si la mesure μ est finie, le Théorème de Lebesgue s'applique en particulier lorsqu'il existe une constant $a \geq 0$ telle que

$$\forall n \geq 1, \quad |f_n| \leq a \ \mu - p.p.$$

puique la fonction $a1_E$ est alors intégrable.

4) L'hypothèse de domination des f_n par la fonction g a directement deux conséquences suivantes :

a) $N_p(f_n) \leq N_p(g) < +\infty$, de sorte que la suite $(N_p(f_n))_{n\geq 1}$ ne peut pas tendre vers $+\infty$ et $f \in \mathcal{L}^p$ en résulte par le Théorème de Fatou ;

b) Comme $g \in \mathcal{L}^p$, la condition $|f_n| \leq g$ preque partout entraîne que $f_n \in \mathcal{L}^p$ dès que $f_n \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R})$ (Théorème 1.2 5)). Cette dernière hypothèse est donc suffisante.□

Corollaire 28 (Intégration d'une série terme à terme selon Lebesgue) *Soit un espace mesuré $(E, \mathcal{B}, \mu)$et soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{L}^1$ telle que la série de fonctions $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge presque partout, sa somme étant égale presque partout à une fonction $f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R})$. On fait de plus l'hypothèse suivante :*

$$\exists g \in \mathcal{L}^1, \forall k \geq 1, \ \left| \sum_{n=1}^{k} f_n \right| \leq g \quad \mu - p.p.$$

Alors :

1) $f \in \mathcal{L}^1$;

2) $\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu.$

Preuve : On applique le Théorème de Lebesgue à la suite $\left(\sum_{n=1}^{k} f_n\right)_{k\geq 1}$. $\square$

Remarque 24 *1) L'hypothèse de domination du Corollaire 5.1 est satisfaite en particulier s'il existe une fonction $g \in \mathcal{L}^1$ telle que $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n| = g$ presque partout car alors, pour tout $k \geq 1$:*

$$\left|\sum_{n=1}^{k} f_n\right| \leq \sum_{n=1}^{k} |f_n| \leq g \quad \mu - p.p.$$

2) Par rapport au Corollaire 5.1, le Corollaire 4.1 présente l'avantage de ne pas présupposer la convergence presque partout de la série des f_n. Mais cette supériorité est obtenue grâce à une hypothèse plus forte puisque, sous la condition du Corollaire 4.1, l'hypothèse de domination du Corollaire 5.1 est satisfaite aussi bien pour la série des f_n que pour celle des $|f_n|$. En effet, la condition du Corollaire 4.1 assure en particulier que la série $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ est de somme presque partout égale à une fonction $g \in \mathcal{L}^1$, il reste à se reporter à la remarque 1).

En revanche, l'hypothèse de domination n'implique pas celle du Corollaire 4.1. Par exemple, sur l'espace mesuré $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\lambda, \lambda)$, la suite $f_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} 1_{[0,1]}$ pour tout $n \geq 1$ est telle que

$$\left(\forall k \geq 1, \left|\sum_{n=1}^{k} f_n\right| \leq 1_{[0,1]} \in \mathcal{L}^1(\lambda)\right) \quad et \quad \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f_n| d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

3) De même que le Corollaire 4.1, le Corollaire 5.1 indique une condition sous laquelle l'intégrale et la sommation de la série commutent, puisque les conclusions 2) de ces énoncés peuvent s'écrire

$$\int_E \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu \qquad (*)$$

si l'on convient que l'intégrale du premier membre est celle d'une focntion $f \in \mathcal{L}^1$ égale presque partout à la série des fonctions.

Mais il faut bien savoir que la formule $(*)$ est fausse en général. $\square$

Notation. De façon générale, si X, Y et Z sont des ensembles, si l'on considère une application $f : X \times Y \longrightarrow Z$ et si $x \in X$ est fixé, on note $f(x, .)$ l'application de Y dans Z définie pour tout $y \in Y$ par $f(x, .)(y) = f(x, y)$. Si $y \in Y$ est fixé, la notation $f(., y)$ à une signification analogue.

Corollaire 29 (Continuité d'une intégrale par rapport à un paramètre) *On considère un espace mesuré $(E, \mathcal{B}, \mu)$, un espace topologique métrisable et une fonction $f : E \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose :*

1) pour μ-presque partout $x \in E$, $f(x, .)$ est continue sur Y ;

2) pour tout $y \in Y$, $f(., y) \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{B}, \mu)$;

c) $\forall y_0 \in Y$, $\exists V_0$ un voisinage de y_0, $\exists g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{B}, \mu)$, $\forall y \in V_0$

$$|f(., y)| \leq g \quad \mu - p.p.$$

Alors la fonction $y \mapsto \int_E f(., y) d\mu$ est continue sur Y.

Preuve : Soit $y_0 \in Y$ et soit V_0 comme ne c). L'espace topologique étant métrisable, la continuité souhaitée en y_0 sera établie si l'on prouve que la suite $\left(\int_E f(., y_n) d\mu\right)_{n \geq 1}$ converge vers $\int_E f(., y_0) d\mu$ pour tout suite $(y_n)_{n \geq 1}$ de V_0 qui converge vers y_0. Soit donc $(y_n)_{n \geq 1}$ une telle suite. La suite $(f(., y_n))_{n \geq 1}$ de $\mathcal{L}^1$ (d'après b)) converge vers $f(., y)$ presque partout (d'après a)). Alors, grâce à c), on peut appliquer le Théorème de Lebesgue qui affirme que $(f(., y_n))_{n \geq 1}$ converge en moyenne vers $f(., y_0)$ d'où résulte, par la Proposition 2.1, la convergence des intégrales ;

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_E f(., y_n) d\mu = \int_E f(., y_0) d\mu.$$

□

Corollaire 30 (Dérivabilité d'une intégrale par rapport à un paramètre) *On considère un espace mesuré $(E, \mathcal{B}, \mu)$, un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : E \times I \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose :*

1) pour tout $x \in E$, $f(x, .)$ est dérivable sur I ;

2) pour tout $y \in Y$, $f(., y) \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{B}, \mu)$;

c) $\forall y_0 \in I$, $\exists V_0$ un voisinage de y_0 dans I, $\exists g \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{B}, \mu)$, $\forall y \in V_0$

$$|\frac{\partial f}{\partial y}(., y)| \leq g \quad \mu - p.p.$$

Alors $\frac{\partial f}{\partial y}(., y) \in \mathcal{L}^1(E, \mathcal{B}, \mu)$ pour tout $y \in I$, la fonction $y \mapsto \int_E \frac{\partial f}{\partial y}(., y) d\mu$ est dérivable sur I et

$$\frac{df}{dy} \int_E f(., y) d\mu = \int_E \frac{\partial f}{\partial y}(., y) d\mu.$$

Preuve : Considérons un $y_0 \in I$ et V_0 comme dans c), puis J_0 un intervalle ouvert tel que $y_0 \in J_0 \subset V_0$, $(y_n)_{n \geq 1}$ une suite de $J_0 \setminus \{y_0\}$ qui converge vers y_0, et enfin $(g_n)_{n \geq 1}$ la suite de fonctions

$$g_n = \frac{1}{y_n - y_0}(f(., y_n) - f(., y_0)).$$

Cette suite de fonctions intégrable (d'après b)) converge simplement sur E vers $\dfrac{\partial f}{\partial y}(., y_0)$ (d'après a)), ce qui montre déjà que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(., y_0)$ est $\mathcal{B}$-mesurable (Corollaire 2.2 chapitre 2), et de là que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(., y_0) \in \mathcal{L}^1$ (d'après c) et le Théorème 1.2 5)). De plus, pour chaque $x \in E$, le Théorème des accroissements finis appliqué à $f(x, .)$ entre y et y_0, permet d'affirmer l'exsitence d'un $c_n(x)$ compris entre y_0 et y, donc dans J_0 et tel que, d'après c) :

$$|g_n(x)| = \left| \frac{1}{y_n - y_0}(f(x, y_n) - f(x, y_0)) \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, c_n(x)) \right| \leq g(x) \quad \mu - p.p.$$

Alors, comme dans la démonstration précédente, le Théorème de Lebesgue et la Proposition 2.1 s'appliquent et il en résulte en particulier

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_E g_n d\mu = \int_E \frac{\partial f}{\partial y}(., y_0) d\mu.$$

Mais ceci établit la dérivibalité annoncée puisque

$$\int_E g_n d\mu = \frac{1}{y_n - y_0} \left(\int_E f(., y_n) d\mu - \int_E f(., y_0) d\mu \right).$$

□

4.6 Espaces $\mathcal{L}^p$ complexes, $p \in [1, +\infty[$

L'homéomorphisme canonique $(x, y) \mapsto x + iy$ de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{C}$, munis chacun de leur topologie usuelle, fait qu'il n'y a pas lieu de distinguer ces deux ensembles pour les questions relatives à ces topologies. En particulier,les deux tribus boréliennes $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ et $\mathcal{B}_{\mathbb{C}}$ se correspondent dans cette identification, de même, par conséquent, que les ensembles $\mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R}^2)$ et $\mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{C})$ des fonctions $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$-mesurables et $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$-mesurables relatives à un espace mesurable $(E, \mathcal{B})$.

Théorème 31 *On considère un espace mesuré $(E, \mathcal{B}, \mu)$, une focntion $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ et un réel $p \geq 1$. Alors :*
1) $f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{C}) \Leftrightarrow Re(f)$ et $Im(f) \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{C})$.
2) $f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{C}) \Rightarrow |f| \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R})$.
3) Si $f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{C})$: $|f| \in \mathcal{L}^p \Leftrightarrow Re(f)$ et $Im(f) \in \mathcal{L}^p$.

Preuve : 1) D'après ce qui précède, il revient au même d'établir l'équivalence :

$$f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R}^2) \quad \Leftrightarrow \quad \pi_1 \circ f \quad \text{et} \quad \pi_2 \circ f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R}),$$

où π_1 et π_2 sont respectivement les projections $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

Comme les projections sont continues, donc boréliennes, l'implication " $\Rightarrow$ " est immédiate par composition d'applications mesurables (Proposition 1.2 chapitre 2).

Pour établir la réciproque, on utilise un résultat analogue à celui du Lemme 3.1 chapitre 1 et qui s'obtient de façon similaire, à savoir que tout ouvert de $\mathbb{R}^2$ est réunion d'une suite d'ouverts appartenant à $\mathcal{I}_{\mathbb{R}^2}$, où $\mathcal{I}_{\mathbb{R}^2}$ est l'ensemble des pavés ouverts de$\mathbb{R}^2$. De même qu'à la Proposition 3.3 chapitre 1) dans le cas de $\mathbb{R}$, il en résulte que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ est engendrée par $\mathcal{I}_{\mathbb{R}^2}$. Par suite, pour que f soit $(\mathcal{B}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$-mesurable, il suffit que $\{f \in I \times J\} \in \mathcal{B}$ pour tout $I \times J \in \mathcal{I}_{\mathbb{R}^2}$ (Corollaire 1.1 chapitre 2). Mais ceci résulte aussitôt de l'égalité

$$\{f \in I \times J\} = \{\pi_1 \circ f \in I\} \cap \{\pi_2 \circ f \in J\}.$$

2) Résulte de 1), du Théorème 2.1 chapitre 2 et du Corollaire 2.5 chapitre 2 puisque

$$|f| = \left(Re(f))^2 + (Im(f))^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3) Résulte de l'exploitation des inégalités

$$\sup(|Re(f)|, |Im(f)|) \leq |f| \leq |Re(f)| + |Im(f)|$$

grâce à 1) et 2) au Théorème 1.2 5).□

Définition 22 *On considère un espace mesuré $(E, \mathcal{B}, \mu)$et un réel $p \geq 1$.*

a) Une fonction $f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{C})$ est dite de puissance p intégrable si $|f| \in \mathcal{L}^p$. L'ensemble de ces fonctions sera noté $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}$.

b) Si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}$, on appelle intégrale de f par rapport à μ le nombre complexe

$$\int_E f d\mu = \int_E Re(f) d\mu + i \int_E Im(f) d\mu.$$

Remarque. Toutes les propriétés des espaces $\mathcal{L}^p$ réels ne faisant pas intervenir d'ordre entre les éléments de $\mathcal{L}^p$, subsistent pour les espaces $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}$, notamment celles des théroèmes 1.2 et 1.3 ainsi que le Théorème de Lebesgue (mais celui de Beppo Levi n'a plus de sens).□

Théorème 32 *Soit espace mesuré $(E, \mathcal{B}, \mu)$.*

1) Soit un réel $p \geq 1$.

a) L'ensemble $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ tel que :

$$f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}} \quad \Rightarrow \quad Re(f), Im(f), |f|, \bar{f} \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}.$$

b) L'application $f \mapsto N_p(|f|)$ est une semi-norme sur cette espace vectoriel. L'espace semi-normé $(\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}, N_p)$ est complet.

2) Si $\phi : \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}} \times \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}$ est l'application définie par

$$\phi(f, g) = \int_E f \bar{g} d\mu,$$

$(\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}, \phi)$ est un espace préhilbertien complexe complet dont l'espace semi-normé associé est $(\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}, N_2)$.

4.7 Espaces L^p, $p \in [1, +\infty[$

Etant donné un espace mesuré $(E, \mathcal{B}, \mu)$, l'ensemble $\mathcal{H}_\mu = \{f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R}), f = 0 \quad \mu - p.p.\}$ (resp. $\mathcal{H}_{\mathbb{C},\mu} = \{f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{C}), f = 0 \quad \mu - p.p.\}$) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^p$ (resp. $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}$) pour tout réel $p \geq 1$ (Théorème 1.1 et 1.2).

Définition 23 *Considérons un espace mesuré $(E, \mathcal{B}, \mu)$et un réel $p \geq 1$.*

a) On appelle espaces des classes de fonctions de puissance p intégrable l'espace vectoriel quotient $L^p = \mathcal{L}^p / \mathcal{H}_\mu$ ou encore $L^p(\mu)$.

Si $[f]$ est un élément de L^p de représentant $f \in \mathcal{L}^p$, on posera $N_p([f]) = N_p(f)$. Si $[f]$ et $[g]$ sont deux éléments de L^2 de représntants $f, g \in \mathcal{L}^2$, on pose $\Phi([f], [g]) = \phi(f, g)$.

Théorème 33 *Considérons un espace mesuré $(E, \mathcal{B}, \mu)$et un réel $p \geq 1$.*

1) (L^p, N_p) est l'espace de Banach associé à l'espace semi-normé complet $(\mathcal{L}^p, N_p)$.

2) (L^2, Φ) est un espace de Hilbert (réel) dont l'espace de Banach associé est (L^2, N_2).

(Des résultats analogues sont valables dans le cas complexe.)

4.8 Espaces $\mathcal{L}^\infty$ et L^∞

Théorème 34 *Considérons un espace mesuré $(E, \mathcal{B}, \mu)$. Pour une fonction $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (resp. $\mathbb{C}$) les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+$, $|f| \leq \alpha \ \mu - p.p.$,

2) $\exists g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) bornée et $f = g \ \mu - p.p.$

Preuve : 1) $\Rightarrow$ 2). Il suffit de prendre $g = f 1_{\{|f| \leq \alpha\}}$.

2) $\Rightarrow$ 1). Le réel $\alpha = ||g||_\infty = \sup\{|g(x)|; x \in E\}$ convient.□

Définition 24 *On considère un espace mesuré $(E, \mathcal{B}, \mu)$.*

a) Une fonction f possédant les propriétés équivalentes du Théorème 8.1 est dite μ-essentiellement bornée (ou essentiellement bornée).

b) On appelle borne supérieure esentielle d'une fonction f essentiellement bornée le réel

$$N_\infty(f) = \inf\{\alpha; \alpha \in \mathbb{R}_+, |f| \leq \alpha \ \mu - p.p.\}.$$

c) On désigne par $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ ou $\mathcal{L}^\infty$ (resp. $\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{C}}(\mu)$, $\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{C}}$) l'ensemble des focntions essentiellement bornées $f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{C})$).

Remarques. 1) Ne pas dire d'une fonction essentiellement bornée qu'elle est bornée presque partout, ce qui n'aurait aucun sens.

2) Une fonction nulle presque partout est essentiellement bornée et sa borne supérieure essentielle est nulle.

3) Toute fonction bornée est essentiellement bornée mais la réciproque est fausse. Ainsi la fonction $f = \phi 1_{\mathbb{N}}$, où $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'identité, est essentiellement bornée (puisque $p = 0\ \lambda - p.p.$) sans être bornée.

4) Si f et g sont deux fonctions essentiellement bornées :

$$f = g \quad \mu - p.p. \quad \Rightarrow \quad N_\infty(f) = N_\infty(g).$$

5) Toute fonction numérique f bornée sur E vérifie $N_\infty(f) \leq ||f||_\infty$ (car $|f| \leq ||f||_\infty$ partout sur E) sans qu'il y ait égalité en général. En effet, dès qu'il existe dans $\mathcal{B}$ un N non vide tel que $\mu(N) = 0$, la fonction 1_N vérifie $||1_N||_\infty = 0$ et $N_\infty(1_N) = 0$.

6) Toute fonction essentiellement bornée vérifie $|f| \leq N_\infty(f)$ presque partout. Il est immédiat que $|f| \leq N_\infty(f) + \dfrac{1}{n}$ presque partout, c'est à dire qu'il existe un $N_n \in \mathcal{N}_\mu$ tel que $\left\{|f| > N_\infty(f) + \dfrac{1}{n}\right\} \subset N_n$, et ceci pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et il reste à écrire :

$$\{|f| > N_\infty(f)\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{|f| > N_\infty(f) + \frac{1}{n}\right\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \in \mathcal{N}_\mu.$$

7) Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^\infty$ il existe $g \in \mathcal{L}^\infty$ bornée vérifiant $g = f$ presque partout et $||g||_\infty = N_\infty(f)$. Compte tenu des remarques 4), 5) et 6) ci-dessus, la fonction $g = f 1_{\{|f| \leq N_\infty(f)\}}$ convient car on a clairement :

$$f = g\ \mu - p.p. \quad \text{et} \quad N_\infty(f) = N_\infty(g) \leq ||g||_\infty \leq N_\infty(f).$$

8) On vérifie facilement que $\mathcal{L}^\infty$ (resp. $\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{C}}$) est un espace vectoriel, et que l'ensemble $\mathcal{H}_\mu$ (resp. $\mathcal{H}_{\mathbb{C},\mu}$) est encore l'ensemble des $f \in \mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{M}(E, \mathcal{B}, \mathbb{C})$) vérifiant $N_\infty(f) = 0$ et est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^\infty$ (resp. $\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{C}}$), ce qui justifie la définition suivante.□

Définition 25 *On considère un espace mesuré* $(E, \mathcal{B}, \mu)$.

On appelle espace des classes de fonctions essentiellement bornée l'espace vectoriel $L^\infty = \mathcal{L}^\infty / \mathcal{H}_\mu$. *Si* $[f]$ *est un élément de* L^∞ *de représentant* $f \in \mathcal{L}^\infty$, *on posera* $N_\infty([f]) = N_\infty(f)$.

On définit de façon analogue l'espace $L^\infty_{\mathbb{C}}$ dans le cas complexe où le résultat ci-dessous possède aussi sa contrepartie.

Théorème 35 *Etant donné un espace mesuré* $(E, \mathcal{B}, \mu)$, $(\mathcal{L}^\infty, N_\infty)$ *(resp.* (L^∞, N_∞)*) est un espace vectoriel semi-normé (resp. normé) complet.*

Preuve : Il est évident que $N_\infty(f) \geq 0$ pour chaque $f \in \mathcal{L}^\infty$. D'autre part, pour tout réel $\lambda \neq 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} N_\infty(\lambda f) &= \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+, |\lambda f| \leq \alpha \; \mu - p.p.\} = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+, |f| \leq \alpha |\lambda|^{-1} \; \mu - p.p.\} \\ &= \inf\{|\lambda|\delta, \delta \in \mathbb{R}_+, |f| \leq \delta \; \mu - p.p.\} = |\lambda| \inf\{\delta, \delta \in \mathbb{R}_+, |f| \leq \delta \; \mu - p.p.\} \\ &= |\lambda| N_\infty(f), \end{aligned}$$

tandis que $N_\infty(\lambda f) = N_\infty(0) = 0 N_\infty(f)$ si $\lambda = 0$.

Enfin, si $f, g \in \mathcal{L}^\infty$, comme on a à la fois

$$|f| \leq N_\infty(f) \quad \mu - p.p. \qquad \text{et} \qquad |g| \leq N_\infty(g) \quad \mu - p.p.,$$

il est immédiat que

$$|f + g| \leq |f| + |g| \leq N_\infty(f) + N_\infty(g) \quad \mu - p.p.,$$

si bien que $N_\infty(f + g) \leq N_\infty(f) + N_\infty(g)$.

2) Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de Cauchy de $(\mathcal{L}^\infty, N_\infty)$, ce qu'on peut traduire par

$$\forall r \in \mathbb{N}^*, \; \exists n \in \mathbb{N}^*, \; \forall p, q \geq n, \; N_\infty(f_p - f_q) < \frac{1}{r}.$$

Pour chaque $r \in \mathbb{N}^*$ désignons par n_r le plus petit des entiers n ayant la propriété ci-dessus. Alors, comme

$$N_\infty(f_p - f_q) < \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad |f_p - f_q \leq \frac{1}{r} \quad \mu - p.p.,$$

quels que soient $p, q \geq n_r$ l'ensemble $N_{p,q,r} = \left\{ |f_p - f_q| > \dfrac{1}{r} \right\}$ est de mesure nulle, de même que la réunion dénombrable

$$N' = \bigcup_{r=1}^{\infty} \bigcup_{p,q=n_r}^{\infty} N_{p,q,r}.$$

Notons aussi que $N'' = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \{|f_n| > N_\infty(f_n)\}$ est de mesure nulle et posons $N = N' \cup N''$, puis que $g_n = f_n 1_{E \setminus N}$. Les fonctions g_n sont bornées de plus, quels que soient les entiers $p, q \geq n_r$:

$$\begin{aligned} x \in N \quad &\Rightarrow \quad |g_p(x) - g_q(x)| = 0 \\ x \in E \setminus N \quad &\Rightarrow \quad |g_p(x) - g_q(x)| = |f_p(x) - f_q(x)| \leq \frac{1}{r}, \end{aligned}$$

ce qui montre que la suite $(g_n)_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy pour la norme $||, ||_\infty$ de la convergence uniforme. Par conséquent, elle converge uniformément, donc simplement, vers une fonction g appartenant à $\mathcal{L}^\infty$ car g est à la fois bornée et $\mathcal{B}$-mesurable comme chaque g_n. Enfin, la convergence uniforme de $(g_n)_{n\geq 1}$ vers g entraîne la convergence de $(f_n)_{n\geq 1}$ vers g dans $(\mathcal{L}^\infty, N_\infty)$ car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et comme $f_n = g_n$ presque partout, il résulte que $N_\infty(f_n - g) = N_\infty(g_n - g) \leq ||g_n - g||_\infty$.

3) La complétude de $(\mathcal{L}^\infty, N_\infty)$ implique celle de (L^∞, N_∞) d'après un grand théorème.□

4.9 Relations entre l'intégrale de Lebesgue et l'intégrale de Riemann

Nous allons rappeler la définition de l'intégrale de Riemann sur un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction soit intégrable au sens de Riemann ainsi que le lien avec l'intégrale de Lebesgue.

La mesurabilité d'une fonction réelle f définie sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ sera entendue au sens de la tribu borélienne induite sur $[a, b]$.

4.9.1 Définition de l'intégrale de Riemann

Dans toute la suite $[a, b]$ sera un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle subdivision de $[a, b]$ toute suite finie $S = \{x_0, \ldots, x_n\}$ telle que

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Pour tout $i = 1, \ldots, n$ on pose $\delta_i = x_i - x_{i-1}$. On appelle diamètre de S, le nombre réel strictement positif

$$\delta(S) = \sup_{i=1,\ldots,n} \delta_i.$$

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble de toute les subdivisions de $[a, b]$. Soient $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et $S \in \mathcal{S}$. On pose

$$I(f)(S, z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\delta_i$$

où z_i est un élément de $]x_{i-1}, x_n[$. $I(f)(S, z_1, \ldots, z_n)$ est appelée somme de Riemann de f. Comme on le voit bien elle dépend évidemment du choix du couple (S, z_S) où $S \in \mathcal{S}$ et $z_S = (z_1, \ldots, z_n) \in]x_o, x_1[\times \ldots]x_{n-1}, x_n[$. Soit $\widetilde{\mathcal{S}}$ l'ensemble des couples (S, z_S).

Définition 26 *On dit que f est intégrable au sens de Riemann (ou Riemann-intégrable) si la famille $I(f)(S, z_S)$ a une limite dans $\mathbb{R}$ quand le diamètre de S tend vers 0. Cette limite est alors appelée intégrale de Riemann de f sur l'intervalle $[a, b]$, on la note*

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Proposition 16 *Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors*

i) $f+g$ est Riemann-intégrable et $\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$,

ii) αf est Riemann-intégrable et $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$.

Ainsi l'ensemble des fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$ est un espace vectoriel réel sur lequel l'intégrale est une forme linéaire.

4.9.2 Lien avec l'intégrale de Lebesgue

Soit $S \in \mathcal{S}$. On définit deux fonctions asociées à f de la manière suivante : pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ soient

$$m_i = \inf_{x \in]x_{i-1}, x_i[} f(x) \quad \text{et} \quad M_i = \sup_{x \in]x_{i-1}, x_i[} f(x)$$

et posons

$$f_+^S(x) = \sum_{i=1}^n M_i 1_{]x_{i-1}, x_i[} \quad \text{et} \quad f_-^S(x) = \sum_{i=1}^n m_i 1_{]x_{i-1}, x_i[}.$$

Alors f_+^S et f_-^S sont deux focntions étagées mesurables. On pose

$$I(f_-^S) = \sum_{i=1}^n m_i \delta_i \quad \text{et} \quad I(f_+^S) = \sum_{i=1}^n M_i \delta_i.$$

Le quantités $I(f_-^S)$ et $I(f_+^S)$ sont appelées respectivement somme inférieure de Darboux et somme supérieure de Darboux de f relativement à la subdivision S de $[a,b]$. On a évidemment

$$I(f_-^S) \leq I(f)(S, z_S) \leq I(f_+^S)$$

pour tout z_S avec S fixée. Posons

$$I_-(f) = \sup_S I(f_-^S) \quad \text{et} \quad I_+(f) = \inf_S I(f_+^S).$$

On démontre alors, à partir de l'inégalité ci-dessus, le

Théorème 36 *La fonction f est Riemann-intégrable sur l'intervalle $[a,b]$ si, et seulement si, $I_-(f) = I_+(f)$.*

Ce théorème donne une autre définition de l'intégrale de Riemann. Celle-ci permet de caractériser les fonctions qui sont Riemann-intégrables et de donner le lien avec l'intégrale de Lebesgue. Comme d'habitude λ sera la mesure de Lebesgue sur $[a,b]$ et pour toute fonction mesurable $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ intégrable ou dont l'intégrale vaut $+\infty$ ou $-\infty$ on notera

$$\int_{[a,b]} f(x) d\lambda(x)$$

son intégrale de Lebesgue pour la distinguer de son intégrale de Riemann

$$\int_a^b f(x) dx$$

quand elle existe.

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Pour tout $\epsilon > 0$ et tout $x \in [a,b]$ on pose

$$f_+^\epsilon(x) = \sup\{f(z); z \in [a,b] \cap]x-\epsilon, x+\epsilon[\}$$

et

$$f_-^\epsilon(x) = \inf\{f(z); z \in [a,b] \cap]x-\epsilon, x+\epsilon[\}.$$

Pour x fixé f_+ décroit et f_- croit quand ϵ décroit. On a, d'autre part, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $x \in [a,b]$:

$$f_-^\epsilon(x) \leq f(x) \leq f_+^\epsilon(x).$$

On définit maintenant deux fonctions f_+ et f_- sur $[a,b]$ par

$$f_+(x) = \inf_{\epsilon \longrightarrow 0} f_+^\epsilon(x) \quad \text{et} \quad f_-(x) = \sup_{\epsilon \longrightarrow 0} f_-^\epsilon(x).$$

Les fonctions f_+ et f_- sont appelées respectivement la fonction inférieure de Baire et la fonction supérieure de Baire associés à f.

Proposition 17 *La fonction f est continue en $x \in [a,b]$ si, et seulement si, $f_+(x) = f_-(x)$.*

La démonstration est assez facile et est laissée au lecteur.□

Proposition 18 *Les fonctions f_+ et f_- sont mesurables.*

Preuve : Nous la ferons pour f_- ; elle est la même pour f_+. Soit $(S^k)_{k\geq 1}$ une suite de subdivisions $\{x_0^k, x_1^k, \ldots, x_{n_k}^k\}$ de l'intervalle $[a,b]$ telles que

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \left(\max_{0 \leq i \leq n_k - 1} (x_{i+1}^k - x_i^k) \right) = 0.$$

Posons (pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $i = 0, \ldots, n_k - 1$) :

$$m_i^k = \inf_{z \in [x_i, x_{i+1}^k]} f(z) \quad \text{et} \quad h^k = \sum_{i=0}^{n_k - 1} m_i^k 1_{]x_i^k, x_{i+1}^k[}.$$

La fonction h^k est étagée mesurable. Pour montrer que f_- est mesurable, il suffit de montrer que h^k tend vers f_- en tout point du complémentaire dans $[a,b]$ du sous-ensemble $N = \bigcup\limits_{k,n_k} \{x^k_{n_k}\}$ qui est dénombrable (donc de mesure nulle). Soit $x \in [a,b] \setminus N$; alors il existe un $i_k \in \{0,1,\ldots,n_k-1\}$ tel que $x \in]x^k_{i_k}, x^k_{i_k+1}[$. Soit $\epsilon > 0$ tel que $]x-\epsilon, x+\epsilon[\subset]x^k_{i_k}, x^k_{i_k+1}[$. On a

$$h^k(x) = \inf_{z \in [x^k_{i_k}, x^k_{i_k+1}]} f(z) \leq f^\epsilon_-(x) \leq f_-(x)$$

c'est-à-dire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $h^k(x) \leq f_-(x)$. Soit a un réel tel que $a < f_-(x)$. Alors, comme $f_-(x) = \sup\limits_\epsilon f^\epsilon_-(x)$, il existe un $\epsilon > 0$ tel que $f^\epsilon_- > a$. D'autre part il existe k_0 entier tel que

$$k \geq k_0 \Rightarrow x \in [x^k_{i_k}, x^k_{i_k+1}] \subset]x-\epsilon, x+\epsilon[$$

car

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \left(\max_{0 \leq i \leq n_k - 1} (x^k_{i+1} - x^k_i) \right) = 0.$$

Donc

$$m^k_i = h^k(x) = \inf_{z \in [x^k_{i_k}, x^k_{i_k+1}]} f(z) \geq \inf_{z \in]x-\epsilon, x+\epsilon[} f(z) = f^\epsilon_-(x).$$

On a donc établi que pour tout réel a vérifiant $a < f_-(x)$, il existe un entier k, $k \geq k_0$ tel que $h^k(x) > a$. Ceci montre bien que $h^k(x) \longrightarrow f_-(x)$ puisque pour tout k, $h^k(x) \leq f_-(x)$. $\square$

La proposition qu'on vient d'établir va nous permettre de démontrer un théorème important caractérisant une fonction Riemann-intégrable sur un intervalle $[a,b]$ et le lien avec l'intégrale de Lebesgue.

Théorème 37 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. Alors f est Riemann-intégrable si, et seulement si, elle est presque partout continue.*

Preuve : La suite $(h^k)_{k \geq 1}$ tend presque partout vers f_-. D'autre part pour tout k, $|h^k| \leq ||f||_\infty < +\infty$ puisque f est bornée. La constante $||f||_\infty$ est Lebesgue-intégrable puisque $[a,b]$ est de mesure finie. Le théorème de la convergence dominée montre alors

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \int_{[a,b]} h^k(x) d\lambda(x) = \int_{[a,b]} f_-(x) d\lambda(x).$$

Or

$$\int_{[a,b]} h^k(x) d\lambda(x) = \sum_{i=0}^{n_k - 1} m^k_i (x^k_{i+1} - x^k_i) = I(f^{S^k}_-)$$

où $I(f_-^{S^k})$ est la somme inférieure de Darboux relativement à la subdivision S^k. On a donc

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty} I(f_-^{S^k}) = \int_{[a,b]} f_-(x)d\lambda(x).$$

De façon similaire on montre que

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty} I(f_+^{S^k}) = \int_{[a,b]} f_+(x)d\lambda(x).$$

On obtient donc

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty}(I(f_+^{S^k}) - I(f_-^{S^k})) = \int_{[a,b]}(f_+(x) - f_-(x))d\lambda(x).$$

Comme f Riemann-intégrable équivaut à $\lim\limits_{k\longrightarrow+\infty}(I(f_+^{S^k}) - I(f_-^{S^k})) = 0$, f est Riemann-intégrable si, et seulement si,

$$\int_{[a,b]}(f_+(x) - f_-(x)d\lambda(x) = 0$$

qui est encore équivalent à $f_+ = f_-$ presque partout puisque $f_+ - f_-$ est une fonction positive. Ce la signifie que f est Riemann-intégrable si, et seulement si, f est continue presque partout.$\square$

De ce théorème on peut tirer le

Corollaire 31 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée. Alors, si f est Riemann-intégrable, elle est Lebesgue-intégrable et*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)d\lambda(x).$$

La réciproque de ce corollaire est en général fausse comme nous allons le voir sur l'exemple qui suit.

Exemple. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors il est facile de voir que les sommes de Darboux de f relativement à n'importe quelle subdivision S de $[0,1]$ sont données par $I(f_-^S) = 0$ et $I(f_+^S) = 1$. Par suite f n'est pas Riemann-intégrable. Mais comme f est mesurable étagée sur $[0,1]$ qui est de mesure finie, elle est Lebesgue-intégrable.$\square$

4.9.3 Intégrales généralisées

Définition 27 *Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. f est dite localement Riemann-intégrable si et seulement si, pour tout $b \in]a, +\infty[$, f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$. On pose alors :*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\longrightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Si $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty$ on dira que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge absolument et $\int_a^{+\infty} f(x)dx < +\infty$.

Théorème 38 *Soit f localement intégrable sur $[a, +\infty[$ au sens de Riemann et bornée sur tout compact de $[a, +\infty[$. Alors f est λ-intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty$ et on alors :*

$$\int_{[a,+\infty[} f d\lambda = \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Preuve : ($\Rightarrow$) Supposons que f est λ-intégrable. On définit la suite croissante de fonctions $(f_n)_{n\geq[a]+1}$ par $f_n = |f|1_{[a,n]}$. Cette suite est une suite de fonctions λ-intégrable qui converge en croissant vers $|f|$ donc

$$\int_{[a,+\infty[} |f|d\lambda = \sup_{n\geq[a]+1} \int_{[a,+\infty[} f_n d\lambda.$$

Or, pour tout n, f_n est Riemann-intégrable bornée sur $[a, n]$ et donc d'aprés le Corollaire 9.1, on a

$$\int_{[a,+\infty[} f_n d\lambda = \int_a^n |f(x)|dx$$

et donc $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|dx = \int_{[a,+\infty[} |f|d\lambda < +\infty.$

($\Leftarrow$) On suppose $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty$. On pose, pour tout $n \geq [a] + 1$, $g_n = f1_{[a,n]}$. Il est clair que $(g_n)_{n\geq[a]+1}$ est une suite dans $\mathcal{L}^1$ qui converge vers f. D'un autre côté, pour tout $n \geq [a]+1$, $|f_n| \leq |f|$. Or $|f|$ est limite de la suite croissante de la suite $(|g_n|)_{n\geq}$ et d'après la propriété de Beppo Levi, on a

$$\int_{[a,+\infty[} |f|d\lambda = \sup_{n\geq[a]+1} \int_{[a,+\infty[} |g_n|d\lambda = \sup_{n\geq[a]+1} \int_a^n |f(x)|dx = \int_a^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty.$$

Le théorème de la convergence dominée permet de conclure.□

4.10 Exercices corrigés

Exercice 1. *Soit* $(E, \mathbb{B}, \mu)$ *un espace mesuré et soit* $f \in \mathcal{L}^1$.

1) Pour chaque entier $n \geq 1$, *on pose* $\phi_n = \inf(|f|, n1_E)$. *Montrer que* $\phi_n \in \mathcal{L}^1$ *et que* $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_E (|f| - \phi_n) d\mu = 0$.

2) En déduire la propriété suivante :

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \quad (\forall B \in \mathbb{B}, \mu(B) < \delta), \quad \int_B |f| d\mu < \epsilon.$$

Solution : 1) La suite $(\phi_n)_{n \geq 1}$ est une suite croissante de fonctions $\mathbb{B}$-mesurables positives qui converge simplement vers $|f|$. De plus pour tout $n \geq 1$:

$$\int_E^* \phi_n d\mu \leq \int_E |f| d\mu < +\infty,$$

ce qui montre que $\phi_n \in \mathcal{L}^1$, tandis que l'égalité

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_E \phi_n d\mu = \int_E |f| d\mu,$$

qui résulte du théorème de Beppo Levi équivaut à :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_E (|f| - \phi_n) d\mu = 0.$$

2) Soit $\epsilon > 0$. D'après ce qui précède, on peut trouver n_0 tel que

$$\int_E (|f| - \phi_{n_0}) d\mu < \frac{\epsilon}{2}.$$

Alors si $B \in \mathbb{B}$ est tel que $\mu(B) < \frac{\epsilon}{2n_0}$, on a

$$\int_B \phi_{n_0} d\mu \leq \int_B n_0 1_E d\mu = n_0 \mu(B) < \frac{\epsilon}{2}$$

d'où l'on déduit :

$$\int_B |f| d\mu = \int_B (|f| - \phi_{n_0}) d\mu + \int_B \phi_{n_0} d\mu < \int_E (|f| - \phi_{n_0}) d\mu + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \square$$

Exercice 2. *Soit* $(E, \mathbb{B}, \mu)$ *un espace mesuré et soit* $\mathbb{E} = \mathbb{E}(E, \mathbb{B}, \mu)$ *l'ensemble des fonctions* $\mathbb{B}$*-étagées. On pose* $\mathbb{E}^1 = \mathbb{E} \cap \mathcal{L}^1$, *ensemble de fonctions* $\mathbb{B}$*-étagées* μ*-intégrables.*

1) Montrer que pour tout $p \geq 1$, $\mathbb{E}^1$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{L}^p$.

2) Montrer que $\mathbb{E}^1$ *est dense dans l'espace semi-normé* $(\mathcal{L}^p, N_p)$.

3) Montrer que dans l'espace semi-normé $(\mathcal{L}^p(\lambda), N_p)$ *sont denses :*

a) l'ensemble $\mathbb{E}_{esc}$ des fonctions en escalier sur $\mathbb{R}$;

b) l'ensemble $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ et continues à support compact.

Solution : 1) L'ensemble $\mathbb{E}^1$ est évidemment un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et, si $\sum_{k=1}^{n} \beta_k 1_{B_k}$ est une représentation disjointe de $f \in \mathbb{E}(E, \mathbb{B}, \mathbb{R})$, il vient, en supposant $\beta_k \neq 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$:

$$\begin{aligned} f \in \mathbb{E}^1 \quad & \Leftrightarrow \quad \int_E \left| \sum_{k=1}^{n} \beta_k 1_{B_k} \right| d\mu = \sum_{k=1}^{n} |\beta_k| \mu(B_k) < +\infty \\ & \Leftrightarrow \quad \forall k \in \{1, \dots, n\}, \mu(B_k) < +\infty \\ & \Leftrightarrow \quad \int_E \left| \sum_{k=1}^{n} \beta_k 1_{B_k} \right|^p d\mu = \sum_{k=1}^{n} |\beta_k|^p \mu(B_k) < +\infty \\ & \Leftrightarrow \quad f \in \mathcal{L}^p. \end{aligned}$$

Il en résulte $\mathbb{E}^1 = \mathbb{E} \cap \mathcal{L}^1 = \mathbb{E} \cap \mathcal{L}^p$, et par conséquent $\mathbb{E}^1 \subset \mathcal{L}^p$, ceci pour tout $p \geq 1$.

2) Soit $f \in \mathcal{L}^p$. Il existe une suite croissante $(g_n)_{n\geq 1}$ de $\mathbb{E}(E, \mathbb{B}, \mathbb{R}_+)$ qui converge simplement vers f^+. Pour tout $n \geq 1$, on a donc $g_n \leq f^+$ et comme $f^+ \in \mathcal{L}^p$, on déduit que $g_n \in \mathbb{E} \cap \mathcal{L}^p = \mathbb{E}^1$. De plus, nous avons obtenu

$$\sup_{n\geq 1} N_p(g_n) \leq N_p(f^+) < +\infty,$$

de sorte que le théorème de Beppo Levi s'applique et montre que $(g_n)_{n\geq 1}$ converge en moyenne d'ordre p vers f^+.

Nous obtiendrions de même l'existence d'une suite $(h_n)_{n\geq 1}$ de $\mathbb{E}^1$ convergeant vers f^- en moyenne d'ordre p.

Finalement, la suite $(f_n)_{n\geq 1} = (g_n - h_n)_{n\geq 1}$ de $\mathbb{E}^1$ converge en moyenne d'ordre p puisque, pour tout $n \geq 1$:

$$N_p(f_n - f) = N_p(g_n - h_n - f^+ + f^-) \leq N_p(g_n - f^+) + N_p(h_n - f^-).$$

3) a) Nous procéderons en deux temps.

• L'espace vectoriel $\mathbb{E}^1$ est dense dans $(\mathcal{L}^p(\lambda), N_p)$ et est engendré par $\mathcal{A} = \{1_A; A \in \mathbb{B}_\lambda, \lambda(A) < +\infty\}$. De plus (voir exercice 7 série T.D.1), pour tout $A \in \mathbb{B}_\lambda$ tel que $\lambda(A) < +\infty$, il existe une suite $(U_k)_{k\geq 1}$ d'ouverts de $\mathbb{R}$ tels que, pour tout entier $k \geq 1$, on ait $A \subset U_k$ et $\lambda(A) \leq \lambda(U_k) \leq \lambda(A) + \dfrac{1}{k}$, d'où l'on déduit que $\lambda(U_k) < +\infty$ et

$$\begin{aligned} (N_p(1_{U_k} - 1_A))^p \quad & = \quad \int_{\mathbb{R}}^* |1_{U_k} - 1_A|^p d\lambda = \int_{\mathbb{R}}^* 1_{U_k \setminus A} d\lambda \\ & = \quad \lambda(U_k \setminus A) = \lambda(U_k) - \lambda(A) \leq \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

La suite $(1_{U_k})_{k\geq 1}$ converge donc vers 1_A dans $(\mathcal{L}^p(\lambda), N_p)$ et si $\mathcal{H}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^p(\lambda)$ engendré par $\mathcal{U} = \{1_U; U \quad \text{ouvet}, \lambda(U) < +\infty\}$, on a $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{H}}$, $\mathcal{A}$ engendre $\mathbb{E}^1$ et $\mathbb{E}^1$ est dense dans $\mathcal{L}^p(\lambda)$, on obtient la densité de $\mathcal{H}$ dans $(\mathcal{L}^p(\lambda), N_p)$.

• On sait que tout ouvert $U \subset \mathbb{R}$ tel que $\lambda(A) < +\infty$ s'écrit $U = \sum_{n=1}^{\infty} I_n$ où les I_n sont des intervalles ouverts bornés mutuellement disjoints. Considérons alors la suite $(\phi_k)_{k\geq 1}$ des fonctions en esacaliers $\phi_k = \sum_{n=1}^{k} 1_{I_n}$. Cette suite est croissante, converge simplement vers 1_U et vérifie pour chaque $k \geq 1$:

$$(N_p(\phi_k))^p = \int_{\mathbb{R}}^{*} |\phi_k|^p d\lambda = \sum_{n=1}^{k} \lambda(I_n) = \lambda(\bigcup_{n=1}^{k} I_n) \leq \lambda(U) < +\infty,$$

si bien que, d'après le théorème de Beppo Levi, $(\phi_k)_{k\geq 1}$ converge vers 1_U dans $(\mathcal{L}^p(\lambda), N_p)$. On fait le même raisonnement que ci-dessus : $\mathcal{U} \subset \overline{\mathbb{E}_{\rceil \int \lfloor}}$ et $\mathcal{U}$ engendre $\mathcal{H}$ qui est dense dans $(\mathcal{L}^p, N_p)$ donc $\mathbb{E}_{esc}$ est dense dans $(\mathcal{L}^p, N_p)$.

b) Une fonction $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et nulle en dehors d'un certain compact $[a, b]$. Un telle fonction est donc bornée sur $[a, b]$, et même sur $\mathbb{R}$, et l'on a

$$|f| \leq M 1_{[a,b]} \quad \text{où} \quad M = \sup_{x\in[a,b]} |f(x|,$$

d'où l'on déduit, puisque f est borélienne

$$\int_{\mathbb{R}}^{*} |f|^p d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}}^{*} M^p 1_{[a,b]} d\lambda = M^p(b-a) < +\infty.$$

Il en résulte que $\mathcal{K}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^p(\lambda)$, et $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ est même un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^p(\lambda)$. Par ailleurs, l'ensemble $\mathbb{E}_{esc}$ des fonctions en escalier est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^p(\lambda)$ engendré par $\mathcal{J} = \{1_J; J \quad \text{intervalle borné de} \quad \mathbb{R}\}$.

Pour un intervalle borné $J = [\alpha, \beta]$ considérons la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \in]-\infty, \alpha - \frac{1}{n}] \cup [\beta + \frac{1}{n}, +\infty[, \\ 1 & \text{si} \quad t \in [\alpha, \beta], \\ nt + 1 - n\alpha & \text{si} \quad t \in [\alpha - \frac{1}{n}, \alpha], \\ -nt + 1 + n\beta & \text{si} \quad t \in [\beta, \beta + \frac{1}{n}]. \end{cases}$$

Une telle fonction f_n est telle que :

$$(N_p(f_n - 1_{[\alpha,\beta]}))^p = \int_{\mathbb{R}}^{*} |f_n - 1_{[al,\beta]}|^p d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}}^{*} (1_{[\lambda - \frac{1}{n}, \lambda]} + 1_{[\beta, \beta + \frac{1}{n}]} d\lambda = \frac{2}{n}.$$

La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge donc vers $1_{[\alpha,\beta]}$ dans $(\mathcal{L}^p(\lambda), N_p)$, et le même résultat aurait été obtenu si l'intervalle borné J avait été choisi ouvert ou semi-ouvert. On conclut donc en utilisant le même raisonnement que plus haut.□

Exercice 3. *1) Montrer que, pour une fonction $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathbb{B}_\lambda, \mathbb{R})$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$, $f1_K \in \mathcal{L}^1(\lambda)$;

(ii) pour toute fonction $\phi \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$, $f\phi \in \mathcal{L}^1(\lambda)$;

(iii) pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un voisinage ouvert U de x tel que $f1_U \in \mathcal{L}^1(\lambda)$.

Une telle fonction est dite localement Lebesgue-intégrable et on désigne par $\mathcal{L}^1_{loc}(\lambda)$ l'ensemble de ces fonctions.

2) Vérifier que $\mathcal{L}^1_{loc}(\lambda)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

3) Montrer que $\mathcal{L}^p(\lambda) \subset \mathcal{L}^1_{loc}(\lambda)$ pour tout réel $p \geq 1$ et que cette inclusion est stricte.

Solution : $(i) \Rightarrow (ii)$. Soit $\phi \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ et soit $K = supp(\phi)$. Comme ϕ est bornée, en désignant par M un majorant de $|\phi|$ on a $|f\phi| \leq M|f1_K|$. Il en résulte que $f\phi \in \mathcal{L}^1(\lambda)$, puisque $Mf1_K \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ par (i) et que $f\phi$ est Lebesgue-mesurable comme produit de fonctions Lebesgue-mesurable.

$(ii) \Rightarrow (ii)$. Si $x \in \mathbb{R}$ on peut trouver une fonction $\phi \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$, positive et telle que $\phi(x) > 0$. Alors, si $U = \phi^{-1}(]1, +\infty[)$, U est un ouvert contenant x et $|f1_U| \leq |f\phi|$, si bien que $f1_U \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ résulte de (ii) par le même argument que celui employé ci-dessus.

$(iii) \Rightarrow (i)$. Soit K un compact de $\mathbb{R}$. D'après (iii), à chaque $x \in K$, on peut associer un voisinage ouvert U de x tel que $f1_U \in \mathcal{L}^1(\lambda)$. L'ensemble de ces ouverts U constitue un recouvrment du compact K par des ouverts et K peut donc être recouvert par un ensemble fini d'entre eux, disons $U_1, \ldots, U_n$. Et comme $|f1_K| \leq \sup\{|f1_{U_i}|; i = 1 \ldots, n\}$ est que ce second membre est dans $\mathcal{L}^1(\lambda)$, on conclut à $f1_K \in \mathcal{L}^1(\lambda)$, toujours par le même argument.

2) Evident.

3) Soit K un compact dans $\mathbb{R}$. Si $f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$, l'ingalité $|f1_K| \leq |f|$, jointe à la Lebesgu-mesurabilité de $f1_K$ (comme produit de deux fonctions Lebesgue-mesurables), prouve que $f1_K \in \mathcal{L}^1(\lambda)$. Il en résulte que $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\lambda)$.

Si $f \in \mathcal{L}^p(\lambda)$ avec $p > 1$, en remarquant que $1_K \in \mathcal{L}^q(\lambda)$ pour tout réel $q \geq 1$ (puisque 1_k est Lebesgue-mesurable positive et

$$\int_{\mathbb{R}}^* (1_K)^q d\lambda = \int_{\mathbb{R}}^* 1_K d\lambda = \lambda(K) < +\infty),$$

et en particulier pour q conjugué de p, $f1_K \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ résulte de l'ingalité de Hölder, ce qui démontre encore que $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\lambda)$.

Cette inclusion est stricte car de l'appartenance de $1_K \in \mathcal{L}^p(\lambda)$ (démontrée ci-dessus) on déduit aussitôt que les fonctions constante sur $\mathbb{R}$ sont dans $\mathcal{L}^1_{loc}(\lambda)$, tandis qu'à l'exception de la fonction nulle, elles n'appartiennent à aucun $\mathcal{L}^p(\lambda)$.□

Exercice 4. *Montrer que le cas général $p \geq 1$ du théorème de Lebesgue peut se déduire du cas particulier $p = 1$ de ce même théorème.*

Solution : Dans le cas général $p \geq 1$, on obtient $f \in \mathcal{L}^p$, d'où il suit $f_n - f \in \mathcal{L}^p$ et par conséquent $|f_n - f|^p \in \mathcal{L}^1$. Mais la suite $(|f_n - f|^p)_{n\geq 1}$ converge μ-presque partout vers 0 et vérifie :

$$\forall n \geq 1, |f_n - f|^p \leq 2^p|g|^p \quad \mu - p.p.$$

où $2^p|g|^p \in \mathcal{L}^1$. L'application du théorème de Lebesgue pour les fonctions intégrables donne alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \displaystyle\int_E |f_n - f|^p d\mu = 0$, ce qui est le résultat souhaité.$\Box$

Exercice 5. *On considère une focntion $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathbb{B}_\lambda, \mathbb{R})$ telle que :*

$$\forall \phi \in \mathcal{K}(\mathbb{R}), \quad f\phi \in \mathcal{L}^1 \quad et \quad \int_{\mathbb{R}} f\phi d\lambda = 0.$$

1) Soit $K \subset \mathbb{R}$ un compact quelconque.

a) Prouver qu'il existe une suite $(\phi_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ qui converge λ-presque partout vers 1_K.

b) Montrer que l'on peut toujours supposer, d'une part, qu'il existe un compact fixe K_0 tel que $supp(\phi_n) \subset K_0$ pour tout $n \geq 1$, et, d'autre part, que $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\phi_n(x)| = 1$.

c) En déduire que $\int_K f d\lambda = 0$.

2) Démontrer que $f = 0$ λ-preque partout.

Solution : 1) a) Il est clair que $1_K \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ puisque $\lambda(K) < +\infty$. La densite de $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ dans $(\mathcal{L}^1(\lambda), N_1)$ (exercice 2 T.D 4) assure l'existence d'une suite de $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ convergeant en moyenne vers 1_K, mais une telle suite possède une sous-suite qui converge vers 1_K λ-presque partout, et nous désignons par $(\phi_n)_{n\geq 1}$ une suite ayant cette dernière propriété.

b) Il existe une fonction $\psi \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ telle que $\psi(x) = 1$ pour tout $x \in K$. Alors $(\psi\phi_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fonctions dans $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ dont les supports sont tous contenus dans celui K_0 de ψ et, de même que la suite $(\phi_n)_{n\geq 1}$, cette nouvelle suite converge λ-presque partout vers 1_K. Il est donc possible de choisir la suite $(\phi_n)_{n\geq 1}$ de a) telle que les supports des ϕ_n soient contenus dans un même compact K_0.

Ceci étant fait, remarquons que la suite $(\theta_n)_{n\geq 1}$ où, pour chaque $n \geq 1$, on a posé $\theta_n = \sup(\inf(\phi_n, 1), -1))$, est encore une suite de $\mathcal{K}(\mathbb{R})$, avec $supp(\theta_n) = supp(\phi_n)$ de sorte que la condition précédentes sur les supports subsiste, avec $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \theta_n(x) = 0$ ou 1 selon que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \phi_n(x) = 0$ ou 1, si bien que $(\theta_n)_{n\geq 1}$ aussi converge vers 1_K λ-presque partout, avec $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |\theta_n(x)| = 0$ pour tout $n \geq 1$.

c) Si $(\phi_n)_{n\geq 1}$ possède les propriétés indiquées en a) et b), on a d'une part $\lim_{n\longrightarrow+\infty} f\phi_n = f1_K$ λ-presque partout et, d'autre part, $|f\phi_n| \leq |f|1_{K_0}$ partout sur $\mathbb{R}$ et avec $|f|1_{K_0} \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ car $f \in \mathcal{L}^1_{loc}(\lambda)$. Alors, par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on obtient :

$$\int_K f d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f1_K d\lambda = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_n f d\lambda = 0$$

car toutes les intégrales $\int_{\mathbb{R}} f\phi_n d\lambda$ sont nulles par hypothèses.

2) Supposons que la conclusion est fausse. Il existe donc $A \in \mathbb{B}_\lambda$ tel que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in A$ et $\lambda(A) > 0$. Comme les ensembles $A \cap \{f > 0\}$ et $A \cap \{f > 0\}$ sont dans $\mathbb{B}_\lambda$ et de réunion égale à A, au moins l'un d'eux est de mesure non nulle ; supposons que ce soit le premier. (Si c'était l'autre, on conclurait par un raisonnement analogue à celui qui suit.) Alors, il existe un $B \in \mathbb{B}_\lambda$ et un $b > 0$ tel que $\lambda(B) > 0$ et $f(x) \geq b$ pour tout $x \in B$. Puis il existe un compact $K \subset B$ tel que $\lambda(K) > 0$, si bien que

$$\int_K f d\lambda \geq b\lambda(K) > 0$$

ce qui contredit 1).□

Exercice 6. *Soit $(E, \mathbb{B}, \mu)$ un espace mesuré et soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions de $\mathcal{L}^1$ qui converge presque partout vers une focntion $f \in \mathcal{L}^1$. Le but de l'exercice est de démontrer l'équivalence des propriétés suivantes :*

(α) *$(f_n)_{n\geq 1}$ converge vers f en moyenne,*

(β) $\lim_{n\longrightarrow+\infty} N_1(f_n) = N_1(f)$,

(γ) $\limsup_{n\longrightarrow+\infty} \int_E |f_n| d\mu \leq \int_E |f| d\mu$,

(δ) $\forall B \in \mathbb{B}$, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} N_1(f_n 1_B) = N_1(f 1_B)$.

1) Justifier les implications $(\alpha) \Rightarrow (\beta) \Rightarrow (\gamma)$.

2) a) Etablir pour tout $B \in \mathbb{B}$ l'inégalité :

$$\limsup_{n\longrightarrow+\infty} \int_B |f_n| d\mu \leq \limsup_{n\longrightarrow+\infty} \int_E |f_n| d\mu - \int_{E\setminus B} |f| d\mu.$$

b) En déduire l'implication $(\gamma) \Rightarrow (\delta)$.

3) a) Soit $B \in \mathbb{B}$ tle que $\mu(B) < +\infty$ et soit $\theta > 0$. Montrer qu'il existe $C \subset B$ pout lequel $C \in \mathbb{B}$, $\mu(B \setminus C) < \theta$ et $(f_n 1_C)_{n\geq 1}$ converge en moyenne vers $f1_C$.

b) On considère $\epsilon > 0$ et $B \in \mathbb{B}$ tel que $\int_B |f| d\mu < \epsilon$. Montrer que, sous la condtion (δ), il existe un entier $N \geq 1$ tel que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq N), \quad \int_B |f_n - f| d\mu < 2\epsilon.$$

c) Soit $\epsilon > 0$. Etablir l'exsitence d'un $B \in \mathbb{B}$ vérifiant $\mu(B) < +\infty$ et $\int_{E\setminus B} |f|d\mu < \epsilon$. (Montrer que $B = \left\{|f| \geq \frac{1}{n}\right\}$ convient si n est suffisamment grand).

d) Déduire de (a), (b) et (c) ci-dessus l'implication $(\delta) \Rightarrow (\alpha)$.

Solution : 1) $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ et $(\beta) \Rightarrow (\gamma)$ sont des conséquences immédiates du cours.

2) a) Le passage aux limites supérieures dans l'égalité

$$\int_B |f_n|d\mu = \int_E |f_n|d\mu - \int_{E\setminus B} |f_n|d\mu$$

donne

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\longrightarrow+\infty} \int_B |f_n|d\mu &\leq \limsup_{n\longrightarrow+\infty} \int_E |f_n|d\mu + \limsup_{n\longrightarrow+\infty} \left(-\int_{E\setminus B} |f_n|d\mu\right) \\
&= \limsup_{n\longrightarrow+\infty} \int_E |f_n|d\mu - \liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int_{E\setminus B} |f_n|d\mu
\end{aligned}$$

ce qui conduit à l'inégalité désirée moyennant la minoration

$$\liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int_{E\setminus B} |f_n|d\mu \geq \int_{E\setminus B} \left(\liminf_{n\longrightarrow+\infty} |f_n|\right) d\mu = \int_{E\setminus B} |f|d\mu$$

obtenue en appliquant le lemme de Fatou à la suite $(|f_n|1_{E\setminus B})_{n\geq 1}$.

b) De l'hypothèse $\limsup_{n\longrightarrow+\infty} \int_E |f_n|d\mu \leq \int_E |f|d\mu$ et de a), résulte aussitôt

$$\limsup_{n\longrightarrow+\infty} \int_B |f_n|d\mu \leq \int_B |f|d\mu,$$

tandis que le lemme de Fatou donne $\liminf_{n\longrightarrow+\infty} \int_B |f_n|d\mu \geq \int_B |f|d\mu$ce qui donne la conclusion souhaitée.

3) (a) L'application du théorème d'Egorov sur le sous-espace mesuré $(B, \mathbb{B}_B, \mu_B)$ dont la mesure μ_B est finie, à la suite des restrictions des f_n à B, permet d'affirmer qu'il existe un $C \subset B$ tel que $C \in \mathbb{B}$, $\mu(B \setminus C) < \eta$ et $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément vers f sur C. Mais ceci équivaut à la convergence uniforme sur E de $(f_n 1_C)_{n\geq 1}$ vers $f1_C$, ce qui entrîne la convergence en moyenne de $(f_n 1_C)_{n\geq}$ vers $f1_C$. þ (**Théorème d'Egorov**) Soit $(E, \mathbb{B}, \mu)$ un espace mesuré où μ est finie.

Alors, si une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de $\mathcal{M}(E, \mathbb{B}, \overline{\mathbb{R}})$ et une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ sont telles que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n = f$ μ-presque partout, pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $B \in \mathbb{B}$ avec $\mu(B) < \epsilon$ et $\lim_{n\longrightarrow+_infty} f_n = f$ uniformément sur $E \setminus B$.

b) Posons $\epsilon' = \epsilon - \int_B |f| d\mu > 0$. D'après (δ), il existe un $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq N), \int_B |f_n| d\mu - \int_B |f| d\mu < \epsilon',$$

d'où l'on déduit que, pour tout $n \geq N$:

$$\int_B |f_n - f| d\mu \leq \int_B |f_n| d\mu + \int_B |f| d\mu < \int_B |f_n| d\mu + \epsilon < \int_B |f| d\mu + \epsilon' + \epsilon = 2\epsilon.$$

c) Pour tout entier $n \geq 1$, on a $\left\{|f| \geq \frac{1}{n}\right\} \in \mathbb{B}$ puisque $|f|$ est $\mathbb{B}$-mesurable, et $\mu\left(\left\{|f| \geq \frac{1}{n}\right\}\right) < +\infty$ car

$$\frac{1}{n}\mu\left(\left\{|f| \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = \int_E^* \frac{1}{n} 1_{\{|f| \geq \frac{1}{n}\}} d\mu \leq \int_E^* |f| 1_{\{|f| \geq \frac{1}{n}\}} d\mu \leq \int_E^* |f| d\mu < +\infty.$$

Enfin, comme la suite $\left(|f| 1_{\{|f| \geq \frac{1}{n}\}}\right)_{n \geq 1}$ est croissante et converge simplement vers $|f|$ qui est intégrable, le théorème de Beppo Levi assure que la suite croissante $\left(\int_E^* |f| 1_{\{|f| \geq \frac{1}{n}\}} d\mu\right)_{n \geq 1} = \left(\int_{\{|f| \geq \frac{1}{n}\}}^* |f| d\mu\right)_{n \geq 1}$ converge vers $\int_E |f| d\mu$ des sorte que, pourvu que n soit assez grand, on aura

$$\int_{E \setminus \{|f| \geq \frac{1}{n}\}} |f| d\mu = \int_E |f| d\mu - \int_{\{|f| \geq \frac{1}{n}\}} |f| d\mu < \epsilon.$$

d) Soit $\epsilon > 0$.

D'après 3) c), on peut trouver $B_0 \in \mathbb{B}$ tel que

$$\mu(B_0) < +\infty \qquad \text{et} \qquad \int_{E \setminus B_0} |f| d\mu < \frac{\epsilon}{6}.$$

D'après 3) b), on peut trouver un réel N_1 tel que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq N_1), \int_{E \setminus B_0} |f_n - f| d\mu < 2\frac{\epsilon}{6} = \frac{\epsilon}{3}. \qquad (*)$$

D'après l'exercice 3, on peut trouver un $\delta > 0$ tel que :

$$(\forall B \in \mathbb{B}, \mu(B) < \delta), \int_B |f| d\mu < \frac{\epsilon}{6}.$$

D'après 3) a), on peut trouver un $C \in \mathbb{B}$ tel que $C \subset B_0$, $\mu(B_0 \setminus C) < \delta$ et $(f_n 1_C)_{n \geq 1}$ converge en moyenne vers $f 1_C$. On peut donc trouver un réel N_2 pour lequel :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq N_2), \int_C |f_n - f| d\mu < \frac{\epsilon}{3}. \qquad (**)$$

Mais par ailleurs, puisque $\mu(B_0 \setminus C) < \delta$, on a $\int_{B_0\setminus C} |f|d\mu < \frac{\epsilon}{6}$ et, par conséquent, d'après 3) b), on peut trouver un réel N_3 tel que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq N_3), \int_{B_0\setminus C} |f_n - f|d\mu < 2\frac{\epsilon}{6} = \frac{\epsilon}{3}. \qquad (***)$$

Finalement, pour tout $n \geq \sup(N_1, N_2, N_3)$, on obtient par $(*)$, $(**)$ et $(***)$:

$$\int_E |f_n - f|d\mu = \int_{E\setminus B_0} |f_n - f|d\mu + \int_{B_0\setminus C} |f_n - f|d\mu + \int_C |f_n - f|d\mu < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,$$

et la convergence en moyenne de $(f_n)_{n\geq 1}$ vers f est démontrée.□

Exercice 7. *On considère un espace mesuré $(E, \mathbb{B}, \mu)$ où $0 < \mu(E) < +\infty$, et une focntion $f \in \mathcal{L}^1$. On suppose qu'il existe $\epsilon \in]0,1[$ tel que $f(x) \geq \epsilon$ pour tout $x \in E$.*

1) Montrer que $\ln f \in \mathcal{L}^1$, et que $f^\alpha \in \mathcal{L}^1$ pour tout $\alpha \in [0,1]$.

2) Soit F la fonction définie sur $[0,1]$ par $F(\alpha) = \int_E f^\alpha d\mu$.

a) Montrer que F est dérivable sur $[0, \frac{1}{2}[$.

b) En déduire $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E f^\alpha d\mu\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Solution : 1) Les fonctions $\ln f$ et f^α sont mesurables par composition de fonctions mesurables.

L'inégalité $|\ln t| \leq \sup(-\ln\epsilon, t)$ valable pour tout $t \geq \epsilon$, montre que $|\ln f| \leq \sup(-\ln\epsilon, f)$. Mais la fonction f est intégrable par hypothèse, de même que la fonction constante égale) $-\ln\epsilon$ puisque la mesure μ est finie. Alors $\ln f$ est intégrable.

De façon semblable, l'intégralité de f^α résulte des inégalités valables pour tout $t > 0$ et pour $\alpha \in [0,1]$: $0 \leq t^\alpha \leq \sup(1,t)$.

2) a) Il suffit de vérifier que les hypothèses du corollaire (dérivation d'une intégrale par rapport à un paramètre) sont bien réalisées sur $I = [0, \frac{1}{2}[$. La condition a) est évidente. La condition b) résulte de 1). Pour vérifier la condition c) on utilise les inégalités

$$|\ln f| \leq (-\ln\epsilon)1_{\{f\leq 1\}} + \sqrt{f}1_{\{f>1\}} \qquad \text{et} \qquad f^\alpha \leq 1_{\{f\leq 1\}} + \sqrt{f}1_{\{f>1\}}$$

desquelles on déduit, pour tout $\alpha \in [0, \frac{1}{2}[$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f^\alpha}{\partial\alpha}(.,\alpha)\right| &= |(\ln f)f^\alpha| \leq \left((-\ln\epsilon)1_{\{f\leq 1\}} + \sqrt{f}1_{\{f>1\}}\right)\left(1_{\{f\leq 1\}} + \sqrt{f}1_{\{f>1\}}\right) \\ &= (-\ln\epsilon)1_{\{f\leq 1\}} + f1_{\{f>1\}} \leq (-\ln\epsilon)1_E + f,\end{aligned}$$

où la fonction $(-\ln\epsilon)1_E + f$ est intégrable est indépendante de $\alpha \in [0, \frac{1}{2}[$.

b) De a) il résulte en particulier que F est dérivable en 0, des sorte que, lorsque $\lambda > 0$ tend vers 0, et d'après la formule de dérivation sous le signe intégrale, on a le développement limité

$$F(\lambda) = F(0) + \lambda F'(0) + o(\lambda) = \mu(E) + \lambda \int_E \ln f d\mu + o(\lambda).$$

On en déduit, pour tout $\alpha \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
\ln\left(\left(\frac{1}{\mu(E)}\int_E f^\alpha d\mu\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) &= \frac{1}{\alpha}\ln\left(\frac{1}{\mu(E)}F(\alpha)\right)\\
&= \frac{1}{\alpha}\ln\left(1 + \frac{\alpha}{\mu(E)}\int_E f d\mu + o(\alpha)\right)\\
&= \frac{1}{\mu(E)}\int_E \ln f d\mu + o(1),
\end{aligned}$$

et finalement

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\frac{1}{\mu(E)}\int_E f^\alpha d\mu\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \exp\left(\frac{1}{\mu(E)}\int_E \ln f d\mu\right).\square$$

Exercice 8. *Pour $p, q \in \mathbb{N}^*$, démontrer que*

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q}{(p+2q)(p+(2n+1)q)}.$$

Solution : Pour $x \in [0,1]$: $\dfrac{1}{1-x^{2q}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{2nq}$, d'où 'lon déduit

$$f(x) = \frac{x^{p-1}}{1+x^q} = (1-x^q)\sum_{n=0}^{\infty} x^{p-1+2nq} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x),$$

et si les fonctions f et f_n introduites ci-dessus sont considérées sur $[0,1]$,la série des f_n converge vers f λ-presque partout sur $[0,1]$ (pas en 1). De plus, ces fonctions sont continues donc Riemann-intégrables sur $[0,1]$ et par conséquent Lebesgue-intégrables (et avec les mêmes intégrales que dans la théorie de Riemman). Enfin, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$0 \leq \sum_{n=0}^{k} f_n(x) \leq f(x) \qquad \text{avec} \qquad f \in \mathcal{L}^1.$$

Le théorème de Lebesgue de la convergence dominé conduit alors à l'égalité

$$\begin{aligned}
\int_E f(x)dx &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 (1-x^p)x^{p-1+2nq}dx\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{p+2nq} - \frac{1}{p+(2n+1)q}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q}{(p+2nq)(p+(2n+1)q)}.
\end{aligned}$$

$\square$

Exercice 9. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2} 1_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}(x).$$

1) Justifier la Lebesgue-mesurabilité de f.

2) Montrer que f est Lebesgue-intégrable et calculer son intégrale.

Solution : 1) La fonction f est Lebesgue-mesurable (elle est même borélienne) car elle coïncide λ-presque partout avec la focntion continue, donc Lebesgue-mesurable, $g : x \mapsto \dfrac{\sin x}{1+x^2}$.

2) Comme $f = g$ λ-presque partout, la λ-intégrabilité de f est acquise si g est elle-même ιa-intégrable. Or c'est bien le cas car g, étant continue, est localement Riemann-intégrable,et de plus, chacun des intégrales

$$\int_{-\infty}^{0} g(x)dx \qquad \text{et} \qquad \int_{0}^{+\infty} g(x)dx$$

sont absoluement convergente puisque $\left|\dfrac{\sin x}{1+x^2}\right| \frac{1}{1+x^2}$. Donc $g1_{]-\infty,0]}$ et $g1_{[0,+\infty[}$ de même par conséquent g et on a

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx. \square$$

Exercice 10. *Soit $\mathbb{C}_b(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues et bornées. Soit $f \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R})$.*

1) Jusitifer les inclusions $\mathbb{K}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{C}_b(\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^\infty(\lambda)$.

2) Montrer que $N_\infty(f - 1_{[0,+\infty[}) = ||f - 1_{[0,+\infty[}||_\infty$.

3) En déduire que $\mathbb{C}_b(\mathbb{R})$ -et par conséquent $\mathbb{K}(\mathbb{R})$- n'est pas dense dans $(\mathcal{L}^\infty(\lambda), N_\infty)$.

Solution : 1) La première inclusion provient de ce qu'une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à support compact est bornée sur $\mathbb{R}$. La seconde utilise qu'une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}$ est borélienne, donc Lebesgue-mesurable, et qu'une fonction bornée et λ-essentiellement bornée.

2) Il est clair que la fonction $1_{[0,+\infty[}$, Lebesgue-mesurable et bornée, est dans $\mathcal{L}^\infty(\lambda)$ et on a

$$N_\infty(f - 1_{[0,+\infty[}) \leq ||f - 1_{[0,+\infty[}||_\infty.$$

Notons M ce dernier nombre et prenons un$\epsilon > 0$. Il existe un $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x_0) - 1_{[0,+\infty[}(x_0)| > M - \epsilon$ et, comme la fonction $|f - 1_{[0,+\infty[}|$ est continue à droite sur $\mathbb{R}$, il existe un $\eta > 0$ tel que $|f(x) - 1_{[0,+\infty[}(x)| > M - \epsilon$ pour tout $x \in [x_0, x_0 + \eta[$. Mais puisque $\lambda([x_0, x_0 + \eta[) = \eta > 0$, ceci prouve que $N_\infty(f - 1_{[0,+\infty[}) > M - \epsilon$, et l'égalité désirée en résulte.

3) Si $\mathbb{C}_b(\mathbb{R})$ était dense dans $(\mathcal{L}^\infty(\lambda), N_\infty)$, il existerait en particulier une fonction $f \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R})$ telle que $||f - 1_{[0,+\infty[}||_\infty < \dfrac{1}{2}$. Or ceci est impossible. En effet, cette inégalité impose $|f(0) - 1| < \dfrac{1}{2}$, d'où l'on déduit $f(0) > \dfrac{1}{2}$; mais par continuité de f, il existe alors un $x < 0$ pour lequel on a aussi $f(x) > \dfrac{1}{2}$ et, par conséquent, $|f(x) - 1_{[0,+\infty[}(x)| = |f(x)| > \dfrac{1}{2}$, contrairement à la propriété supposée pour f. Ainsi $\mathbb{C}_b(\mathbb{R})$ n'est pas dense dans $(\mathcal{L}^\infty(\lambda), N_\infty)$ et, a fortiori, $\mathbb{K}(\mathbb{R})$ ne l'est pas non plus.$\square$

Exercice 11. *Les fonctions suivantes appartiennent-elles à l'espace* $\mathcal{L}^p(]0, +\infty[, \mathbb{B}_{]0,+\infty[}, \lambda)$ *lorsque* p *décrit l'intervalle* $[1, +\infty]$.
(*i*) $f_1(t) = e^{-t}$; (*ii*) $f_2(t) = \frac{1}{\sqrt{t}(1+|\ln(t)|)}$.

Solution : *i*) Il est clair que $\sup\{f_1(t), t > 0\} = 1$; et donc$N_\infty(f_1) \leq 1$ (en fait il y a égalité) et f_1 appartient à l'espace $\mathcal{L}^\infty$.

Supposons maintenant que $1 \leq p < +\infty$; la fonction f_1 étant continue sur $\mathbb{R}_+$, il suffit de montrer, d'après le théorème 9.3 du chapitre 4, la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_1(t)|^p dt$. Le problème de convergence ne se pose qu'en $+\infty$. Or nous avons, pour $x > 0$,

$$\int_0^x e^{-pt} dt = \left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^x = \frac{1}{p}(1 - e^{-px});$$

en faisant tendre x vers $+\infty$, nous obtenons $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_1(t)|^p dt = \frac{1}{p}$ et la fonction f_1 appartient à $\mathcal{L}^p$.

ii) En 0^+, nous avons $f_2 \sim \dfrac{-1}{\sqrt{t}\ln(t)}$; donc $\displaystyle\lim_{t \longrightarrow 0^+} f_2(t) = +\infty$. Montrons alors que $N_\infty(f_2) = +\infty$ pour cela, il suffit de vérifier que l'ensemble $\{\alpha \in \mathbb{R}, |f_2| \leq \alpha \quad \text{presque partout}\}$ est vide. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f_2 \leq \alpha$ presque partout. Par définition de la limite, il existe un $\eta > 0$ tel que $f_2 \geq \alpha + 1$ sur $]0, \eta[$. Comme la mesure de Borel de l'intervalle$]0, \eta[$ est strictement positive, on conclut qu'il y a une contradiction.

Soit $1 \leq p < +\infty$; la fonction f_2 étant continue sur $]0, +\infty[$, il suffit de montrer d'après le théorème 9.3 du chapitre 4, la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_2(t)| dt$. Les problèmes de convergence se posent en 0^+ et en $+\infty$. Nous allons discuter suivant les différentes valeurs de p.

Cas 1 : $1 \leq p < 2$. Comme $\dfrac{p}{2} < 1$, nous pouvons choisir une constante a telle que $\dfrac{p}{2} < a < 1$. Alors comme $\displaystyle\lim_{t \longrightarrow +\infty} t^{\frac{p}{2} - a}(1 + |\ln t|)^p = 0$, nous avons, pour t assez grand, $t^{\frac{p}{2}-a}(1+|\ln t|)^p \leq 1$, ce que l'on peut écrire $\frac{1}{t^a} \leq |f_2(t)|^p$. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^a} dt$ n'étant pas convergente, on déduit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} |f_2(t)|^p dt$ n'est pas convergente. Donc, la fonction f_2 n'appartient pas à $\mathcal{L}^\infty$.

Cas 2 : $2 < p < +\infty$. Comme $\frac{p}{2} > 1$, nous pouvons choisir une constante a telle que $\frac{p}{2} > a > 1$. Alors comme $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} t^{\frac{p}{2}-a}(1+|\ln t|)^p = 0$, nous avons, pour t assez grand, $t^{\frac{p}{2}-a}(1+|\ln t|)^p \leq 1$, ce que l'on peut écrire $\frac{1}{t^a} \leq |f_2(t)|^p$. L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^a} dt$ n'étant pas convergente, on déduit que l'intégrale $\int_0^1 |f_2(t)|^p dt$ n'est pas convergente. Donc, la fonction f_2 n'appartient pas à $\mathcal{L}^\infty$.

Cas 3 : $p = 2$. En faisant le changement de variable $u = \ln t$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t(1+|\ln t|)^2} dt$ est de même nature que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+|u|)^2} du$ et cette dernière est evidemment une intégrale convergente. Donc, la fonction f_2 appartient à $\mathcal{L}^2$.$\square$

Exercice 12. *Soit $(E, \mathbb{B}, \mu)$ un espace mesuré fini. Montrer que, si p et q sont deux réels de $[1, +\infty[$ avec $p < q$, alors $\mathcal{L}^\infty \subset \mathcal{L}^q \subset \mathcal{L}^p \subset \mathcal{L}^1$. Montrer par un exemple que l'hypothèse $\mu(E) < +\infty$ est nécessaire.*

Toujours avec des exemples, montrer qu'en général $\bigcap\limits_{p \in [1,+\infty[} \mathcal{L}^p \neq \mathcal{L}^\infty$ et que $\bigcup\limits_{p \in [1,+\infty[} \mathcal{L}^p \neq \mathcal{L}^1$.

Solution : Soit $f \in \mathcal{L}^q$. On peut écrire $|f|^p$ sous la forme

$$|f|^p = |f|^p 1_{\{|f| \geq 1\}} + |f|^p 1_{\{|f| < 1\}} \leq |f|^p 1_{\{|f| \geq 1\}} + 1,$$

ce qui donne, en remarquant que, si $p < q$, on a $|f|^p \leq |f|^q$ sur $\{|f| \geq 1\}$:

$$\begin{aligned}
\int_E |f|^p d\mu &\leq \int_E |f|^p 1_{\{|f| \geq 1\}} d\mu + \int_E d\mu \leq \int_E |f|^q 1_{\{|f| \geq 1\}} d\mu + \mu(E) \\
&\leq \int_E |f|^q d\mu + \mu(E) < +\infty
\end{aligned}$$

donc $f \in \mathcal{L}^p$.

On se place dans $(\mathbb{R}, \mathbb{B}_{\mathbb{R}}, \beta)$ et considérons la fonction $l_p(x) = \big(x(1+\ln^2 x)\big)^{-\frac{1}{p}} 1_{]1,+\infty[}(x)$ pour $p \in]1, +\infty[$. Au voisinage de $+\infty$, $\big(x(1+\ln^2 x)\big)^{-\frac{q}{p}} \sim (x \ln^2 x)^{-\frac{q}{p}}$ et l'intégrale de Bertrand $\int_1^{+\infty} (x \ln^2 x)^{-\frac{q}{p}} dx$ converge pour $\frac{q}{p} \geq 1$ et donc $l_p \in \mathcal{L}^q$ pour $q \geq p$ et par suite $l_p \in \mathcal{L}^p$ et $l_p \notin \mathcal{L}^1$.

Sur $(\mathbb{R}, \mathbb{B}_{\mathbb{R}})$ considérons la mesure μ de densité $e^{-x}1_{[0,+\infty[}(x)$ par rapport à la mesure de Borel β. On a $\mu(\mathbb{R}) = 1 < +\infty$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ n'est pas dans $\mathcal{L}^\infty$. Cependant $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu = \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx < +\infty$ (on a utilisé la densité de la mesure μ et l'égalité de l'intégrale de Lebesgue avec l'intégrale de Riemman impropre pour les fonctions continues positives). Ainsi $f \in \displaystyle\bigcap_{p\in[1,+\infty[} \mathcal{L}^p$ et $f \notin \mathcal{L}^\infty$.

Sur $(]0,1[, \mathbb{B}_{]0,1[}, \lambda)$, on a $\lambda(]0,1[) = 1$. Considérons la fonction définie sur $]0,1[$ par $h(x) = \dfrac{1}{x(1+\ln^2 x)}$ et faisons le changement de variable $y = \dfrac{1}{x}$ dans l'intégrale

$$\int_{]0,1[} |h|^p d\lambda = \int_0^1 \frac{1}{(x(1+\ln^2 x))^p} dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{y^{2-p}\ln^{2p} y} dy.$$

(On a encore utilisé la relation entre l'intégrale de Lebesgue et de Riemann pour les fonctions continues positives). La dernière intégrale converge pour $p = 1$ mais diverge pour $p > 1$, donc $h \in \mathcal{L}^1$ mais $f \notin \displaystyle\bigcup_{p\in]1,+\infty[} \mathcal{L}^p$.$\square$

Chapitre 5

Mesures produit

5.1 Produit de tribus

Le premier objet de ce chapitre est d'associer de façon naturelle, à deux espaces mesurés donnés $(E_i, \mathcal{B}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$, un espace mesuré sur le produit $E_1 \times E_2$. La mesure de ce nouvel espace mesuré devra donc être définie sur une tribu sur $E_1 \times E_2$ qui sera directement liée aux tribus $\mathcal{B}_i$, $i = 1, 2$, et que nous allons d'abord définir. Pour cela, nous utiliserons la notation suivante.

Notation. Considérons un ensemble E_i et $\mathcal{E}_i \subset \mathcal{P}(E_i)$, $i = 1, 2$. On pose

$$\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 = \{A_1 \times A_2; A_i \in \mathcal{E}_i, i = 1, 2\} \subset \mathcal{P}(E_1 \times E_2).$$

Si $(E_i, \mathcal{B}_i)$, $i = 1, 2$ sont deux espaces mesurables, l'ensemble $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ de parties de $E_1 \times E_2$ serait tout désigné pour être la tribu cherchée, naturellement associée aux tribus $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$, si toutefois il s'agissait d'une tribu sur $E_1 \times E_2$, ce qui n'est pas le cas en général.□

Définition 28 *Considérons deux espaces mesurables $(E_i, \mathcal{B}_i)$, $i = 1, 2$. On appelle tribu produit des tribus $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ la tribu sur $E_1 \times E_2$ engendrée par $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2$ et notée $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$:*

$$\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 = \tau_{E_1 \times E_2}(\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2).$$

L'espace mesurable $(E_1 \times E_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$ est l'espace mesurable produit des espaces mesurables $(E_i, \mathcal{B}_i)$, $i = 1, 2$.

Remarques. 1) Cette définition se généralise aussitôt au cas du produit d'un nombre fini quelconque de tribus.

2) Les projections $\pi_i : E_1 \times E_2 \longrightarrow E_i$ sont $(\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2), \mathcal{B}_i)$-mesurables puisuqe, pour chaque $B_i \in \mathcal{B}_i$, on a :

$$\{\pi_i \in B_i\} = [B_1 \times E_2 \quad \text{ou} \quad E_1 \times B_2] \in \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2) \subset \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2).$$

Théorème 39 *Considérons un espace mesurable $(E_i, \mathcal{B}_i)$, et $\mathcal{E}_i \subset \mathcal{B}_i$ vérifiant :*

a) $\mathcal{B}_i = \tau_{E_i}(\mathcal{E}_i)$,

b) il existe une suite $(A_{i,n})_{n\geq 1}$ de $\mathcal{E}_i$ vérifiant $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{i,n}\right) = E_i$, tout ce qui précède étant réalisé pour $i = 1, 2$.

Alors : $\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2) = \tau_{E_1\times E_2}(\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2)$.

Preuve : Posons $\mathcal{A} = \tau_{E_1\times E_2}(\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2)$.

L'inclusion $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$ résulte de $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2) \subset \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2)$ et de la monotonie de la génération des tribus.

Pour établir l'inclusion inverse, posons

$$\mathcal{B}_1^* = \{B_1, B_1 \subset E_1, \{B_1\} \times \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{A}\}.$$

De l'inclusion $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{A}$ on déduit que $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{B}_1^*$. D'autre part, $\mathcal{B}_1^*$ est une tribu sur E_1 :

$(T1)$ Comme $\mathcal{A}$ est une tribu, $\emptyset \in \mathcal{A}$ et il en résulte $\{\emptyset\} \times \mathcal{E}_2 = \{\emptyset\} \subset \mathcal{A}$, c'est-à-dire $\emptyset \in \mathcal{B}_1^*$.

$(T2)$ Soit $B_1 \in \mathcal{B}_1^*$. Alors d'après b) :

$$B_1 \times E_2 = B_1 \times \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{2,n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_1 \times A_{2,n}) \in \mathcal{A}.$$

Par ailleurs, toujours d'après b), pour tout $A_1 \in \mathcal{E}_2$:

$$E_1 \times A_2 = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1,n}\right) \times A_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_{1,n} \times A_2) \in \mathcal{A}.$$

Il en résulte :

$$\begin{aligned}(E_1 \setminus B_1) \times A_2 &= ((E_1 \setminus B_1) \times E_2) \cap (E_1 \times A_2) \\ &= ((E_1 \times E_2) \setminus (B_1 \times E_2)) \cap (E_1 \times A_2) \in \mathcal{A},\end{aligned}$$

ce qui prouve que $E_1 \setminus B_1 \in \mathcal{B}_1^*$.

$(T3)$ Si $(B_{1,n})_{n\geq 1}$ est une suite de $\mathcal{B}_1^*$, tout $A_2 \in \mathcal{E}_2$ vérifie

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{1,n}\right) \times A_2 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_{1,n} \times A_2) \in \mathcal{A},$$

de sorte que $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{1,n} \in \mathcal{B}_1^*$.

Alors, d'après a) : $\mathcal{B}_1 = \tau_{E_1}(\mathcal{E}_1) \subset \mathcal{B}_1^*$, c'est-à-dire $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{A}$.

Finalement, à l'aide des hypothèses a) et b), nous avons obtenu :

$$\mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{A} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B}_\infty \times \mathcal{E}_\in \subset \mathcal{A}.$$

Remarquons, d'une part, que nous aurions prouvé aussi bien l'inclusion $\mathcal{E}_1 \times \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{A}$ (en échangeant les rôles joués par les indices 1 et 2 dans la démonstration précédente) et, d'autre part, que les hypothèses a) et b) sont telles qu'elles restent a fortiori valables si l'on substitue $\mathcal{B}_i$ à $\mathcal{E}_i$. Dans ces conditions nous pouvons répéter la démonstration qui conduit à la dernière inclusion ci-dessus, mais cette fois à partir de $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{E}_2 \subset \mathcal{A}$ et pour obtenir $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{A}$. Enfin, comme $\mathcal{A}$ est une tribu, il en résultera

$$\mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2 = \tau_{E_1 \times E_2}(\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2) \subset \mathcal{A}.$$

□

Nous allons maintenant nous intéresser au cas où chacun des ensembles E_1 et E_2 serait muni d'une topologie et où l'on souhaiterait définir sur $E_1 \times E_2$ une tribu associée de façon naturelle à ces topologies. Nous avons le choix entre deux méthodes :

- ou bien nous munissons $E_1 \times E_2$ de la topologie produit et nous considérons la tribu borélienne correspondante,

- ou bien nous commençons par prendre les tribus boréliennes sur E_1 et E_2 auxquelles nous associons leur tribu produit sur $E_1 \times E_2$.

La question inévitable est évidemment celle de savoir si les deux tribus ainsi obtenues coïncident. Nous commençons par quelques rappels de topologie.

Etant donné un espace topologique $(E, \mathcal{O})$, on appelle base pour sa topologie tout ensemble $\mathcal{O}^*$ d'ouverts engendrant la topologie de $\mathcal{O}$ en ce sens que tout ouvert $U \in \mathcal{O}$ soit réunion d'ouverts appartenant à $\mathcal{O}^*$. L'ensemble des intervalles ouverts (bornés ou non) et celui des intervalles ouverts non vide bornés à bornes rationnelles sont deux exemples de bases pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$. Notons que cette dernière base est dénombrable puisque'elle correspond bijectivement à l'ensemble dénombrable $\{(r, s) \in \mathbb{Q}^2, r < s\}$.

Si $(E_1, \mathcal{O}_1$ et $(E_2, \mathcal{O}_2$ sont deux espaces topologiques, un autre exemple de base de topologie est celui de l'ensemble $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ des ouverts élémentaires qui constitue,par définition, une base pour la topologie produit $\mathcal{O}_1 \otimes \mathcal{O}_2$ sur $E_1 \times E_2$.

Lemme 10 *Soit $(E_1, \mathcal{O}_i$ un espace topologique à base dénombrable $\mathcal{O}_i^*$, $i = 1, 2$. Alors $\mathcal{O}_1^* \times \mathcal{O}_2^*$ est une base dénombrable pour la topologie produit $\mathcal{O}_1 \otimes \mathcal{O}_2$.*

Preuve : Que $\mathcal{O}_1^* \times \mathcal{O}_2^*$ soit dénombrable quand $\mathcal{O}_1^*$ et $\mathcal{O}_2^*$ le sont résulte de la surjection naturelle du produit cartésien de $\mathcal{O}_1^*$ et $\mathcal{O}_2^*$ sur $\mathcal{O}_1^* \times \mathcal{O}_2^*$.

D'autre part, si $U \in \mathcal{O}_1 \otimes \mathcal{O}_2$, par définition de la topologie produit, il existe des ouverts $U_{1,i} \times U_{2,i} \in \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$, $i \in I$, tels que $U = \bigcup_{i \in I}(U_{1,i} \times U_{2,i})$.

Puis, par définition d'une base de topologie, pour chaque $i \in I$ on peut trouver des $U^*_{1,i,j} \in \mathcal{O}^*_1$, $j \in J$, et des $U^*_{2,i,k} \in \mathcal{O}^*_2$, $k \in K$, tels que

$$U_{1,i} = \bigcup_{j\in J} U^*_{1,i,j} \quad \text{et} \quad U_{2,i} = \bigcup_{k\in K} U^*_{2,i,k}.$$

Il reste à vérifier l'égalité

$$\bigcup_{i\in I}\left(\left(\bigcup_{j\in J} U^*_{1,i,j}\right) \times \left(\bigcup_{k\in K} U^*_{2,i,k}\right)\right) = \bigcup_{i\in I}\ \bigcup_{(i,j)\in J\times K} (U^*_{1,i,j} \times U^*_{2,i,k})$$

pour conclure que U s'écrit bien comme une réunion d'ouverts appartenant à $\mathcal{O}^*_1 \times \mathcal{O}^*_2$.□

Lemme 11 *Soit $(E,\mathcal{O})$ un espace topologique à base dénombrable $\mathcal{O}^*$. Alors :*

$$\mathcal{B}_E = \tau_E(\mathcal{O}^*).$$

Preuve : Comme $\mathcal{O}^*$ est une base dénombrable, tout ouvert est la réunion d'une suite d'ouverts appartenant à $\mathcal{O}^*$, si bien que $\mathcal{O}^* \subset \mathcal{O} \subset \tau_E(\mathcal{O}^*)$. Par suite $\tau_E(\mathcal{O}^*) \subset \tau_E(\mathcal{O}) \subset \tau_E(\mathcal{O}^*)$, c'est-à-dire que $\mathcal{B}_E = \tau_E(\mathcal{O}) = \tau_E(\mathcal{O}^*)$.□

Théorème 40 *Pour $i = 1,2$, considérons deux espaces topologiques $(E_i, \mathcal{O}_i)$ et sa tribu borélienne $\mathcal{B}_{E_i}$, puis la tribu borélienne $\mathcal{B}_{E_1\times E_2}$ de l'espace topologique produit $(E_1 \times E_2, \mathcal{O}_1 \otimes \mathcal{O}_2)$. Alors :*

1) $\mathcal{B}_{E_1} \otimes \mathcal{B}_{E_2} \subset \mathcal{B}_{E_1\times E_2}$;

2) Si chacun des espaces topologiques $(E_i, \mathcal{O}_i)$ est à base dénombrable :

$$\mathcal{B}_{E_1} \otimes \mathcal{B}_{E_2} = \mathcal{B}_{E_1\times E_2}.$$

Preuve : 1) D'une part, des inclusions $\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2) \subset \mathcal{O}_1 \otimes \mathcal{O}_2) \subset \mathcal{B}_{E_1\times E_2}$ résulte $\tau_{E_1\times E_2}(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2)) \subset \mathcal{B}_{E_1\times E_2}$. D'autre part, puisque $\mathcal{B}_{E_i} = \tau_{E_i}(\mathcal{O}_i)$, et les hypothèses du Théorème 1.1 étant facilement réalisées, il vient $\mathcal{B}_{E_1} \otimes \mathcal{B}_{E_2} = \tau_{E_1\times E_2}(\mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2))$.

2) Si $\mathcal{O}^*_i$ est une base dénombrable pour $\mathcal{O}_i$, $i = 1,2$, en utilisant successivement les Lemmes 1.1 et 1.2, et le Théorème 1.1 et à nouveau le Lemme 1.2, on obtient :

$$\mathcal{B}_{E_1\times E_2} = \tau_{E_1\times E_2}(\mathcal{O}^*_1 \times \mathcal{O}^*_2)) = \tau_{E_1}(\mathcal{O}^*_1) \otimes \tau_{E_2}(\mathcal{O}^*_2) = \mathcal{B}_{E_1} \otimes \mathcal{B}_{E_2}.$$

□

Comme nous avons remarqué plus haut que la topologie usuelle de $\mathbb{R}$ possède une base dénombrable, la conséquence suivante est immédiate :

Corollaire 32

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}.$$

Remarques. 1) Le Théorème 1.2 se généralise aussitôt au cas d'un produit fini quelconque d'espaces topologiques. En particulier, et avec une notation évidente : $\otimes^n \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ pour tout $n \geq 2$.

2) De ce corollaire et du Théorème 1.1 on déduit que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \tau_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{I}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{I}_{\mathbb{R}})$, ce qui est le résultat annoncé à la démonstration du Théorème 6.1 chapitre 4 où $\mathcal{I}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{I}_{\mathbb{R}}$) était noté $\mathcal{I}_{\mathbb{R}^2}$.□

5.2 Un théorème d'unicité pour les mesures

Deux mesures étant définies sur une mm̂e tribu et prenant les mêmes valeurs en certains éléments de la tribu, nous allons énoncer plus loin des conditions suffisantes pour que ces mesures coïncident partout sur la tribu.

La démonstration de ce résultat s'appuiera sur une nouvelle structure ensembliste dont nous examinerons les liens avec la notion de tribu.

Définition 29 *a) Soit E un ensemble et soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(E)$. On dit que $\mathcal{D}$ est une classe de Dynkin sur E si :*

$(D1)$ $E \in \mathcal{D}$;

$(D2)$ $(C, D \in \mathcal{D}, C \subset D) \Rightarrow D \setminus \in \mathcal{D}$;

$(D3)$ $(D_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{D}$ disjointe $\Rightarrow \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{D}$.

b) Tout ensemble $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(E)$ est contenu dans une plus petite classe de Dynkin sur E appelée classe de Dynkin sur E engendrée par $\mathcal{E}$ et notée $\delta_E(\mathbb{E})$.

Remarque. 1) Toute tribu sur E est une classe de Dynkin sur E (la réciproque est fausse). Il en résulte que pour tout $\mathbb{E} \subset \mathcal{P}(E)$: $\delta_E(\mathbb{E}) \subset \tau_E(\mathbb{E})$.□

Théorème 41 *Une classe de Dynkin sur E est une tribu sur E si et seulement si elle est stable par intersections finies.*

Preuve : La condition indiquée est évidemment nécessaire (propriété $(T5)$ des tribus).

Pour la réciproque, on voit facilement que $(D1)$ et $(D2) \Rightarrow (T1)$ (écrire $\emptyset = E \setminus E$), tandis que $(D1)$ et $(D2) \Rightarrow (T2)$ est trivial. Il reste dons à prouver $(T3)$.

D'abord, si la suite $(D_n)_{n\geq 1}$ est telle que $D_1 = C$, $D_2 = D$ et $D_n = \emptyset$ pour $n \geq 3$, et si $\mathcal{D}$ est une classe de Dynkin, on obtient par $(D3)$:

$$(C, D \in \mathcal{D}, C \cap D = \emptyset) \quad \Rightarrow \quad C \cup D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{D}. \tag{$*$}$$

Alors, $\mathcal{D}$ étant supposée stable par intersections finies, de $(*)$ et de $(D2)$ on déduit :

$$\forall C, D \in \mathcal{D},\ C \cup D = (C \setminus (C \cap D)) \cup D \in \mathcal{D}. \tag{$**$}$$

Considérons maintenant une suite $(D_n)_{n\geq 1}$ quelconque de $\mathcal{D}$ et posons :

$$E_n = \bigcup_{k=1}^{n} D_k \quad \text{et} \quad F_n = E_{n+1} \setminus E_n \text{ pour tout } n \geq 1, \quad \text{et} \quad F_0 = D_1.$$

D'après $(**)$ $(E_n)_{n\geq 1}$ est une suite de $\mathcal{D}$ et cette suite est croissante. Il résulte alors de (D_2) que $(F_n)_{n\geq 1}$ est une suite de $\mathcal{D}$, évidemment disjointe et on obtient par $(D3)$:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n \in \mathcal{D}.$$

□

Théorème 42 *Considérons un ensemble E et $\mathbb{E} \subset \mathcal{P}(E)$. Alors, si $\mathbb{E}$ est stable par intersections finies, on a $\delta_E(\mathbb{E}) = \tau_E(\mathbb{E})$.*

Preuve : Nous savons déjà que l'inclusion $\delta_E(\mathbb{E}) \subset \tau_E(\mathbb{E})$ a lieu quelque soit $\mathbb{E}$. L'égalité sera donc acquise dès que que nous aurons établi que $\delta_E(\mathbb{E})$ est une tribu sur E. mais d'après le Théorème 2.1, pour obtenir cela il suffit de prouver que la satablité de $\mathbb{E}$ par intersections finies entraîne la même propriété pour $\delta_E(\mathbb{E})$.

Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux parties de $\mathcal{P}(E)$, posons de façon générale $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{F \cap G; F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{G}\}$. Ainsi par hypothèse, on a $\mathbb{E} \cap \mathbb{E} \subset \mathbb{E} \subset \delta_E(\mathbb{E})$, et il en résulte $\mathbb{E} \subset \mathcal{H}$ si l'on a posé $\mathcal{H} = \{X; X \subset E, \{X\} \cap \mathbb{E} \subset \delta_E(\mathbb{E})\}$. Comme, par ailleurs, on vérifie facilement que $\mathcal{H}$ est une classe de Dynkin sur E, on obtient $\delta_E(\mathbb{E}) \subset \mathcal{H}$, ce qui équivaut à $\delta_E(\mathbb{E}) \cap \mathbb{E} \subset \delta_E(\mathbb{E})$. Mais, cette première étape étant franchie, à partir de là et par un argument similaire au précédent, on peut aller plus loin et prouver $\delta_E(\mathbb{E}) \cap \delta_E(\mathbb{E}) \subset \delta_E(\mathbb{E})$, ce qui signifie que $\delta_E(\mathbb{E})$ est stable par intersections finies.□

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le résultat annoncé sur la coïncidence de deux mesures.

Théorème 43 (Théorème d'unicité pour les mesures) *Considérons un espace mesurable $(E, \mathbb{B})$ et $\mathbb{E} \subset \mathcal{P}(E)$ vérifiant :*

α) $\mathbb{E}$ est stable par intersections finies,

β) $\tau_E(\mathbb{E}) = \mathbb{B}$.

Si μ et ν sont deux mesures sur $\mathbb{B}$ telles que

γ) $\forall A \in \mathbb{E}$, $\mu(A) = \nu(A)$,

δ) il existe une suite croissante $(A_n)_{n\geq 1}$ de $\mathbb{E}$ vérifiant :

$\delta 1$) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = E$,

$\delta 2$) $\forall n \geq 1$, $\mu(A_n) = \nu(A_n) < +\infty$,

alors : $\mu = \nu$.

Preuve : Pour $A \in \mathbb{E}$ tel que $\mu(A) = \nu(A) < +\infty$ (il en existe d'après δ)), posons $\mathcal{D}_A = \{B \in \mathbb{B}, \mu(A \cap B) = \nu(A \cap B)\}$.

$\mathcal{D}_A$ est une classe de Dynkin sur E :

$(D1)$ $E \in \mathcal{D}_A$ est évident ;

$(D2)$ si $B, C \in \mathcal{D}_A$, avec $B \subset C$, en utilisant $(M4)$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\mu(A \cap (C \setminus B)) &= \mu((A \cap C) \setminus (A \cap B) = \mu(A \cap C) - \mu(A \cap B) \\
&= \nu(A \cap C) - \nu(A \cap B) = \nu((A \cap C) \setminus (A \cap B) = \nu(A \cap (C \setminus B)),
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $C \setminus B \in \mathcal{D}_A$.

$(D3)$ Si $(B_n)_{n \geq 1}$ est une suite de $\mathcal{D}_A$ disjointe, il vient d'après $(M2)$

$$\begin{aligned}
\mu\left((A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap D_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap D_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A \cap D_n) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A \cap D_n)\right) = \nu\left((A \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right),
\end{aligned}$$

si bien que $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{D}_A$.

D'autre par $\mathbb{E} \subset \mathcal{D}_A$ d'après α) et γ).

Dans ces conditions, α), β) et le Théorème 2.2 permettent d'écrire

$$\mathbb{B} = \tau_E(\mathbb{E}) = \delta_E(\mathbb{E}) \subset \mathcal{D}_A,$$

et ceci pour tout $A \in \mathbb{E}$ tel que $\mu(A) = \nu(A) < +\infty$.

Autrement dit, l'égalité $\mu(A \cap B) = \nu(A \cap B)$ est valable pour tout $B \in \mathbb{B}$ et tout $A \in \mathbb{E}$ vérifiant $\mu(A) = \nu(A) < +\infty$. Alors, en faisant intervenir une suite $(A_n)_{n \geq 1}$ de $\mathbb{E}$ telle qu'en δ), il vient d'après $(M7)$, pour tout $B \in \mathbb{B}$:

$$\begin{aligned}
\mu(B) &= \mu(E \cap B) = \mu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap B\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B)\right) = \sup_{n \geq 1} \mu(A_n \cap B) \\
&= \sup_{n \geq 1} \nu(A_n \cap B) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B)\right) = \nu\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \cap B\right) = \nu(B).
\end{aligned}$$

□

5.3 Produit de mesures

Notation. Si E_1, E_2 sont deux ensembles, $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ et $A \subset E_1 \times E_2$, on pose :

$$A(., x_2) = \{y \in E_1, (y, x_2) \in A\}, \quad A(x_1, .) = \{z \in E_2, (x_1, z) \in A\}.$$

□

Lemme 12 *On considère deux ensembles mesurables* $(E_i, \mathbb{B}_i)$, $i = 1, 2$, *et* $B \in \mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2$, *alors*

$$\forall x_2 \in E_2, B(., x_2) \in \mathbb{B}_1, \quad et \quad \forall x_1 \in E_1, B(x_1, .) \in \mathbb{B}_2.$$

Preuve : Fixons $x_2 \in E_2$. Alors $\mathcal{A} = \{A \subset E_1 \times E_2, A(., x_2) \in \mathbb{B}_1\}$ est une tribu sur $E_1 \times E_2$:

$(T1)$ $E_1 \times E_2 \in \mathcal{A}$, $(E_1 \times E_2)(., x_2) = E_1 \in \mathbb{B}_1$.

$(T2)$ Si $A \in \mathcal{A}$, $((E_1 \times E_2) \setminus A)(., x_2) = E_1 \setminus A(., x_2) \in \mathbb{B}_1$, et par suite $(E_1 \times E_2) \setminus A \in \mathcal{A}$.

$(T3)$ Si $(A_n)_{n \geq 1}$ est une suite de $\mathcal{A}$, on a $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)(., x_2) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n(., x_2) \in \mathbb{B}_1$, si bien que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

De plus, si $B_1 \in \mathbb{B}_1$ et $B_2 \in \mathbb{B}_2$:

$$(B_1 \times B_2)(., x_2) = \begin{cases} B_1 & \text{si} \quad x_2 \in B_2 \\ \emptyset & \text{si} \quad x_2 \notin B_2, \end{cases}$$

si bien que $\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2 \subset \mathcal{A}$.

Des deux propriétés établies ci-dessus on déduit

$$\mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2 = \tau_{E_1 \times E_2}(\mathbb{B}_1 \times B_2) \subset \mathcal{A},$$

ce qui est le résultat désiré. L'autre affirmation du lemme s'établit de façon analogue.

Lemme 13 *Soit* $(E_i, \mathbb{B}_i, \mu_i)$ *un espace mesurable où* μ_i *est* σ*-finie,* $i = 1, 2$.

Alors, pour tout $B \in \mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2$, *les fonctions* $f_{B,i} : E_i \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, $i = 1, 2$, *définies par*

$$\forall x_1 \in E_1,\ f_{B,1}(x_1) = \mu_2(B(x_1, .)), \quad et \quad \forall x_2 \in E_2,\ f_{B,2}(x_2) = \mu_1(B(., x_2)),$$

sont respectivement $\mathbb{B}_1$*-mesurable et* $\mathbb{B}_2$*-mesurable.*

Preuve : Remarquons que la définitions des fonctions $f_{B,i}$ est justifiée par le Lemme 3.1.

Posons $\mathcal{A} = \{A \in \mathbb{B}_1 \otimes B_2, f_{A,1}\ \mathbb{B}_1 - \text{mesurable}\}$ et supposns μ_2 finie.

• $\mathbb{B}_1 \times B_2 \subset \mathcal{A}$.

En effet, si $(B_1, B_2) \in (\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$, $f_{B_1 \times B_2, 1}$ est définie pour tout $x_1 \in E_1$ par

$$f_{B_1 \times B_2, 1}(x_1) = \mu_2((B_1 \times B_2)(x_1, .)) = \begin{cases} \mu_2(B_2) & \text{si} \quad x_1 \in B_1 \\ 0 & \text{si} \quad x_1 \notin B_1, \end{cases}$$

de sorte que $f_{B_1 \times B_2, 1} = \mu_2(B_2) 1_{B_1}$, ce qui est une fonction $\mathbb{B}_1$-mesurable.

• $\mathcal{A}$ est une classe de Dynkin sur $E_1 \times E_2$.

$(D1)$ $E_1 \times E_2 \in \mathcal{A}$ puisque, plus généralement, $\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2 \subset \mathcal{A}$.

$(D2)$ Prenons $C, D \in \mathcal{A}$, $C \subset D$. Pour tout $x_1 \in E_1$, en utilisant $(M4)$ (et ici intervient l'hypothèse $\mu_2(E_2) < +\infty$) on obtient :

$$\begin{aligned} f_{D\setminus C,1}(x_1) &= \mu_2((D \setminus C)(x_1, .)) = \mu_2(D(x_1, .) \setminus C(x_1, .)) \\ &= \mu_2(D(x_1, .)) - \mu_2(C(x_1, .)) = f_{D,1}(x_1) - f_{C,1}(x_1), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que $f_{D\setminus C,1} = f_{D,1} - f_{C,1}$, et $f_{D\setminus C,1}$ est donc $\mathbb{B}_1$-mesurable. par suite $D \setminus C \in \mathcal{A}$.

$(D3)$ Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{A}$ disjointe. Alors, pour tout $x_1 \in E_1$:

$$\begin{aligned} f_{\cup_{n\geq 1} A_n,1}(x_1) &= \mu_2\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)(x_1, .)\right) = \mu_2\left(\bigcup_{b=1}^{\infty} A_n(x_1, .)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(A_n(x_1, .)) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{A_n,1}(x_1), \end{aligned}$$

de sorte que $f_{\cup_{n\geq 1} A_n,1} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{A_n,1}$ est donc $\mathbb{B}_1$-mesurable (Corollaire 2.3 chapitre 2). Il en résulte que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

• Des deux points précédents et du Théorème 2.2 on déduit :

$$\mathcal{A} \subset \mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2 = \tau_{E_1\times E_2}(\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2) = \delta_{E_1\times E_2}(\mathbb{B}_1 \times B_2) \subset \mathcal{A},$$

si bien que $\mathcal{A} = \mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2$, ce qui établit le résultat désiré en ce qui concerne les fonctions $f_{B,1}$, pourvu que μ_2 soit finie.

Lorsque μ_2 est seulement supposée σ-finie, il existe une suite croissante $(B_{2,n})_{n\geq 1}$ de $\mathbb{B}_2$ telle que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{2,n} = E_2 \qquad \text{et} \quad \mu_2(B_{2,n}) < +\infty \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1.$$

On vérifie facilement que, pour chaque $n \geq 1$, on définit une mesure finie $\mu_{2,n}$ sur $\mathbb{B}_2$ par :

$$\forall B_2 \in \mathbb{B}_2,\ \mu_{2,n}(B_2) = \mu_2(B_2 \cap B_{2,n}).$$

Alors, par ce qui précéde, pour chaque $B \in \mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2$, la fonction $f_{B,1,n}$: $E_1 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie pour tout $x_1 \in E_1$ par $f_{B,1,n}(x_1) = \mu_{2,n}(B(x_1, .))$, est $\mathbb{B}_1$-mesurable. Mais pour tout $x_1 \in E_1$, on a

$$\begin{aligned} f_{B,1}(x_1) &= \mu_2(B(x_1, .)) = \mu_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B(x_1, .) \cap B_{2,n})\right) \\ &= \sup_{n\geq 1} \mu_2(B(x_1, .) \cap B_{2,n}) = \sup_{n\geq 1} \mu_{2,n}(B(x_1, .)) = \sup_{n\geq 1} f_{B,1,n}(x_1), \end{aligned}$$

de sorte que $f_{B,1}$ est $\mathbb{B}_1$-mesurable (Proposition 2.5 chapitre 2).

On démontre de façon analogue la $\mathbb{B}_2$-mesurabilité des fonctions $f_{B,2}$.$\square$

Nous pouvons maintenant aborder la démonstration du théorème qui introduit le produit de deux mesures. Cette notion est simplement inspirée par la situation élémentaire dans laquelle la mesure bidimensionnelle (l'aire) du rectangle est le produit des mesures unidimensionnelles (longueurs) de sa "longueur" et de sa "largeur". par analogie, on souhaite en effet qu'un produit de deux mesures, pour être digne de ce nom, soit tel que la mesure produit d'un produit cartésien soit égale au produit des mesures de chacun des deux membres du produit. Nous allons voir que cette condition naturelle va suffire à déterminer la mesure produit sans ambiguïté, à la seule conditions que les facteurs du produit soient des mesures σ-finies.

Théorème 44 (Produit de deux mesures σ-finies) *Soit* $(E_i, \mathbb{B}_i, \mu_i)$ *un espace mesuré où la mesure* μ_i *est* σ*-finie,* $i = 1, 2$. *Alors :*

1) Il existe une unique mesure π *sur* $\mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2$ *telle que :*

$$\forall (B_1, B_2) \in (\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2), \pi(B_1 \times B_2) = \mu_1(B_1)\mu_2(B_2);$$

2) la mesure π *est définie pour tout* $B \in \mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2$ *par :*

$$\pi(B) = \int_E^* \mu_2(B(x_1, .))d\mu_1(x_1) = \int_E^* \mu_1(B(., x_2))d\mu_2(x_2);$$

3) la mesure π *est* σ*-finie.*

Preuve : Considérons sur $\mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2$ deux mesures π_1 et π_2 possédant la propriétés indiquée en 1). Pour établir l'égalité de ces deux mesures, il suffit de vérifier que les hypothèses du Théorème 2.3 d'unicité sont réalisées pour

$$E = E_1 \times E_2, \quad \mathbb{B} = \mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2, \quad \mathbb{E} = \mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2, \quad \mu = \pi_1 \quad \text{et} \quad \nu = \pi_2.$$

C'est évident en ce qui concerne les propriétés α), β) et γ).

Pour chaque $i = 1, 2$, puis que μ_i est σ-finie, il existe une suite croissante $(B_{i,n})_{n \geq 1}$ de $\mathbb{B}_i$ telle que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{i,n} = E_i \quad \text{et} \quad \mu_i(B_{i,n}) < +\infty \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1.$$

Alors, $(B_{1,n} \times B_{2,n})_{n \geq 1}$ est une suite croissante de $\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2$ telle que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_{1,n} \times B_{2,n}) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{1,n} \right) \times \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{2,n} \right) = E_1 \times E_2,$$

(où la première égalité est obtenue grâce à la croissance de la suite $(B_{i,n})_{n \geq 1}$), et

$$\forall n \geq 1, \pi_1(B_{1,n} \times B_{2,n}) = \pi_2(B_{1,n} \times B_{2,n}) = \mu_1(B_{1,n})\mu_2(B_{2,n}) < +\infty.$$

Ainsi l'hypothèse δ) du Théorème 2.3 est également vérifié et il en résulte $\pi_1 = \pi_2$.

Mais la démonstration ci-dessus nous apprend aussi que l'unique mesure π (si elle existe) possédant la propriété énoncée en 1), est nécessairement σ-finie, ce qui établit 3).

Pour tout $B \in \mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2$ posons :

$$\pi(B) = \int_E^* \mu_2(B(x_1, .))d\mu_1(x_1) = \int_E^* f_{B,1} d\mu_1,$$

ce qui a un sens d'après le Lemme 3.2. Il reste à vérifier que l'on a ainsi défini une mesure sur $B \in \mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2$.

$(M1)$ $\pi(\emptyset) = \int_E^* 0 d\mu_1 = 0$.

$(M2)$ Si $(B_n)_{n\geq 1}$ est une suite de $B \in \mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2$ disjointe, on a $f_{\cup_{n\geq 1} B_n, 1} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{B_n,1}$ (voir démonstration du Lemme 3.2), d'où l'on déduit à l'aide du Corollaire 3.1 chapitre 3 :

$$\pi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \int_E^* \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_{B_n,1}\right) d\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E^* f_{B_n,1} d\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \pi(B_n).$$

La fonction $\pi : \mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ est bien donc une mesure et, de plus, pour chaque $(B_1 \times B_2) \in (\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$, elle vérifie :

$$\begin{aligned}
\pi(B_1 \times B_2) &= \int_E^* \mu_2((B_1 \times B_2)(x_1, .))d\mu_1(x_1) = \int_E^* \mu_2(B_2) 1_{B_1} d\mu_1 \\
&= \mu_1(B_1)\mu_2(B_2),
\end{aligned}$$

ce qui prouve complètement 1).

Enfin, en posant pour tout $B \in \mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2$:

$$\pi'(B) = \int_E^* \mu_1(B(., x_2))d\mu_2(x_2),$$

on établirait de même que l'on définit une mesure sur $B \in \mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2$ possédant la propriété requise ce qui, compte de l'unicité d'une telle mesure, démontre 2).□

Définition 30 *Soit $(E_i, \mathbb{B}_i, \mu_i)$ un espace mesuré où la mesure μ_i est σ-finie, $i = 1, 2$. L'unique mesure π sur $\mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2$ vérifiant :*

$$\forall (B_1, B_2) \in (\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2), \pi(B_1 \times B_2) = \mu_1(B_1)\mu_2(B_2),$$

est appelée mesure produit des mesures μ_1 et μ_2 et est notée $\mu_1 \otimes \mu_2$.

L'espace mesuré $(E_1 \times E_2, \mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ est l'espace mesuré produit des espaces mesurés $(E_i, \mathbb{B}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$.

Remarques. 1) D'après le Théorème 3.1, la valeur prise en chaque B de $\mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2$ est donnée par les formules

$$\boxed{\pi(B) = \int_E^* \mu_2(B(x_1, .))d\mu_1(x_1) = \int_E^* \mu_1(B(., x_2))d\mu_2(x_2).}$$

2) La notion de produit de deux mesures σ-finies se généralise au produit d'un nombre fini quelconque de telles mesures. La circonstance favorable à cette extension est que la mesure produit est elle-même σ-finie. On peut remarquer que l'associativité du produit cartésien des ensembles induit celle du produit des tribus, puis celle du produit des mesures : le produit des mesures est associatif.

5.4 Intégration par rapport à une mesure produit

Théorème 45 (Théorème de Fubini pour les fonctions mesurables positives) *Soit $(E_i, \mathbb{B}_i, \mu_i)$ un espace mesuré où la mesure μ_i est σ-finie, $i = 1, 2$, et soit $f \in \mathcal{M}(E_1 \times E_2, \mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2, \overline{\mathbb{R}}_+)$. Alors :*

1) $\forall x_1 \in E_1,\ f(x_1, .) \in \mathcal{M}(E_2, \mathbb{B}_2, \overline{\mathbb{R}}_+)$,
$\forall x_2 \in E_2,\ f(., x_2) \in \mathcal{M}(E_1, \mathbb{B}_1, \overline{\mathbb{R}}_+)$;
2) $[x_1 \mapsto \int_E^* f(x_1, .)d\mu_2] \in \mathcal{M}(E_1, \mathbb{B}_1, \overline{\mathbb{R}}_+)$,
$[x_2 \mapsto \int_E^* f(., x_2)d\mu_1] \in \mathcal{M}(E_2, \mathbb{B}_2, \overline{\mathbb{R}}_+)$;
3)

$$\begin{aligned} \int_{E_1 \times E_2}^* f d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_E^* \left(\int_E^* f(x_1, .)d\mu_2 \right) d\mu_1(x_1) \\ &= \int_E^* \left(\int_E^* f(., x_2)d\mu_1 \right) d\mu_2(x_2). \end{aligned}$$

Preuve : Il suffit de s'intéresser à la première ligne de chacun des points 1) et 2), et à la première égalité de 3).

1) Considérons $x_1 \in E_1$ et $B \in \mathbb{B}_{\overline{\mathbb{R}}_+}$. Comme $f \in \mathcal{M}(E_1 \times E_2, \mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2, \overline{\mathbb{R}}_+)$, on a $\{f \in B\} \in \mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2$ et, d'après le Lemme 3.1,

$$\{f(x_1, .) \in B\} = \{f \in B\}(x_1, .) \in \mathbb{B}_2,$$

ce qui prouve que $f(x_1, .) \in \mathcal{M}(E_2, \mathbb{B}_2, \overline{\mathbb{R}}_+)$.

2) Si $\phi = \sum_{j=1}^{p} \alpha_j 1_{A_j} \in \mathbb{E}(E_1 \times E_2, \mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2, \mathbb{R}_+)$, avec $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$ et $A_j \in \mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2$, pour tout $x_1 \in E_1$ on a :

$$\begin{aligned} \int_E^* \phi(x_1, .)d\mu_2 &= \sum_{j=1}^{p} \left(\alpha_j \int_E^* 1_{A_j}(x_1, .)d\mu_2 \right) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \left(\alpha_j \int_E^* 1_{A_j(x_1, .)} d\mu_2 \right) = \sum_{j=1}^{p} (\alpha_j \mu_2(A_j(x_1, .))), \end{aligned}$$

ce qui est une fonction de x_1 $\mathbb{B}_1$-mesurable d'après le Lemme 3.2.

Si $f \in \mathcal{M}(E_1 \times E_2, \mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2, \overline{\mathbb{R}}_+)$, il existe une suite croissante $(\phi_n)_{n\geq 1}$ de fonctions $(\mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2)$-étagées positives telles que $f = \sup\limits_{n\geq 1} \phi_n$ (Théorème 3.2 chapitre 2). On obtient alors par le Théorème 3.2 chapitre 3 :

$$\begin{aligned} \int_E^* f(x_1, .)d\mu_2 &= \int_E^* (\sup_{n\geq 1} \phi_n)(x_1, .)d\mu_2 \\ &= \int_E^* (\sup_{n\geq 1} \phi_n(x_1, .))d\mu_2 = \sup_{n\geq 1} \int_E^* \phi_n(x_1, .)d\mu_2, \end{aligned}$$

et la fonction $[x_1 \mapsto \int_E^* f(x_1, .)d\mu_2]$ est bien $\mathbb{B}_1$-mesurable (Proposition 2.5 chapitre 2).

3) La technique de la démonstration est la même qu'en 2).

On démontre d'abord la propriété dans le cas d'une fonction $\mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2$-étagée positive ϕ. En utilisant les notations et les calculs ci-dessus, ainsi que les formules de la mesure produit, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_E^* \left(\int_E^* \phi(x_1, .)d\mu_2(x_1) \right) d\mu_1(x_1) &= \sum_{j=1}^p \left(\alpha_j \int_E^* \mu_2(A_j(x_1, .))d\mu_1(x_1) \right) \\ &= \sum_{j=1}^p (\alpha_j \mu_1 \otimes \mu_2(A_j)) = \int_{E_1\times E_2} \phi d(\mu_1 \otimes \mu_2). \end{aligned}$$

On approche f par une suite croissante $(\phi_n)_{n\geq 1}$ de fonctions $(\mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2)$-étagées positives, et il vient :

$$\begin{aligned} \int_{E_1\times E_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_{E_1\times E_2} \left(\sup_{n\geq 1} \phi_n \right) d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \sup_{n\geq 1} \int_{E_1\times E_2} \phi_n d(\mu_1 \otimes \mu_2) \\ &= \sup_{n\geq 1} \int_E^* \left(\int_E^* \phi_n(x_1, .)d\mu_2 \right) d\mu_1(x_1) \\ &= \int_E^* \left(\int_E^* \sup_{n\geq 1} \phi_n(x_1, .)d\mu_2 \right) d\mu_1(x_1) \\ &= \int_E^* \left(\int_E^* f(x_1, .)d\mu_2 \right) d\mu_1(x_1). \end{aligned}$$

□

Notation. Etant donné un ensemble E_i et une fonction $f_i : E_i \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $i = 1, 2$, on désigne par $f_1 \otimes f_2$ l'application de $E_1 \times E_2$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ définie pour tout $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ par :

$$f_1 \otimes f_2(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2).$$

Corollaire 33 *Soit* $(E_i, \mathbb{B}_i, \mu_i)$ *un espace mesuré où la mesure* μ_i *est* σ*-finie, et soit* $f \in \mathcal{M}(E_i, \mathbb{B}_i, \overline{\mathbb{R}}_+)$, $i = 1, 2$. *Alors :*

1) $f_1 \otimes f_2 \in \mathcal{M}(E_1 \times E_2, \mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2, \overline{\mathbb{R}}_+)$ *;*

2) $\displaystyle\int_{E_1 \times E_2}^{*} (f_1 \otimes f_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \left(\int_{E_1}^{*} f_1 d\mu_1\right)\left(\int_{E_2}^{*} f_2 d\mu_2\right).$

Preuve : 1) Il suffit d'observer que $f_1 \otimes f_2 = (f_1 \circ \pi_1)(f_2 \circ \pi_2)$ ce qui montre que $f_1 \otimes f_2$ est $\mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2$-mesurable (Proposition 1.2 et Théorème 2.1 chapitre 2).

2) Par le Théorème 4.1 on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\int_{E_1 \times E_2}^{*} (f_1 \otimes f_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_E^{*} \left(\int_E^{*} (f_1 \otimes f_2)(x_1, .) d\mu_2\right) d\mu_1(x_1) \\
&= \int_E^{*} \left(f_1(x_1)\left(\int_E^{*} f_2 d\mu_2\right)\right) d\mu_1(x_1) \\
&= \left(\int_{E_1}^{*} f_1 d\mu_1\right)\left(\int_{E_2}^{*} f_2 d\mu_2\right).
\end{aligned}$$

□

Théorème 46 (Théorème de Fubini pour les fonction intégrables) *Soit* $(E_i, \mathbb{B}_i, \mu_i)$ *un espace mesuré où la mesure* μ_i *est* σ*-finie,* $i = 1, 2$, *et soit* $f \in \mathcal{L}^1(E_1 \times E_2, \mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$. *Alors :*

1) $f(x_1, .) \in \mathcal{L}^1(E_2, \mathbb{B}_2, \mu_2)$ μ_1*-presque partout,*
$f(., x_2) \in \mathcal{L}^1(E_1, \mathbb{B}_1, \mu_1)$ μ_2*-presque partout ;*

2) $[x_1 \mapsto \int_E^{*} f(x_1, .) d\mu_2] \in \mathcal{L}^{1*}(E_1, \mathbb{B}_1, \mu_1)$,
$[x_2 \mapsto \int_E^{*} f(., x_2) d\mu_1] \in \mathcal{L}^{1*}(E_2, \mathbb{B}_2, \mu_2)$ *;*

3)

$$\begin{aligned}
\int_{E_1 \times E_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_E \left(\int_E f(x_1, .) d\mu_2\right) d\mu_1(x_1) \\
&= \int_E \left(\int_E f(., x_2) d\mu_1\right) d\mu_2(x_2).
\end{aligned}$$

Preuve : Grâce à la linéarité de l'intégrale (Théorème 4.2 chapitre 3) et au Théorème 1.2 chapitre 4, la décomposition $f = f^+ - f^-$ permet de réduire la démonstration au cas où f est positive.

1) Du Théorème 4.1 résultent les trois points suivants :

a) $\forall x_1 \in E_1$, $f(x_1, .)$ est $\mathbb{B}_2$-mesurable,

b) $[x_1 \mapsto \int_{E_2}^{*} f(x_1, .) d\mu_2]$ est $\mathbb{B}_1$-mesurable,

c)

$$\begin{aligned}
\int_{E_1}^{*} \left(\int_{E_2}^{*} f(x_1, .) d\mu_2\right) d\mu_1(x_1) &= \int_{E_1 \times E_2}^{*} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) \\
&= \int_{E_1 \times E_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) < +\infty.
\end{aligned}$$

Alors, d'après le Théorème 3.5 chapitre 3 :

$$\int_{E_2}^{*} f(x_1,.)d\mu_2 < +\infty \quad \mu_1 - p.p.,$$

ce qui équivaut à

$$f(x_1,.) \in \mathcal{L}^1(E_2, \mathbb{B}_2, \mu_2) \quad \mu_1 - p.p.$$

2) Par ce qui précède, on voit que la fonction $[x_1 \mapsto \int_{E_2} f(x_1,.)d\mu_2]$ est définie μ-presque partout, et qu'elle coïncide μ_1-presque partout avec la fonction $[x_1 \mapsto \int_{E_2}^{*} f(x_1,.)d\mu_2]$ qui est μ_1-intégrable au sens large d'après c) ci-dessus. La fonction $[x_1 \mapsto \int_{E_2} f(x_1,.)d\mu_2]$ est donc elle-même μ_1-intégrable au sens large.

3) Les intégrales des deux fonctions ci-dessus se notent

$$\int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(x_1,.)d\mu_2 \right) d\mu_1(x_1) \quad \text{et} \quad \int_{E_1} \left(\int_{E_2}^{*} f(x_1,.)d\mu_2 \right) d\mu_1(x_1),$$

et elle sont égale puisque les deux fonctions coïncident μ_1-presque partout. De plus, la seconde intégrale est égale à

$$\int_{E_1}^{*} \left(\int_{E_2}^{*} f(x_1,.)d\mu_2 \right) d\mu_1(x_1).$$

Il en résulte finalement, en utilisant encore c) :

$$\begin{aligned}\int_{E_1} \left(\int_{E_2} f(x_1,.)d\mu_2 \right) d\mu_1(x_1) &= \int_{E_1}^{*} \left(\int_{E_2}^{*} f(x_1,.)d\mu_2 \right) d\mu_1(x_1) \\ &= \int_{E_1 \times E_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2).\end{aligned}$$

La partie duale du Théorème s'établit de façon analogue.□

Le résultat qui suit est une conséquence facile du Théorème 4.2, ou encore du Corollaire 4.2 en décomposant les fonctions en leurs parties positives et négatives.

Corollaire 34 *Soit $(E_i, \mathbb{B}_i, \mu_i)$ un espace mesuré où la mesure μ_i est σ-finie, et soit $f_i \in \mathcal{L}^1(E_i, \mathbb{B}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2$. Alors :*

1) $f_1 \otimes f_2 \in \mathcal{L}^1(E_1 \times E_2, \mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$;

2) $\int_{E_1 \times E_2} (f_1 \otimes f_2) d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \left(\int_{E_1} f_1 d\mu_1 \right) \left(\int_{E_2} f_2 d\mu_2 \right).$

Le résultat suivant est d'une grande importance pratique.

Théorème 47 (Théorème de Tonelli) *Soit* $(E_i, \mathbb{B}_i, \mu_i)$ *un espace mesuré où la mesure* μ_i *est* σ*-finie, et soit* $f \in \mathcal{M}(E_1 \times E_2, \mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2, \mathbb{R})$. *On suppose réalisée l'une des deux conditions suivantes :*

$$\int_{E_1}^{*} \left(\int_{E_2}^{*} |f(x_1, .)| d\mu_2 \right) d\mu_1(x_1) < +\infty \text{ ou } \int_{E_2}^{*} \left(\int_{E_1}^{*} |f(., x_2)| d\mu_1 \right) d\mu_2(x_2) < +\infty.$$

Alors :

1) $f \in \mathcal{L}^1(E_1 \times E_2, \mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ *;*

2)

$$\begin{aligned} \int_{E_1 \times E_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_E \left(\int_E f(x_1, .) d\mu_2 \right) d\mu_1(x_1) \\ &= \int_E \left(\int_E f(., x_2) d\mu_1 \right) d\mu_2(x_2). \end{aligned}$$

Preuve : Il suffit de prouver 1), et 2) résultera du Théorème 4.2. Or, d'après le Théorème 4.1, chacune des deux intégrales supérieures itérées a un sens, et l'hypothèse implique

$$\int_{E_1 \times E_2}^{*} |f| d(\mu_1 \otimes \mu_2) < +\infty,$$

de sorte que $f \in \mathcal{L}^1(E_1 \times E_2, \mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$.$\square$

Remarques. 1) Dans la pratique, la conclusion intéressante du Théorème de Tonellei est l'égalité des deux intégrales itérées, c'est-à-dire la validité de l'interversion des deux intégrations. En effet, les questions d'analyse ne sont pas rares dont la solution passe par l'exécution d'une telle inversion, encore faut-il la justifier. Le Théorème de Fubini affirme donc que la $(\mu_1 \otimes \mu_2)$-intégrabilité de la fonction f est une condition suffisante pour légitimer l'interversion, tansdis que le Théorème de Tonelli enseigne la méthode pratique pour prouver l'intégrabilité de f.

2) L'hypothèse du Théorème de Tonelli est une condition suffisante pour assurer la $(\mu_1 \otimes \mu_2)$-intégrabilité de la fonction f, mais l'application du Théorème 4.1 à $|f|$ montre que cette condition est également nécessaire.

D'après les remarques ci-dessus, on aura compris que l'intervesion de deux intégrations est loin d'aller de soi. Il se peut en effet

1) que l'une seulement des deux intégrales itérées ait un sens, ou

2) que les deux aient un sens mais de valeurs distinctes.

Dans chacun de ces deux cas, le Théorème de Fubini permet d'affirmer que la fonction n'est pas intégrable vi-à-vis de la mesure produit. Mais il est également possible

3) que les intégrales itérées aient la même valeurs mais que la fonction ne soit pas intégrable vi-à-vis de la mesure produit.

5.5 Mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$

La mesure de Lebesgue λ étant σ-finie, on peut lui faire correspondre dans $\mathbb{R}^2$ la mesure produit $\lambda \otimes \lambda$ définie sur la tribu $\mathbb{B}_\lambda \otimes \mathbb{B}_\lambda$ et dont voit facilement qu'elle prolonge la mesure de Borel β^2. Mais peut-on qualifier $\lambda\otimes\lambda$ de mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^2$? Dans $\mathbb{R}$, en dehors de ce que λ prolonge strictement β, ces deux mesures se distinguent essentiellement par le fait que λ est complète alors que β ne l'est pas et plus précisement λ est la mesure complétée de β (voir exercice 15 T.D 1). Par analogie, il semble que pour prétendre au titre de mesure de Lebesgue, une mesure dans $\mathbb{R}^2$ ne devra pas seulement prolonger β^2 mais encore être complète. Or ce n'est pas le cas de $\lambda \otimes \lambda$ (voir exercice 5 T.D 5).

Définition 31 *On appelle mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$ la mesure complétée de la mesure de Borel β^2 et notée λ_2.*

Plus généralement, pour tout $n \geq 1$, λ_n la complétée de β^n est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ définie sur la tribu $\mathbb{B}_{\lambda_n} = (\mathbb{B}_{\mathbb{R}^n})^{\beta^n}$.

1) La propriété est vraie β^n-presque partout si, et seulement si, elle est vraie λ_n-presque partout.

2) Pour toute fonction $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{B}_{\lambda_n}, \mathbb{R})$, il existe $g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}, \mathbb{R})$ telle que $g = f$ λ_n-presque partout.

3) Pour tout $p \geq 1$, $L^p(\lambda_n) = L^p(\beta^n)$.

4) Les mesures de Lebesgue et de Borel dans $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) constituent des extensions naturelles, à des ensembles plus compliqués, de la notion d'aire (resp. de volume) habituelle pour les domaines géométriquement simples de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$). De façon générale, la mesure de Lebesgue (resp. de Borel) d'un ensemble Lebesgue-mesurable (resp. d'un borélien) de $\mathbb{R}^n$ est aussi appelée volume n-dimensionnel de cet ensemble.$\square$

Théorème 48 *Les mesures de Borel et de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$ sont invariantes par translations et par symétrie.*

Preuve : Il suffit de s'intéresser au cas $n = 2$.

• Invariance de β^2. Si l'on considère dans $\mathbb{R}^2$ la translation de vecteur $x = (a, b)$, on sait qu'elle conserve les boréliens puisque c'est un homéomorphisme, et on vérifie facilement qu'en posant $\mu(C) = \beta^2(C + x)$ pour tout $C \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^2}$, on définit une mesure sur $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^2}$. mais il résulte du théorème 4.4 chapitre 1 que, pour tout $A \times B \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^2} \times \mathbb{B}_{\mathbb{R}^2}$:

$$\begin{aligned}
\mu(A \times B) &= \beta^2(A \times B + (a, b)) = \beta^2((A + a) \times (B + b)) \\
&= \beta(A + a)\beta(B + b) = \beta(A)\beta(B)
\end{aligned}$$

ce qui implique que $\mu = \beta^2$ par définition de cette mesure. On traite la symétrie de faqon analogue.

• Invariance de λ_2. Puisque λ_2 est la mesure complétée d β^2, on sait que tout $D \in \mathbb{B}_{\lambda_2}$ s'écrit $D = B \cup M$, où $B \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^2}$ et $M \subset N \in \mathcal{N}_{\beta^2}$. Si l'on considère encore la translation de vecteur $x = (a, b)$, on obtient, compte tenu du résultat ci-dessus : $M + x \subset N + x \in \mathcal{N}_{\beta^2}$, et aussi $M + x \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^2}$. La translation conserve donc $\mathbb{B}_{\lambda_2}$ et, de plus,

$$\begin{aligned} \lambda_2(D + x) &= \lambda((B \cup M) + x) = \lambda_2((B + x) \cup (M + x)) = \beta^2(B + x) \\ &= \beta^2(B) = \lambda_2(D). \end{aligned}$$

L'invariance de λ_2 par symétrie s'obtient de façon similaire.□ 1) Les résultats des exercices 7 et 12 de la série 1 s'étendent aussi à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. De même que les résultats de densité de l'exercice 2 T.D 4 s'étendent au ces de $\mathbb{R}^n$. En particulier l'ensemble $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ des fonctions complexes continues à support compact de $\mathbb{R}^n$ est dense dans $\mathcal{L}^p(\lambda_n), N_p)$ pour tout réel $p \geq 1$.□

5.6 Exercices corrigés

Exercice 1. *1) Montrer que si E_1 et E_2 sont deux ensembles et si $C \subset E_1 \times E_2$, alors $C \in \mathcal{P}(E_1) \times \mathcal{P}(E_1)$ si et seulement si :*

$$((x_1, x_2) \in C, (y_1, y_2) \in C) \qquad \Rightarrow \qquad (x_1, y_2) \in C. \tag{$*$}$$

2) Pour $i = 1, 2$, on suppose que $\mathbb{B}_i \neq \{\emptyset, E_i\}$ est une tribu sur E_i. Prouver que $\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2$ n'est pas une tribu.

Solution : 1) Il est immédiat que $(*)$ est réalisé si C est un produit cartésien. Réciproquement, supposons que C vérifie $(*)$ et posons :

$$A_1 = \{x_1 \in E_1, \exists x_2 \in E_2, (x_1, x_2) \in C\}, \quad A_2 = \{x_2 \in E_2, \exists x_1 \in E_1, (x_1, x_2) \in C\}.$$

On voit aussitôt que

$$(x_1, x_2) \in C \Rightarrow (x_1, x_2) \in A_1 \times A_2.$$

Si maintenant $(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2$, il existe des $x_1' \in E_1$ et $x_2' \in E_2$ tel que $(x_1, x_2') \in C$ et $(x_1', x_2) \in C$, et il en résulte $(x_1, x_2) \in C$ d'après $(*)$.

2) Par hypothèse il existe $B_i \in \mathbb{B}_i$ tel que $B_i \notin \{\emptyset, E_i\}$, ceci pour $i = 1, 2$. Il est clair que $E_1 \times B_2$ et $B_1 \times E_2$ sont deux éléments de $\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2$, mais leur réunion n'appartient pas à $\mathbb{B}_1 \times \mathbb{B}_2$ qui ne peut être une tribu. En effet on peut trouver des $(x_1, x_2') \in E_1 \times B_2$ et $(x_1', x_2) \in B_1 \times E_2$ tel que $x_1 \in E_1 \setminus B_1$ et $x_2 \in E_2 \setminus B_2$. Mais si (x_1, x_2') et (x_1', x_2) sont bien des éléments de $(E_1 \times B_2) \cup (B_1 \times E_2)$, ce n'est pas le cas de (x_1, x_2), de sorte que $(*)$ est en défaut pour $(E_1 \times B_2) \cup (B_1 \times E_2)$.□

Exercice 2. *Soit $(E, \mathbb{B})$ un espace mesurable. Pour $f \in \mathcal{M}(E, \mathbb{B}, \overline{\mathbb{R}}_+)$ on pose $S(f) = \{(x, y) \in E \times \mathbb{R}, 0 \leq y < f(x)\}$. Montrer que $S(f) \in \mathbb{B} \otimes \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$.*

Solution : Cas 1 : $f = \beta 1_B$, $B \in \mathbb{B}$, $0 \leq \beta < +\infty$. Alors :

$$S(f) = \{(x,y) \in E \times \mathbb{R}, 0 \leq y < \beta 1_B(x)\} = B \times [0,\beta[\in \mathbb{B} \times \mathbb{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{B} \otimes \mathbb{B}_{\mathbb{R}}.$$

Cas 2 : $f = \sum_{k=1}^{n} \beta_k 1_{B_k}$, fonction $\mathbb{B}$-étagée positive. On peut toujours supposer que cette représentation est disjointe et il vient alors :

$$\begin{aligned} S(f) &= \left\{(x,y) \in E \times \mathbb{R}, 0 \leq y < \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k 1_{B_k}\right)(x)\right\} \\ &= \bigcup_{k=1}^{n} \{(x,y) \in E \times \mathbb{R}, 0 \leq y < \beta_k 1_{B_k}(x)\} \\ &= \bigcup_{k=1}^{n} (B_k \times [0,\beta_k[) \in \mathbb{B} \otimes \mathbb{B}_{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Cas général : $f \in \mathcal{M}(E, \mathbb{B}, \overline{\mathbb{R}}_+)$. Alors il existe une suite croissante $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions $\mathbb{B}$-étagées positives qui converge simplement vers f, et le résultat sera acquis si l'on prouve que $S(f) = \bigcup_{n\geq 1} S(f_n)$. or, d'une part, puisque $f_n(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in E$:

$$(x,y) \in S(f_n) \Rightarrow\ 0 \leq y < f_n(x) \Rightarrow\ 0 \leq y < f(x) \Rightarrow\ (x,y) \in S(f),$$

et, d'autre part, comme $(f_n(x))_{n\geq 1}$ converge vers $f(x)$ pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned} (x,y) \in S(f) \quad \Rightarrow \quad 0 \leq y < f(x) \quad &\Rightarrow \quad (\exists n \geq 1, 0 \leq y < f_n(x)) \\ &\Rightarrow \quad (\exists n \geq 1, (x,y) \in S(f_n)). \end{aligned}$$

$\square$.

Exercice 3. *Soit* $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (x^2+y^2)(1+z^2) \leq 1\}$.

1) Montrer que $B \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^3}$.

2) Calculer $\mu(B)$ *pour toutes les mesures* μ *sur* $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^3}$ *qui sont de type* $\mu = \mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \mu_3$, *où* $\mu_i = \beta$ *ou* δ_0 *pour* $i = 1,2,3$ *séparément.*

Solution : 1) La fonction $f : (x,y,z) \mapsto (x^2+y^2)(1+z^2)$ étant continue sur $\mathbb{R}^3$, l'ensemble $B = f^{-1}(]-\infty, 1]$ est un fermé, donc un borélien, de $\mathbb{R}^3$.

2) Remarquons d'abord que la mesure produitμ est bien définie puisque les facteurs β et δ_0 sont des mesures σ-finies

Cas 1 : $\mu = \delta_0 \otimes \delta_0 \otimes \delta_0$. Si $A, B \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$, on vérifie facilement que $\delta_{(0,0)}(A \times B) = \delta_0(A)\delta_0(B)$ ce qui prouve que $\delta_{(0,0)} = \delta_0 \otimes \delta_0$ d'après l'unicité d'une mesure produit. On montre de même que $\delta_{(0,0,0)} = \delta_{(0,0)} \otimes \delta_0$, c'est-à-dire

$$\delta_{(0,0,0)} = \delta_0 \otimes \delta_0 \otimes \delta_0,$$

et comme $(0,0,0) \in B$, i vient $\mu(B) = 1$.

Cas 2 : $\mu = \beta \otimes \delta_0 \otimes \delta_0$. De l'équivalence $(0,0) \in B(x,.,.) \Leftrightarrow x \in [-1,1]$ résulte $\delta_{(0,0)}(B(x,.,.)) = 1_{[-1,1]}(x)$, et on obtient :

$$\mu(B) = \int_{\mathbb{R}}^* \delta_{(0,0)}(B(x,.,.))d\beta(x) = \int_{\mathbb{R}}^* 1_{[-1,1]}d\beta = 2.$$

Cas 3 : $\mu = \delta_0 \otimes \beta \otimes \delta_0$. Comme x et y jouent des rôles symétrique dans la définition de B, on a encore $\mu(B) = 2$ dans ce cas.

Cas 4 : $\mu = \delta_0 \otimes \delta_0 \otimes \beta$. Comme $(0,0) \in B(.,.,z)$ quel que soit $z \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mu(B) = \int_{\mathbb{R}}^* \delta_{(0,0)}(B(.,.,z))d\beta(z) = \int_{\mathbb{R}}^* 1_{\mathbb{R}}d\beta = \beta(\mathbb{R}) = +\infty.$$

Cas 5 : $\mu = \beta \otimes \beta \otimes \delta_0$. Posons $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Alors :

$$\mu(B) = \int_{\mathbb{R}^2}^* \delta_0(B(x,y,.))d\beta^2(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} 1_D d\beta^2 = \beta^2(D) = \pi.$$

Cas 6 : $\mu = \delta_0 \otimes \beta \otimes \beta$. Soit $A = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2, y^2(1+z^2) \leq 1\}$. Alors :

$$\begin{aligned} \mu(B) &= \int_{\mathbb{R}^2}^* \delta_0(B(.,y,z))d\beta^2(y,z) = \int_{\mathbb{R}^2}^* 1_A d\beta^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}}^{\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}} dy \right) dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{1+z^2}} dz = +\infty. \end{aligned}$$

Cas 7 : $\mu = \beta \otimes \delta_0 \otimes \beta$. Toujours par la même raison de symétrie des rôles joués par x et y, on obtient encore ici $\mu(B) = +\infty$.

Cas 8 : $\mu = \beta \otimes \beta \otimes \beta$. Comme $B(.,.,z)$ est u disque de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{1+z^2}}$, on a :

$$\mu(B) = \int_{\mathbb{R}}^* \beta^2(B(.,.,z))d\beta(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{1+z^2} dz = \pi[\arctan]_{-\infty}^{+\infty} = \pi^2.$$

□

Exercice 4. *Soit μ une mesure σ-finie sur la tribu $\mathbb{B}$ de l'exercice 2. Montrer que*

$$\int_E^* f d\mu = \int_{\mathbb{R}}^* \mu(\{f > y\})d\beta(y).$$

Solution : On a

$$(\mu \otimes \beta)(S(f)) = \int_E^* \beta((S(f))(x,.))d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}}^* \mu((S(f))(.,y))d\beta(y),$$

avec

$$\beta((S(f))(x,.)) = \beta(\{y \in \mathbb{R}, 0 \leq y < f(x)\}) = \beta([0, f(x)[) = f(x),$$

où la dernière égalité a bien lieu, que $f(x)$ soit fini ou non, et

$$\mu((S(f))(.,y)) = \mu(\{x \in E, 0 \le y < f(x)\}) = \mu(\{f > y\}).$$

On en déduit donc que

$$\int_E^* f d\mu = \int_{\mathbb{R}}^* \mu(\{f > y\}) d\beta(y).$$

□

Exercice 5. *Pour $i = 1, 2$, on considère un espace mesuré $(E_i, \mathbb{B}_i, \mu_i)$ où la mesure μ_i est σ-finie. Montrer que sous les hypothèses*

a) $\mathbb{B}_1 \neq \mathcal{P}(E_1)$,

b) $\exists N_2 \in \mathcal{N}_{\mu_2}, N_2 \neq \emptyset$,

la mesure produit $\mu_1 \otimes \mu_2$ n'est pas complète.

Solution : Soit $A_1 \subset E_1$ tel que $A_1 \notin \mathbb{B}_1$ (un tel A_1 existe d'après a) et soit N_2 vérifiant b).

(α) On a $A_1 \times N_2 \notin \mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2$. En effet, si $A_1 \times N_2 \in \mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2$ et si $x_2 \in N_2$ (un tel x_2 existe puisque $N_2 \neq \emptyset$), on doit avoir $A_1 = (A_1 \times N_2)(., x_2) \in \mathbb{B}_1$, ce qui contredit l'hypothèse.

(β) On a à la fois :

$$A_1 \times N_2 \subset E_1 \times N_2 \in \mathbb{B}_1 \otimes \mathbb{B}_2 \qquad \text{et} \qquad (\mu_1 \otimes \mu_2)(E_1 \times N_2) = \mu_1(E_1)\mu(N_2) = 0.$$

La conjonction des propriétés (α) et (β) prouve que $\mu_1 \otimes \mu_2$ n'est pas complète.□

Exercice 6. *Soit $V_n(r)$ le volume n-dimensional d'une boule euclidienne fermée de rayon $r \ge 0$ dans $\mathbb{R}^n$.*

1) Justifier que la notation $V_n(r)$ ne fasse pas référence au centre de la boule,et exprimer $V_n(r)$ en fonction de $V_n(1)$.

2) Montrer que pour tout $n \ge 3$: $V_n(1) = \dfrac{2\pi}{n} V_{n-2}(1)$.

3) En déduire la valeur explicite de $V_n(1)$ puis celle de $V_n(r)$.

4) Obtient-on le même résultat pour les boules ouvertes ?

Solution : 1) Le volume n-dimensionnel (c'est-à-dire le mesure de Lebesgue) d'une boule euclidienne fermée dans $\mathbb{R}^n$ ne dépend que du rayon r de cette boule puisque la mesure de Lebesgue est invariante par translations. Il peut donc être noté $V(r)$ sans référence au centre de la boule considérée.

Dans $\mathbb{R}^n$ désignons par $B_n(r)$ la boule euclidienne fermée centrée à l'origine et de rayon r. On a

$$V_n(r) = \lambda_n(B_n(r)) = r^n \lambda_n(B_n(1)) = r^n V_n(1).$$

Cette formule résulte du résultat suivant : þ Si ϕ est la composée d'une homothétie de rapport k et d'une translation :

$$\lambda_n(\phi(B)) = |k|^n \lambda_n(B)$$

pour tout $B \in \mathbb{B}_{\lambda_n}$.

2) Remarquons que pour $n \geq 3$ et si les x_k ci-dessus sont des réels :

$$\begin{array}{rcl}
(x_1, x_2) \notin B_2(1) & \Rightarrow & 1_{B_n(1)}(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = 0 \\
(x_1, \ldots, x_n) \in B_n(1) & \Leftrightarrow & x_3^2 + \ldots + x_n^2 \leq 1 - (x_1^2 + x_2^2) \\
 & \Leftrightarrow & (x_3, \ldots, x_n) \in B_{n-2}\left(\sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)}\right).
\end{array}$$

Il en résulte, compte tenu de 1) :

$$\begin{aligned}
V_n(1) &= \lambda_n(B_n(1)) = \int_{\mathbb{R}^n}^* 1_{B_n(1)} d\lambda_n \\
&= \int\int_{\mathbb{R}^2} \left(\int \cdots \int_{\mathbb{R}^{n-2}} 1_{B_n(x)}(x_1, \ldots, x_n) dx_3 \ldots dx_n\right) dx_1 dx_2 \\
&= \int\int_{B_2(1)} \left(\int \cdots \int_{\mathbb{R}^{n-2}} 1_{B_{n-2}\left(\sqrt{1-(x_1^2+x_2^2)}\right)}(x_3, \ldots, x_n) dx_3 \ldots dx_n\right) dx_1 dx_2 \\
&= \int\int_{B_2(1)} \lambda_{n-2}\left(B_{n-2}\left(\sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)}\right)\right) dx_1 dx_2 \\
&= V_{n-2}(1) \int\int_{B_2(1)} (1 - (x_1^2 + x_2^2))^{\frac{n-2}{2}} dx_1 dx_2 \\
&= V_{n-2}(1) \int\int_{[0,1]\times[0,2\pi]} (1 - r^2)^{\frac{n-2}{2}} r dr d\theta \\
&= \pi V_{n-2}(1) \int_0^1 u^{\frac{n-2}{2}} du = \frac{2\pi}{n} V_{n-2}(1).
\end{aligned}$$

3) La relation de récurrence ci-dessus permet de calculer $V_n(1)$ pour tout $n \geq 1$ à partir de $V_1(1) = \lambda([-1, 1]) = 2$ et $V_2(1) = \pi$, aire du disque fermé de rayon 1, ce dernier peut se calculer de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
V_2(1) &= \lambda_2(B_2(1)) = \int_{\mathbb{R}}^* \beta((B_2(1))(x, .)) d\beta(x) \\
&= \int_{[-1,1]} \beta\left(\left[-\sqrt{1 - x^2}, \sqrt{1 - x^2}\right]\right) d\beta(x) = 4 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx \\
&= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \pi,
\end{aligned}$$

et on obtient :

$$V_{2n-1} = \frac{2^n \pi^{n-1}}{1.3.5 \ldots (2n-1)} \quad \text{et} \quad V_{2n}(1) = \frac{\pi^n}{n!}, \quad \text{pour tout entier} \quad n \geq 1.$$

4) Les mêmes résultats sont valables pour les boules ouvertes, ce que l'on peut voir directement en remarquant que les calculs effectués en 2) et 3) sont les mêmes si les boules considérées sont ouvertes, et ce qui prouve que toute sphère euclidienne dans $\mathbb{R}^n$ est λ_n-négligeable.

Exercice 7. *1) Déterminer* $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx$ *au moyen du calcul de* $\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}d\beta^2(x,y)$.

2) En déduire $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{||x||^2}{2}}d\lambda_n(x)$*, où* $||.||$ *est la norme euclidienne dans* $\mathbb{R}^n$*.*

Solution : 1) L'intégrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx$ est une intégrale de Riemann convergente (car $\lim_{|x|\longrightarrow+\infty} x^2e^{-x^2} = 0$) qui coïncide avec $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}d\lambda(x)$ et aussi avec $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}d\beta(x)$ puisque la fonction intégrée est continue, donc borélienne. Alors, en utilisant un corollaire du théorème de Fubini, le théorème de Beppo Levi et un passage en coordonnées polaires, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx\right)^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}dy\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}d\beta^2(x,y) = \lim_{R\longrightarrow+\infty}\int_{B(0,R)} e^{-(x^2+y^2)}d\beta^2(x,y) \\
&= \lim_{R\longrightarrow+\infty}\int_{[0,R]\times[0,2\pi]} e^{-r^2}rd\beta^2(r,\theta) \\
&= 2\pi\lim_{R\longrightarrow+\infty}\int_0^R e^{-r^2}rdr = \pi\lim_{R\longrightarrow+\infty}(1-e^{-R^2}) = \pi,
\end{aligned}$$

et, par conséquent, $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

2) Du résultat ci-dessus, de l'égalité

$$e^{-\frac{||x||^2}{2}} = \prod_{k=1}^{n}(e^{-\frac{(x_k)^2}{2}})$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$, on déduit :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{||x||^2}{2}}d\lambda_n(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{||x||^2}{2}}d\beta^n(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\prod_{k=1}^{n}(e^{-\frac{(x_k)^2}{2}})d\beta^n(x) \\
&= \prod_{k=1}^{n}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x_k)^2}{2}}d\beta(x_k) = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x)^2}{2}}d\beta(x)\right)^n = (2\pi)^{\frac{n}{2}}.
\end{aligned}$$

□

Exercice 8. *Pour chacune des trois fonctions* f*,* g*,* h *suivantes définies sur* $[-1,1]^2$ *:*

a) calculer celles des deux intégrales itérées telles que

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)dx\right)dy \quad et \quad \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)dy\right)dx$$

qui existent ;

b) examiner leur Lebesgue-intégrabilité sur $[-1,1]^2$.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x}{y(x^2+y^2)^2} & si \quad y\neq 0\\ 0 & si \quad y=0,\end{cases}$$

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & si \quad (x,y)\neq 0\\ 0 & si \quad (x,y)=0,\end{cases}$$

$$h(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^2} & si \quad (x,y)\neq 0\\ 0 & si \quad (x,y)=0,\end{cases}$$

Solution : 1) La fonction f étant une fonction paire de x il vient, pour tout $y\in[-1,1]$:

$$\int_{-1}^{1} f(x,y)dx=0,$$

si bien que

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)dx\right)dy=0.$$

Mais, pour chaque $x\neq 0$, $f(x,y)$ est équivalent à $\dfrac{1}{x^3y}$ quand y tend vers 0, et n'est donc pas intégrable que $[-1,1]$ par rapport à y, de sorte que l'intégrale itérée

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} f(x,y)dy\right)dx$$

est dépourvue de sens.

Il résulte alors du théorème de Fubini que f n'est pas lebesgue-intégrable sur $[-1,1]^2$.

2) Si $y\neq 0$:

$$\int_{-1}^{1} g(x,y)dx=\left[\frac{-x}{x^2+y^2}\right]_{x=-1}^{1}=\frac{-2}{1+y^2}$$

et seule $g(x,0)$ n'est pas intégrable sur $[-1,1]$. L'intégrale itérée ci-dessous a donc un sens et l'on trouve :

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} g(x,y)dx\right)dy=\int_{-1}^{1}\frac{-2}{1+y^2}dy=[-2\arctan y]_0^1=-\frac{\pi}{2},$$

tandis qu'en échangeant les rôles de x et de y on obtient :

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} g(x,y)dy\right)dx = \frac{\pi}{2}.$$

Dans ce cas, il est encore exclu, d'après le théorème de Fubini, que g soit Lebesgue-intégrable sur $[-1,1]^2$.

3) Puisque h est une fonction impaire de x on obtient

$$\int_{-1}^{1} h(x,y)dx = 0$$

à la fois pour $y \neq 0$ et pour $y = 0$, et de même en échangeantles rôles de x et de y, il en résulte :

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} g(x,y)dy\right)dx = \int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} g(x,y)dx\right)dy = 0.$$

Cependant h n'est pas Lebesgue-intégrable sur $[-1,1]^2$. En effet, pour $y \neq 0$:

$$\int_{-1}^{1} |h(x,y)|dx = 2|y|\int_{0}^{1}\frac{x}{(x^2+y^2)^2}dx = |y|\left[\frac{-1}{x^2+y^2}\right]_0^1 = \frac{1}{|y|} - \frac{|y|}{1+y^2}$$

ce qui est équivalent à $\dfrac{1}{|y|}$ quand y tend vers 0 et entraîne

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1} |h(x,y)|dx\right)dy = +\infty;$$

ainsi $|h|$ n'est pas Lebesgue-intégrable sur $[-1,1]^2$ et, par suite, h non plus.$\square$

Chapitre 6

Mesures spéciales. Convolution

6.1 Mesures spéciales

6.1.1 Mesures discrètes

Théorème 49 *On considère un espace mesurable* $(E, \mathbb{B})$*, une suite de mesures* $(\mu_n)_{n\geq 1}$ *sur* $\mathbb{B}$ *et une suite* $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ *de* $\mathbb{R}_+$*. Alors, la fonction* $\mu : \mathbb{B} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ *définie pour tout* $B \in \mathbb{B}$ *par*

$$\mu(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu_n(B)$$

est une mesure sur $\mathbb{B}$ *que l'on notera* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu_n$.

Preuve : Voir exercice 1 série de T.D. 2.□

Définition 32 *Soit* $(E, \mathbb{B})$ *un espace mesurable. On appelle mesure discrète sur* $\mathbb{B}$ *toute mesure du type* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta_{x_n}$ *où* $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ *est une suite de* $\mathbb{R}_+$ *et* $(\delta_{x_n}$ *une suite de mesure de Dirac aux points* $x_n \in \mathbb{E}$.

1) Si μ désigne la mesure discrète ci-dessus, on a

$$\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta_{x_n}(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n,$$

de sorte que

$$\mu \quad \text{finie} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty.$$

2) Toute mesure de Dirac δ_x et, plus généralement, toute mesure du type $\sum_{n=1}^{p} \lambda_n \delta_{x_n}$, est un cas particulier de mesure discrète.□

Théorème 50 (Intégration par rapport à une mesure de Dirac. *Considérons une espace mesurable $(E, \mathbb{B})$ et $x_0 \in E$. Alors :*

1) $\forall f \in \mathcal{M}(E, \mathbb{B}, \overline{\mathbb{R}}_+)$, $\int_E^* f d\delta_{x_0} = f(x_0)$;

2) $\mathcal{L}^1(E, \mathbb{B}, \delta_{x_0}) = \mathcal{M}(E, \mathbb{B}, \mathbb{R})$;

3) $\forall f \in \mathcal{L}^1(E, \mathbb{B}, \delta_{x_0})$,

$$\int_E f d\delta_{x_0} = f(x_0).$$

Preuve : Voir exercice 3 série de T.D. 3.□

Théorème 51 (Intégration par rapport à une mesure discrète). *Soit* $(E, \mathbb{B}, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta_{x_n})$ *un espace mesuré à mesure discrète.*

1) $\forall f \in \mathcal{M}(E, \mathbb{B}, \overline{\mathbb{R}}_+)$, $\displaystyle\int_E^* f d\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta_{x_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f(x_n)$;

2) Si $f \in \mathcal{M}(E, \mathbb{B}, \mathbb{R})$ *:*

$$f \in \mathcal{L}^1(E, \mathbb{B}, \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta_{x_n}) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n |f(x_n)| < +\infty$$

et dans ce cas

$$\int_E f d\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta_{x_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f(x_n).$$

Preuve : La démonstration est similaire au cas particulier d'une mesure de Dirac.□

6.1.2 Mesures définies par une densité

Théorème 52 *Considèrons un espace mesuré $(E, \mathbb{B}, \mu)$, une fonction $f \in \mathcal{M}(E, \mathbb{B}, \overline{\mathbb{R}}_+)$ et l'application $\mu_f : \mathbb{B} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ définie pour tout $B \in \mathbb{B}$ par*

$$\mu_f(B) = \int_B f d\mu.$$

Alors μ est une mesure sur $\mathbb{B}$.

Preuve : Voir exercice 8 série T.D. 3.□

Définition 33 *Dans les conditions du Théorème 1.4, on dit que μ_f (désormais notée $f.\mu$) est la mesure ayant pour densité f par rapport à la mesure μ.*

Définition 34 *Soit $(E, \mathbb{B})$ un espace mesurable. Si μ et ν sont deux mesures sur $\mathbb{B}$, on dit que ν est absolument continue par rapport à μ si $\mathbb{N}_\mu \subset \mathbb{N}_\nu$, ce qu'on traduit par la notation $\nu \ll \mu$.*

Il est facile de voir (voir exercice 8 série T.D. 3) que toute mesure de type $f.\mu$ est absolument continue par rapport à μ. Le théorème suivant appelé théorème de Radon-Nykodym précise que, si μ est σ-finie, il y a idenité entre les mesures absolument continues par rapport à μ et celles possèdant une densité par rapport à μ. C'est en particulier le cas si $\mu = \beta^n$ ou λ_n.

Théorème 53 Théorème de Radon-Nykodym. *Soit $(E, \mathbb{B}, \mu)$ un espace mesuré où la mesure μ est σ-finie. Alors, si ν est une mesure sur $\mathbb{B}$:*

$$\nu \ll \mu \qquad \Rightarrow \qquad \exists f \in \mathcal{M}(E, \mathbb{B}, \overline{\mathbb{R}}_+), \nu = f.\mu.$$

Le théorème de Radon-Nykodym est faux si la mesure μ n'est pas σ-finie. Un contre-exemple est fourni par le cas d'un espace mesurable $(E, \mathbb{B})$ où E est un ensemble non dénombrable et $\mathbb{B}$ est la tribu engendré par le singleton (voir exercice 6 série T.D.1), et lorsque on prend pour mesure μ la mesure du dénombrement dont nous savons qu'elle n'est pas σ-finie et pour mesure ν celle définie par $\mu(B) = 0$ ou 1 selon que B est dénombrable ou non (voir exercice 6 série T.D.1). Il est clair que $\mathbb{N}_\mu \subset \mathbb{N}_\nu$. Cependant, si l'on suppose qu'une fonction $f \in \mathcal{M}(E, \mathbb{B}, \overline{\mathbb{R}}_+)$ vérifie $\nu = f.\mu$ pour chaque $x \in E$ on doit avoir

$$0 = \nu(\{x\}) = \int_{\{x\}}^{*} f d\mu = f(x)\mu(\{x\}) = f(x),$$

c'est-à-dire que f est la fonction nulle ; il s'ensuit que μ est la mesure nulle sur $\mathbb{B}$, contrairement à l'hypothèse.

Théorème 54 Intégration par rapport à une mesure définie par une densité) *Soit $(E, \mathbb{B}, f.\mu)$ un espace mesuré où la mesure $f.\mu$ est définie par une densité $f \in \mathcal{M}(E, \mathbb{B}, \overline{\mathbb{R}}_+)$ par rapport à une mesure μ sur $\mathbb{B}$. Alors :*

1) $\forall g \mathcal{M}(E, \mathbb{B}, \overline{\mathbb{R}}_+)$, $\int_E^* g d(f.\mu) = \int_E^* g f d\mu$;

2) si $g \in \mathcal{M}(E, \mathbb{B}, \mathbb{R})$:

$$g \in \mathcal{L}^(E, \mathbb{B}, f.\mu) \quad \Leftrightarrow \quad \exists h \in \mathcal{L}^1(E, \mathbb{B}, \mu), gf = h \quad \mu - p.p.$$

et dans ce cas

$$\int_E^* g d(f.\mu) = \int_E^* g f d\mu.$$

6.1.3 Mesures images

Théorème 55 *On considère un espace mesuré $(E_1, \mathbb{B}_1, \mu_1)$, un espace mesurable $(E_2, \mathbb{B}_2)$ et $\phi : E_1 \longrightarrow E_2$ une application $(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$-mesurable. Alors, l'application $\mu_2 : \mathbb{B}_2 \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ définie pour tout $B_2 \in \mathbb{B}_2$ par*

$$\mu_2(B_2) = \mu_1(\phi^{-1}(B_2)),$$

est une mesure sur $\mathbb{B}_2$.

Preuve : Exercice.$\square$

Définition 35 *Dans les conditions du théorème 1.7, on dit que μ_2 est la mesure image de la mesure μ_1 par la fonction ϕ. Cette mesure sera désormais notée $\phi(\mu_1)$.*

Théorème 56 (Intégration par rapport à une mesure image). *On considère un espace mesuré $(E_1, \mathbb{B}_1, \mu_1)$, un espace mesurable $(E_2, \mathbb{B}_2)$ et $\phi : E_1 \longrightarrow E_2$ une application $(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$-mesurable. Alors :*
1) $\forall f \in \mathcal{M}(E_2, \mathbb{B}_2, \overline{\mathbb{R}}^+)$, $f \circ \phi \in \mathcal{M}(E_1, \mathbb{B}_1, \overline{\mathbb{R}}^+)$ et

$$\int_{E_2}^{*} fd(\phi(\mu_1)) = \int_{E_1}^{*} (f \circ \phi) d\mu_1;$$

2) si $f \in \mathcal{M}(E_2, \mathbb{B}_2, \mathbb{R})$:

$$f \in \mathcal{L}^1(E_2, \mathbb{B}_2, \phi(\mu_1)) \quad \Leftrightarrow \quad f \circ \phi \in \mathcal{L}^1(E_1, \mathbb{B}_1, \mu_1),$$

et dans ce cas

$$\int_{E_2} fd(\phi(\mu_1)) = \int_{E_1} (f \circ \phi) d\mu_1.$$

Preuve : Exercice.$\square$

6.2 Convolution des fonctions intégrables

Nous allons vu $\mathcal{L}^1$ n'est pas stable par la multiplication usuelle. Dans cette partie, pour la mesure de Lebesgue ou de Borel dans $\mathbb{R}^n$, nous allons définir un type spécial de mulitiplication qui opère dans L^1 mais cette mulitiplication n'admet pas d'élément neutre.

Théorème 57 *Considérons deux fonctions $f, g \in \mathcal{L}^1(\beta^n)$.*
1) Si $t \in \mathbb{R}^n$ est fixé :

$$f(t - .)g \in \mathcal{L}^1(\beta^n) \quad \Leftrightarrow \quad f.g(t - .) \in \mathcal{L}^1(\beta^n),$$

et alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(t-x)g(x)d\beta^n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(t-x)d\beta^n(x).$$

2) $f(t - .)g \in \mathcal{L}^1(\beta^n)$ pour β^n-presque tout $t \in \mathbb{R}^n$.
3) Il existe une fonction $h \in \mathcal{L}^1(\beta^n)$ tel que $h = \phi$ β^n-p.p où

$$\phi(t) = \int_{\mathbb{R}^n}^{*} f(t-x)g(x)d\beta^n(x) \quad \text{pour tout} \quad t \in \mathbb{R}^n$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n}^{*} f(t-x)g(x)d\beta^n(x) \right) \beta^n(t) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} fd\beta^n \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} gd\beta^n \right).$$

Preuve : 1) Remarquons d'abord que les fonctions $f(t-.)g$ et $fg(t-.)$ (où t est fixé dans $\mathbb{R}^n$ sont boréliennes par composition et multiplication de telles fonctions. Pour $t \in \mathbb{R}^n$ fixé, considérons l'application $\gamma_t : x \mapsto t - x$. L'équivalence de l'enoncé résulte alors de l'égalité $\gamma_t(\beta^n) = \beta^n$ puisque :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}^{*} |f(x)g(t-x)| d\beta^n(x) &= \int_{\mathbb{R}^n}^{*} |f(x)g(t-x)| d(\gamma_t(\beta^n))(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}^{*} |f(\gamma_t(x))g(t-\gamma_t(x))| d\beta^n(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}^{*} |g(x)f(t-x)| d\beta^n(x),\end{aligned}$$

de sorte que les deux membres extrêmes ne peuvent être finis que conjointement.

Dans le cas d'intégrabilité, l'égalité des intégrales s'obtient par le même calcul sans les valeurs aboslues.

2) D'une part, par l'invariance de l'intégrale de Borel par les translations,

$$\int_{\mathbb{R}^n}^{*} |f(t-x)| d\beta^n(x) = \int_{\mathbb{R}^n}^{*} |f| d\beta^n.$$

D'autre part, la fonction $(x,t) \mapsto f(t-x)g(x)$ est borélienne sur $\mathbb{R}^{2n}$ dans $\mathbb{R}$, par composition et produit de fonctions boréliennes, puiqu'elle s'écrit $(f \circ \phi)(g \circ \pi_1)$ où $\phi : (x,t) \mapsto t - x$ et $\pi_1 : (x,t) \mapsto x$ sont des fonctions continues donc boréliennes. Dans ces conditions, il résulte du théorème 4.2 chapitre 5 de Fubini :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}^{*} \left(\int_{\mathbb{R}^n}^{*} |f(t-x)g(x) d\beta^n(x) \right) d\beta^n(t) &= \int_{\mathbb{R}^n}^{*} \left(|g(x)| \int_{\mathbb{R}^n}^{*} |f(t-x)| d\beta^n(t) \right) d\beta^n(x) \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}^{*} |f| d\beta^n \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n}^{*} |g| d\beta^n \right) < +\infty.\end{aligned}$$

Ceci permet d'affirmer que

$$\int_{\mathbb{R}^n}^{*} |f(.-x)g(x) d\beta^n(x) < +\infty \qquad \beta^n - p.p.,$$

c'est-à-dire

$$f(t-.)g \in \mathcal{L}^1(\beta^n) \qquad \text{pour presque partout} \qquad t \in \mathbb{R}^n.$$

3) L'inégalité

$$\int_{\mathbb{R}^n}^{*} \left(\int_{\mathbb{R}^n}^{*} |f(t-x)g(x) d\beta^n(x) \right) d\beta^n(t) < +\infty$$

obtenue ci-dessus conduit au résultat annoncé grâce aux théorèmes 4.2 et 4.3 du chapitre 5 et au calcul précédent reproduit sans les valeurs absolues.□

Définition 36 *On appelle produit de convolution des fonctions f et g β^n-intégrables la fonction*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(.-x)g(x)d\beta^n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(.-x)d\beta^n(x)$$

définie β^n-presque partout sur $\mathbb{R}^n$ et coincide β^n-presque partout avec une fonction intégrable. Cette fonction sera notée $f * g$.

Le produit de convolution vérifie

$(f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{L}^1(\beta^n), f_1 = f_2\ \beta^n - p.p.$ et $g_1 = g_2\ \beta^n - p.p.) \Rightarrow f_1 * g_1 = f_2 * g_2\ \beta^n - p.p.$

De sorte que le produit de convolution induit une application

$$C : L^1(\beta^n) \times L^1(\beta^n) \longrightarrow L^1(\beta^n).$$

$\square$

Théorème 58 *Dans $L^1(\beta^n) = L^1(\lambda^n)$ la convolution vérifie les propriétés suivantes :*

1) $*$ est commutative ;

2) $*$ est distributive par rapport à l'addition et l'application C est bilinéaire,

3) $*$ est associative ;

4) $\forall F, G \in L^1(\lambda^n)$, $N_1(F * G) \leq N_1(F)N_1(G)$.

5) $*$ ne possède pas d'élément neutre c'est-à-dire qu'il n'existe aucune fonction $u \in \mathcal{L}^1(\beta^n)$ telle que $f * u = u * f$ β^n-presque partout pour tout $f \in {}^1(\beta^n)$.

Preuve :1) Conséquence du théorème précédent.

2) Résulte aussitôt de la linéarité de l'intégrale.

3) L'associativité annoncée est établie si l'on prouve que

$$\forall f, g, h \in \mathcal{L}^1(\beta^n), (f * g) * h = f * (g * h)\ \beta^n - p.p.$$

La fonction $(x, y, t) \longrightarrow f(x)g(t - x - y)h(y)$ est borélienne et telle que :

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}}^* \left(\int_{\mathbb{R}}^* \left(\int_{\mathbb{R}}^* |f(x)g(t-x-y)h(y)| d\beta^n(x) \right) d\beta^n(y) \right) d\beta^n(t) \\ = & \left(\int_{\mathbb{R}}^* |f| d\beta^n \right) \left(\int_{\mathbb{R}}^* |g| d\beta^n \right) \left(\int_{\mathbb{R}}^* |h| d\beta^n \right) < +\infty. \end{aligned}$$

Alors, par applications des théorèmes de Fubini et de Tonelli, on obtient :

$$\begin{aligned} ((f * g) * h)(t) &= \int_{\mathbb{R}} (f * g)(t-y)h(y)d\beta^n(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)g(t-x-y)d\beta^n(x) \right) h(y)d\beta^n(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}} g(t-x-y)h(y)d\beta^n(y) \right) d\beta^n(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x)(g * h)(t-x)d\beta^n(x) = (f * (g * h)), \end{aligned}$$

ceci pour β^n-presque partout $t \in \mathbb{R}^n$.

4) Cette inégalité équivaut à l'inégalité analogue pour les représentants f et g de F et G dans $\mathcal{L}^1(\beta^n)$. Or cette dernière a déjà été obtenue dans la démonstration du théorème précédent.

5) Supposns qu'une telle fonction u existe, et désignons par $B(r)$ la boule euclidienne fermée de $\mathbb{R}^n$, centrée à l'origine et de rayon r. La suite de fonctions positives $|u|1_{B(\frac{1}{k})})_{k\geq 1}$ est une suite de $\mathcal{L}^1(\beta^n)$ qui converge vers 0 β^n-presque partout et et majorée par $|u| \in \mathcal{L}^1(\beta^n)$ du thérème de Lebesgue on déduit alors :

$$\lim_{k\longrightarrow +\infty} \int_{B(\frac{1}{k})} |u| d\beta^n = 0.$$

Par suite on peut trouver un $\delta > 0$ tel que

$$\int_{B(2\delta)} |u| d\beta^n < 1.$$

Comme $1_{B(\delta)} \in \mathcal{L}^1(\beta^n)$, il vient d'après l'hypothèse :

$$\begin{aligned} 1_{B(\delta)}(t) &= (1_{B(\delta)} * u)(t) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_{B(\delta)}(t-x)u(x)d\beta^n(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} 1_{B(\delta)+t} u d\beta^n = \int_{B(\delta)+t} u d\beta^n \end{aligned}$$

pour β^n-presque partout $t \in \mathbb{R}^n$. Mais comme aucune boule $B(r)$ avec $r > 0$ n'est négligeable, puisqu'une telle boule contient un pavé aux arêtes strictement positives. Il existe donc un $t \in \mathbb{B}(\delta)$ tel que :

$$1 = 1_{B(\delta)}(t) = \int_{B(\delta)+t} u d\beta^n.$$

Mais comme un tel t vérfifie aussi $B(\delta) + t \subset \mathbb{B}(2\delta)$, il vient finalement :

$$1 = \int_{B(\delta)+t} u d\beta^n \leq \int_{B(\delta)+t} |u| d\beta^n \leq \int_{B(2\delta)} |u| d\beta^n < 1,$$

ce qui constitue une contradiction.$\square$

Notations. Parmi les fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$ nous distinguerons les ensembles $\mathbb{C}(\mathbb{R}^n)$ de celles qui sont continues, $\mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$ qui sont continues à support compact, et $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ de celles qui sont indéfiniment dérivables à support compact.

D'autre part, à tout **multi-entier** $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ de **longueur** $|\alpha| = \alpha_n + \ldots + \alpha_n$ on associe l'opérateur de dérivation

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\lambda_1} x_1 \ldots \partial^{\alpha_n} x_n}$$

agissant sur les fonctions complexes de la variable réelle $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Il existe évidemment des focntions dans $\mathbb{K}(\mathbb{R})$ non identiquement nulles et, en multipliant n de telles fonctions on obtient une fonction non triviale de $\mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$. L'existence d'une fonction non trivialede $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, ou même dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, est moins évidente, et on se convaincra que la fonction Δ_a définie sur $\mathbb{R}^n$ par

$$\Delta_a(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{||x||^1 - a^2}} & \text{si} \quad ||x|| < a \\ 0 & \text{si} \quad ||x|| \geq a, \end{cases}$$

(où $||.||$ est la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$) est un élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dont le support est la boule euclidienne centrée à l'origine et de rayon a.

Théorème 59 *Considérons deux fonctions $f \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Alors :*
1) $f * g$ est définie partout sur $\mathbb{R}^n$;
2) $f * g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g$.

Preuve : Si K est le support de g et si $t \in \mathbb{R}^n$ est fixé, la fonction $f.g(t - .)$ est continue sur $\mathbb{R}^n$ et nulle en dehors du compact $(-K) + t$. Elle est donc β^n-intégrable, ainsi que la fonction $f(t - .)g$, et $f * g$ est bien définie partout sur $\mathbb{R}^n$. Pour la dérivabilité de $f * g$, considérons d'abord la dérivation $D^{(1,0,\ldots,0)}$. Il est immédiat, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et si $t = (t_1, \ldots, t_n)$, la dérivée

$$(D^{(1,0,\ldots,0)}(f(x)g(.-x)))(t) = \frac{\partial}{\partial t_1} f(x)g((t_1, \ldots, t_n) - x) = f(x)(D^{(1,0,\ldots,0)}g)(t - x)$$

existe, et qu'elle définit, pour tout t fixé, une fonction de x β^n-intégrable. De plus, si $P(t_0, r)$ est le pavé compact $[t_{0,1} - r, t_{0,1} + r] \times \ldots \times [t_{0,n} - r, t_{0,n} + r]$ de centre $t0 \in \mathbb{R}^n$ et de demi-arête $r > 0$, il est clair que K contient le support de $D^{(1,0,\ldots,0)}g$ et on vérifie facilement que, pour tout $(t, x) \in P(t_0, r) \times \mathbb{R}^n$:

$$|D^{(1,0,\ldots,0)}g(t - x)| \leq ||D^{(1,0,\ldots,0)}g||_\infty 1_{(-K)+B(t_0,r)}(x)$$

où la fonction du second membre est β^n-intégrable et indépendante de t. Il en résulte que les conditions de dérivation sous le signe intégrale sont réalisées pour $t_1 \in [t_{0,1} - r, t_{0,1} + r] \times \ldots \times [t_{0,n} - r, t_{0,n} + r]$ avec pour conséquence :

$$\begin{aligned} (D^{(1,0,\ldots,0)}(f * g))(t_0) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(D^{(1,0,\ldots,0)}g)(t_0 - x) d\beta^n(x) \\ &= (f * (D^{(1,0,\ldots,0)}g))(t_0). \end{aligned}$$

Cette démonstration peut évidemment se répéter pour n'importe quelle dérivée partielle première. Mais comme une telle dérivée de g appartient elle-même à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, nous voyons s'amorcer une récurrence et, en effectuant successivement un nombre fini de dérivations partielles premières convenables, il est possible d'atteindre le résultat annoncé pour une dérivation D^α quelconque.$\square$

Définition 37 *On appelle suite régularisante toute suite* $(\rho_k)_{k\geq 1}$ *de* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *vérifiant :*

a) pour tout entier $k \geq 1$ *:* $\rho_k \geq 0$ *et* $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_k d\lambda_n = 1;$

b) pour tout $\epsilon > 0$*, il existe un* $k_0 \geq 1$ *tel que :* $k \geq k_0 \Rightarrow supp(\rho_k) \subset B(0,\epsilon)$ *(où* $B(0,\epsilon)$ *est la boule euclidienne fermée centrée à l'origine et de rayon* ϵ*)*

1) On vérifie facilement qu'à partir de n'importe quelle fonction positive $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ qui n'est pas la fonction nulle, on peut construire une suite régularisante $(\rho_k)_{k\geq 1}$ en posant $\phi_1 = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \phi d\lambda_n\right)^{-1} \phi$, puis en définissant ρ_k pour tout $k \geq 2$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$ par $\rho_k(x) = k^n \rho_1(kx)$.

2) Si $(\rho_k)_{k\geq 1}$ est une suite régularisante, la propriété b) ci-dessus assure l'existence d'un compact K contenant les supportsde toute les fonction ρ_k. Il suffit de considérer un quelconque $\epsilon > 0$ et un k_0 qui lui est associé comme en b), puis prendre

$$K = B(0,\epsilon) \cup supp(\rho_1) \cup \ldots \cup supp(\rho_{k_0 - 1}).$$

□

Théorème 60 *Soit* $f \in \mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$ *et soit* $(\rho_k)_{k\geq 1}$ *une suite régularisante.*

Alors $(f * \rho_k)_{k\geq 1}$ *est une suite de* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *qui converge vers* f *à la fois uniformément sur* $\mathbb{R}^n$ *et dans* $(\mathcal{L}^p(\lambda_n), N_p)$ *pour tout réel* $p \geq 1$*. De plus les supports des* $f * \rho_k$ *sont contenus dans un compact fixe.*

Preuve : Soit $\epsilon > 0$. On utilise que toute fonction continue à support compact est uniformément continue, de sorte qu'il existe un $\eta > 0$ tel que,pour tout $t \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $x \in B(0,\eta)$ on ait $|f(t-x) - f(t)| < \epsilon$. De plus, on sait qu'il existe un $k_0 \geq 1$ tel que : $k \geq k_0 \Rightarrow supp(\rho_k) \subset B(0,\eta)$. Enfin, comme $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_k d\lambda_n = 0$, on obtient pour tout $t \in \mathbb{R}^n$ et tout $k \geq k_0$:

$$\begin{aligned}
|(f * \rho_k)(t) - f(t)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} (f(t-x) - f(t))\rho_k(x) d\lambda_n(x)\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |(f(t-x) - f(t))\rho_k(x)| d\lambda_n(x) \\
&= \int_{B(0,\eta)} |(f(t-x) - f(t))\rho_k(x)| d\lambda_n(x) \\
&\leq \epsilon \int_{B(0,\eta)} \rho_k(x) d\lambda_n(x) = \epsilon.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $k_0 \geq 1$ tel que $||f - \rho_k - f||_\infty \leq \epsilon$ pour tout $k \geq k_0$, ce qui est la convergence uniforme désirée.

Si K_1 est le support de f et si K_2 est un compact contenant les supports de tous les ρ_k, en observant que

$$(f * \rho_k)(t) = \int_{K_2} f(t-x)\rho_k(x)d\lambda_n(x),$$

on voit que, pour tout $k \geq 1$, $(f * \rho_k)(t) =$ est nul pour tout t hors du compact $K_1 + K_2$, ce qui démontre la seconde partie du théorème. De plus, chaque fonction $(f * \rho_k) - f$ est nulle hors du compact $K_3 = (K_1 + K_2) \cup K_1$. Alors, un $\epsilon > 0$ étant fixé, si k_0 lui est associé comme ci-dessus, pour tout $k \geq k_0$ et pour tout $p \geq 1$ il vient :

$$\begin{aligned}(N_p((f * \rho_k) - f))^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |(f * \rho_k) - f|^p d\lambda_n = \int_{K_3} |(f * \rho_k) - f|^p d\lambda_n \\ &= \leq (||(f * \rho_k) - f||_\infty)^p \lambda_n(K_3) < \epsilon^p \lambda_n(K_3),\end{aligned}$$

ce qui établit les convergence en moyenne d'ordre p annoncées.□

Rappelons que $\mathbb{K}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{L}^1(\lambda), N_1)$ (voir exercie 2 T.D 4) et que, plus généralement, $\mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $(\mathcal{L}^p(\lambda_n), N_p)$ pour tout réel $p \geq 1$. Le résultat suivant est plus fort puisque $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$.

Corollaire 35 *L'ensemble $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $(\mathcal{L}^p(\lambda_n), N_p)$ pour tout réel $p \geq 1$.*

Preuve : Soit $f \in \mathcal{L}^p(\lambda_n)$ et soit $\epsilon > 0$. Comme $\mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $(\mathcal{L}^p(\lambda_n), N_p)$, il existe une focntion $g \in \mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$ telle que $N_p(f-g) < \frac{\epsilon}{2}$. Mais le théorème précédent assure l'existence d'une fonction $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ pour laquelle $N_p(g-h) < \frac{\epsilon}{2}$. L'inégalité $N_p(f-h) < \epsilon$ résulte alors de l'inégalité triangulaire, et la densité annoncée est établie.□

Définition 38 *Une fonction réelle ou complexe définie sur $\mathbb{R}^n$ est dite nulle à l'infini si*

$$\lim_{||x|| \longrightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

On notera qu'une fonction complexe nulle à l'infini est bornée hors d'un compact de $\mathbb{R}^n$. Il en résulte que si, de plus, elle est continue sur $\mathbb{R}^n$, elle est nécessairement bornée sur $\mathbb{R}^n$.

Lemme 14 *Soit $(h_k)_{k \geq 1}$ une suite de focntions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction h. Alors, si chaque h_k est nulle à l'infini, ou si chaque h_k est uniforménent continue sur $\mathbb{R}$, h possède la même propriété.*

Preuve : D'après la convergence uniforme, si $\epsilon > 0$ est donné, il existe $k_0 \geq 1$ tel que $|h_{k_0}(x) - h(x)| < \epsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Si les h_k sont nulles à l'infini, c'est le cas pour h_{k_0} et l'on peut trouver un $M > 0$ tel que $||x|| \geq M$ entraîne $|h_{k_0}(x)| < \epsilon$. Par suite :

$$|h(x)| \leq |h(x) - h_{k_0}(x)| + |h_{k_0}(x)| < 2\epsilon$$

dès que $||x|| \geq M$, ce qui démontre que h est nulle à l'infini.

Si les h_k sont uniformément continues sur $\mathbb{R}^n$, c'est le cas pour h_{k_0} et il existe un $\eta > 0$ tel que $|h_{k_0}(x) - h_{k_0}(t)| < \epsilon$ si $|x-t| < \eta$. Mais cette dernière condition impose :

$$|h(x) - h(t)| \leq |h(x) - h_{k_0}(x)| + |h_{k_0}(x) - h_{k_0}(t)| + |h_{k_0}(t) - h(t)| < 3\epsilon,$$

ce qui établit la continuité uniforme de h.□

Théorème 61 *Pour des réels $p > 1$ et q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, considérons des focntions $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$ et $g \in \mathcal{L}^q_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$. Alors :*

1) $f * g$ est définie partout sur $\mathbb{R}^n$;

2) $f * g$ est bornée et $||f * g||_\infty \leq N_p(f)N_q(g)$;

3) $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$;

4) $f * g$ est nulle à l'infini.

Preuve : 1) Conséquence de l'inégalité de Hölder et du fait que si $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$ alors $f(t - .) \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$.

2) Provient de l'inégalité de Hölder qui, pour tout $t \in \mathbb{R}^n$, donne :

$$\begin{aligned} |(f * g)(t)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(t-x)g(x)d\lambda_n(x) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(t-x)g(x)|d\lambda_n(x) = N_1(f(t-.)g) \\ &\leq N_p(f(t-.))N_q(g) = N_p(f)N_q(g). \end{aligned}$$

3) et 4) Comme $\mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$ et dans $\mathcal{L}^q_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$, il existe des suites $(f_k)_{k\geq 1}$ et $(g_k)_{k\geq 1}$ qui convergent respectivement vers f et g dans $(\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\lambda_n), N_p)$ et $(\mathcal{L}^q_{\mathbb{C}}(\lambda_n), N_q)$. D'après 2), on obtient, pour tout $t \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} |(f_k * g_k)(t) - (f * g)(t)| &= |((f_k - f) * g_k)(t) - (f * (g_k - g))(t)| \\ &\leq |((f_k - f) * g_k)(t)| + |(f * (g_k - g))(t)| \\ &\leq N_p(f_k - f)N_q(g_k) + N_p(f)N_q(g_k - g) \\ &\leq N_p(f_k - f)(N_q(g) + 1) + N_p(f)N_q(g_k - g) \end{aligned}$$

La dernière inégalité étant valable dès que k est suffisamment grand puisque la suite $N_q(g_k)_{k\geq 1}$ converge vers $N_q(g)$. Il en résulte que la suite $(f_k * g_k)_{k\geq 1}$ converge uniformément vers $f * g$ sur $\mathbb{R}^n$. or les focntions $f_k * g_k$ sont dans $\mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$, de sorte qu'elle sont à la fois uniformément continues et nulles à l'infini, et il reste à appliquer le lemme précédent.□

6.3 Convolution des mesures finies

Définition 39 *On appelle produit de convolution des mesures finie μ et ν sur $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}$ la mesure $\alpha_n(\mu \otimes \nu)$, image de la mesure produit $\mu \otimes \nu$ sur $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^{2n}}$ par l'addition $\alpha_n : (x, y) \mapsto x + y$ de $\mathbb{R}^{2n}$ sur $\mathbb{R}^n$. Cette mesure sera notée $\mu * \nu$:*

$$\mu * \nu = \alpha_n(\mu \otimes \nu).$$

Théorème 62 *1) Si μ et ν sont deux mesures finies sur $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}$, et si $B \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}$:*

$$(\mu * \nu)(B) = \int_{\mathbb{R}^n} \nu(B - x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu(B - y) d\nu(y).$$

$$(\mu * \nu)(B) = \int_{(\mathbb{R}^n)^2} 1_B(x + y) d(\mu \otimes \nu)(x, y).$$

2) Si μ et ν sont des mesures finies sur $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}$, il en est de même pour $\mu * \nu$. Plus précisement : $(\mu * \nu)(\mathbb{R}^n) = \mu(\mathbb{R}^n)\nu(\mathbb{R}^n)$.

3) Le produit de convolution des mesures finies est commutatif et associatif.

4) Le produit de convolution des mesures finies admet pour élément neutre δ_0, la mesure de Dirac à l'origine.

5) Si μ et ν sont deux mesures finies sur $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}$ admettant des densités f et g par rapport à β^n, $\mu * \nu$ ademt $f * g$ pour densité par rapport à β^n.

Preuve : 1) Conséquence de la relation

$$(\mu * \nu)(B) = (\mu \otimes \nu)(\alpha_n^{-1}(B)),$$

des expressions de la mesure produit d'un ensemble, et des égalités

$$\alpha_n^{-1}(B)(x, .) = \alpha_n^{-1}(B)(., x) = B - x.$$

2) Résulte de 1) etr de $\mathbb{R}^n - x = \mathbb{R}^n$:

$$(\mu * \nu)(\mathbb{R}^n) = \int_{\mathbb{R}^n} \nu(\mathbb{R}^n - x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \nu(\mathbb{R}^n) d\mu = \nu(\mathbb{R}^n)\mu(\mathbb{R}^n).$$

3) a) Commutativité. Conséquence évidente des formules de 1) puisque le nom de la variable d'intégration n'a aucune importance.

b) Associativité. Si μ,ν et π sont des mesures finies sur $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}$, il en estr de même de $\mu * \nu$ et $\nu * \pi$, ce qui donne un sens aux mesures $(\mu * \nu) * \pi$ et $\mu * (\nu * \pi)$. L'identité de ces deux mesures résulte maintenant des égalités suivantes où $B \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}$:

$$\begin{aligned} ((\mu * \nu) * \pi)(B) &= \int_{\mathbb{R}^n} (\mu * \nu)(B - z) d\pi(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mu(B - y - z)\nu(y) \right) d\pi(z) \\ &= \int_{(\mathbb{R}^n)^2} \mu(B - y - z) d(\nu \otimes \pi)(y, z) = \int_{(\mathbb{R}^n)^2} (\mu(B - .) \circ \alpha_n) d(\nu \otimes \pi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mu(B - t) d(\alpha_n(\nu \otimes \pi)) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu(B - t) d(\nu \otimes \pi)(t) = (\mu * (\nu * \pi))(B). \end{aligned}$$

4) Pour toute mesure finie μ sur $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}$ et tout $B \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}$ il vient d'après 1) et le théorème 1.2 :

$$(\mu * \delta_0)(B) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu(B - x) d\delta_0(x) = \mu(B - 0) = \mu(B).$$

5) Pour tout $B \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}$ on obtient :

$$\begin{aligned}
(\mu * \nu)(B) &= \int_{(\mathbb{R}^n)^2} 1_B(x+y)d(\mu \otimes \nu)(x,y) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} 1_B(x+y)d\mu(x) \right) d\nu(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} 1_B(x+y)f(x)d\beta^n(x) \right) g(y)d\beta^n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} 1_B(x)f(x-y)d\beta^n(x) \right) g(y)d\beta^n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} 1_B(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)d\beta^n(y) \right) d\beta^n(x) = \int_B (f*g)d\beta^n,
\end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété.□

6.4 Exercices corrigés

Exercice 1. *Soit $(E, \mathbb{B}, \mu)$ un espace mesuré où la mesure μ est discrète.*
1) Décrire les ensembles $\mathcal{L}^p(\mu)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$.
2) On suppose que $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta_{x_n}$ avec $\inf\{\alpha_n, n \geq 1\} > 0$.
Comparer $\mathcal{L}^p(\mu)$, $\mathcal{L}^q(\mu)$ et $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ si $1 \leq p \leq q < +\infty$.

Solution : 1) Ecrivons $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta_{x_n}$. Si $1 \leq p < +\infty$, on a :

$$\mathcal{L}^p(\mu) = \left\{ f \in \mathcal{M}(E, \mathbb{B}, \mathbb{R}), |f|^p \in \mathcal{L}^1(\mu) \right\} = \left\{ f \in \mathcal{M}(E, \mathbb{B}, \mathbb{R}), \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n |f(x_n)|^p < +\infty \right\}.$$

D'autre part, pour une fonction $f \in \mathcal{M}(E, \mathbb{B}, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
f \text{ essentiellement bornée} &\iff \exists \alpha \geq 0, \mu(\{|f| > \alpha\}) = 0 \\
&\iff \exists \alpha \geq 0, (\forall n \geq 1, \alpha_n > 0), \delta_{x_n}(\{|f| > \alpha\}) = 0 \\
&\iff \exists \alpha \geq 0, (\forall n \geq 1, \alpha_n > 0), |f(x_n)| \leq \alpha \\
&\iff \sup\{|f(x_n)|; \alpha_n > 0\} < +\infty,
\end{aligned}$$

autrement dit : $\mathcal{L}^\infty(\mu) = \{f \in \mathcal{M}(E, \mathbb{B}, \mathbb{R}), \sup\{|f(x_n)|; \alpha_n > 0\} < +\infty\}$.

2) Compte tenu d el'hypothèse faite sur les α_n, et si $f \in \mathcal{M}(E, \mathbb{B}, \mathbb{R})$ (ce qui est le cas si $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$), on a les implications suivantes :

$$\begin{aligned}
f \in \mathcal{L}^p(\mu) \quad &\Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n |f(x_n)|^p < +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} |f(x_n)|^p = 0 \\
&\Rightarrow \quad \exists N \geq 1, \forall n \geq N, |f(x_n)|^p \leq 1 \\
&\Rightarrow \quad \exists N \geq 1, \alpha_n |f(x_n)|^q = \alpha_n (|f(x_n)|^p)^{\frac{q}{p}} \leq \alpha_n |f(x_n)|^p,
\end{aligned}$$

et par comparaison de séries on obtient :

$$f \in \mathcal{L}^p(\mu) \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n |f(x_n)|^q < +\infty \quad \Rightarrow \quad f \in \mathcal{L}^q(\mu).$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{L}^p(\mu) \quad & \Rightarrow \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} |f(x_n)|^p = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} |f(x_n)| = 0 \\ & \Rightarrow \quad \sup\{|f(x_n)|; n \geq 1\} < +\infty \quad \Rightarrow \quad f \in \mathcal{L}^\infty(\mu). \end{aligned}$$

Finalement, on a démontré :

$$1 \leq p \leq q < +\infty \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}^p(\mu) \subset \mathcal{L}^q(\mu) \subset \mathcal{L}^\infty(\mu).$$

□

Exercice 2.*Soit $(E, \mathbb{B}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f \in \mathcal{M}(E, \mathbb{B}, \overline{\mathbb{R}}_+)$. Par un exemple montrer que si μ est complète, $f.\mu$ peut ne pas l'être.*

Solution : A partir d'un espace mesuré $(E, \mathbb{B}, \mu)$ où μ est complète, une mesure sur $\mathbb{B}$ de type $f.\mu$ et non complète peut être trouvée dès qu'il existe une ensemble $A \subset E$ tel que $A \notin \mathbb{B}$. Il suffit alors de prendre pour f la fonction nulle, de sorte que $f.\mu$ est la mesure nulle sur $\mathbb{B}$, qui n'est pas complète puisque $\mathbb{B} \neq \mathcal{P}(E)$. Dans les mêmes conditions, un exemple o'u $f.\mu$ est non complète sans être la mesure nulle peut être trouvé s'il existe un $B \in \mathbb{B}$ tel que $A \subset B$ et $\mu(E \setminus B) > 0$. En effet, dans ce cas, la mesure $1_{E \setminus B}.\mu$ n'est pas complète puisque

$$(1_{E \setminus B}.\mu)(B) = \int_B 1_{E \setminus B} d\mu = \int_E 1_{E \setminus B} 1_B d\mu = 0,$$

tandis que $1_{E \setminus B}.\mu$ n'est pas nulle car

$$(1_{E \setminus B}.\mu)(E \setminus B) = \int_{E \setminus} 1_{E \setminus B} d\mu = \mu(E \setminus B) > 0.$$

Plus concrètement, un exemple de ce second type est obtenu en prenant $E = [0, 3]$, $\mathbb{B} = \{\emptyset, [0, 1],]1, 3], [0, 3]\}$, et pour μ la restriction à $\mathbb{B}$ de la mesure de Lebesgue λ. La mesure μ est évidemment complète puisuqe l'ensemble vide est le seul élément de $\mathbb{B}$ qui soit de mesure μ nulle, mais la mesure $1_{[0,1]}.\mu$ ne l'est pas car $[2, 3] \notin \mathbb{B}$ bien que $(1_{[0,1]}.\mu)(]1, 3]) = 0$.□

Exercice 3. *On considère un espace mesurable $(E, \mathbb{B})$ et deux mesures σ-finies sur μ et ν sur $\mathbb{B}$ telle que $\nu << \mu$ et $\mu << \nu$. Que peut-on dire*

1) des ensembles $\mathbb{N}_\nu$ et $\mathbb{N}_\mu$?

2) des densités de ν par rapport à μ et de μ par rapport à ν ?

Solution : 1) Il est immédiat que $\mathbb{N}_\mu = \mathbb{N}_\nu$.

2) Du théorème de Radon-Nykodym, il résulte qu'on peut trouver des densités f et g dans $\mathcal{M}(E, \mathbb{B}, \mathbb{R}_+)$ telles que $\nu = f.\mu$ et $\mu = g.\nu$. Alors, tout $B \in \mathbb{B}$ est tel que

$$\nu(B) = \int_B^* d\mu = \int_B^* fd(g.\nu) = \int_B^* fgd\nu = ((fg).\nu(B),$$

si bien que $\nu = (fg).\nu$, d'où l'on déduit $fg = 1$ ν-presque partout, puisque ν est σ-finie. On a donc ν-preque partout (ou, de façon équivalente d'après 1), μ-presque partout) :

$$f > 0, g > 0 \qquad \text{et} \qquad g = \frac{1}{f}.$$

□

Exercice 4. *1) Montrer par un exemple que l'image d'une mesure complète n'est pas nécessairement complète.*

2) a) On considère une focntion $\phi : E_1 \longrightarrow E_2$ et une tribu $\mathbb{B}_1$ sur E_1. Montrer que, parmi les tribus B_2 sur E_2 telles que ϕ soit $(B_1, \mathbb{B}_2)$-mesurable, il en existe une, $\mathbb{C}_2$, qui est plus riche que toutes les autres que l'on décrira.

b) On suppose que $\mathbb{B}_1$ est muni d'une mesure complète μ_1. Montrer que, sur $\mathbb{C}_2$, $\phi(\mu_1)$ est complète.

Solution : 1) Un exemple est fourni par les mesures de Lebesgue et Borel en remarquant que l'identité $i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est $(\mathbb{B}_\lambda, \mathbb{B}_\mathbb{R})$-mesurable et que $\beta = i(\lambda)$, et en se rappelant que λ est complète et que β ne l'est pas.

2) a) Pour que ϕ soit $(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$-mesurable, il faut et il suffit que $\mathbb{B}_2$ soit contenu $\mathbb{C}_2 = \{A_2 \subset E_2, \phi^{-1}(A_2) \subset \mathbb{B}_1\}$. Or, il est facile de vérifier que $\mathbb{C}_2$ est une tribu sur E_2 ; c'est donc la tribu cherchée.

b) Supposons maintenant $A_2 \subset C_2 \subset E_2$ avec $C_2 \in \mathbb{C}_2$ et $(\phi(\mu_1))(C_2) = 0$. Par définition de $\phi(\mu_1)$ on alors $\mu_1(\phi^{-1}(C_2)) = 0$, et aussi $\phi^{-1}(A_2) \subset \phi^{-1}(C_2)$, de sorte que $\phi^{-1}(A_2) \in \mathbb{B}_1$ puisque μ_1 est complète. Mais alors, par définition de $\mathbb{C}_2$, il en résulte $A_2 \in \mathbb{C}_2$ et la complètude de $\phi(\mu_1)$ est ainsi prouvée.□

Exercice 5. *1) Soit un intervalle compact $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$, et soit $\epsilon \in \left]0, \dfrac{b-a}{2}\right[$.*

a) Donner l'exemple d'une fonction $\phi \in \mathbb{K}(\mathbb{R})$ telle que $0 \leq \phi \leq 1$ et $\phi(x) = 1$ pour tout $x \in [a - \epsilon, b + \epsilon]$. Justifier l'existence d'un $\alpha > 0$ tel que $\int_\mathbb{R} \alpha \Delta_\epsilon d\lambda = 1$.

b) Montrer que la fonction $\psi = \alpha \Delta_\epsilon * \phi$ possède les propriétés suivantes : $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi(x) = 1$ pour tout $x \in [a, b]$.

2) a) Montrer que si K est un compact de $\mathbb{R}$, il existe un $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $1_K \leq \psi$.

b) En déduire qu'une fonction $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathbb{B}_\lambda, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad f\psi \in \mathcal{L}^1(\lambda),$$

est localement Lebesgue-intégrable.

Solution : 1) a) Il suffit de penser à une fonction du type f_n utilisée pour la solution de l'exercice . D'autre part, la fonction Δ_ϵ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, donc dans $\mathcal{L}^1(\lambda)$, et son intégrale est strictement positive puisque $\Delta_\epsilon \geq 0$ et $\Delta_\epsilon(x) > 0$ pour tout $x \in]x-\epsilon, x+\epsilon[$. On prend alors $\alpha = \left(\int_{\mathbb{R}} \Delta_\epsilon d\lambda\right)^{-1}$.

b) $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \psi(x) = \int_{\mathbb{R}} \alpha\Delta_\epsilon(y)\phi(x-y)d\lambda(y) \leq \int_{\mathbb{R}} \alpha\Delta_\epsilon d\lambda = 1.$$

Enfin, si $x \in [a,b]$:

$$\Delta_\epsilon(x-y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y \in]x-\epsilon, x+\epsilon[\quad \Rightarrow \quad y \in [a-\epsilon, b+\epsilon] \quad \Rightarrow \quad \phi(y) = 1,$$

d'o'u l'on déduit :

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int_{\mathbb{R}} \alpha\Delta_\epsilon(x-y)\phi(y)d\lambda(y) = \int_{]x-\epsilon,x+\epsilon[} \alpha\Delta_\epsilon(x-y)d\lambda(y) \\ &= \int_{]x-\epsilon,x+\epsilon[} \alpha\Delta_\epsilon(y-x)d\lambda(y) = \int_{]-\epsilon,\epsilon[} \alpha\Delta_\epsilon d\lambda = 1. \end{aligned}$$

2) a) Soit K un compact de $\mathbb{R}$. Alors K est contenu dans un intervalle compact $[a,b]$, $a < b$, et une fonction $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ possédant les propriétés ci-dessus vis-à-vis de $[a,b]$ convient puisque $1_k \leq 1_{[a,b]} \leq \psi$.

b) Nous allons montrer $f1_K \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ pour tout compact K de $\mathbb{R}$. Par hypothèse, on a en particulier $f\psi \in \mathcal{L}^1(\alpha)$ pour toute fonction ψ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et positive, et par suite $f^+\psi = (f\psi)^+ \in \mathcal{L}^1(\alpha)$. Mais si K est un compact de $\mathbb{R}$, d'après le a) ci-dessus il existe $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $1_K \leq \psi$ et il en résulte $0 \leq f^+1_K \leq f^+\psi$, puis $f^+\psi \in \mathcal{L}^1(\alpha)$. On prouverait de même que $f^-1_K \in \mathcal{L}^1(\lambda)$, et finalement on a obtenu $f1_K = f^+1_K - f^-1_K \in \mathcal{L}^1(\alpha)$.□

Exercice 6. *Montrer que si une fonction $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n, \mathbb{B}_{\lambda_n}, \mathbb{R})$ est telle que*

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad f\phi \in \mathcal{L}^1(\lambda_n) \qquad et \qquad \int_{\mathbb{R}^n} f\phi d\lambda_n = 0$$

alors $f = 0$ λ_n-presque partout.

Solution : D'après l'exercice 4.4, il suffit de montrer que la condition du présent exercice implique la condition semblable où $\mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$ remplace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Pour cela notons d'abord qie f est localement Lebesgue-intégrable (exercice 5), si bien que $f\phi \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ pour chaque $\phi \in \mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$ (exercice 4.2).

Maintenant, si $\phi \in \mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$, il existe une suite $(\phi_k)_{k\geq 1}$ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers ϕ uniformément, les supports des ϕ_k étant contenus dans un compact fixe K dont on peut toujours supposer (en le remplaçant au besoin par le compact $K \cup supp(\phi)$) qu'il contient le support de ϕ. Deux cas sont à envisager :

a) Si $\displaystyle\int_K |f| d\lambda_n = 0$, alors :

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} f\phi d\lambda_n\right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f||\phi| d\lambda_n = \int_K |f||\phi| d\lambda_n \leq (\sup_{x\in K} |\phi(x)|) \int_{\mathbb{R}^n} |f| d\lambda_n = 0$$

et par conséquant : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f\phi d\lambda_n = 0.$

b) Si $\displaystyle\int_K |f| d\lambda_n > 0$, pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver un $k \geq 1$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, |\phi(x) - \phi_k(x)| \leq \epsilon \left(\int_K |f| d\lambda_n\right)^{-1},$$

d'où il résulte (puisque, par hypothèse, $\displaystyle\int \mathbb{R}^n f\phi_k d\lambda_n = 0$) :

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^n} f\phi d\lambda_n\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f\phi d\lambda_n - \int_{\mathbb{R}^n} f\phi_k d\lambda_n\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(\phi - \phi_k) d\lambda_n\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f||\phi - \phi_k| d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} |f||\phi - \phi_k| d_l a_n \\
&\leq \epsilon \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f| d\lambda_n\right)^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f| d\lambda_n\right) = \epsilon,
\end{aligned}$$

ce qui prouve encore que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f\phi d\lambda_n = 0.\square$

Exercice 7. *Pour* $(m, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ *on considère la focntion* $g_{m,\alpha}$ *définie pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *par* $g_{m,\alpha}(x) = \dfrac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\alpha^2}}$.

1) Si (p, σ) *et* (q, τ) *sont dans* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$*, obtenir par le calcul*

$$g_{p,\sigma} * g_{q,\tau} = g_{p+q,\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}.$$

2) Peut-on prévoir que $g_{p,\sigma} * g_{q,\tau}$ *serait continue sur* $\mathbb{R}$ *et Lebesgue-intégrable ?*

Solution : 1) On vérifie facilement que $g_{p,\sigma}$ et $g_{q,\tau}$ appartiennent à $\mathcal{L}^1(\lambda)$ (et même à $\mathcal{L}^p(\lambda)$ pour tout $p \geq 1$), si bien que $g_{p,\sigma} * g_{q,\tau}$ est définie partout.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on calcule

$$\begin{aligned}
(g_{p,\sigma} * g_{q,\tau})(t) &= \int_{\mathbb{R}} g_{p,\sigma}(t-x) g_{q,\tau}(x) dx \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma\tau} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{(t-x-p)^2}{2\sigma^2} - \frac{(x-q)^2}{2\tau^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma\tau} \exp\left(-\frac{(t-p-q)^2}{2(\sigma^2+\tau^2)}\right) \\
&\quad \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{(t-p-q)^2}{2(\sigma^2+\tau^2)} - \frac{(t-x-p)^2}{2\sigma^2} - \frac{(x-q)^2}{2\tau^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma\tau} \exp\left(-\frac{(t-p-q)^2}{2(\sigma^2+\tau^2)}\right) \\
&\quad \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{[(t-p-q)^2\tau^2 + (x-q)(\sigma^2+\tau^2)]^2}{2\sigma^2\tau^2(\sigma^2+\tau^2)}\right) dx
\end{aligned}$$

et le changement de variable

$$x = \frac{u\sigma t\sqrt{\sigma^2+\tau^2} - (t-p-q)^2\tau^2}{\sigma^2+\tau^2} + q$$

donne

$$\begin{aligned}
(g_{p,\sigma} * g_{q,\tau})(t) &= \frac{1}{2\pi\sigma\tau} \exp\left(-\frac{(t-p-q)^2}{2(\sigma^2+\tau^2)}\right) \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \frac{\sigma\tau}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-p-q)^2}{2(\sigma^2+\tau^2)}\right) = g_{p+q,\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}(t),
\end{aligned}$$

en utilisant

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}.$$

2) La continuité était prévisible par le théorème 2.5 chapitre 6, tandis que l'intégrabilité provient de celle de chacune des deux fonctions $g_{p,\sigma}$ et $g_{q,\tau}$ (théorème 2.1 chapitre 6).□

Chapitre 7

Transformation de Fourier

7.1 Transformation de Fourier des mesures finies

Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^n$, nous noterons $< x, y >= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ le produit scalaire euclidien de x et de y.

Définition 40 *Deux constantes réelles non nulles $A > 0$ et B ayant été choisies, on appelle transformée de Fourier d'une mesure finie μ sur $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}$ la fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ définie sur $\mathbb{R}^n$ par*

$$x \mapsto A \int_{\mathbb{R}^n} e^{iB<x,y>} d\mu(y).$$

L'application qui, à toute mesure finie sur $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}$ associe sa transformée de Fourier, est la transformation de Fourier.

En dehors de quelques particularités qui seront signalées plus loin, les propriétés générales de la transformation de Fourier sont indépendantes du choix des cosntantes A et B. Ce choix n'a donc rien d'essentiel et il varie souvent d'un domaine de l'analyse à un autre.

La suite de ce chapitre est écrite en adoptant $A = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}$, $B = -1$, et nous noterons $\hat{\mu}$ la transformée de Fourier de μ définie par la formule

$$\hat{\mu}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,y>} d\mu(y).$$

La fonction $y \mapsto e^{-i<x,y>}$ est bien intégrable par rapport à μ, car elle est continue, donc borélienne, et de plus :

$$\int_{\mathbb{R}^n}^{*} |e^{-i<x,y>}| d\mu(y) = \int_{\mathbb{R}^n}^{*} 1 d\mu = \mu(\mathbb{R}^n) < +\infty.$$

Exemple. Si $a \in \mathbb{R}^n$, la transformée de la mesure de Dirac δ_a sur $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}$ est donnée par

$$\hat{\delta_a}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,y>} d\delta_a(y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-i<x,a>}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Plus généralement, si $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta_{a_n}$ est une mesure discrète finie sur $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\hat{\mu}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e^{-i<x,a_n>}.$$

Théorème 63 *Pour toute mesure μ finie sur $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}$:*
1) $\hat{\mu}$ est bornée. Plus précisement : $||\hat{\mu}||_\infty \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \mu(\mathbb{R}^n) = \hat{\mu}(0)$.
2) $\hat{\mu}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$.

Preuve : 1) Evidente.

2) La continuité de $\hat{\mu}$ s'obtient immédiatement par le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre mais nous voulons établir la continuité uniforme. Pour cela considérons $\epsilon > 0$, un compact $K \subset \mathbb{R}^n$, et supposons $y \in K$. La fonction $z \mapsto e^z$ étant continue sur $\mathbb{C}$, il existe un $\eta > 0$, dépendant de y, tel que l'on ait $|1 - e^{-i<x,y>}| < \epsilon$ dès que $|-i < x, y > | = | < x, y > | < \eta$. Mais comme la norme euclidienne $||.||$ est continue, donc bornée, sur le compact K, l'inégalité

$$| < x, y > | \leq ||x|| ||y|| \leq ||x|| \sup\{||z||; z \in K\}$$

assure l'existence d'un $\alpha > 0$, ne dépendant que de K, tel que $||x|| < \alpha$ entraîne $|x, y > | < \eta$ et par suite $|1 - e^{-i<x,y>}| < \epsilon$.

Alors, quels que soient x_1 et x_2 dans $\mathbb{R}^n$ tels que $||x_1 - x_2|| < \alpha$, il vient

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\hat{\mu}(x_1) - \hat{\mu}(x_2)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i<x_1,y>} - e^{-i<x_2,y>}| d\mu(y) \\
&= \int_K |e^{-i<x_1,y>} - e^{-i<x_2,y>}| d\mu(y) + \int_{\mathbb{R}^n \setminus K} |e^{-i<x_1,y>} - e^{-i<x_2,y>}| d\mu(y) \\
&= \int_K |1 - e^{-i<x_1 - x_2,y>}| d\mu(y) + \int_{\mathbb{R}^n \setminus K} |e^{-i<x_1,y>} - e^{-i<x_2,y>}| d\mu(y) \\
&\leq \epsilon\mu(K) + 2\mu(\mathbb{R}^n \setminus K) \leq \epsilon\mu(\mathbb{R}^n) + 2\mu(\mathbb{R}^n \setminus K).
\end{aligned}$$

Il reste à montrer que l'on peut choisir K de manière que $\mu(\mathbb{R}^n \setminus K)$ soit aussi petit qu'on veut. Or, on peut trouver dans $\mathbb{R}^n$ une suite croissante $(K_p)_{p\geq 1}$ de compacts recouvrant $\mathbb{R}^n$, et comme la suite $(\mathbb{R}^n \setminus K_p)_{p\geq 1}$ est décoissante, d'intersection vide, et que μ est finie, elle est telle que $\inf_{p\geq 1} \mu(\mathbb{R}^n \setminus K_p) = 0$. Il est donc possible de choisir K vérifiant $\mu(\mathbb{R}^n \setminus K) < \epsilon$, et alors la condition $||x_1 - x_2|| < \alpha$ entraîne $(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\hat{\mu}(x_1) - \hat{\mu}(x_2)| \leq (2\pi)^{\frac{n}{2}} (\mu(\mathbb{R}^n) + 2)\epsilon$, ce qui établit la continuité uniforme.$\square$

Théorème 64 *1) Si μ et ν sont deux mesures finies sur $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}$ et si $\alpha \in \mathbb{R}_+$:*

a) $\mu \hat{+} \nu = \hat{\mu} + \hat{\nu}$;

b) $\hat{\alpha\mu} = \alpha\hat{\mu}$;

c) $\mu \hat{*} \nu = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{\mu}.\hat{\nu}$;

d) pour toute application linéraire $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$: $u(\hat{\mu}) = \hat{\mu} \circ u^t$; en particulier, si S est la symétrie $x \mapsto -x$: $S(\hat{\mu}) = \hat{\mu} \circ S = \bar{\hat{\mu}}$;

e) si $a \in \mathbb{R}^n$ et si T_a est la translation sur $\mathbb{R}^n$, $x \mapsto x + a$: $T_a(\mu) = \delta_a * \mu$ et $T_a(\hat{\mu}) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{\delta_a}.\hat{\mu} = e^{-i<.,a>}.\hat{\mu}$.

2) Si μ et ν sont deux mesures finies respectivement sur $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^m}$ et $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}$:

$$\mu \hat{\otimes} \nu = \hat{\mu} \otimes \hat{\nu}.$$

Preuve : 1) Les points a) et b) se vérifient immédiatement. le point c) s'établit en écrivant que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{\frac{n}{2}} \mu \hat{*} \nu(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,y>} d(\mu * \nu)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,y>} d(\lambda_n(\mu \otimes \nu))(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{-i<x,\alpha_n(\xi,\eta)>} d(\mu \otimes \nu)(\xi, \eta) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi+\eta>} d(\mu \otimes \nu)(\xi, \eta) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\xi>} d\mu(\xi). \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,\eta>} d\nu(\eta) = (2\pi)^n \hat{\mu}(x).\nu(x).
\end{aligned}$$

d) Comme u est continue, donc borélienne, $u(\mu)$ a un sens et, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{\frac{n}{2}} u(\hat{\mu})(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,y>} du(\mu)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,.>} \circ u d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,u(z)>} d\mu(z) \\
& \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<u^t(x),z>} d\mu(z) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{\mu}(u^t(x)) = 2\pi)^{\frac{n}{2}} (\hat{\mu} \circ u^t)(x),
\end{aligned}$$

tandis que le cas particulier s'en déduit aussitôt.

e) Conséquence de c).

2) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ on obtient :

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{\frac{n+m}{2}} \widehat{\mu \otimes \nu}(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} e^{-i<(x,y),(z,t)>} du(\mu \otimes \nu)(z, t) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} e^{-i<x,z>} e^{-i<y,t>} du(\mu \otimes \nu)(z, t) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} e^{-i<x,z>} d\mu(z) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<y,t>} d\nu(t) \\
&= (2\pi)^{\frac{m}{2}} \widehat{\mu}(x) (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{\nu}(y) = (2\pi)^{\frac{n+m}{2}} (\widehat{\mu} \otimes \widehat{\nu})(x, y).
\end{aligned}$$

□

7.2 Transformation de Fourier des fonctions intégrables

Considérons une mesure μ sur $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}$ ayant pour densité par rapport à la mesure de Borel β^n une fonction f positive et β^n-intégrable. La mesure μ est alors finie et, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\widehat{\mu}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,y>} d(f\beta^n)(y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,y>} f(y) d\beta^n(y).$$

Ceci conduit à formuler la définition suivante :

Définition 41 *On appelle transformée de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$ la fonction $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ par*

$$\widehat{f}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,y>} f(y) d\lambda_n(y).$$

L'application $f \mapsto \widehat{f}$ ainsi définie est la transformation de Fourier des focntions complexes Lebesgue-intégrables sur $\mathbb{R}^n$.

1) La fonction $y \mapsto e^{-i<x,y>}$ étant, de même que son inverse, bornée et continue, il est clair que les fonctions f et $y \mapsto e^{-i<x,y>} f(y)$ sont conjointement Lebesgue-intégrables.

2) Il résulte encore de la définition ci-dessus que deux fonctions Lebesgue-intégrables qui coïncident λ_n-presque partout sur $\mathbb{R}^n$ ont la même transformée de Fourier. Par suite la transformation de Fourier apparaît plutôt sur l'espace $L^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$. Mais comme $L^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n) = L^1_{\mathbb{C}}(\beta^n)$, on aurait pu se contenter de définir la transforamtion de Fourier pour les fonctions Borel-intégrables.

3) Notons que

$$\widehat{f}(0) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) d\lambda_n(y)$$

ce qui indique une vérification à faire chaque fois que l'on a calculé la transformée de Fourier d'une fonction intégrable dont on connaît l'intégrale.□

Exercice 1. Calculer la transformée de Fourier de la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$.

Théorème 65 *1) La transformation de Fourier est linéaire.*

2) Soient $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$. Alors :

a) $\widehat{f}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$;

b) $||\widehat{f}||_\infty \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} N_1(f)$, si bien que la transformation de Fourier converti la convergence en moyenne en convergence uniforme ;

c) $\widehat{f * g} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{f}.\widehat{g}$;

d) avec les notations du théorème 1.2 :

$$\widehat{f \circ S} = \widehat{f} \circ S, \quad \widehat{f \circ T_a} = e^{i<.,a>} \widehat{f}, \quad \widehat{e^{-i<a,.>} f} = \widehat{f} \circ T_a$$

et si H_λ est , sur $\mathbb{R}^n$, l'homothétie centrée à l'origine et de rapport $\lambda \neq 0$:

$$\widehat{f \circ H_\lambda} = |\lambda|^{-n} \widehat{f} \circ H_{\lambda^{-1}}.$$

3) Si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_m)$ et $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$: $f \otimes g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_{m+n})$ et $\widehat{f \otimes g} = \widehat{f} \otimes \widehat{g}$.

Preuve : 1) Evident.

2) a) Compte tenu du début de cette section, cette propriété résulte du théorème 1.1 par le biais de 1) et de la décomposition

$$f = Re(f)^+ - Re(f)^- + i(Im(f)^+ - Im(f)^-).$$

b) Immédiat par majoration de l'intégrale définissant $\widehat{f}(x)$.

c) On procède comme en a) en utilisant la bilinéarité de la convolution (théorème 2.2 chapitre 6) pour se ramener au théorème 1.2.

d) Ces propriétés sont des conséquences faciles de la définition 2.1 si, pour la dernière d'entres elles, on utilise le changement de variable $y \mapsto \lambda^{-1}z$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on obtient successivement :

$$\begin{aligned}
\widehat{f \circ S}(x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,y>} f(-y) d\lambda_n(y) \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<-x,y>} f(y) d\lambda_n(y) \\
&= (\widehat{f} \circ S)(x); \\
\widehat{\overline{f}}(x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,y>} \overline{f}(y) d\lambda_n(y) \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<-x,y>} f(y) d\lambda_n(y)} \\
&= (\overline{\widehat{f}} \circ S)(x); \\
\widehat{f \circ T_a}(x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,y>} f(y+a) d\lambda_n(y) \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{i<x,a>} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,y+a>} f(y+a) d\lambda_n(y) = e^{i<x,a>} \widehat{f}(x); \\
\widehat{e^{-i<a,.>} f}(x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,y>} e^{-i<a,y>} f(y) d\lambda_n(y) \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x+a,y>} f(y) d\lambda_n(y) = (\widehat{f} \circ T_a)(x); \\
\widehat{f \circ H_\lambda}(x) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,y>} f(\lambda y) d\lambda_n(y) \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<\lambda^{-1}x,\lambda y>} f(\lambda y) d\lambda_n(y) \\
&= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\lambda|^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<\lambda^{-1}x,z>} f(z) d\lambda_n(z) = |\lambda|^{-n} (\widehat{f} \circ H_{\lambda^{-1}})(x).
\end{aligned}$$

3) La propriété $f \otimes g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_{m+n})$ résulte du théorème de Fubini.□

Exercice 2. 1) En développant l'exponentielle en série entière, montrer que la densité de Gauss g_1 définie par $g_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est sa propre transformée de Fourier.

2) En déduire que, plus généralement, la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}^n$ par $g_n(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{||x||^2}{2}}$, où $||.||$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$, possède la même propriété.

La transformée de Fourier d'une focntion intégrable n'est pas nécessairement intégrable. C'est ce que montre l'exemple suivant.

La transformée de Fourier de la fonction indicatrice d'un intervalle $[a, b]$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\widehat{1_{[a,b]}}(x) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} 1_{[a,b]}(y) d\lambda(y) = \int_a^b e^{-ixy} dy \\
&= \begin{cases} \frac{e^{-ibx} - e^{-iax}}{-ix} = 2\frac{\sin\left(\frac{b-a}{2}x\right)}{x} \exp\left(-i\frac{a+b}{2}x\right) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ b - a & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}
\end{aligned}$$

mais cette fonction n'est pas Lebesgue-intégrable car elle n'est pas absolument convergente au sens de Riemann.

7.3 Le théorème de Riemann-Lebesgue

Lemme 15 *Pour toute fonction* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$ *:*

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f(t + x) - f(t)| d\lambda_n(t) = 0.$$

Preuve : Considérons un compact $K \subset \mathbb{R}^n$. Si $\epsilon > 0$ est donné, il existe un ouvert U contenant K et tel que $\lambda_n(U \setminus K) < \frac{\epsilon}{2}$. Comme le compact K ne rencontre pas le fermé $\mathbb{R}^n \setminus U$, on sait que la distance euclidienne δ entre ces deux ensembles est strictement positive. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $||x|| < \delta$, on a $K + x \subset U$, et par suite, compte tenu du théorème 5.1 du chapitre 5 :

$$\begin{aligned}
\lambda_n((K + x)\Delta K) &= \lambda_n((K + x) \setminus K) + \lambda_n(K \setminus (K + x)) \\
&= \lambda_n((K + x) \setminus K) + \lambda_n((K - x) \setminus K) \leq 2\lambda_n(U \setminus K) < \epsilon,
\end{aligned}$$

(si, de façon générale, $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ désigne la différence symétrique entre les ensembles A et B). Ce qui démontre, que pour tout compact K, $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \lambda_n((K + x)\Delta K) = 0$.

b) Pour établir le lemme, commençons par le cas particulier $f = 1_B$, $B \in \mathbb{B}_{\lambda_n}$, $\lambda_n(B) < +\infty$. La quantité à étudier est alors :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |1_B(t+x) - 1_B(t)| d\lambda_n(t) &= \int_{\mathbb{R}^n} |1_{B-x} - 1_B| d\lambda_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} 1_{(B-x)\Delta B} d\lambda_n = \lambda_n((B-x)\Delta B).\end{aligned}$$

En utilisant que la différence symétrique Δ est une loi de groupe où $\emptyset$ est l'élément neutre et où chaque ensemble est son propre symétrique, et compte tenu de l'inclusion $A\Delta B \subset A \cup B$ et du théorème 5.1 du chapitre 5, pour tout $K \subset B$ on a :

$$\begin{aligned}\lambda_n((B-x)\Delta B) &\leq \lambda_n((B-x)\Delta(K-x)) + \lambda_n((K-x)\Delta K) + \lambda_n(K\Delta B) \\ &= 2\lambda_n(B\Delta K) + \lambda_n((K-x)\Delta K) = 2\lambda_n(B \setminus K) + \lambda_n((K-x)\Delta K).\end{aligned}$$

Alors, si l'on s'est donné un $\epsilon > 0$, on peut d'abord choisir K compact et tel que $\lambda_n(B \setminus K) < \frac{\epsilon}{4}$ puis, d'après a) ci-dessus, on sait qu'il existe $\delta > 0$ pour lequel $||x|| < \delta$ entraîne que $\lambda_n((K-x)\Delta K) < \frac{\epsilon}{2}$. On obtient finalement $\lambda_n((B-x)\Delta B) < \epsilon$ dès que $||x|| < \delta$, ce qui prouve le résultat souhaité.

Ce résultat s'étend facilement au cas d'une fonction $\mathbb{B}_{\lambda_n}$-étagée réelle intégrable $f = \sum_{k=1}^{p} \beta_k 1_{B_k}$ (où $\beta_k \neq 0$) puisque

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{k=1}^{p} \beta_k 1_{B_k - x} - \sum_{k=1}^{p} \beta_k 1_{B_k} \right| d\lambda_n \leq \sum_{k=1}^{p} |\beta_k| \lambda_n((B_k - x)\Delta B_k).$$

c) Si maintenant $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$, pour toute fonction h $\mathbb{B}_{\lambda_n}$-intégrable on écrit

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+t) - f(t)| d\lambda_n(t) \\ \leq &\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+t) - h(x+t)| d\lambda_n(t) + \int_{\mathbb{R}^n} |h(x+t) - h(t)| d\lambda_n(t) + \int_{\mathbb{R}^n} |h(t) - f(t)| d\lambda_n(t) \\ = &\ 2\int_{\mathbb{R}^n} |h(t) - f(t)| d\lambda_n(t) + \int_{\mathbb{R}^n} |h(x+t) - h(t)| d\lambda_n(t).\end{aligned}$$

Alors un $\epsilon > 0$ étant fixé, on peut d'abord choisir h de manière que l'avant-dérnière intégrale soit plus petite que $\frac{\epsilon}{4}$. Ensuite, d'après ce qui précède, il existe un $\delta > 0$ tel que la dernière intégrale soit inférieure à $\frac{\epsilon}{2}$ dès que $||x|| < \delta$, ce qui prouve le lemme pour f réelle.

Enfin, la propriété s'obtient aussitôt pour une fonction $f_i n \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$ en appliquant le résultat ci-dessus à sa partie réelle et à sa partie imaginaire.$\square$

Théorème 66 *(Théorème de Riemann-Lebsgue) Pour toute fonction* $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$, $\widehat{f}$ *est nulle à l'infini.*

Preuve : En remarquant que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$-\exp\left(-i\left\langle x, -\frac{\pi}{||x||^2}x\right\rangle\right) = -e^{i\pi} = 1,$$

on écrit :

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\widehat{f}(x)| &= \left|\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,y>}(1+1)f(y)d\lambda_n(y)\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,y>}\left(1-\exp\left(-i\left\langle x, -\frac{\pi}{||x||^2}x\right\rangle\right)\right) f(y)d\lambda_n(y)\right| \\
&= \left|\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,y>}f(y)d\lambda_n(y) - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,y>}\exp\left(-i\left\langle x, -\frac{\pi}{||x||^2}x\right\rangle\right) f(y)d\lambda_n(\right. \\
&= \left|\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,y>}f(y)d\lambda_n(y) - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,y>}f(y+\frac{\pi}{||x||^2}x)d\lambda_n(y)\right| \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\left|f(y)-f(y+\frac{\pi}{||x||^2}x)\right| d\lambda_n(y),
\end{aligned}$$

et le lemme 3.1 donne le résultat puisque $\lim\limits_{||x||\longrightarrow+\infty}\frac{\pi}{||x||^2}x = 0.\square$

7.4 Le théorème d'unicité

La démonstration di théorème 4.2 s'appuiera sur le résultat suivant que nous admettrons.

Théorème 67 *(Théorème de Stone-Weierstrass) Soit $C_0^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$, nulles à l'infini et soit $\mathcal{F} \subset C_0^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ tel que :*

(a) $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $C_0^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, stable pour le produit de fonctions ;

(b) $\forall f \in \mathcal{F}$, $\overline{f} \in \mathcal{F}$;

(c) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\exists f \in \mathcal{F}$, $f(x) \neq 0$;

(d) $(\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, x \neq y)$, $\exists f \in \mathcal{F}$, $f(x) \neq f(y)$.

Alors $\mathcal{F}$ est dense dans $C_0^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ pour la topologie de la convergence uniforme.

Théorème 68 *Toute fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$, continue et nulle à l'infini, est la limite uniforme d'une suite $(\widehat{f_k})_{k\geq 1}$ de transformées de Fourier de fonctions $f_k \in \mathcal{L}^1(\lambda_n)$.*

Autrement dit, l'ensemble $\mathcal{F}(\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n)) = \{\widetilde{f}; f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n)\}$ est dense dans $C_0^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ pour la topologie de la convergence uniforme.

Preuve : Il suffit de s'assurer que $\mathcal{F}$ vérifie les hypothèses du théorème de Stone-Weierstrass.

1) Les conditions (a) et (b) sont vérifiées d'après le théorème 2.1 et le théorème 3.1.

2) Condition (c). Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Considérons une fonction $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$ quelconque mais d'intégrale non nulle. Alors en posant $f = e^{i<x_0,.>}g$, on obtient $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$ telle que

$$\widehat{f}(x_0) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x_0,y>} e^{i<x_0,y>} g(y) d\lambda_n(y) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} g d\lambda_n \neq 0.$$

3) Condition (d). Considérons $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_0 \neq y_0$. On peut toujours trouver $z_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $< x_0 - y_0, z_0 > \notin 2\pi\mathbb{Z}$, donc vérifiant $e^{-i<x_0-y_0,z_0>} \neq 1$, soit encore $e^{-i<x_0,z_0>} \neq e^{-i<y_0,z_0>}$. De plus, par continuité, cette propriété ne sera pas seulement valable pour z_0 mais aussi pour tout z dans un voisinage compact V de z_0.

Alors, en posant $f = (e^{i<x_0,.>} - e^{i<y_0,.>})1_V$, on obtient une fonction $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$ telle que

$$\begin{aligned}\widehat{f}(x_0) - \widehat{f}(y_0) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} (e^{-i<x_0,y>} - e^{-i<y_0,y>})(e^{i<x_0,y>} - e^{i<y_0,y>}) 1_V(y) d\lambda_n(y) \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \left| e^{i<x_0,y>} - e^{i<y_0,y>} \right| 1_V(y) d\lambda_n(y) > 0.\square\end{aligned}$$

Lemme 16 *Soit $\mathbb{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions $f \in \mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors, deux mesures finies μ et ν sur $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}$ telles que*

$$\forall f \in \mathbb{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n), \quad \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f d\nu,$$

sont égales.

Preuve : Supposons $\mu \neq \nu$. Alors, on peut affirmer l'existence d'un compact $K \subset \mathbb{R}^n$ tel que $\mu(K) \neq \nu(K)$, puis celle d'un ouvert $U \supset K$ vérifiant

$$\sup(\mu(U \setminus K), \nu(U \setminus K)) < \frac{1}{2}|\mu(K) - \nu(K)|.$$

De plus, comme il est possible de remplacer U par son intersection avec un ouvert relativement compact contenant K (un tel ouvert existe car K, compact, peut être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes), on peut toujours supposer que U est relativement compact.

Enfin, si f est une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ sur $[0,1]$ prenant la valeur 1 sur K et la valeur 0 sur $\mathbb{R}^n \setminus U$, on a $f \in \mathbb{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$ et

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu - \int_{\mathbb{R}^n} f d\nu = \int_{U\setminus K} f d\mu + \mu(K) - \int_{U\setminus K} f d\nu - \nu(K).$$

Mais ceci ne peut pas être nul car

$$\begin{aligned}\left| \int_{U\setminus K} f d\mu - \int_{U\setminus K} f d\nu \right| &\leq \int_{U\setminus K} |f| d\mu + \int_{U\setminus K} |f| d\nu \\ &\leq \mu(U \setminus K) + \nu(U \setminus K) < |\mu(K) - \nu(K)|.\square\end{aligned}$$

Théorème 69 (Théorème d'unicité) *La transformation de Fourier $\mu \longrightarrow \widehat{\mu}$ est une application injective de l'ensemble des mesures finies sur $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}$ dans l'ensemble des focntions complexes uniformément continues et bornées sur $\mathbb{R}^n$.*

Preuve : Considérons deux mesures finies μ et ν sur $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}$ telles que $\widehat{\mu} = \widehat{\nu}$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$ la fonction $\widetilde{f}$ est mesurable et bornée (théorème 2.1), donc μ-intégrable puisque la mesure μ est finie. De plus on a

$$\begin{aligned}\int^*_{\mathbb{R}^n}\left(\int^*_{\mathbb{R}^n}|e^{-i<x,y>}f(y)|d\lambda_n(y)\right)d\mu(x) &= \int^*_{\mathbb{R}^n}\left(\int^*_{\mathbb{R}^n}|f(y)|d\lambda_n(y)\right)d\mu(x)\\ &= \left(\int^*_{\mathbb{R}^n}|f(y)|d\lambda_n(y)\right)\mu(\mathbb{R}^n) < +\infty,\end{aligned}$$

de sorte que, d'aprè le théorème de Tonelli :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}d\mu &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i<x,y>}f(y)d\lambda_n(y)\right)d\mu(x)\\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}e^{-i<x,y>}d\mu(x)\right)f(y)d\lambda_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{\mu}fd\lambda_n.\end{aligned}$$

On obtiendrait de même

$$\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}d\nu = \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{\nu}fd\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{\mu}fd\lambda_n,$$

et on a donc prouvé que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}d\mu = \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}d\nu$ pour tout fonction $\widehat{f} \in \mathcal{F}(\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n))$.

Considérons maintenant une fonction $g \in \mathbb{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$. Elle appartient donc plus généralement à $C^0_0(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ et, d'après le théorème 4.2, il existe une suite $(\widehat{f_k})_{k\geq 1}$ de $\mathcal{F}(\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n))$ qui converge uniformément vers g. Mais comme la mesure μ est finie, toutes ces fonctions sont μ-intégrables et la suite $(\widehat{f_k})_{k\geq 1}$ converge vers g en μ-moyenne. De même la suite $(\widehat{f_k})_{k\geq 1}$ converge vers g en ν-moyenne. Il résulte de ce qui précède que

$$\int_{\mathbb{R}^n}gd\mu = \lim_{k\longrightarrow+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f_k}d\mu = \lim_{k\longrightarrow+\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f_k}d\nu = \int_{\mathbb{R}^n}gd\nu,$$

et comme ceci vaut pour toute focntion g dans $\mathbb{K}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)$, il reste à appliquer le lemme 4.1.□

Corollaire 36 *Si $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$: $\widehat{f} = \widehat{g} \Rightarrow f = g$ $_la_n$-p.p.*

La transformation de Fourier $f \mapsto \widehat{f}$ est donc une application injective de $L^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$ dans l'ensemble des fonctions complexes uniformément continues sur $\mathbb{R}^n$ et nulles à l'infini.

Preuve : Supposons d'abord que f et g soient réelles. Alors grâce aux théorèmes 1.2, 2.1 et 4.3, on obtient :

$$\begin{array}{lll} \widehat{f} = \widehat{g} & \Rightarrow & \widehat{f^+.\lambda_n} - \widehat{f^-.\lambda_n} = \widehat{g^+.\lambda_n} - \widehat{g^-.\lambda_n} \quad \Rightarrow \quad (f^+ \widehat{+ g^-).\lambda_n} = (g^+ \widehat{+ f^-).\lambda_n} \\ & \Rightarrow & (f^+ + g^-).\lambda_n = (g^+ + f^-).\lambda_n \quad \Rightarrow \quad f^+ + g^- = g^+ + f^- \quad \lambda_n.p.p. \\ & \Rightarrow & f = g \quad \lambda_n.p.p. \end{array}$$

Dans le cas général, on utilise que, si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$, le théorème 2.1 donne

$$\widehat{Re(f)} = \frac{1}{2}(\widehat{f + \overline{f}}) = \frac{1}{2}\left(\widehat{f} + \widehat{\overline{f}}\right)) = \frac{1}{2}\left(\widehat{f} + \left(\overline{\widehat{f}} \circ S\right)\right)$$

et de même

$$\widehat{Im(f)} = \frac{1}{2i}\left(\widehat{f} - \left(\overline{\widehat{f}} \circ S\right)\right),$$

et il résulte par ce qui précède :

$$\begin{array}{lll} \widehat{f} = \widehat{g} & \Rightarrow & \widehat{Re(f)} = \widehat{Re(g)} \quad \text{et} \quad \widehat{Im(f)} = \widehat{Im(g)} \\ & \Rightarrow & Re(f) = Re(g) \quad \lambda_n.p.p \quad \text{et} \quad Im(f) = Im(g) \quad \lambda_n - p.p. \\ & \Rightarrow & f = g \quad \lambda_n.p.p.\square \end{array}$$

Exercice 3. Caractériser les fonctions dans $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$ dont la transformée de Fourier est réelle, et celle dont la transformée de Fourier est imaginaire pure.

7.5 La formule d'inversion

Théorème 70 *Si f et g sont dans $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$:* $\int_{\mathbb{R}^n} f\widehat{g}d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}gd\lambda_n.$

Preuve : Remarquons d'abord que $f\widehat{g}$ est bien Lebsgue-intégrable puisque c'est le produit d'une telle fonction par une fonction continue, donc Lebesgue-mesurable, et bornée. Ensuite, et puisque

$$\int^*_{\mathbb{R}^n} \left(\int^*_{\mathbb{R}^n} |f(x)e^{-i<x,y>}g(y)|d\lambda_n(y)\right) d\lambda_n(x)$$
$$= \int^*_{\mathbb{R}^n} |f(x)|d\lambda_n(x). \int^*_{\mathbb{R}^n} |g(y)|d\lambda_n(y) < +\infty$$

le théorème de Tonelli permet d'écrire

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f\widehat{g}d\lambda_n &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,y>}g(y)d\lambda_n(y)\right) d\lambda_n(x) \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,y>}f(x)d\lambda_n(x)\right) d\lambda_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}gd\lambda_n. \end{aligned}$$

□

Lemme 17 *On considère une fonction* $\phi \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$ *telle que* $\int_{\mathbb{R}^n} \phi d\lambda_n = 1$, *et pour tout entier* $k \geq 1$ *on désigne par* ϕ_k *la fonction intégrable définie sur* $\mathbb{R}^n$ *par* $\phi_k(x) = k^n \phi(kx)$.

Alors, pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$, *la suite* $(f * \phi_k)_{k\geq 1}$ *converge vers* f *en moyenne.*

Preuve : Un simple changement de variable montre que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi_k d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} k^n \phi(kx) d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi d\lambda_n = 1,$$

ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
N_1((f * \phi_k) - f) &= \int_{\mathbb{R}^n} |(f * \phi_k) - f| d\lambda_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(t-x)\phi_k(x) d\lambda_n(x) - f(t) \right| d\lambda_n(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(t-x)\phi_k(x) d\lambda_n(x) - \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\phi_k(x) d\lambda_n(x) \right| d\lambda_n(t) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(t-x) - f(t)||\phi_k(x)| d\lambda_n(x) \right) d\lambda_n(t) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(t-x) - f(t)| d\lambda_n(t) \right) |\phi_k(x)| d\lambda_n(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| f(t - \frac{y}{k}) - f(t) \right| d\lambda_n(t) \right) |\phi(y)| d\lambda_n(y),
\end{aligned}$$

où l'on fait le changement de variable $y = kx$, et où l'intervesion des intégrations résulte du théorème de Tonelli puisque

$$\begin{aligned}
&\int^*_{\mathbb{R}^n} \left(\int^*_{\mathbb{R}^n} |f(t-x) - f(t)| d\lambda_n(t) \right) |\phi_k(x)| d\lambda_n(x) \\
&\leq \int^*_{\mathbb{R}^n} \left(\int^*_{\mathbb{R}^n} (|f(t-x)| + |f(t)|) d\lambda_n(t) \right) |\phi_k(x)| d\lambda_n(x) \\
&= 2 \int_{\mathbb{R}^n} |f| d\lambda_n . \int_{\mathbb{R}^n} |\phi_k| d\lambda_n < +\infty.
\end{aligned}$$

Enfin, d'après le lemme 3.1, pour chaque y fixé dans $\mathbb{R}^n$ nous avons

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| f(t - \frac{y}{k}) - f(t) \right| d\lambda_n(t) \right) |\phi(y)| = 0,$$

tandis que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| f(t - \frac{y}{k}) - f(t) \right| d\lambda_n(t) \right) |\phi(y)| \leq 2 \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f| d\lambda_n \right) |\phi(y)|,$$

où le second membre est la valeur prise par une fonction intégrable indépendante de k. Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue permet alors de conclure à la convergence en moyenne annoncée.□

Théorème 71 (Formule d'inversion) *1) Si une fonction f dans $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$ est telle que $\widehat{f}$ soit aussi dans $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$:*

$$f(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,y>} \widehat{f}(y) d\lambda_n(y) \qquad \lambda_n - p.p.$$

2) Si, de plus, f est continue, l'égalité ci-dessus a lieu partout sur $\mathbb{R}^n$.

Preuve : 1) Considérons la fonction g_n de l'execice 2 T.D 7 et posons

$$I_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) e^{i<x,y>} g_n(\frac{y}{k}) d\lambda_n(y).$$

a) D'une part, on voit que

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} \widehat{f}(y) e^{i<x,y>} g_n(\frac{y}{k}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \widehat{f}(y) e^{i<x,y>},$$

tandis que

$$\left| \widehat{f}(y) e^{i<x,y>} g_n(\frac{y}{k}) \right| \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\widehat{f}(y)|,$$

et par application du théorème de la convergence dominée, on obtient

$$\lim_{k \longrightarrow +\infty} I_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) e^{i<x,y>} d\lambda_n(y).$$

b) D'autre part, il résulte du théorème 2.1 que la transformée de Fourier de $y \mapsto e^{i<x,y>} g_n(\frac{y}{k})$ est la fonction

$$y \mapsto k^n \widehat{g}_n(k(y-x)) = k^n g_n(k(x-y)).$$

Le théorème 5.1 donne alors

$$I_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) k^n g_n(k(x-y)) d\lambda_n(y) = (f * (g_n)_k)(x),$$

où $(g_n)_k$ est la fonction ϕ_k du lemme 5.1 qui correspnd à $\phi = g_n$, cette dernière étant intégrable et d'intégrale égale à 1. D'après le lemme 5.1, la suite $(f * (g_n)_k)_{k \geq 1}$ converge donc vers f en moyenne, et il en existe une sous-suite qui converge λ_n−preque partout vers f (chapitre 4). Mais d'après la partie a) ci-dessus, cett même suite converge simplement vers $(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,y>} \widehat{f}(y) d\lambda_n(y)$, ce qui établit la propriété annoncée.

2) La fonction de x figurant dans le second membre de la formule du théorème est une transformée de Fourier : celle de la fonction $y \mapsto \widehat{f}(-y)$. C'est donc une fonction continue et, si f est elle-même continue, la conclusion provient du fait que l'égalité presque partout de deux fonctions continues est nécessairement une égalité.□

Remarque 25 *1) Si f est dans $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$ ainsi que $\widehat{f}$, la formule d'inversion exprime que $f = \widehat{\widehat{f}} \circ S$ λ_n-presque partout, l'égalité ayant lieu partout si f est continue.*

2) Comme le second membre de la fomule d'inversion est la transfomée de Fouier d'une fonction λ_n-intégrable, cette formule nous apprend qu'une fonction qui est λ_n-intégrable de même que sa transfomée de Fouier, est nécessairement égale λ_n-presque partout à une fonction uniformément continue et nulle à l'infini cette dernière étant λ_n-mesurable et bornée. Cette propriété admet la réciproque suivante.

Théorème 72 *Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$ telle que*

a) f est égale λ_n-presque partout à une fonction λ_n-mesurable et bornée ;

b) $\widehat{f} \geq 0$.

Alors $\widehat{f} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$.

Preuve : Utilisons les notations de la démonstration du théorème 5.2 où nous avions pour transformée de Fourier de la fonction $y \mapsto e^{i<x,y>} g_n(\frac{y}{k})$ la fonction $y \mapsto (g_n)_k(x-y)$, le théorème 5.1 donne alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) e^{i<x,y>} g_n(\frac{y}{k}) d\lambda_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)(g_n)_k(x-y) d\lambda_n(y) = (f * (g_n)_k)(x).$$

En écrivant cette égalité pour $x = 0$, et si h désigne une focntion λ_n-mesurable et bornée égale λ_n-presque partout à f, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y) g_n(\frac{y}{k}) d\lambda_n(y) &= (f * (g_n)_k)(0) = (h * (g_n)_k)(0) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} h(-y)(g_n)_k(y) d\lambda_n(y) \leq ||h||_\infty \int_{\mathbb{R}^n} (g_n)_k d\lambda_n \\ &= ||h||_\infty < +\infty.\end{aligned}$$

De plus, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, la suite $\left(\widehat{f}(y) g_n(\frac{y}{k})\right)_{k \geq 1}$ est croissante (grâce à $\widehat{f} \geq 0$) et converge vers $(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \widehat{f}(y)$. Alors l'intégtrabilité de $(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \widehat{f}$, donc de $\widehat{f}$ résulte du théorème de Beppo Levi.□

7.6 Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Notations. 1) On désigne par $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$ indéfiniment dérivables.

2) Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout multi-entier $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ on note x^α le monôme $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ et M^α la fonction $x \longrightarrow x^\alpha$.

Définition 42 *a) Une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est dite à décroissance rapide si, quels que soient les multi-entiers α et β, la fonction $M^\alpha D^\beta f$ est nulle à l'infini.*

b) On appelle espace de Schwartz l'ensemble, noté $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, des fonctions à décroissance rapide sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque 26 *1) Toute fonction à décroissance rapide est nulle à l'infini (prendre $\alpha = (0, \dots, 0)$) et bornée.*

2) L'inclusion $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est évidente. La fonction g_n de l'exercice 2 T.D 7 fournit l'exemple d'une fonction dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \setminus \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

3) Les fonctions à décroissance rapide sont des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}^n$ qui, lorsque $||x||$ tend vers $+\infty$, tendent vers 0 plus rapidement que toute puissance (entière) positive de $\dfrac{1}{||x||}$.

4) Si f est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, toute fonction de type $M^\alpha D^\beta f$ est aussi dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; en particulier sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ toutes les dérivées $D^\beta f$ et toutes les produits Pf (où P est une focntion polynomiale).

Théorème 73 *Pour tout réel $p \geq 1$:*

1) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\alpha_n)$;

2) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $(\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\alpha_n), N_p)$.

Preuve : 1) Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, f est en particulier continue donc borélienne, et il suffit ensuite d'observer d'une part, que f est bornée sur la boule euclidienne compact centrée à l'origine et de rayon 1, et d'autre part, que pour $||x|| > 1$, $|f(x)|^p = |||x||^{2n} f(x)|^p ||x||^{-2np} \leq A||x||^{-2np}$, où A est une constante, et utiliser le complément de cours.

2) Résulte de l'inclusion $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et la densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $(\mathcal{L}^p_{\mathbb{C}}(\alpha_n), N_p)$.$\square$

Théorème 74 *1) Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Alors :*

a) $D^\alpha \widehat{f} = (-i)^{|\alpha|} \widehat{M^\alpha f}$ et $\widehat{D^\alpha f} = i^{|\alpha|} M^\alpha \widehat{f}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$;

b) $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

2) La transformation de Fourier est bijective de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve : 1) D'après le théorème 6.1, f possède une transfomée de Fourier donnée par la formule de la définition 2.1. De plus, nous avons

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(e^{-i<x,y>} f(y)) = -iy_1 e^{-i<x,y>} f(y) \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial}{\partial x_1}(e^{-i<x,y>} f(y))\right| = |y_1 f(y)|,$$

où la dernière fonction est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^n$. Le théorème de dérivation sous le signe intégrale assure alors l'existence de $D^{(1,0,\dots,0)}\widehat{f}$ avec la formule

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_1}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} -iy_1 e^{-i<x,y>} f(y) d\lambda_n(y)$$

qui, sous la forme

$$D^{(1,0,\dots,0)}\widehat{f} = (-i)^{|(1,0,\dots,0)|} \widehat{M^{(1,0,\dots,0)} f},$$

se généralise par récurrence à toute dérivation D^α.

D'autre part, comme f est nulle à l'infini, une intégration par partie donne :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ix_1y_1}\frac{\partial}{\partial y_1}f(y_1,y_2,\ldots,y_n)d\lambda(y_1)$$
$$= \left[e^{-ix_1y_1}f(y_1,y_2,\ldots,y_n)\right]_{y_1=-\infty}^{y_1=+\infty} + \int_{\mathbb{R}} ix_1e^{-ix_1y_1}f(y_1,y_2,\ldots,y_n)d\lambda(y_1)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} ix_1e^{-ix_1y_1}f(y_1,y_2,\ldots,y_n)d\lambda(y_1).$$

Il en résulte

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,y>}D^{(1,0,\ldots,0)}f(y)f\lambda_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i<x,y>}\frac{\partial}{\partial y_1}f(y)d\lambda_n(y)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i<(x_2,\ldots,x_n),(y_2,\ldots,y_n)>}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-ix_1y_1}\frac{\partial}{\partial y_1}f(y_1,y_2,\ldots,y_n)d\lambda(y_1)\right)d\lambda_{n-1}(y_2,\ldots,y_n)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-i<(x_2,\ldots,x_n),(y_2,\ldots,y_n)>}\left(\int_{\mathbb{R}} ix_1e^{-ix_1y_1}f(y_1,y_2,\ldots,y_n)d\lambda(y_1)\right)d\lambda_{n-1}(y_2,\ldots,y_n)$$
$$= ix_1\int_{\mathbb{R}} e^{-i<x,y>}f(y)d\lambda_n(y),$$

et par conséquent

$$\widehat{D^{(1,0,\ldots,0)}f}(x) = (i)^{|(1,0,\ldots,0)|}M^{(1,0,\ldots,0)}(x)\widehat{f}(x),$$

forme sous laquelle ce résultat se généralise par récurrence au cas d'une dérivation D^α quelconque.

b) Quels que soient les multi-entiers α et β, la fonction $D^\alpha(M^\beta f)$ est à décroissance rapide et sa transformée de Fourier est nulle à l'infini (théorème de lebesgue-Riemann). Mais des résultats de a) ci-dessus on déduit :

$$\widehat{D^\alpha(M^\beta f)} = (i)^{|\alpha|}M^\alpha\widehat{M^\beta f} = (i)^{|\alpha|}(-i)^{-|\beta|}M^\alpha D^\beta\widehat{f},$$

si bien que $M^\alpha D^\beta\widehat{f}$ est nulle à l'infini, ce qui est la propriété souhaitée.

2) Si f et g dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ont la même transformée de Fourier, nous savons déjà que $f = g$ λ_n-presque partout sur $\mathbb{R}^n$. Mais deux fonctions continues égales presque partout sont égales. La transformation de Fourier est donc injective sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

D'autre part, si $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, il résultedes théorèmes 5.2 et 2.1 que g est la transformée de Fourier de la fonction $\widehat{g}\circ S$ qui appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (d'après 1)). La transformation de Fourier de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est donc surjective.□

Exercice 4. Retrouver le résultat de l'exercice 2 (1) en montrant que $\widehat{g_1}$ est solution de l'équation différentielle $\dfrac{dy}{dx} + xy = 0$.

7.7 Transformation de Fourier dans $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$

Exercice 5. Pour tout $n \geq 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n dx$.

1) a) Rappeler pourquoi I_1 existe comme intégrale convergente.

b) Montrer que I_1 n'est pas une intégrale de Lebesgue, mais que c'est le cas pour I_n avec $n \geq 2$.

c) Montrer que $I_1 = I_2$.

2) Calculer I_2.

3) a) Calculer la transformée de Fourier de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 - |x|)1_{[-1,1]}(x)$.

b) En déduire I_4.

4) Calculer I_3.

Théorème 75 *1) Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n) \cap \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$. Alors :*

$$f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n) \qquad et \qquad N_2(\widehat{f}) = N_2(f).$$

2) La transformation de Fourier considérée de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n) \cap \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$ dans $L^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$ se prolonge de façon unique en une application linéaire continue de $(\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n), N_2)$ dans $(L^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n), N_2)$, qui induit une application linéaire linéaire continue de $(L^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n), N_2)$ dans lui même.

Preuve : 1) Notons que si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n) \cap \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$, la fonction $\overline{f \circ S}$. Le produit de convolution $g = f * \overline{f \circ S}$ est alors partout défini sur $\mathbb{R}^n$, uniformément continu et nul à l'infini, donc borné, et il appartient à $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$. De plus, d'après le théorème 2.1, on a

$$\widehat{g} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{f}.\widehat{\overline{f \circ S}} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \widehat{f}\overline{\widehat{f}} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} |\widehat{f}|^2 \geq 2.$$

Le théorème 5.3 assure alors que $\widehat{g} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$ et donc, en même temps, que $\widehat{f} \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$. De plus, puisque g est continue, la formule d'inversion est valable partout sur $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, nous avons alors que d'une part :

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\overline{f(-y)} d\lambda_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)\overline{f(y)} d\lambda_n(y),$$

et d'autre part :

$$g(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,y>} \widehat{g}(y) d\lambda_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,y>} |\widehat{f}(y)|^2 d\lambda_n(y),$$

et la comparaison de ces deux expressions pour $x = 0$ donne

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}|^2 d\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 d\lambda_n,$$

de sorte que $N_2(\widehat{f}) = N_2(f)$.

2) L'inclusion $\mathbb{K}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n) \cap \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$, jointe à la densité de $\mathbb{K}(\mathbb{R}^n)$ dans $(\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n), N_2)$ prouve que $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n) \cap \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$ est dense dans $(\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n), N_2)$; et comme, d'après 1) la transformation de Fourier est linéaire et continue de $(\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n) \cap \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n), N_2)$ dans $(L^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n), N_2)$ le résultat annoncé s'obtient en appliquant un résultat de topologie.□

Définition 43 *On appelle transformée de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$ ou de la classe de fonctions $[f] \in L^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$, la classe de fonctions*

$$\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}([f]) \in L^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n),$$

image à la fois de f et de $[f]$ par les applications linéaires définies au théorème 7.1 et toutes les deux désignés par $\mathcal{F}$.

Remarque 27 *1) La transformée de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$ a été définie comme une fonction $\widehat{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$.*

La transformée d'une fonction $f \in (\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$ a été définie comme une classe de fonction $\mathcal{F}(f) \in L^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$.

2) Lorsque $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n) \cap \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$, et seulement dans ce cas, par la définition même de $\mathcal{F}$ on a $\mathcal{F}([f]) = [\widehat{f}]$ et on ce sens on peut alors dire que $\mathcal{F}(f)$ est définie par la formule intégrale de la définition de la transformée de Fourier. mais lorsque $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n) \backslash \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$, il est exlu d'appliquer la formule intégrale à f pour obtenir $\mathcal{F}(f)$ puique cette formule n'a aucun sens.

3) Lorsque $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n) \cap \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$, $\mathcal{F}(f) = [\widehat{f}]$ appartient à $L^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$ mais pas nécessairement à $L^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$.

Théorème 76 *Pour toute $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$:*

$$(\mathcal{F} \circ F)(f) = [f \circ S], \quad \mathcal{F}^{-1}([f]) = \mathcal{F}([f]).$$

Preuve : Comme $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $(\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n), N_2)$, pour $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$ il existe une suite $(f_k)_{k\geq 1}$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ qui converge vers f dans $(\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n), N_2)$. Il en résulte d'abord que la suite $([f_k \circ S])$ converge vers $[f \circ S]$ dans $(L^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n), N_2)$. D'autre aprt, la transformation de Fourier opérant dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\widehat{f_k}$ et $\widehat{\widehat{f_k}}$ sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ pour chaque $k \geq 1$, et $\widehat{\widehat{f_k}} = f_k \circ S$. Alors, par construction de $\mathcal{F}$, on aura aussi dans $(L^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n), N_2)$,la convergence de $([\widehat{f_k}])_{k\geq 1}$ vers $\mathcal{F}(f)$, puis de $\left(\left[\widehat{\widehat{f_k}}\right]\right)_{k\geq 1} = ([f \circ S])_{k\geq 1}$ vers $(\mathcal{F} \circ F)(f)$. La comparaison avec ce qui précède donne la première égalité annoncée, et par conséquent la seconde qui en est une forme équivalente.□

Exemple. Considérons la fonction $1_{[-1,1]} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n) \cap \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$. L'exemple donne en particulier $\widehat{1_{[-1,1]}} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\theta$ où θ est la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ définie sur $\mathbb{R}$ en la prolongeant par continuité à l'origine. Cette fonction θ n'est pas dans $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$ et n'a pas de transformée de Fourier au sens de la définition 2.1, mais elle appartient à $\mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$ et possède donc dans $L^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$ une transformée de Fourier qui, d'après le théorème 7.2, sera

$$\mathcal{F}(\theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(\mathcal{F} \circ \mathcal{F})(1_{[-1,1]}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}[1_{[-1,1]}].$$

Théorème 77 (Théorème de Plancherel) *La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ est bijective et isométrique de l'espace de Hilbert $(L^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n), \Phi)$ sur lui même :*

$$N_2(\mathcal{F}([f])) = N_2([f]), \qquad \Phi(\mathcal{F}([f]), \mathcal{F}([g])) = \Phi([f],[g])$$

quels que soient $f, g \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$.

Preuve : L'application $\mathcal{F}$ est bijective d'après le théorème 7.2. En effet, $\mathcal{F}$ est surjective car, pour tout $f \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$, on a $[f] = \mathcal{F}(\mathcal{F}([f \circ S]))$, et si $f, g \in \mathcal{L}^2_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}([f]) = \mathcal{F}([g]) \quad &\Rightarrow \quad \mathcal{F}(\mathcal{F}([f])) = \mathcal{F}(\mathcal{F}([g])) \Rightarrow [f \circ S] = [g \circ S] \Rightarrow f = g \ \lambda_n - p.p \\ &\Rightarrow \quad [f] = [g] \end{aligned}$$

de sorte que $\mathcal{F}$ est injective. Mais cette dernière propriété résulte aussi de l'isométrie $N_2(\mathcal{F}([f])) = N_2([f])$, laquelle provient de l'agalité $N_2(\widehat{f}) = N_2(f)$. Enfin l'invariance du produit scalaire est équivalente à l'isométrie d'après les relations entre le produit scalaire Φ et la norme N_2.□

7.8 Exercices corrigés

Exercice 0.

On considère des mesures finies μ, ν et π sur $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}$.
1) Montrer que :
a) pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$: $(\alpha\mu) * \nu = \alpha(\mu * \nu)$;
b) $(\pi + \mu) * \nu = (\pi * \nu) + (\mu * \nu)$.
2) Exprimer $\mu * \delta_a$ comme une certaine mesure de μ. Examiner les cas particuliers $\mu = \delta_b$ et $\mu = \beta^n$.
3) a) Exprimer $\mu * \nu$ lorsque μ et ν sont discrètes :

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \delta_{a_n}, \quad \nu = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \delta_{b_n}.$$

b) Dans le cas $n = 1$, à tout $c \in \mathbb{R}_+$ on associe la mesure

$$\mu_c = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} \delta_n.$$

Si $a, b \in \mathbb{R}_+$, montrer que $\mu_a * \mu_b = \mu_{a+b}$.

Solution : 1) a) Au chapitre 5, on aurait pu remarquer que, de façon générale, si $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $(\alpha\mu) \oplus \nu = \alpha(\mu \oplus \nu)$, ce qui provient de ce que chaque "rectangel" mesurable $A \times B$ vérifie :

$$\begin{aligned}((\alpha\mu) \otimes \nu)(A \times B) &= (\alpha\mu)(A)\nu(B) = \alpha(\mu \otimes \nu)(A \times B) \\ &= (\alpha(\mu \otimes \nu))(A \times B).\end{aligned}$$

D'autre part, toujours pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$, la mesure image possède la propriété : $f(\alpha\mu) = \alpha f(\mu)$. En effet, pour tout B dans la tribu d'arrivée :

$$(f(\alpha\mu))(B) = (\alpha\mu)(f^{-1}(B)) = \alpha(\mu(f^{-1}(B))) = \alpha((f(\mu))(B)) = (\alpha f(\mu))(B).$$

De ces deux propriétés et de la définition résulte aussitôt :

$$(\alpha\mu) * \nu = \alpha_n((\alpha\mu) \otimes \nu) = \alpha_n(\alpha(\mu \otimes \nu)) = \alpha\alpha_n(\mu \otimes \nu) = \alpha(\mu * \nu).$$

b) On vérifie de même des propriétés analogues aux précédentes, aussi bien pour les mesures produits que pour les mesures images, lorsque $\alpha\mu$ est remplacée par $\mu + \pi$. Il en résulte la propriété annoncée par la convolution.

2) De façon générale, notons T_a la translation dans $\mathbb{R}^n$ de vecteur a. Alors, pour tout $B \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}$, on obtient :

$$\begin{aligned}(\mu * \delta_a)(B) &= \int_{\mathbb{R}^n} \mu(B - y) d\delta_a(y) = \mu(B - a) = \mu(T_{-a}(B)) = \mu((T_a)^{-1}(B)) \\ &= (T_a(\mu))(B)\end{aligned}$$

et par suite $\mu * \delta_a = T_a(\mu)$.

En utilisant partiellement le calcul ci-dessus et en remarquant que

$$\delta_b(B - a) = \delta_{a+b}(B)$$

on trouve : $\delta_b * \delta_a = \delta_{a+b}$.

De même, puisque $\beta^n(B - a) = \beta^n(B)$, on voit que β^n est invariante par la convolution avec une mesure de Dirac : $\beta^n * \delta_a = \beta^n$.

3) a) Pour tout $B \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left(\left(\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \delta_{a_m}\right) * \left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \delta_{b_n}\right)\right)(B) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \delta_{a_m}\right)(B-y) d\left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \delta_{b_n}\right)(y) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left(\left(\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \delta_{a_m}\right)(B-y)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left(\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \delta_{a_m}(B-b_n)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left(\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \delta_{a_m+b_n}(B)\right) \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \beta_n \delta_{a_m+b_n}\right)(B)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \delta_{a_m}\right) * \left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \delta_{b_n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \beta_n \delta_{a_m+b_n}.$$

b) D'après le résultat ci-dessus on a :

$$\begin{aligned}
\mu_a * \mu_b &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \delta_k\right) * \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{b^k}{m!} \delta_m\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \frac{b^k}{m!} \delta_{k+m} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \frac{b^{n-k}}{(n-k)!} \delta_n = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^k b^{n-k}}{k!(n-k)!} \delta_n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k}\right) \delta_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} \delta_n = \mu_{a+b}.
\end{aligned}$$

□

Exercice 1.

Calculer la transformée de Fourier de la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^4}$.

Solution : De façon générale, dans le cas d'une fonction f λ-intégrable sur $\mathbb{R}$, la détermination de la transformée de Fourier de f revient au calcul de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(y) d\lambda(y)$ qui se ramène à une intégrale du type $\int_{\mathbb{R}} e^{it} g(t) d\lambda(t)$. Le calcul d'une telle intégrale est classiquement réalisée par la méthode des résidus, en particulier dans le cas où la fonction g est holomorphe dans $\mathbb{C}$ en dehors d'un ensemble fini de pôles dont aucun n'est réel. Le résultat est alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it} g(t)dt = 2i\pi \sum_{z_k} Res(z \mapsto e^{iz} g(z), z_k)$$

où la somme des résidus est étendue à tous les pôles z_k de g tels que $Im(z_k) > 0$.

Dans le cas de l'exercice proposé (où il est clair que la fonction donnée est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$), nous devons calculer $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ixy}}{1+y^4} d\lambda(y)$, intégrale qui, lorsque $x \neq 0$, devient $|x|^3 \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it}}{x^4+t^4} d\lambda(t)$ par le changement de variable $t = -xy$. Il suffit de calculer $\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it}}{x^4+t^4} d\lambda(t)$ pour $x > 0$. Les pôles de $z \mapsto \frac{1}{x^4+z^4}$ de partie imaginaire positive sont $z_1 = xe^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = xe^{i\frac{3\pi}{4}}$, et les résidus de $z \mapsto \frac{e^{iz}}{x^4+z^4}$ sont, respectivement pour z_1 et z_2 :

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{e^{iz_1}}{4z_1^3} = -\frac{1}{4x^4} z_1 e^{iz_1} = -\frac{1}{4x^3} e^{i\frac{\pi}{4}} \exp(ixe^{i\frac{\pi}{4}}) \\ &= -\frac{1}{4x^3} \exp\left(-x\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(x\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right), \end{aligned}$$

et de façon analogue

$$R_2 = -\frac{1}{4x^3} \exp\left(-x\frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(-x\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\pi}{4}\right)\right).$$

Il en résulte :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{it}}{x^4+t^4} dt = 2i\pi(R_1+R_2) = \frac{\pi}{x^3} e^{-x\frac{\sqrt{2}}{2}} \cos\left(x\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Finalement, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\widehat{f}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|x|\frac{\sqrt{2}}{2}} \cos\left(|x|\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

résultat dont on vérifie qu'il est compatible avec la valeur

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \pi\frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad \square$$

Exercice 2.

1) En développant l'exponentielle en série entière, montrer que la densité de Gauss g_1 définie par $g_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ est sa propre transformée de Fourier.

2) En déduire que, plus généralement, la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}^n$ par $g_n(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{||x||^2}{2}}$, où $||.||$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$, possède la même propriété.

Solution : 1) D'après la définition, $\widehat{g_1}$ est donnée par

$$\begin{aligned}\widehat{g_1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} d\lambda(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ixy)^k}{k!} e^{-\frac{y^2}{2}} \right) d\lambda(y) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(-ix)^k}{k!} \int_{\mathbb{R}} y^k e^{-\frac{y^2}{2}} d\lambda(y) \right),\end{aligned}$$

où l'intégration terme à terme de la série est justifiée par le théorème de lebesgue de la convergence dominée. En effet, pour tout $m \geq 0$:

$$\begin{aligned}\left| \sum_{k=0}^{m} \frac{(-ixy)^k}{k!} e^{-\frac{y^2}{2}} \right| &= e^{-\frac{y^2}{2}} \left| \sum_{k=0}^{m} \frac{(-ixy)^k}{k!} \right| \leq e^{-\frac{y^2}{2}} \sum_{k=0}^{m} \frac{|xy|^k}{k!} \\ &\leq e^{-\frac{y^2}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|xy|^k}{k!} = e^{-\frac{y^2}{2} + |xy|}\end{aligned}$$

et la fonction majorante, indépendante de m, est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle continue et telle que $\lim\limits_{|y| \longrightarrow +\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2} + |xy|} = 0$.

Il reste à remarquer que l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} y^k e^{-\frac{y^2}{2}} d\lambda(y)$ est nulle si k est impair, tandis que pour k pair ($k = 2p$), au moyen d'une intégration par partie on obtient que cette même intégrale vaut

$$\sqrt{2\pi}(2p-1)(2p-3)\ldots 3 \times 1 = \sqrt{2\pi} \frac{(2p)!}{p! 2^p},$$

et finalement :

$$\widehat{g_1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\frac{-x^2}{2} \right)^p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = g_1(x).$$

2) De l'écriture

$$g_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_k^2}{2}} \right)$$

et du résulta ci-dessus et des propriétés de la transformée de Fourier, on déduit

$$\widehat{g_n}(x) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_k^2}{2}} \right) = g_n(x).$$

□

Exercice 3.

Caractériser les fonctions dans $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda_n)$ dont la transformée de Fourier est réelle, et celle dont la transformée de Fourier est imaginaire pure.

Solution : On a

$$\begin{array}{llll} \widehat{f} & \text{réelle} & \Leftrightarrow & \widehat{f} = \overline{\widehat{f}} = \widehat{\overline{f}} \circ S = \widehat{\overline{f \circ S}} \quad \Leftrightarrow \quad f = \overline{f \circ S} \quad \lambda_n - p.p. \\ & & \Leftrightarrow & Re(f(x)) + Im(f(x)) = Re(f(-x)) - iIm(f(-x)) \quad \lambda_n - p.p. \\ & & \Leftrightarrow & Re(f(x)) = Re(f(-x)) \quad \text{et} \quad Im(f(x)) = -Im((f(x)) \quad \lambda_n - p.p. \end{array}$$

condition qui, lorsque f est continue, équivaut à

$$Re(f) \quad \text{paire} \qquad \text{et} \qquad Im(f) \quad \text{impaire.}$$

De façon analogue on obtient

$$\begin{array}{llll} \widehat{f} & \text{imaginaire pure} & \Leftrightarrow & \widehat{f} = -\overline{\widehat{f}} \\ & & \Leftrightarrow & Re(f(x)) = -Re(f(-x)) \quad \text{et} \quad Im(f(x)) = Im((f(x)) \ \lambda_n - p.p. \end{array}$$

condition qui, lorsque f est continue, équivaut à

$$Re(f) \quad \text{impaire} \qquad \text{et} \qquad Im(f) \quad \text{paire.}$$

□

Exercice 4.

Retrouver le résultat de l'exercice 2 (1) en montrant que $\widehat{g_1}$ est solution de l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} + xy = 0.$$

Solution : Remarquons d'abord que $g_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, car, pour tout $n \geq 1$:

$$\lim_{|x| \longrightarrow +\infty} x^n g_1(x) = 0.$$

Alors, au moyen d'une intégration par parties, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{d}{dx}\widehat{g_1}(x) & = & -i\widehat{Mg_1}(x) = \dfrac{-i}{2\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} y e^{-\frac{y^2}{2}} d\lambda(y) \\ & = & \dfrac{i}{2\pi} \left(\left[e^{-ixy} e^{-\frac{y^2}{2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} + ix \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} e^{-\frac{y^2}{2}} d\lambda(y) \right) = x\widehat{g_1}(x) \end{array}$$

et $\widehat{g_1}$ est bien solution de l'équation différentielle $\dfrac{dy}{dx}+xy=0$. Or l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de cette équationest l'ensemble des fonctions du type $x \mapsto Ce^{-\frac{x^2}{2}}$ où C est une cosntante. Il existe donc une constante C telle que $\widehat{g_1}(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et C est donnée par

$$C = \widehat{g_1}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} g_1(y) d\lambda(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

□

Exercice 5.

Pour tout $n \geq 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n dx$.

1) a) Rappeler pourquoi I_1 existe comme intégrale convergente.

b) Montrer que I_1 n'est pas une intégrale de Lebesgue, mais que c'est le cas pour I_n avec $n \geq 2$.

c) Montrer que $I_1 = I_2$.

2) Calculer I_2.

3) a) Calculer la transformée de Fourier de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-|x|)1_{[-1,1]}(x)$.

b) En déduire I_4.

4) Calculer I_3.

Solution : Remarque. Les intégrales considérées ne présentent aucune difficulté à l'origine car $\dfrac{\sin(x)}{x}$ amdmet une limite finie lorsque x tend vers 0.

1) a) La convergence est assurée par

$$\int_1^t \frac{\sin(x)}{x} dx = \left[-\frac{\cos(x)}{x}\right]_1^t - \int_1^t \frac{\cos(x)}{x^2} dx, \qquad (t > 1)$$

puisque l'intégrale du second membre est absolument convergente.

b) L'intégrale définissant I_1 n'est pas Lebesgue-intégrable car elle n'est pas absolument convergente. Cela peut se voir en écrivant, pour tout entier $m \geq 1$:

$$\int_0^{m\pi} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| dx = \sum_{k=1}^m \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| dx \geq \sum_{k=1}^m \frac{1}{k\pi} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(x)|\, dx = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k},$$

et en utilisant que la dernière somme n'est pas borné quand m tend vers $+\infty$ puisque la série harmonique diverge.

Cependant, pour tout $n \geq 2$, la majoration $\left|\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right)^n\right| \leq \dfrac{1}{|x|^n}$ assure la convergence absolue de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^n dx$, il en résulte que I_n est bien une intégrale de Lebesgue.

c) L'égalité

$$\int_0^t \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx = \left[-\frac{\sin^2 x}{x}\right]_0^t + \int_0^t \frac{\sin 2x}{x} dx = -\frac{\sin^2 t}{t} + \int_0^{2t} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

permet de retrouver la convergence de l'intégrale définissant I_1 et donne aussi $I_1 = I_2$.

2) D'après l'exemple du cours et le théorème de Plancherel :

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \theta^2 d\lambda = (N_2(\theta))^2 = \left(N_2\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} 1_{[-1,1]}\right)\right)^2 = \pi.$$

3) a) On sait que $\widehat{f}$ est réelle (cf. Exercice 3) et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} f(y) d\lambda(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} e^{-ixy}(1-|y|) d\lambda(y) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 (\cos xy)(1-|y|) dy \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{si} \quad x = 0 \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{\sin x}{x} + \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_0^1 y \cos xy dy = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{1-\cos x}{x^2} \\ \qquad = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\dfrac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2 \quad \text{si} \quad x \neq 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

b) Par le théorème de Plancherel on obtient :

$$\begin{aligned}
I_4 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^4 dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^4 dx = \pi \left(N_2(\widehat{f})\right)^2 = \pi (N_2(f))^2 \\
&= \pi \int_{-1}^{1} (1-|y|)^2 dy = 2\pi \int_0^1 (1-y)^2 dy = \frac{2\pi}{3}.
\end{aligned}$$

4) En 3) on a trouvé $\widehat{f}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} (\theta(x/2))^2$ d'où l'on déduit que $\theta^2 = \widehat{g}$ si g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} f(\dfrac{x}{2})$. Le théorème de Plancherel donne alors

$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^3 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 \frac{\sin x}{x} dx = \Phi(\theta^2, \theta) = \Phi\left(g, \sqrt{\frac{\pi}{2}} 1_{[-1,1]}\right) \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \left|\frac{x}{2}\right|\right) 1_{[-1,1]}(\frac{x}{2}) 1_{[-1,1]}(x) dx = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} \left(1 - \left|\frac{x}{2}\right|\right) dx \\
&= \pi \int_0^1 (1 - \frac{x}{2}) dx = \frac{3\pi}{4}.
\end{aligned}$$

□