Intégration sur un intervalle quelconque et intégrales dépendant d'un paramètre

Professeur Mohamed BOUCETTA

Table des matières

1 Intégration sur un intervalle quelconque **5**

1.1 Intégration des fonctions continues par morceaux positives . . 5

1.1.1 Définition, critères d'intégration, exemples et propriétés 5

1.1.2 Comparaison des fonctions intégrables positives 13

1.1.3 Comparaison de la convergence des intégrales et des séries numériques 16

1.2 Intégration des fonctions continues par morceaux à valeurs complexes 19

1.2.1 Définition, critères d'intégration, exemples et propriétés 19

1.2.2 Intégration par parties et changement de variable . . . 23

1.3 Exercices corrigés 25

2 Théorème de convergence dominée et intégrales dépendant d'un paramètre **91**

2.1 Convergence en moyenne et convergence en moyenne quadratique 91

2.2 Théorème de convergence dominée 93

2.3 Intégrales dépendant d'un paramètre 97

2.3.1 Continuité sous le signe intégrale 97

2.3.2 Dérivation sous le signe intégrale 99

2.4 Exercices corrigés 104

Chapitre 1

Intégration sur un intervalle quelconque

Un **segment** de $\mathbb{R}$ est un intervalle de la forme $[a, b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$. On suppose connues les propriétés de l'intégrale d'une fonction définie et continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ et on se propose de définir l'intégrale d'une fonction définie et continue par morceaux sur un intervalle quelconque et d'étudier les propriétés de cette intégrale.

Dans tout le chapitre I désigne un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. On notera a et b, respectivement, l'extrémité inférieure et supérieure de I, c'est-à-dire, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ avec $a = \inf I$ si I est minoré et $-\infty$ sinon. De même, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $b = \sup I$ si I est majoré et $+\infty$ sinon.

1.1 Intégration des fonctions continues par morceaux positives

1.1.1 Définition, critères d'intégration, exemples et propriétés

Rappelons qu'une fonction $f : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **continue par morceaux** s'il existe une suite finie $a_0 = \alpha < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = \beta$ telle que f est continue sur chaque $]a_{i-1}, a_i[$ et les limites de f à droite de a_{i-1} et à gauche de a_i sont finies, pour $i = 1, \ldots, n$. Autrement dit, pour chaque $i = 1, \ldots, n$, f se prolonge par continuité en une fonction continue sur $[a_{i-1}, a_i]$.
On dira qu'une fonction f définie sur un intervalle quelconque $I \subset \mathbb{R}$ est continue par morceaux si elle est continue par morceaux sur tout tout seg-

ment $[\alpha, \beta] \subset I$. On désignera par $C_m^0(I, \mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et par $C_m^0(I, \mathbb{R}^+)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux et positives sur I.

Exemple - Nous allons montrer que la fonction $f :]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{x} - E\left(\frac{1}{x}\right)$$

est continue par morceaux, $E(x)$ désigne la partie entière de x. Soit $[\alpha, \beta] \subset]0, 1]$. Il existe donc un entier $n \in N^*$ tel que $[\alpha, \beta] \subset [\frac{1}{n}, 1]$. Nous allons montrer que f est continue par morceaux sur $[\frac{1}{n}, 1]$. Considérons la subdivision de $[\frac{1}{n}, 1]$ donnée par

$$\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{1}{2}, 1\right).$$

Pour tout $k = 2, \dots, n$ et pour tout $x \in]\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}[$,

$$f(x) = \frac{1}{x} - k + 1.$$

La fonction $f_k : [\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f_k(x) = \frac{1}{x} - k + 1$$

prolonge par continuité la restriction de f à $]\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}[$. Ceci montre que f est continue par morceaux sur $]0, 1]$.

Soit $f \in C_m^0(I, \mathbb{R}^+)$. On notera $\mathcal{S}_I$ l'ensemble de tous les segments contenus dans I. On sait que, pour tout $J \in \mathcal{S}_I$, l'intégrale $\int_J f(x)dx$ est définie et, puisque f est positive, $\int_J f(x)dx \geq 0$. On définit alors l'ensemble

$$\mathcal{A}_I = \left\{ \int_J f(x)dx, J \in \mathcal{S}_I \right\}.$$

Cet ensemble est non vide et, d'après le théorème de la borne supérieure, $\mathcal{A}_I$ admet une borne supérieure si et seulement si il est majoré. Ceci nous amène naturellement à la définition suivante.

Définition 1 *Soit $f \in C_m^0(I, \mathbb{R}^+)$. On dit que f est intégrable sur I si $\mathcal{A}_I$ est majoré, c'est-à-dire, il existe $M > 0$ tel que, pour tout $J \in \mathcal{S}_I$,*

$$\int_J f(x)dx \leq M.$$

Dans ce cas, on posera $\int_I f(x)dx = \sup \mathcal{A}_I$.
La quantité positive ou nulle $\int_I f(x)dx$ *est appelée intégrale de* f *sur* I. *On notera* $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$ *l'ensemble des fonctions continues par morceaux positives intégrables sur* I.

Notations : Si I est d'extrémités a, b, l'intégrale d'une fonction intégrable sur I sera notée $\int_I f(x)dx$ ou $\int_a^b f(x)dx$.

Proposition 1 *Soient* I *tel que ses extrémités vérifient* $a, b \in \mathbb{R}$ *et* f *est une fonction positive telle qu'il existe une fonction* $g \in C_m^0([a,b], \mathbb{R}^+)$ *avec* $g_{|I} = f$. *Alors* f *est intégrable sur* I *et*

$$\int_I f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Remarque - Cette proposition suggère qu'avant d'entamer l'étude de l'intégrabilité d'une fonction $f \in C_m^0(I, \mathbb{R}^+)$ **avec** I **d'extrémités vérifiant** $a, b \in \mathbb{R}$**, il est important de calculer les limites de** f **à droite de** a **et à gauche de** b**. Si ces limites existent alors** f **est intégrable sur** I**.**

La proposition suivante montre que l'intégrablité et l'intégrale d'une fonction ne sont pas altérés si on modifie les valeurs de la fonction sur un ensemble dénombrable.

Proposition 2 *Soit* $A \subset I$ *fini ou dénombrable et* $f, g \in C_m^0(I, \mathbb{R}^+)$. *Si* f *est intégrable sur* I *et* g *et* f *coïncident sur* $I \setminus A$ *alors* g *est intégrable sur* I *et* $\int_I f(x)dx = \int_I g(x)dx$.

La proposition suivante est une conséquence immédiate des propriétés de la borne supérieure.

Proposition 3 *Soient* $f, g \in C_m^0(I, \mathbb{R}^+)$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}^+$. *Alors :*

1. *Si* $f, g \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$ *alors* $f + \lambda g \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$ *et*

$$\int_I (f + \lambda g)(x)dx = \int_I f(x)dx + \lambda \int_I g(x)dx.$$

2. *Si, pour tout* $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$ *et* $g \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$ *alors* $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$ *et* $\int_I f(x)dx \leq \int_I g(x)dx$.

En utilisant le fait qu'une fonction continue positive sur un segment J qui a une intégrale sur J nulle doit être nulle sur J, on déduit aisément le résultat suivant.

Proposition 4 *Si f est continue positive et intégrable sur I et $\int_I f(x)dx = 0$ alors f est nulle sur I.*

Nous allons maintenant donner quelques critères d'intégrabilité assez simples à vérifier.

Soit $f \in C_m^0(I, \mathbb{R}^+)$ avec I d'extrémités a, b. Considérons deux suites $(a_n)_{n\in N^*}$ et $(b_n)_{n\in N^*}$ qui vérifient :

1. $(a_n)_{n\in N^*}$ est la suite constante égale à a si $a \in I$,
2. $(b_n)_{n\in N^*}$ est la suite constante égale à b si $b \in I$,
3. si $a \notin I$, $(a_n)_{n\in N^*}$ est une suite décroissante de points de I qui converge vers a,
4. si $b \notin I$, $(b_n)_{n\in N^*}$ est une suite croissante de points de I qui converge vers b.

Ce genre de suites existe toujours comme conséquence de la définition de a, b. Posons, pour tout $n \in N^*$, $J_n = [a_n, b_n]$. La suite $(J_n)_{n\in N^*}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{S}_I$ qui vérifie :

- pour tout $n \in N^*$, $J_n \subset J_{n+1}$,
- $\bigcup_{n\in N^*} J_n = I$.

En plus, il est facile de vérifier que, pour tout $J \in \mathcal{S}_I$, il existe $n_0 \in N^*$, tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad J \subset J_n. \tag{1.1}$$

Maintenant, puisque f est positive, la suite $(\int_{J_n} f(x)dx)_{n\in N^*}$ est croissante. On a deux situations :

1. $(\int_{J_n} f(x)dx)_{n\in N^*}$ est majorée et donc convergente. Dans ce cas, en vertu de (1.1), f est intégrable et

$$\int_I f(x)dx = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \int_{J_n} f(x)dx = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{J_n} f(x)dx.$$

2. $(\int_{J_n} f(x)dx)_{n\in N^*}$ n'est pas majorée. Dans ce cas,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{J_n} f(x)dx = +\infty$$

et alors f n'est pas intégrable.

La suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie ci-dessus est appelée **suite exhaustive de segments** de I. Nous obtenons alors le critère usuel d'intégrabilité suivant.

Théorème 1 *Soit $f \in C_m^0(I, \mathbb{R}^+)$. Alors :*

1. *f est intégrable si et seulement si il existe une suite exhaustive $([a_n,b_n])_{n\in N^*}$ d'éléments de $\mathcal{S}_I$ telle que la suite $(\int_{a_n}^{b_n} f(x)dx)_{n\in N^*}$ est majorée.*
2. *Si f est intégrable alors, pour toute suite exhaustive $([a_n,b_n])_{n\in N^*}$ d'éléments de $\mathcal{S}_I$*

$$\int_I f(x)dx = \sup_{n\in N^*} \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx.$$

Exemples -

1. **La fonction f qui à $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue et positive sur $]0,1]$. Pour tout $n \in N^*$, on pose $J_n = [\frac{1}{n},1]$. La suite $(J_n)_{n\in N^*}$ est une suite exhaustive de $]0,1]$ et, pour tout $n \in N^*$, on a**

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{1}{\sqrt{t}}dt = 2 - 2\sqrt{\frac{1}{n}},$$

et donc, en vertu du théorème 1, f est intégrable sur $]0,1]$ et

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \lim_{n\longrightarrow+\infty}(2 - 2\sqrt{\frac{1}{n}}) = 2.$$

2. **La fonction g qui à $t \longrightarrow e^{-t}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$. Pour tout $n \in N^*$, on pose $J_n = [0,n]$. La suite $(J_n)_{n\in N^*}$ est une suite exhaustive de $[0,+\infty[$ et, pour tout $n \in N^*$, on a**

$$\int_0^n e^{-t}dt = 1 - e^{-n},$$

et donc, en vertu du théorème 1, g est intégrable sur $[0,+\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \lim_{n\longrightarrow+\infty}(1 - e^{-n}) = 1.$$

3. **La fonction h qui à $x \longrightarrow \cos^2(x)e^x$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$. Pour tout $n \in N^*$, on pose $J_n = [0,n]$. La suite $(J_n)_{n\in N^*}$ est une suite exhaustive de $[0,+\infty[$ et, pour tout $n \in N^*$, on a**

$$\int_0^n h(x)dx \geq \int_0^n \cos^2(x)dx = \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}\sin(2n) \geq \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}.$$

Ainsi $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^n h(x)dx = +\infty$ et donc, en vertu du théorème 1, h n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$.

La construction et le raisonnement qui précèdent le théorème 1 montrent que de l'intégrabilité d'une fonction $f \in C_m^0(I, \mathbb{R}^+)$ dépend du comportement de f aux voisinages de chacune des extrémités de I qui n'appartient pas à I. Si les deux extrémités n'appartiennent pas à I, la proposition suivante va permettre d'étudier séparément l'intégrabilité au voisinage de chaque extrémité.

Proposition 5 *Soit $f \in C_m^0(I, \mathbb{R}^+)$ et $c \in I$. Posons $I_c^+ = I \cap [c, +\infty[$ et $I_c^- = I \cap]-\infty, c]$. Alors f est intégrable sur I si et seulement si f est intégrable sur I_c^+ et I_c^- et, dans ce cas,*

$$\int_I f(x)dx = \int_{I_c^-} f(x)dx + \int_{I_c^+} f(x)dx.$$

Exemple - On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \sin^2(x)e^{-x^2}.$$

Nous allons étudier l'intégrabilité de cette fonction. Cette fonction est continue et positive et, en vertu de la proposition 5, elle est intégrable si et seulement si elle est intégrable sur $[0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0]$.

- **On considère la suite exhaustive $([0, n])_{n \in N^*}$ de segments de $[0, +\infty[$. Puisque, pour tout $x \in [0, +\infty[$,**

$$\sin^2(x) \leq x^2,$$

  on déduit que

$$\int_0^n f(x)dx \leq \int_0^n x^2 e^{-x^3} dx = -\frac{1}{3}\left[e^{-x^3}\right]_0^n = \frac{1}{3} - e^{-n^3} \leq \frac{1}{3}.$$

  La suite $\left(\int_0^n f(x)dx\right)_{n \in N^*}$ est donc majorée et, en vertu du théorème 1, f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

- **On considère la suite exhaustive $([-n, 0])_{n \in N^*}$ de segments de $]-\infty, 0]$. Le changement de variable $t = -x$ donne**

$$\int_{-n}^0 f(x)dx = \int_0^n \sin^2(x)e^{x^3}dx,$$

  et pour tout $x \geq 0$, $e^{x^3} \geq 1$ et donc

$$\int_{-n}^0 f(x)dx \geq \int_0^n \sin^2(x)dx = \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}\sin(2n) \geq \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}.$$

  Donc, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \int_{-n}^0 f(x)dx = +\infty$ et, en vertu du théorème 1, f n'est pas intégrable sur $]-\infty, 0]$.

En conclusion, f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

Nous allons maintenant donner un autre critère d'intégrabilité. Soit $f \in C_m^0(I, \mathbb{R}^+)$ avec a, b les extrémités de I. En vertu de la proposition 5, on peut se limiter aux cas où a ou b appartient à I. Supposons que $a \in I$ et $b \notin I$. Pour tout $x \in I$, posons

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

F_a est continue sur I mais, en général, elle n'est pas dérivable sur I, néanmoins, si f est continue sur $]\alpha, \beta[$ alors F_a est dérivable sur $]\alpha, \beta[$ et pour tout $x \in]\alpha, \beta[$,

$$F_a'(x) = f(x).$$

On dit que F_a est de classe C^1 par morceaux. Puisque f est positive, si $x \leq y$, on a $F_a(x) \leq F_a(y)$ et donc $F_a(x)$ est croissante. On a alors deux situations :

1. F_a est majorée et pour toute suite croissante $(b_n)_{n \in N^*}$ qui converge vers b, la suite $(F_a(b_n))_{n \in N^*}$ est convergente et, en vertu du théorème 1, f est intégrable et
$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \longrightarrow b} F_a(x).$$
2. F_a n'est pas majorée et donc f n'est pas intégrable.

Le cas $a \notin I$ et $b \in I$ se traite de la même manière. On obtient alors le critère d'intégrabilité suivant.

Théorème 2 *Soit $f \in C_m^0(I, \mathbb{R}^+)$ et a, b les extrémités de I. Fixons $c \in I$ et posons $F_c(x) = \int_c^x f(t)dt$. Alors on a :*

1. *f est intégrable sur I si et seulement si la fonction F_c est bornée,*
2. *la fonction F_c est bornée si et seulement si les deux limites $\lim_{x \longrightarrow a^+} F_c(x)$ et $\lim_{x \longrightarrow b^-} F_c(x)$ existent et sont finies,*
3. *si f est intégrable alors*
$$\int_I f(x)dx = \lim_{x \longrightarrow b^-} F_c(x) - \lim_{x \longrightarrow a^+} F_c(x).$$

Ce théorème nous amène à poser la définition suivante.

Définition 2 *Soit $f \in C_m^0(I, \mathbb{K})$ avec a, b les extrémités de I. On dira que f est à intégrale convergente sur I ou que $\int_I f(x)dx$ est convergente s'il existe $c \in I$ tel que les deux limites $\lim_{x \longrightarrow a^+} F_c(x)$ et $\lim_{x \longrightarrow b^-} F_c(x)$ existent et sont finies. Dans le cas contraire, on dira que f est à intégrale divergente sur I ou que $\int_I f(x)dx$ est divergente.*

Noter que la définition ci-dessus ne dépend pas du choix du point $c \in I$.

Remarque importante - Bien que le théorème 2 affirme que pour $f \in C_m^0(I, \mathbb{R}^+)$ la notion d'intégrabilité donnée dans la définition 1 et la notion de convergence de l'intégrale de f sur I donnée dans la définition 2 coïncident, il est important de distinguer ces deux notions puisque nous allons voir (*cf.* Théorème 5 et l'exemple qui le suit) que ces deux notions ne coïncident pas, en général, pour une fonction de signe variable ou à valeurs complexes.

Dans ce qui suit, l'expression "étudier la nature de $\displaystyle\int_I f(t)dt$ " est un raccourci pour "étudier la convergence de l'intégrale de f sur I".

Exemples - (Intégrales de Riemann)

1. **On considère la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ définie sur $]0, 1]$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Nous allons étudier l'intégrabilité de cette fonction ce qui est équivalent, en vertu du théorème 2, a la convergence de l'intégrale**

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Pour tout $x \in]0, 1]$, on a

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} -\ln x & \textbf{si} \quad \alpha = 1, \\ \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right) & \textbf{si} \quad \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Puisque $\lim_{x \longrightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = \begin{cases} 0 & \textbf{si} \quad \alpha < 1, \\ +\infty & \textbf{si} \quad \alpha > 1, \end{cases}$$

on déduit que

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \quad \textbf{converge} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 1. \tag{1.2}$$

En conclusion, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$ et dans ce cas,

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

2. **On considère la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ définie sur $[1, +\infty[$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Nous allons étudier l'intégrabilité de cette fonction ce qui est équivalent, en vertu du théorème 2, a la convergence de l'intégrale**
$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}.$$
Pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a
$$\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \ln x & \textbf{si} \quad \alpha = 1, \\ \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right) & \textbf{si} \quad \alpha \neq 1. \end{cases}$$
Puisque $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et
$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = \begin{cases} +\infty & \textbf{si} \quad \alpha < 1, \\ 0 & \textbf{si} \quad \alpha > 1, \end{cases}$$
$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \quad \textbf{converge} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1. \tag{1.3}$$
En conclusion, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$ et dans ce cas,
$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

Remarque - L'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$$
n'est jamais convergente et donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$

1.1.2 Comparaison des fonctions intégrables positives

Commençons par quelques rappels. Soit $c \in \mathbb{R}$ ou $c = \pm\infty$ et on considère des fonctions $f, g, \ldots$ définies sur $J =]c - \epsilon, c + \epsilon[\setminus\{c\}$ $(\epsilon > 0)$ si $c \in \mathbb{R}$, $J = [A, +\infty[$ ou $J =]-\infty, A]$ si $c = \pm\infty$.

On dit que "$f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ au voisinage de c" et on notera $f(x) = o_c(g(x))$ s'il existe une fonction $\phi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \longrightarrow c} \phi(x) = 0$ et $f = g\phi$.

La notation $f(x) = o_c(g(x))$ se lit "$f(x)$ est un petit o de $g(x)$ au voisinage de c". Si la fonction $\frac{f}{g}$ est définie sur J alors on a l'équivalence :
$$f(x) = o_c(g(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \longrightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 0. \tag{1.4}$$

On dit que f est équivalente à g en c et on note $f \sim_c g$ si $f(x) - g(x) = o_c(g(x))$. Si la fonction $\frac{f}{g}$ est définie sur J alors on a l'équivalence :

$$f \sim_c g \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \longrightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \tag{1.5}$$

Nous allons maintenant donner quelques résultats permettant de déduire l'intégrabilité d'une fonction $f \in C_m^0(I, \mathbb{R}^+)$ en la comparant à une fonction test. Grâce au théorème 2, il suffit de donner des critères de comparaison pour la convergence d'intégrales.

Proposition 6 *Soient $f, g \in C_m^0(I, \mathbb{R}^+)$ tel que, pour tout $x \in I$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Alors :*

1. *Si $\displaystyle\int_I g(x)dx$ converge alors $\displaystyle\int_I f(x)dx$ converge.*
2. *Si $\displaystyle\int_I f(x)dx$ diverge alors $\displaystyle\int_I g(x)dx$ diverge.*

Théorème 3 *Soient $f, g \in C_m^0([a, b[, \mathbb{R}^+)$ avec $a < b \leq +\infty$. Alors :*

1. *Si $f(x) \sim_b Mg(x)$ avec $0 < M < +\infty$ alors les intégrales $\displaystyle\int_I g(x)dx$ et $\displaystyle\int_I f(x)dx$ sont de même nature.*
2. *Si $f(x) = o_b(g(x))$ alors si $\displaystyle\int_I g(x)dx$ converge alors $\displaystyle\int_I f(x)dx$ converge et si $\displaystyle\int_I f(x)dx$ diverge alors $\displaystyle\int_I g(x)dx$ diverge.*

On a un résultat analogue si $I =]a, b]$ avec $-\infty \leq a < b$, il suffit de remplacer b par a dans le théorème ci-dessus.

En prenant dans ce théorème $g(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ et en combinant (1.2) et (1.3) avec les résultats du théorème 3, on obtient les deux corollaires très usuels suivants.

Corollaire 1 *Soient $c > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f \in C_m^0(]0, c], \mathbb{R}^+)$ avec*

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} t^\alpha f(t) = M.$$

Alors :

1. *Si $0 < M < +\infty$ alors $\displaystyle\int_0^c f(t)dt$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.*

2. *Si* $M = 0$ *et* $\alpha < 1$ *alors* $\displaystyle\int_0^c f(t)dt$ *est convergente.*
3. *Si* $M = +\infty$ *et* $\alpha \geq 1$ *alors* $\displaystyle\int_0^c f(t)dt$ *est divergente.*

Corollaire 2 *Soient* $c > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *et* $f \in C_m^0([c, +\infty[, \mathbb{R}^+)$ *avec*

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = M.$$

Alors :

1. *Si* $0 < M < +\infty$ *alors* $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(t)dt$ *est convergente si et seulement si* $\alpha > 1$.
2. *Si* $M = 0$ *et* $\alpha > 1$ *alors* $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(t)dt$ *est convergente.*
3. *Si* $M = +\infty$ *et* $\alpha \leq 1$ *alors* $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(t)dt$ *est divergente.*

Exemples -

1. **Nous allons étudier la nature de** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{1+t^2}dt$. **La fonction** $t \mapsto \frac{\sin^2 t}{1+t^2}$ **est continue et positive sur** $[0, +\infty[$ **et on a, pour tout** $t \in [0, +\infty[$,

   $$0 \leq \frac{\sin^2 t}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

   Or

   $$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

   Il en résulte que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ **est convergente. En vertu de la proposition 6,** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{1+t^2}dt$ **est convergente et, en vertu du théorème 2, la fonction** $t \mapsto \frac{\sin^2 t}{1+t^2}$ **est intégrable sur** $[0, +\infty[$.

2. **Nous allons étudier la nature de** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}dt$. **La fonction** $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2+1}$ **est continue et positive sur** $[1, +\infty[$. **En plus,**

   $$\lim_{t \longrightarrow +\infty} t^{\frac{3}{2}} \frac{\ln t}{t^2+1} = 0.$$

   Donc, d'après le corollaire 2, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}dt$ **est convergente et, en vertu du théorème 2, la fonction** $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2+1}$ **est intégrable sur** $[1, +\infty[$.

3. **Nous allons étudier la nature de** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{t}}{t}dt$**. La fonction** $t \mapsto \frac{\sin\sqrt{t}}{t}$ **est continue et positive sur** $]0,1]$**. En plus,**

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} t^{\frac{1}{2}}\frac{\sin\sqrt{t}}{t} = \lim_{t\longrightarrow 0^+}\frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}} = 1$$

et donc, d'après le corollaire 1, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{t}}{t}dt$ **est convergente.**

4. **Nous allons étudier la nature de** $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t}\left(e^{-\frac{1}{t}}-\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt$**. Posons** $f(t)=\frac{1}{t}\left(e^{-\frac{1}{t}}-\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right)$**. Nous allons utiliser le corollaire 2 et pour cela nous aurons besoin de connaitre le signe de** $f(t)$ **pour** t **assez grand. En utilisant un développement limité au voisinage de** $+\infty$**, on obtient**

$$f(t) = -\frac{1}{t^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

soit

$$t^2 f(t) = -1 + t^2 o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Puisque $\displaystyle\lim_{t\longrightarrow+\infty} t^2 o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)=0$**, on déduit qu'il existe** $c>0$ **tel que pour tout** $t>c$**,** $f(t)<0$**. On a aussi,** $\displaystyle\lim_{t\longrightarrow+\infty} t^2(-f(t))=1$**. On peut alors utiliser le corollaire 2 et déduire que** $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ **est convergente. On déduit alors que** $|f|$ **est intégrable sur** $[1,+\infty[$**.**

1.1.3 Comparaison de la convergence des intégrales et des séries numériques

Soit $f \in C_m^0([a,+\infty[,\mathbb{R})$. L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente si et seulement

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\int_a^x f(t)dt$$

est finie. Ceci est équivalent au fait que pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$, la suite $\left(\int_a^{x_n} f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Or, en vertu de la relation de Chasles, on a

$$\int_a^{x_n} f(t) = \int_a^{x_0} f(t)dt + \sum_{n=0}^{n-1}\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt.$$

Nous avons donc établie la proposition suivante :

Proposition 7 *L'intégrale* $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *est convergente si et seulement si pour toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui tend vers* $+\infty$ *la série numérique* $\sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt$ *est convergente.*

Remarque - Cette proposition peut être utilisée pour montrer que certaines intégrales divergent. Pour cela, il suffit de trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$ alors que $\sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt$ est divergente. L'exemple qui suit illustre cette remarque.

Exemple - Nous allons montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}dt$ n'est pas convergente. Pour cela, considérons la suite $(n\pi)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge clairement vers $+\infty$. Nous allons montrer que la série $\displaystyle\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ tend vers $+\infty$. Or, pour $n \geq 1$,

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \geq \frac{1}{(1+n)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt = \frac{2}{(1+n)\pi}.$$

D'un autre côté,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1} \geq \sum_{j=1}^{n} \int_{j+1}^{j+2} \frac{dx}{x} = \int_2^{n+2} \frac{dx}{x} = \ln(\frac{n+2}{2}),$$

et ainsi

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt \geq \frac{2}{\pi} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j+1} \geq \frac{2}{\pi} \ln(\frac{n+2}{2}).$$

Puisque $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \ln(\frac{n+2}{2}) = +\infty$, on déduit que $\displaystyle\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ tend vers $+\infty$. Finalement, en vertu de la proposition 7, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}dt$ est divergente. En conclusion, la fonction $t \mapsto \frac{|\sin t|}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

La proposition suivante peut être utile pour prouver la convergence de certaines intégrales de fonctions positives et donc leur intégrabilité.

Proposition 8 *Soit* $f \in C_m^0([a, +\infty[, \mathbb{R}^+)$. *L'intégrale* $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *est convergente si et seulement s'il existe une suite croissante* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *qui tend vers* $+\infty$ *telle que la série numérique* $\sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)dt$ *est convergente.*

Exemple - Nous allons utiliser la proposition 8 pour montrer que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{tE\left(\ln^2 t\right)}$$

est convergente. Rappelons que E désigne la partie entière. On considère la suite croissante $(e^{\sqrt{n}})_{n\geq 1}$ et nous allons montrer que la série

$$\sum \int_{e^{\sqrt{n}}}^{e^{\sqrt{n+1}}} \frac{dt}{tE\left(\ln^2 t\right)}$$

est convergente.
Pour tout $t \in [e^{\sqrt{n}}, e^{\sqrt{n+1}}[$,

$$n \leq \ln^2 t < n+1$$

et donc $E(\ln^2 t) = n$. Ainsi, pour $\epsilon > 0$ petit,

$$\int_{e^{\sqrt{n}}}^{e^{\sqrt{n+1}}-\epsilon} \frac{dt}{tE\left(\ln^2 t\right)} = \frac{1}{n}\int_{e^{\sqrt{n}}}^{e^{\sqrt{n+1}}-\epsilon} \frac{dt}{t} = \frac{\ln\left(e^{\sqrt{n+1}}-\epsilon\right)-\sqrt{n}}{n}.$$

Maintenant,

$$\int_{e^{\sqrt{n}}}^{e^{\sqrt{n+1}}} \frac{dt}{tE\left(\ln^2 t\right)} = \lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\int_{e^{\sqrt{n}}}^{e^{\sqrt{n+1}}-\epsilon} \frac{dt}{tE\left(\ln^2 t\right)} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}.$$

Or

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{n(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \sim_{+\infty} \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.$$

Ceci montre que la série

$$\sum \int_{e^{\sqrt{n}}}^{e^{\sqrt{n+1}}} \frac{dt}{tE\left(\ln^2 t\right)}$$

est convergente et, d'après la proposition 8, l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{tE\left(\ln^2 t\right)}$$

est convergente.

Nous allons finir cette section par cette proposition qui permet de déduire la convergence de beaucoup de séries numériques.

Proposition 9 *Soit f continue, positive et décroissante sur $[a, +\infty[$. Alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et la série $\sum f(n)$ sont de même nature.*

Exemple - En utilisant (1.3) et la proposition 9, on déduit que la série

$$\sum \frac{1}{n^\alpha}$$

dite de Riemann est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

1.2 Intégration des fonctions continues par morceaux à valeurs complexes

Dans cette section, nous allons définir l'intégrabilité d'une fonction $f \in C_m^0(I, \mathbb{K})$, son intégrale les propriétés de cette intégrale. Notons que si $f \in C_m^0(I, \mathbb{C})$ alors $|f| \in C_m^0(I, \mathbb{R}^+)$, $\mathrm{Re}f, \mathrm{Im}f \in C_m^0(I, \mathbb{R})$. On a clairement

$$|f| \leq |\mathrm{Re}f| + |\mathrm{Im}f|, \ |\mathrm{Re}f| \leq |f| \quad \text{et} \quad |\mathrm{Im}f| \leq |f|. \tag{1.6}$$

Si $f \in C_m^0(I, \mathbb{R})$, on pose

$$f^+ = \sup(f, 0) = \frac{1}{2}(f + |f|) \quad \text{et} \quad f^- = \sup(-f, 0) = \frac{1}{2}(|f| - f).$$

On a clairement $f^+, f^- \in C_m^0(I, \mathbb{R}^+)$,

$$f = f^+ - f^- \quad \text{et} \quad |f| = f^+ + f^-. \tag{1.7}$$

On a aussi

$$|f| \leq |f^+| + |f^-|, \ |f^+| \leq |f| \quad \text{et} \quad |f^-| \leq |f|. \tag{1.8}$$

1.2.1 Définition, critères d'intégration, exemples et propriétés

Définition 3 *Soit $f \in C_m^0(I, \mathbb{K})$. On dit que f est intégrable sur I si $|f|$ est intégrable sur I. On notera $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ le sous-ensemble de $C_m^0(I, \mathbb{K})$ formé par les fonctions intégrables.*

Ce résultat est une conséquence immédiate de la proposition 3 et des inégalités (1.6) et (1.8).

Théorème 4
1. *Soit $f \in C_m^0(I, \mathbb{R})$. Alors f est intégrale sur I si et seulement si f^+ et f^- sont intégrables sur I. Dans ce cas, on pose par* **définition**
$$\int_I f(x)dx = \int_I f^+(x)dx - \int_I f^-(x)dx.$$
2. *Soit $f \in C_m^0(I, \mathbb{C})$. Alors f est intégrale sur I si et seulement si* $\mathrm{Re}f$ *et* $\mathrm{Im}f$ *sont intégrables sur I. Dans ce cas, on pose par* **définition**
$$\int_I f(x)dx = \int_I \mathrm{Re}f(x)dx + \imath \int_I \mathrm{Im}f(x)dx.$$

En appliquant le théorème 1 et le théorème 4, on obtient le résultat usuel suivant.

Proposition 10 *Soit $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$. Alors pour tout suite exhaustive $(J_n)_{n\in N^*}$ de segments de I, on a*

$$\int_I f(x)dx = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{J_n} f(x)dx.$$

Exemples -

1. **Nous allons étudier l'intégrabilité de la fonction $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \frac{\sin(t^8)}{t^2}e^{\imath t}$. Par définition, f est intégrable si $|f|$ est intégrable. Or, pour tout $t \in [1, +\infty[$, $|f(t)| = \frac{|\sin(t^8)|}{t^2}$. D'après le théorème 2, $|f|$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t^8)|}{t^2}dt$ est convergente. Soit $x > 1$, en effectuant le changement de variable $t^8 = u$, on obtient**

$$\int_1^x \frac{|\sin(t^8)|}{t^2}dt = 8\int_1^{x^8} \frac{|\sin(u)|}{u^{\frac{9}{8}}}du.$$

Donc $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t^8)|}{t^2}dt$ est convergente si et seulement si $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^{\frac{9}{8}}}dt$ est convergente. Or, pour tout $t \geq 1$,

$$\frac{|\sin(t)|}{t^{\frac{9}{8}}} \leq \frac{1}{t^{\frac{9}{8}}},$$

l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\frac{9}{8}}}dt$ est convergente (*cf.* (1.3)) et la proposition 6 permet de conclure que $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t^{\frac{9}{8}}}dt$ est convergente. En conclusion, f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

2. **Nous allons montrer que la fonction $g : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \sin(t)e^{-t(1+\imath)}$ est intégrable et nous allons calculer son intégrale. Par définition, g est intégrable si $|g|$ est intégrable. Or, pour tout $t \in [0, +\infty[$, $|g(t)| = |\sin(t)|e^{-t}$. D'après le théorème 2, $|g|$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} |\sin(t)|e^{-t}dt$ est convergente. Or, pour tout $t \geq 0$,**

$$|\sin(t)|e^{-t} \leq e^{-t},$$

l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ est clairement convergente et donc, en vertu de la proposition 6, $\int_0^{+\infty} |\sin(t)|e^{-t}dt$ est convergente. Ainsi g est intégrable sur $[0, +\infty[$.
Nous allons calculer $\int_0^{+\infty} g(t)dt$ en utilisant la proposition 10. Considérons la suite exhaustive $([0, n])_{n\in N^*}$ de $[0, +\infty[$. En utilisant deux intégrations par parties successives, on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^n \sin(t)e^{-t(1+\imath)}dt &= -\frac{1}{1+\imath}\left[\sin(t)e^{-t(1+\imath)}\right]_0^n + \frac{1}{1+\imath}\int_0^n \cos(t)e^{-t(1+\imath)}dt, \\
\int_0^n \cos(t)e^{-t(1+\imath)}dt &= -\frac{1}{1+\imath}\left[\cos(t)e^{-t(1+\imath)}\right]_0^n - \frac{1}{1+\imath}\int_0^n \sin(t)e^{-t(1+\imath)}dt.
\end{aligned}$$

On déduit alors que

$$(1-\frac{1}{2}\imath)\int_0^n \sin(t)e^{-t(1+\imath)}dt = -\frac{1}{1+\imath}\sin(n)e^{-n(1+\imath)} + \frac{1}{2}\imath\cos(n)e^{-n(1+\imath)} - \frac{1}{2}\imath.$$

Or,

$$|\sin(n)e^{-n(1+\imath)}| \leq e^{-n} \quad \textbf{et} \quad |\cos(n)e^{-n(1+\imath)}| \leq e^{-n},$$

et donc

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sin(n)e^{-n(1+\imath)} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \cos(n)e^{-n(1+\imath)} = 0.$$

On obtient finalement que

$$\int_0^{+\infty} g(t)dt = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^n \sin(t)e^{-t(1+\imath)}dt = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}\imath.$$

Soit $f \in C_m^0(I,\mathbb{R})$. D'après le théorème 2, f est intégrable si et seulement si $\int_I |f(x)|dx$ est convergente. Dans ce cas, en vertu de la proposition 6 et de (1.8) les intégrales $\int_I f^+(x)dx$ et $\int_I f^-(x)dx$ sont convergentes et donc $\int_I f(x)dx$ est convergente et sa valeur c'est l'intégrale de f. On a donc établie le résultat suivant.

Théorème 5 *Soient $f \in C_m^0(I,\mathbb{C})$ avec a, b les extrémités de I et $c \in I$. Pour tout $x \in I$, posons*

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)dt.$$

Alors :

1. *f est intégrable sur I si seulement si $\int_I |f(x)dx$ est convergente.*
2. *Si f est intégrable sur I alors l'intégrale de f sur I est convergente, c'est-à-dire, les deux limites $\lim_{x\longrightarrow a^+} F_c(x)$ et $\lim_{x\longrightarrow b^-} F_c(x)$ existent et sont finies et on a*

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\longrightarrow b^-} F_c(x) - \lim_{x\longrightarrow a^+} F_c(x).$$

Remarque importante - La réciproque de la deuxième assertion du théorème 5 est fausse comme nous allons le voir dans l'exemple qui suit. Il est alors important de distinguer la notion d'intégrabilité donnée dans les définitions 1 et 3 et la notion de convergence de l'intégrale donnée dans la définition 2 bien qu'en vertu du théorème 2 ces deux notions coïncident pour les fonctions positives.

Exemple - Nous avons vu dans le sous-paragraphe 1.1.3 que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t} dt$ n'est pas convergente et donc la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$. Nous allons montrer que, néanmoins, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente. Soit $x > 0$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt &= \left[-\frac{\cos(t)}{t} \right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt \\ &= -\frac{\cos(x)}{x} + \cos(1) - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2} dt. \end{aligned}$$

On a

$$\frac{|\cos(x)|}{x} \leq \frac{1}{x}$$

et donc $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$. **Maintenant, pour tout** $t \geq 1$**,**

$$\frac{|\cos(t)|}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}.$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente (*cf.* (1.3)) et, en vertu de la proposition 6, on déduit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{|\cos(t)|}{t^2} dt$ est convergente, ce qui permet de conclure.
Nous déduisons que l'intégrale dite de Dirichlet

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

est convergente. Nous allons calculer la valeur de cette intégrale de plusieurs manières (voir les exercices 29, 30, 49 et 50). On obtiendra

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Le théorème suivant énumère les propriétés importantes des fonctions intégrables et leurs intégrales.

Théorème 6

1. *L'ensemble $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'application intégrale de $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ est une forme linéaire.*
2. *Si $f, g \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R})$ et, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_I f(x)dx \leq \int_I g(x)dx$.*
3. *Si $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{C})$ alors*

$$\left| \int_I f(x)dx \right| \leq \int_I |f(x)|dx.$$

4. Si $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{C})$ alors pour tout $c \in I$, on a la relation de Chasles

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt,$$

où a, b sont les extrémités de I.

1.2.2 Intégration par parties et changement de variable

Dans le cas des intégrales sur un intervalle quelconque, l'intégration par parties permet d'abord de déduire la convergence, dans certains cas, de déduire l'intégrabilité et de calculer les intégrales. Rappelons que I désigne un intervalle d'extrémités a, b.

Théorème 7 *Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur I telles que $\lim\limits_{t\longrightarrow b^-} u(t)v(t)$ et $\lim\limits_{t\longrightarrow a^+} u(t)v(t)$ existent et sont finies. Alors $\displaystyle\int_I u'(t)v(t)dt$ et $\displaystyle\int_I u(t)v'(t)dt$ sont de même nature et quand elles* **convergent** *on a*

$$\int_I u'(t)v(t)dt = \lim_{t\longrightarrow b^-} u(t)v(t) - \lim_{t\longrightarrow a^+} u(t)v(t) - \int_I u(t)v'(t)dt.$$

Exemple - En utilisant le théorème 7, nous allons montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ est convergente. Posons $u'(t) = \sin t$ et $v(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$. On a

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} u(t)v(t) = \lim_{t\longrightarrow+\infty} \frac{-\cos t}{\sqrt{t}} = 0.$$

D'un autre côté,

$$\int_1^{+\infty} u(t)v'(t)dt = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}}dt$$

qui est une intégrale convergente. En effet,

$$\left|\frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}}\right| \leq \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}.$$

La fonction de Riemann $t \mapsto \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et donc, en vertu de la proposition 3, la fonction $t \mapsto \left|\frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}}\right|$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et le théorème 5 permet de conclure que l'intégrale $\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}}dt$ est convergente.

Finalement, les conditions du théorème 7 sont vérifiées et donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ **est convergente et**

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \cos(1) - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{\frac{3}{2}}} dt.$$

Nous allons maintenant énoncer le théorème de changement de variable pour les intégrales sur un intervalle quelconque.

Théorème 8 *Soit* ϕ *de classe* C^1 *et bijective de* I *sur* $\phi(I)$ *et soit* $f \in C_m^0(\phi(I), K)$. *Alors on a :*

1. f *est intégrable sur* $\phi(I)$ *si et seulement si* $(f \circ \phi)\phi'$ *est intégrable sur* I *et, dans ce cas on a*
$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)du,$$
avec $\phi(a) = \lim\limits_{t \longrightarrow a^+} \phi(t)$ *et* $\phi(b) = \lim\limits_{t \longrightarrow b^-} \phi(t)$.
2. *L'intégrale* $\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)du$ *est convergente si et seulement si l'intégrale* $\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$ *est convergente et, dans ce cas,*
$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)du.$$

Le théorème de changement de variable peut être utilisé pour étudier séparément l'intégrabilité et la convergence de l'intégrale. L'exemple qui suit illustre parfaitement cette situation.

Exemple - On considère la fonction $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \sin(e^t)$. **On écrit** $f(t) = g(\phi(t))\phi'(t)$ **avec** $g : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ **et** $\phi : [0, +\infty[\longrightarrow [1, +\infty[$ **données par**

$$g(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad \textbf{et} \quad \phi(t) = e^t.$$

Comme nous avons vu que la fonction g **n'est pas intégrable on déduit, en vertu du théorème 8, que la fonction** f **n'est pas intégrable. Néanmoins, nous avons vu que l'intégrale** $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ **est convergente et donc, toujours en vertu du théorème 8, l'intégrale** $\int_0^{+\infty} \sin(e^t)dt$ **est convergente.**

1.3 Exercices corrigés

Exercice 1 *Étudier l'intégrabilité de la fonction f sur l'intervalle I et calculer son intégrale si elle est intégrable :*
1. $f(x) = e^{-x}x^2$ *et* $I = [0, +\infty[$, *2.* $f(x) = e^{-x}\sin x$ *et* $I = [1, +\infty[$,
3. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ *et* $I = [0, 1[$, *4.* $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$ *et* $I =]0, +\infty[$,
5. $f(x) = \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right)$ *et* $I =]0, \pi]$, *6.* $f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$ *et* $I = [1, +\infty[$,
7. $f(x) = x\arctan(x)$ *et* $I = [0, +\infty[$.

Solution -

1. La fonction f est continue et positive sur $[0, +\infty[$. Pour tout $n \in N^*$, on pose $J_n = [0, n]$. La suite $(J_n)_{n\in N^*}$ est une suite exhaustive de $[0, +\infty[$ et, pour tout $n \in N^*$, une double intégration par parties donne
$$\begin{aligned}\int_0^n e^{-x}x^2dx &= -\left[e^{-x}x^2\right]_0^n + 2\int_0^n xe^{-x}dx \\ &= -n^2e^{-n} + 2\left(-\left[e^{-x}x\right]_0^n + \int_0^n e^{-x}dx\right) \\ &= -n^2e^{-n} - 2ne^{-n} - 2e^{-n} + 2.\end{aligned}$$
Ainsi
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^n e^{-x}x^2dx = 2$$
et donc, en vertu du théorème 2, f est intégrable et
$$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^2dx = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^n e^{-x}x^2dx = 2.$$
2. La fonction f est continue sur $[1, +\infty[$ et pour tout $t \in [1, +\infty[$
$$|f(t)| \le e^{-t}.$$
L'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t}dt$ est convergente et donc, en vertu du théorème 2, la fonction e^{-t} est intégrable. La proposition 3 permet de conclure que f est intégrable. Nous allons utiliser le théorème 5 pour calculer l'intégrale de f.
Soit $t > 0$. Une double intégration par parties donne
$$\begin{aligned}\int_0^t e^{-x}\sin x dx &= -\left[e^{-x}\sin x\right]_0^t + \int_0^t e^{-x}\cos x dx \\ &= -e^{-t}\sin t + \left(-\left[e^{-x}\cos x\right]_0^t - \int_0^t e^{-x}\sin x dx\right) \\ &= -e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t + 1 - \int_0^t e^{-x}\sin x dx.\end{aligned}$$

De cette relation, on déduit que

$$\int_0^t e^{-x}\sin x dx = \frac{1}{2}\left(-e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t + 1\right).$$

Puisque, $\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty} e^{-t} = 0$ et $\sin t$ et $\cos t$ sont bornés, on obtient

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\sin x dx = \lim_{t\longrightarrow+\infty}\int_0^t e^{-x}\sin x dx = \frac{1}{2}.$$

3. La fonction f est continue et positive sur $[0,1[$. Pour tout $n \in N^*$, on pose $J_n = [0, 1-\frac{1}{n}]$. La suite $(J_n)_{n\in N^*}$ est une suite exhaustive de $[0,1[$ et, pour tout $n \in N^*$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} &= \left[-\sqrt{1-x^2}\right]_0^{1-\frac{1}{n}}\\ &= -\frac{\sqrt{1+2n}}{n} + 1.\end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = 1,$$

le théorème 1 permet d'affirmer que f est intégrable sur $[0,1[$ et

$$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = 1.$$

4. Commençons par calculer une primitive de $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$. Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\int \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx &= x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \int x\times\frac{-2}{x^3}\times\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}dx\\ &= x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + 2\int\frac{dx}{x^2+1}\\ &= x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + 2\arctan x.\end{aligned}$$

La fonction f est continue et positive sur $]0,+\infty[$. Pour tout $n \in N^*$, on pose $J_n = [\frac{1}{n}, n]$. La suite $(J_n)_{n\in N^*}$ est une suite exhaustive de $]0,+\infty[$

et, pour tout $n \in N^*$, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{n}}^{n} f(x)dx &= \left[x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+2\arctan x\right]_{\frac{1}{n}}^{n} \\
&= n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+2\arctan n-\frac{1}{n}\ln\left(1+n^2\right) \\
&\quad -2\arctan\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{n} f(x)dx=\pi,$$

le théorème 1 permet d'affirmer que f est intégrable sur $]0,+\infty[$ et

$$\int_{0}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx=\pi.$$

5. Commençons par étudier le signe de f sur $]0,\pi]$. La fonction f est du signe de $\phi(x)=x\cos(x)-\sin(x)$. L'étude des variations de ϕ sur $[0,\pi]$ montre que ϕ est négative. La fonction f est continue et négative sur $]0,\pi]$. Pour tout $n\in N^*$, on pose $J_n=[\frac{1}{n},\pi]$. La suite $(J_n)_{n\in N^*}$ est une suite exhaustive de $]0,\pi]$ et, pour tout $n\in N^*$, on a

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}|f(x)|dx=-\left[\frac{\sin x}{x}\right]_{\frac{1}{n}}^{\pi}=n\sin\left(\frac{1}{n}\right).$$

Puisque

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}|f(x)|dx=1,$$

le théorème 1 permet d'affirmer que $|f|$ est intégrable sur $]0,\pi]$ et donc f est intégrable et puisque $f=-|f|$,

$$\int_{0}^{\pi}f(x)dx=-1.$$

6. La fonction f est continue et positive sur $[1,+\infty[$. Pour tout $n\in N^*$, on pose $J_n=[1,n]$. La suite $(J_n)_{n\in N^*}$ est une suite exhaustive de $[1,+\infty[$ et, pour tout $n\in N^*$, en utilisant une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{n}\frac{\ln x}{x^3}dx &= \left[-\frac{1}{2}x^{-2}\ln x\right]_{1}^{n}+\frac{1}{2}\int_{1}^{n}\frac{dx}{x^3} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\ln n}{n^2}-\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_1^n f(x)dx=\frac{1}{4},$$

le théorème 1 permet d'affirmer que f est intégrable sur $[1,+\infty[$ et

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx=\frac{1}{4}.$$

7. La fonction f est continue et positive sur $[0,+\infty[$. Pour tout $n\in N^*$, on pose $J_n=[0,n]$. La suite $(J_n)_{n\in N^*}$ est une suite exhaustive de $[0,+\infty[$ et, pour tout $n\in N^*$, en utilisant une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^n x\arctan x dx &= \left[\frac{1}{2}x^2\arctan x\right]_0^n-\frac{1}{2}\int_0^n\frac{x^2}{1+x^2}dx\\ &= \frac{1}{2}n^2\arctan n-\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}\arctan n.\end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^n f(x)dx=+\infty,$$

le théorème 1 permet d'affirmer que f n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$.

Exercice 2 *Étudier l'intégrabilité de la fonction f sur l'intervalle I :*
1. $f(x)=\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$ *et* $I=]0,1]$, *2.* $f(x)=\frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}$ *et* $I=]0,1[$,
3. $f(x)=\frac{\ln x}{x^2+1}$ *et* $I=]0,+\infty[$, *4.* $f(x)=e^{-x}\ln x$ *et* $I=]0,+\infty[$,
5. $f(x)=\sqrt{x}\ln(1+\frac{1}{x})$ *et* $I=]0,+\infty[$, *6.* $f(x)=\frac{x-\sin x}{x^3}$ *et* $I=]0,+\infty[$.

Solution -

1. On a $\lim\limits_{x\longrightarrow0^+}f(x)=1$ et donc la fonction f se prolonge par continuité en 0 et par suite, en vertu de la proposition 1, f est intégrable sur $]0,1]$.
2. La fonction f est continue, positive sur $]0,\frac{1}{2}]$ et

$$\frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}\sim_0\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Donc, d'après le théorème 3, les intégrales

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}}\quad\text{et}\quad\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

sont de même nature. Or

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \int_t^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_t^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

Donc $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}}$ est convergente.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}$ est continue, positive sur $[\frac{1}{2}, 1[$ et

$$\frac{1}{(1-x)\sqrt{x}} \sim_1 \frac{1}{1-x}.$$

Donc, d'après le théorème 3, les intégrales

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}} \quad \text{et} \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{1-x}$$

sont de même nature. Or

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{t \longrightarrow 1^-} \int_{\frac{1}{2}}^t \frac{dx}{1-x} = \lim_{t \longrightarrow 1^-} \left[-\ln|1-x|\right]_{\frac{1}{2}}^t = +\infty.$$

Donc $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}}$ est divergente.

En conclusion, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}}$ est divergente et donc, en vertu du théorème 2, f n'est pas intégrable sur $]0, 1[$.

3. La fonction f est continue, négative sur $]0, 1]$ et on a

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \sqrt{x}|f(x)| = 0$$

et donc, d'après le corollaire 1, $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx$ est convergente.

De même, f est continue, positive sur $[1, +\infty[$ et on a

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} f(x) = 0$$

et donc, d'après le corollaire 2, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ est convergente.

En conclusion, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(x)|dx$ converge et donc, en vertu du théorème 5, f est intégrable sur $]0, +\infty[$.

4. La fonction f est continue, négative sur $]0,1]$ et

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \sqrt{x}|f(x)| = 0$$

et donc, d'après le corollaire 1, $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx$ est convergente.
De même, f est continue, positive sur $[1,+\infty[$ et on a

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} x^2 f(x) = 0$$

et donc, d'après le corollaire 2, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ est convergente.
En conclusion, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(x)|dx$ converge et donc, en vertu du théorème 5, f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

5. On a

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \sqrt{x}\ln(1+\frac{1}{x}) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \left(\sqrt{x}\ln(1+x) - \sqrt{x}\ln x\right) = 0,$$

et donc la fonction f se prolonge par continuité en 0. En vertu de la proposition 1, f est intégrable sur $]0,1]$.
La fonction f est continue et positive sur $[1,+\infty[$ et

$$\sqrt{x}\ln(1+\frac{1}{x}) \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Donc, d'après le théorème 3, les intégrales

$$\int_1^{+\infty} \sqrt{x}\ln(1+\frac{1}{x})dx \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}dx$$

sont de même nature. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}dx$ est une intégrale de Riemann divergente (voir (1.3)) et par suite $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ est divergente.
En conclusion, d'après le théorème 2, f n'est pas intégrable sur $]0,+\infty[$.

6. On a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)$$

et donc $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = \frac{1}{6}$. La fonction f se prolonge par continuité en 0, et donc, en vertu de la proposition 1, f est intégrable sur $]0,1]$.

D'un autre côté, la fonction f est continue et positive sur $[1,+\infty[$ car $\sin x \leq x$ pour $x > 0$ et

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} x^2 \times \frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x-\sin x}{x} = 1.$$

Donc, d'après le corollaire 2, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x-\sin x}{x^3}dx$ est convergente.
En conclusion, d'après le théorème 2, f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Exercice 3 *Étudier la nature des intégrales suivantes :*

$$\int_1^2 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{x-1}}, \quad \int_0^{+\infty} (\ln(x))^2 e^{-x} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}dx,$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx, \quad \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) dx \ (\alpha > 0), \quad \int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt{x}}dx.$$

Solution -

1. L'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{x-1}}$ est convergente si et seulement si les deux intégrales

$$\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{x-1}} \quad \text{et} \quad \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{x-1}}$$

sont convergentes.
La fonction qui à $x \mapsto \frac{1}{(2-x)\sqrt{x-1}}$ est continue, positive sur $]1,\frac{3}{2}]$ et on a clairement

$$\frac{1}{(2-x)\sqrt{x-1}} \sim_1 \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

D'après le théorème 3, les intégrales

$$\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{x-1}} \quad \text{et} \quad \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$$

sont de même nature. Or,

$$\begin{aligned}
\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x-1}} &= \lim_{t\longrightarrow1^+} \int_t^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x-1}} \\
&= \lim_{t\longrightarrow1^+} \left(\sqrt{2} - 2\sqrt{t-1}\right) \\
&= \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

On déduit alors que $\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{x-1}}$ est convergente.
D'un autre côté, la fonction qui à $x \mapsto \frac{1}{(2-x)\sqrt{x-1}}$ est continue, positive sur $[\frac{3}{2}, 2[$ et on a clairement

$$\frac{1}{(2-x)\sqrt{x-1}} \sim_2 \frac{1}{2-x}.$$

D'après le théorème 3, les intégrales

$$\int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{x-1}} \quad \text{et} \quad \int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{dx}{2-x}$$

sont de même nature. Or,

$$\begin{aligned}\int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x-1}} &= \lim_{t \longrightarrow 2^-} \int_{\frac{3}{2}}^{t} \frac{dx}{2-x} \\ &= \lim_{t \longrightarrow 2^-} (-\ln(2-t) - \ln 2) = +\infty.\end{aligned}$$

On déduit alors que $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{x-1}}$ est divergente. En conclusion, $\displaystyle\int_1^{2} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{x-1}}$ est divergente.

2. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(x))^2 e^{-x} dx$ est convergente si et seulement si les intégrales $\displaystyle\int_0^{1} (\ln(x))^2 e^{-x} dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} (\ln(x))^2 e^{-x} dx$ sont convergentes.
La fonction $x \mapsto (\ln(x))^2 e^{-x}$ est continue, positive sur $]0, 1]$ et

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} x^{\frac{1}{2}} (\ln(x))^2 e^{-x} = 0.$$

Donc, d'après le corollaire 1 2., $\displaystyle\int_0^{1} (\ln(x))^2 e^{-x} dx$ est convergente.
D'un autre côté, la fonction $x \mapsto (\ln(x))^2 e^{-x}$ est continue, positive sur $[1, +\infty[$ et

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} x^2 (\ln(x))^2 e^{-x} = 0.$$

Donc, d'après le corollaire 2 2., $\displaystyle\int_1^{+\infty} (\ln(x))^2 e^{-x} dx$ est convergente.
En conclusion, $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(x))^2 e^{-x} dx$ est convergente.

3. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}dx$ est convergente si et seulement si les intégrales $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}dx$ sont convergentes.
   La fonction $x \mapsto \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}$ est continue, positive sur $]0,1]$ et

$$\frac{x^\alpha}{1+x^\beta} \sim_0 \begin{cases} x^\alpha & \text{si} \quad \beta > 0, \\ \frac{x^\alpha}{2} & \text{si} \quad \beta = 0, \\ x^{\alpha-\beta} & \text{si} \quad \beta < 0. \end{cases}$$

   Donc, d'après le théorème 3 et (1.2), on déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}dx$ est convergente si et seulement si

$$(\beta \geq 0 \,\text{et}\, \alpha > -1) \text{ ou } (\beta < 0 \,\text{et}\, \alpha - \beta > -1). \tag{1.9}$$

   D'un autre côté, la fonction $x \mapsto \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}$ est continue, positive sur $[1,+\infty[$ et

$$\frac{x^\alpha}{1+x^\beta} \sim_{+\infty} \begin{cases} x^{\alpha-\beta} & \text{si} \quad \beta > 0, \\ \frac{x^\alpha}{2} & \text{si} \quad \beta = 0, \\ x^{\alpha} & \text{si} \quad \beta < 0. \end{cases}$$

   Donc, d'après le théorème 3 et (1.3), on déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}dx$ est convergente si et seulement si

$$(\beta \leq 0 \,\text{et}\, \alpha < -1) \text{ ou } (\beta > 0 \,\text{et}\, \alpha - \beta < -1). \tag{1.10}$$

   En combinant (1.9) et (1.10), on déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}dx$ est convergente si et seulement si

$$(\beta < 0 \,\text{et}\, \beta - 1 < \alpha < -1) \text{ ou } (\beta > 0 \,\text{et}\, \; -1 < \alpha < \beta - 1).$$

4. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ est convergente si et seulement si les intégrales $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ sont convergentes.
   La fonction $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ est continue, positive sur $]0,1]$ et

$$\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \sim_0 \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Donc, d'après le théorème 3 et (1.2), on déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ est convergente. D'un autre côté, la fonction $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ est continue, positive sur $[1,+\infty[$ et

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} x^2 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} = 0.$$

Donc, d'après le corollaire 2 2., on déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ est convergente.

En conclusion, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ est convergente.

5. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) dx$ est convergente si et seulement si les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) dx$ sont convergentes.
   La fonction $x \mapsto \left|\sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)\right|$ est continue, positive sur $]0,1]$ et

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} x^{\frac{1}{2}} \left|\sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)\right| = 0.$$

   Donc, d'après le corollaire 1 2., on déduit que $\displaystyle\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) dx$ est absolument convergente et donc convergente. D'un autre côté, la fonction $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$ est continue, positive sur $[1,+\infty[$ et

$$\sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}.$$

   Donc, d'après le théorème 3 et (1.3), on déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) dx$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
   En conclusion, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) dx$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
6. La fonction $x \mapsto \frac{1}{1-\sqrt{x}}$ est continue sur $[0,1[$ et, pour tout $t \in [0,1[$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{1}{1-\sqrt{x}}dx &\overset{u=\sqrt{x}}{=} \int_0^{\sqrt{t}} \frac{2u}{1-u}du \\
&= 2\left[-\ln(1-u) - u\right]_0^{\sqrt{t}} \\
&= -2\left(\ln(1-\sqrt{t}) + \sqrt{t}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_0^1 \frac{1}{1-\sqrt{x}}dx = \lim_{t \longrightarrow 1^-} \int_0^t \frac{1}{1-\sqrt{x}}dx = +\infty.$$

Exercice 4 *Étudier la nature des intégrales suivantes :*

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3 e^{-x}}{1+x^4}dx, \quad \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x^3}}dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x-x^2}dx,$$
$$\int_0^{+\infty} \left(1 + x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) dx, \quad \int_0^{+\infty} e^{-x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}\right) dx,$$
$$\int_2^{+\infty} \left(\sqrt{x^4+x^2+1} - x\sqrt[3]{x^3+ax}\right) dx, \ (a \in \mathbb{R}).$$

Solution -

1. La fonction $x \mapsto \frac{x^3 e^{-x}}{1+x^4}$ est continue, positive sur $[0, +\infty[$ et

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} x^2 \frac{x^3 e^{-x}}{1+x^4} = 0.$$

Donc, d'après le corollaire 2 2., on déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3 e^{-x}}{1+x^4}dx$ est convergente.

2. La fonction $x \longrightarrow\mapsto \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x^3}}$ est continue, positive sur $]0, 1]$ et on a

$$\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x^3}} \sim_0 \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Donc, d'après le théorème 3 et (1.2), on déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x^3}}dx$ est convergente.

3. L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x-x^2}dx$ est convergente si et seulement si les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{x-x^2}dx$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^0 e^{x-x^2}dx$ sont convergentes.
La fonction $x \mapsto e^{x-x^2}$ est continue, positive sur $[0, +\infty[$ et

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} x^2 e^{x-x^2} = 0.$$

Donc, d'après le corollaire 2 2., $\int_0^{+\infty} e^{x-x^2}dx$ est convergente.
D'un autre côté, la fonction $x \mapsto e^{x-x^2}$ est continue, positive sur $]-\infty, 0]$ et

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} x^2 e^{x-x^2} = 0.$$

Donc, d'après le corollaire 2 2., $\int_{-\infty}^{0} e^{x-x^2}dx$ est convergente.

En conclusion, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x-x^2}dx$ est convergente.

4. On a

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \left(1 + x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) = 1$$

et donc la fonction $x \mapsto 1 + x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ se prolonge par continuité en 0. D'un autre côté, un développement limité de $1+x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ au voisinage de $+\infty$ donne

$$1 + x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{1}{2x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Cette relation montre deux choses :
- D'abord que

$$1 + x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2} + xo_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

  et puisque

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} xo_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

  il existe $a > 0$ tel que pour tout $x \geq a$, $1 + x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) > 0$.
- Ensuite que

$$1 + x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{2x}.$$

Avec ces deux remarques en tête, le théorème 3 et la relation (1.3) nous permettent d'affirmer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left(1 + x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) dx$ est convergente.

5. On écrit d'abord

$$e^{-x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}\right) = \frac{e^{-x}(x-1+e^{-x})}{x - xe^{-x}}, \qquad (*)$$

et en utilisant la règle de l'Hôpital deux fois de suite, on obtient

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{(x-1+e^{-x})}{x-xe^{-x}}=\frac{1}{2}.$$

Ainsi

$$\lim_{x\longrightarrow 0} e^{-x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2}.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)dx$ est convergente.
Commenccons par étudier le signe de $\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)$ au voisinage de $+\infty$. D'après $(*)$, elle est de signe de $f(x)=x-1+e^{-x}$ sur $[0,+\infty[$ et puisque $f'(x)=1-e^{-x}\geq 0$, on déduit que f est croissante et donc, pour tout $x\in[0,+\infty[$, $f(x)\geq f(0)=0$. On déduit alors que, pour tout $x\in[1,+\infty[$,

$$e^{-x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)>0.$$

D'un autre côté,

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} x^2e^{-x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right) \;=\; \lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(\frac{x^2e^{-x}}{1-e^{-x}}-xe^{-x}\right)=0.$$

En utilisant le corollaire 2, on peut déduire que

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)dx$$

est convergente.
En conclusion, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)dx$ est convergente.

6. En effectuant un développement limité de $\sqrt{x^4+x^2+1}-x\sqrt[3]{x^3+ax}$, on obtient

$$\sqrt{x^4+x^2+1}-x\sqrt[3]{x^3+ax}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}a+\frac{(\frac{1}{9}a^2+\frac{3}{8})}{x^2}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Cette relation montre que

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2+1}-x\sqrt[3]{x^3+ax}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}a.$$

En utilisant l'exercice 14, on obtient que si $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}a\neq 0$ alors l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty}\left(\sqrt{x^4+x^2+1}-x\sqrt[3]{x^3+ax}\right)dx$ est divergente.

On suppose maintenant que $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}a = 0$, c'est-à-dire, $a = \frac{3}{2}$. On a alors

$$\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x\sqrt[3]{x^3 + ax} = \frac{5}{8x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Cette relation montre deux choses :

- D'abord que

$$\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x\sqrt[3]{x^3 + ax} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{5}{8} + x^2 o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}^2\right)\right),$$

  et puisque

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} x^2 o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}^2\right) = 0,$$

  il existe $a > 0$ tel que pour, tout $x \geq a$,

$$\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x\sqrt[3]{x^3 + ax} > 0.$$

- Ensuite que

$$\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x\sqrt[3]{x^3 + ax} \sim_{+\infty} \frac{5}{8x^2}.$$

Avec ces deux remarques en tête, le théorème 3 et la relation (1.3) on peut affirmer que l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \left(\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x\sqrt[3]{x^3 + ax}\right) dx$$

est convergente.

Exercice 5 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Le but de l'exercice est d'étudier la convergence de l'intégrale dite* **intégrale de Bertrand** *définie par*

$$I_{a,b} = \int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^a (\ln t)^b}.$$

1. *Pour $a > 1$, montrer que $I_{a,b}$ converge.*
2. *Pour $a = 1$, calculer $\displaystyle\int_e^x \frac{dt}{t(\ln t)^b}$ et déterminer les valeurs de b pour lesquelles $I_{1,b}$ converge.*
3. *On suppose $a < 1$, en utilisant le fait que $\displaystyle\lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{t}{t^a (\ln t)^b} = +\infty$, montrer que $I_{a,b}$ diverge.*

Solution -

1. La fonction $f(t) = \frac{1}{t^a(\ln t)^b}$ est continue, positive sur $[e, +\infty[$ et, pour $\alpha \in]1, a[$,
$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = \lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{1}{t^{a-\alpha}(\ln t)^b} = 0.$$
Donc, d'après le corollaire 2, l'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.
2. On utilise le théorème 8 et on effectue le changement de variable $x = \ln t$. Ainsi $dx = \frac{dt}{t}$ et donc
$$\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^b} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^b}.$$
Cette intégrale est une intégrale de Riemann et converge si et seulement si $b > 1$ (voir (1.3)).
En conclusion, $I_{1,b}$ converge si et seulement si $b > 1$.
3. La fonction qui à $t \mapsto \frac{t}{t^a(\ln t)^b}$ est continue, positive sur $[e, +\infty[$ et on a
$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{t}{t^a(\ln t)^b} = +\infty.$$
Donc, d'après le corollaire 2, $I_{a,b}$ diverge.

Exercice 6 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose*
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nt) \ln(\sin t) dt.$$

1. *Montrer que I_n est une intégrale convergente.*
2. *Calculer $2nI_n - (2n+2)I_{n+1}$.*
3. *En déduire la valeur de I_n en fonction de n.*

Solution -

1. La fonction $t \mapsto \cos(2nt)\ln(\sin t)$ est continue et négative sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. En plus
$$\cos(2nt)\ln(\sin t) \sim_0 \ln t,$$
et donc
$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \sqrt{t}\cos(2nt)\ln(\sin t) = 0.$$
Donc, d'après le corollaire 1, I_n est convergente.

2. Posons $J_n = 2nI_n - (2n+2)I_{n+1}$ et calculons à l'aide d'une intégration par parties (*cf.* Théorème 7) :

$$\begin{aligned}
J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\left(n\cos(2nt) - (n+1)\cos(2(n+1)t)\right)\ln(\sin t)dt \\
&= \left[(\sin(2nt) - \sin(2(n+1)t))\ln(\sin t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&\quad - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(2nt) - \sin(2(n+1)t))\frac{\cos t}{\sin t}dt \\
&= -\lim_{t\longrightarrow 0^+} (\sin(2nt) - \sin(2(n+1)t))\ln(\sin t) \\
&\quad - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(2nt) - \sin(2(n+1)t))\frac{\cos t}{\sin t}dt \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(2nt) - \sin(2(n+1)t))\frac{\cos t}{\sin t}dt.
\end{aligned}$$

En utilisant la formule

$$\sin a - \sin b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

on obtient

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2n+1)t\cos t dt.$$

Maintenant, en utilisant la formule

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) + \cos(a+b)\right),$$

on déduit que

$$\begin{aligned}
J_n &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2n+2)tdt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nt)dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2(n+1)}\sin(2n+2)t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n}\sin(2nt)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_{n+1} = \frac{n}{n+1}I_n.$$

3. De la relation précédente, on déduit aisément par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$I_n = \frac{I_1}{n}.$$
Calculons I_1. En utilisant une intégration par parties (*cf.* Théorème 7), on obtient
$$\begin{aligned} I_1 &= \left[\frac{1}{2}\sin(2t)\ln(\sin t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2t)\frac{\cos t}{\sin t}dt \\ &= -\lim_{t\longrightarrow 0^+} \frac{1}{2}\sin(2t)\ln(\sin t) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2t))dt \\ &= -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$
Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2nt)\ln(\sin t)dt = -\frac{\pi}{4n}.$$

Exercice 7 *Étudier l'intégrablité de la fonction f sur l'intervalle I.*
1. $f(x) = (\ln x)\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ *et* $I =]0,1]$, *2.* $f(x) = e^{-x^2}\cos x$ *et* $I = [0,+\infty[$,
3.$f(x) = \frac{(\ln x)\cos x}{x^{\frac{3}{2}}}$ *et* $I = [1,+\infty[$.

Solution -

1. La fonction f est continue sur $]0,1]$ et, pour tout $x \in]0,1]$, on a
$$|f(x)| \leq |\ln x| = -\ln x = g(x).$$
Or, pour tout $t \in]0,1]$, en faisant une intégration par parties, on obtient
$$\int_t^1 g(x)dx = -[x\ln x]_t^1 + \int_t^1 x \times \frac{1}{x}dx = t\ln t - t + 1.$$
Ainsi
$$\int_0^1 g(x)dx = \lim_{t\longrightarrow 0^+}\int_t^1 g(x)dx = 1.$$
Ainsi, en vertu du théorème 2, la fonction g est intégrable. Puisque g domine $|f|$, on déduit de la proposition 3 que f est intégrable sur I.

2. On a, pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$|f(x)| \leq e^{-x^2} = g(x).$$

La fonction g est continue, positive sur $[0, +\infty[$ et

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} x^2 g(x) = 0.$$

Donc, d'après le corollaire 2, $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)dx$ est convergente.
Ainsi, en vertu du théorème 2, la fonction g est intégrable. Puisque g domine $|f|$, on déduit de la proposition 3 que f est intégrable sur I.

3. Pour tout $x \geq 1$, on a

$$|f(x)| \leq \frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}} = g(x).$$

La fonction g est continue, positive sur $[0, +\infty[$ et

$$\int_1^{+\infty} g(x)dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}} dx + \int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}} dx.$$

Avec les notations de l'exercice 5, on a

$$\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}} dx = I_{\frac{3}{2}, -1}$$

qui est une intégrale de Bertrand convergente, d'après l'exercice 5. Ainsi, en vertu du théorème 2, la fonction g est intégrable. Puisque g domine $|f|$, on déduit de la proposition 3 que f est intégrable sur I.

Exercice 8 (**Intégrales d'Euler**). *On pose*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)dx.$$

1. *Montrer que I et J sont convergentes et que $I = J$.*
2. *Calculer $I + J$ et en déduire les valeurs de I et J.*
3. *Les fonctions $x \mapsto \ln(\sin x)$ et $x \mapsto \ln(\cos x)$ sont-elles intégrables, respectivement, sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et sur $[0, \frac{\pi}{2}[$?*

Solution -

1. La fonction $x \mapsto \ln(\sin x)$ est continue, négative sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. En plus
$$\ln(\sin x) \sim_0 \ln x$$
et donc
$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(\sin x) = 0.$$
Donc, d'après le corollaire 1, I est une intégrale convergente.
On utilise le théorème 8 et on effectue le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$. On obtient alors
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln(\sin(\frac{\pi}{2} - u))(-du) = J,$$
et donc J est convergente.
2. On a
$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x \cos x)dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\frac{1}{2} \sin 2x)dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2)dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)dx - \frac{\pi \ln 2}{2}. \end{aligned}$$
En effectuant le changement de variable $u = 2x$, on obtient
$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)dx = \int_0^{\pi} \ln(\sin u)du = I + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin u)du.$$
En effectuant le changement de variable $v = \pi - u$, on obtient
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin u)du = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(\sin(\pi - v))dv = J.$$

Ainsi

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)dx - \frac{\pi \ln 2}{2} = \frac{1}{2}(I + J) - \frac{\pi \ln 2}{2},$$

soit

$$I = J = -\frac{\pi \ln 2}{2}.$$

3. Puisque

$$|\ln(\cos(x))| = -\ln(\cos(x)) \quad \text{et} \quad |\ln(\sin(x))| = -\ln(\sin(x)),$$

on déduit de ce qui précède que les intégrales de $|\ln(\cos(x))|$ et $|\ln(\sin(x))|$ sont convergentes, respectivement, sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et $]0, \frac{\pi}{2}]$. Le théorème 2 permet de conclure que ces deux fonctions sont intégrables.

Exercice 9 *1. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b t^n f(t)dt = 0$. Montrer que f est identiquement nulle.*

2. Calculer $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-(1-\imath)x}dx$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. En déduire l'existence d'une fonction $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue, non identiquement nulle et intégrable telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t \mapsto t^n f(t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et $\int_0^{+\infty} t^n f(t)dt = 0$.

Solution -

1. En vertu de la linéarité de l'intégrale, l'hypothèse est équivalente au fait que, pour tout polynôme à coefficients réels P, on a $\int_a^b P(t)f(t)dt = 0$. Puisque f est continue sur $[a, b]$, d'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$. Maintenant f est continue sur $[a, b]$ et donc elle est bornée et

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x)^2 - f(x)P_n(x)| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - P_n(x)|.$$

Il en résulte alors que $(fP_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f^2 sur $[a, b]$ et donc

$$0 = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_a^b P_n(t)f(t)dt = \int_a^b f(t)^2 dt.$$

Puisque f^2 est continue et positive sur $[a, b]$, de la nullité de son intégrale, on déduit (voir Proposition 4) qu'elle est identiquement nulle sur $[a, b]$ ce qui entraîne que f est aussi identiquement nulle.

2. Soit $n \geq 1$. Pour tout $t \geq 0$, en utilisant une intégration par parties on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^t x^n e^{-(1-\imath)x} dx &= \left[-\frac{1}{1-\imath} x^n e^{-(1-\imath)x}\right]_0^t + \frac{n}{1-\imath}\int_0^t x^{n-1} e^{-(1-\imath)x} dx \\ &= -\frac{1}{1-\imath} t^n e^{-(1-\imath)t} + \frac{n}{1-\imath}\int_0^t x^{n-1} e^{-(1-\imath)x} dx.\end{aligned}$$

Or

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} |t^n e^{-(1-\imath)t}| = \lim_{t \longrightarrow +\infty} t^n e^{-t} = 0$$

et donc

$$\forall n \geq 1, \quad I_n = \frac{n}{1-\imath} I_{n-1}.$$

Puisque $I_0 = \frac{1}{1-\imath}$, on déduit en utilisant un raisonnement par récurrence que

$$I_n = \frac{n!}{(1-\imath)^{n+1}} = \frac{n!}{2^{\frac{n+1}{2}}} e^{\imath\frac{(n+1)\pi}{4}}. \qquad (*)$$

3. De la relation $(*)$, on déduit que les parties réelle et imaginaire de I_n sont données par

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(I_n) &= \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\cos(x)dx = \frac{n!}{2^{\frac{n+1}{2}}}\cos\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right) \\ &= \frac{n!}{2^{\frac{n+2}{2}}}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right), \\ \mathrm{Im}(I_n) &= \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\sin(x)dx = \frac{n!}{2^{\frac{n+1}{2}}}\sin\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right) \\ &= \frac{n!}{2^{\frac{n+2}{2}}}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right).\end{aligned}$$

De ces deux relations, on déduit que $\mathrm{Re}(I_{4n}) - \mathrm{Im}(I_{4n}) = 0$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} x^{4n} e^{-x}(\cos(x) - \sin(x))dx = 0.$$

Le changement de variable $u = x^4$ est une bijection de classe C^1 de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$ et en appliquant le théorème 8, on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^n \frac{e^{-t^{\frac{1}{4}}}(\cos(t^{\frac{1}{4}}) - \sin(t^{\frac{1}{4}}))}{2t^{\frac{3}{4}}}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et on a

$$\int_0^{+\infty} t^n \frac{e^{-t^{\frac{1}{4}}}(\cos(t^{\frac{1}{4}}) - \sin(t^{\frac{1}{4}}))}{4t^{\frac{3}{4}}} dt = 0.$$

Pour conclure, il suffit de montrer que la fonction $f\ :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \frac{e^{-t^{\frac{1}{4}}}(\cos(t^{\frac{1}{4}}) - \sin(t^{\frac{1}{4}}))}{4t^{\frac{3}{4}}}$$

est intégrable sur $]0,+\infty[$. Puisque

$$\cos(a) - \sin(a) = \sqrt{2}\cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right),$$

On a

$$|f(t)| \sim_0 \frac{1}{4}\frac{1}{t^{\frac{3}{4}}} \quad \text{et} \quad \lim_{t\longrightarrow+\infty} t^2|f(t)| = 0.$$

L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}dt$ étant convergente en vertu de (1.3), en utilisant, respectivement, le théorème 3 et le corollaire 2, on déduit que les intégrales $\int_0^1 |f(t)|dt$ et $\int_1^{+\infty} |f(t)|dt$ sont convergentes et, en vertu du théorème 5, f est intégrable sur $]0,+\infty[$.

Exercice 10 *Soit* $f : [0,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[$ *de classe* C^1 *telle qu'il existe* $a < 0$ *tel que* $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = a$. *Montrer que* f *et* f' *sont intégrables sur* $[0,+\infty[$.

Solution -

La relation $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = a$ s'écrit :

$$\forall \epsilon > 0, \exists b_\epsilon > 0, \forall x \geq b_\epsilon, \quad \left|\frac{f'(x)}{f(x)} - a\right| < \epsilon. \qquad (*)$$

En prenant $\epsilon = \frac{|a|}{2}$ dans $(*)$, on obtient puisque f est positive

$$\forall x \geq b_\epsilon, \quad f'(x) \leq -\frac{|a|}{2}f(x).$$

Ainsi f' est négative sur $[b_\epsilon,+\infty[$ et donc f est décroissante sur cet intervalle. Puisque f est positive, on déduit que $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$ est finie. Maintenant, puisque f' est continue, pour tout $x \geq 0$,

$$\int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0)$$

et donc
$$\int_0^{+\infty} f'(t)dt = \lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) - f(0).$$
En vertu du théorème 2, f' est intégrable sur $[0, +\infty[$.
D'un autre côté, puisque $a \neq 0$, on a $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{f'(x)} = a^{-1}$ et donc
$$\forall \epsilon > 0, \exists b_\epsilon > 0, \forall x \geq b_\epsilon, \quad \left| \frac{f(x)}{f'(x)} - a^{-1} \right| < \epsilon.$$
En prenant $\epsilon = 1$, on obtient
$$\forall x \geq b_\epsilon, \quad \left| \frac{f(x)}{f'(x)} \right| \leq \left| \frac{f(x)}{f'(x)} - a^{-1} \right| + |a^{-1}| \leq 1 + |a^{-1}|,$$
Soit
$$\forall x \geq b_\epsilon, \quad |f(x)| \leq |f'(x)|(1 + |a^{-1}|).$$
Puisque f' est intégrable sur $[b_e, +\infty[$, on déduit en vertu de la proposition 3 que f est intégrable sur $[b_e, +\infty[$ et donc sur $[0, +\infty[$.

Exercice 11 *On note E l'ensemble des fonctions f continues sur $]0, +\infty[$ et à valeurs réelles telles que la fonction $t \mapsto \frac{f(t)^2}{1+t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.*

Solution -
Soit $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in]0, +\infty[$, on a
$$\frac{(f(t) + \lambda g(t))^2}{1 + t^2} = \frac{(f(t))^2}{1 + t^2} + \lambda^2 \frac{(g(t))^2}{1 + t^2} + 2\lambda \frac{(f(t)g(t))}{1 + t^2}.$$
Pour montrer que $f + \lambda g \in E$ il suffit de montrer que la fonction qui à $t \mapsto \frac{(f(t)g(t))}{1+t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. Soit J un segment contenu dans $]0, +\infty[$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,
$$\int_J \frac{|f(t)g(t)|}{1 + t^2} dt \leq \left(\int_J \frac{|f(t)|^2}{1 + t^2} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_J \frac{|g(t)|^2}{1 + t^2} dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$
Puisque $f, g \in E$, on déduit de cette inégalité qu'il existe une constante $M > 0$ tel que
$$\forall J \subset]0, +\infty[, \quad \int_J \frac{|f(t)g(t)|}{1 + t^2} dt \leq M.$$
Ceci permet de conclure.

Exercice 12 *Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que f et f' soient intégrables sur $\mathbb{R}^+$.*

1. *Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$. En déduire que f admet une limite en $+\infty$.*
2. *Montrer que $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = 0$.*
3. *Montrer que :*
$$\forall x > 0, \qquad \int_0^{+\infty} f(t)\sin(xt)dt = \frac{f(0)}{x} + \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} f'(t)\cos(xt)dt.$$
4. *Dans cette question, on suppose que f'' est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$,*
$$\int_0^{+\infty} f(t)\sin(xt)dt = \frac{f(0)}{x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right).$$
5. *On ne suppose plus que f'' est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et on se propose d'établir que le résultat de la question précédente reste vrai.*
   (a) *Montrer que si $[a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$ et $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de C^1 alors :*
$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \int_a^b g(t)\cos(tx)dt = 0.$$
   (b) *Conclure.*

Solution -

1. Puisque f' est continue, on a clairement
$$\forall x \geq 0, \quad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt.$$
Puisque f' est intégrable, en vertu du théorème 5, $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \int_0^x f'(t)dt$ est finie et donc f admet une limite en $+\infty$.
2. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = \ell \neq 0$. On a alors
$$|f(x)| \sim_{+\infty} \ell.$$
Puisque $\int_0^{+\infty} \ell dt$ est divergente, on déduit en vertu du théorème 3 que $\int_0^{+\infty} |f(t)|dt$ est divergente. Ceci contredit l'intégrabilité de f. En conclusion, $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = 0$.

3. Remarquons d'abord que puisque f et f' sont intégrables sur $[0,+\infty[$ et que

$$\forall x,t\geq 0,\quad |f(t)\sin(xt)|\leq |f(t)|\quad \text{et}\quad |f'(t)\sin(xt)|\leq |f'(t)|$$

les intégrales $\int_0^{+\infty} f(t)\sin(xt)dt$ et $\int_0^{+\infty} f'(t)\cos(xt)dt$ sont convergentes. Soit $u\geq 0$. En effectuant une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^u f(t)\sin(xt)dt &= \left[-\frac{1}{x}f(t)\cos(tx)\right]_0^u+\frac{1}{x}\int_0^u f'(t)\cos(xt)dt\\ &= -\frac{1}{x}f(u)\cos(ux)+\frac{1}{x}f(0)+\frac{1}{x}\int_0^u f'(t)\cos(xt)dt.\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{u\longrightarrow+\infty}|f(u)\cos(ux)|=0$ et donc

$$\forall x>0,\quad \int_0^{+\infty} f(t)\sin(xt)dt=\frac{f(0)}{x}+\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} f'(t)\cos(xt)dt.$$

4. Si f'' est intégrable alors un raisonnement et un calcul analogue à celui de la question précédente donne

$$\forall x>0,\quad \int_0^{+\infty} f'(t)\cos(xt)dt=-\frac{f'(0)}{x}-\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} f''(t)\sin(xt)dt.$$

En combinant avec la formule de la question précédente on obtient, pour tout $x>0$,

$$\int_0^{+\infty} f(t)\sin(xt)dt=\frac{f(0)}{x}-\frac{f'(0)}{x^2}-\frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} f''(t)\sin(xt)dt.$$

Puisque

$$\left|\int_0^{+\infty} f''(t)\sin(xt)dt\right|\leq\int_0^{+\infty}|f''(t)|dt,$$

on déduit que

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} x\left(\int_0^{+\infty} f(t)\sin(xt)dt-\frac{f(0)}{x}\right)=0$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} f(t)\sin(xt)dt=\frac{f(0)}{x}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right).$$

5. (a) Soit $x > 0$. En effectuant une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_a^b g(t)\cos(tx)dt &= \left[\frac{1}{x}\sin(xt)g(t)\right]_a^b - \frac{1}{x}\int_a^b g'(t)\sin(tx)dt \\ &= \frac{1}{x}\left(\sin(xb)g(b) - \sin(xa)g(a)\right) \\ &\quad -\frac{1}{x}\int_a^b g'(t)\sin(tx)dt.\end{aligned}$$

L'intégration par parties est justifiée puisque g est de classe C^1. Puisque

$$|\sin(xb)g(b) - \sin(xa)g(a)| \leq |g(b)| + |g(a)|$$

et

$$\left|\int_a^b g'(t)\sin(tx)dt\right| \leq \int_a^b |g'(t)|dt,$$

on obtient alors que

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\int_a^b g(t)\cos(tx)dt = 0.$$

(b) Puisque

$$x\left(\int_0^{+\infty} f(t)\sin(xt)dt - \frac{f(0)}{x}\right) = \int_0^{+\infty} f'(t)\cos(xt)dt,$$

pour montrer que

$$\int_0^{+\infty} f(t)\sin(xt)dt = \frac{f(0)}{x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right),$$

il suffit de montrer que

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\int_0^{+\infty} f'(t)\cos(xt)dt = 0. \qquad (*)$$

Pour cela, nous allons utiliser le résultat de la question précédente.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$. On a

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{+\infty} f'(t)\cos(xt)dt\right| &\leq \left|\int_0^{+\infty} f'(t)\cos(xt)dt - \int_0^n f'(t)\cos(xt)dt\right| \\ &+ \left|\int_0^n f'(t)\cos(xt)dt\right| \\ &\leq \left|\int_n^{+\infty} f'(t)\cos(xt)dt\right| + \left|\int_0^n f'(t)\cos(xt)dt\right| \\ &\leq \int_n^{+\infty} |f'(t)|dt + \left|\int_0^n f'(t)\cos(xt)dt\right|,\end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$. Puisque f' est intégrable, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_n^{+\infty} |f'(t)|dt = 0$ et il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\int_{n_0}^{+\infty} |f(t)|dt \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

D'un autre côté, puisque f' est de classe C^1, d'après la question précédente,

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left| \int_0^{n_0} f'(t) \cos(xt)dt \right| = 0,$$

et donc il existe $A > 0$ tel que

$$\forall x \geq A, \quad \left| \int_0^{n_0} f'(t) \cos(xt)dt \right| \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Nous avons donc montré que :

$$\forall \epsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \geq A, \quad \left| \int_0^{+\infty} f'(t) \cos(xt)dt \right| \leq \epsilon.$$

Ceci est équivalent à $(*)$ et permet de conclure.

Exercice 13 *Soient $f, g : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continues et strictement positives telles que $f(x) \sim_{+\infty} g(x)$.*

1. *On suppose que f est intégrable sur $[0, +\infty[$. Montrer que*

$$\int_x^{+\infty} f(t)dt \sim_{+\infty} \int_x^{+\infty} g(t)dt.$$

2. *On suppose que f n'est pas intégrable sur $[0, +\infty[$. Montrer que*

$$\int_0^x f(t)dt \sim_{+\infty} \int_0^x g(t)dt.$$

Solution - Puisque $f(x) \sim_{+\infty} g(x)$, il existe un réel $\alpha > 0$ et $\lambda : [\alpha, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \geq \alpha, f(x) = (1 + \lambda(x))g(x), \tag{1.11}$$

et $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \lambda(x) = 0$.

1. On suppose que f est intégrable. Puisque f est positive, ceci équivaut, en vertu du théorème 2, que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente. D'après le théorème 3, $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$ est convergente et donc, en vertu de (1.11), pour tout $x \geq \alpha$
$$\int_x^{+\infty} f(t)dt = (1+\Gamma(x))\int_x^{+\infty} g(t)dt,$$
avec
$$\Gamma(x) = \frac{\int_x^{+\infty} \lambda(t)g(t)dt}{\int_x^{+\infty} g(t)dt}.$$
Γ est bien définie, puisque g est continue, strictement positive et donc $\int_x^{+\infty} g(t)dt > 0$ pour tout $x \geq \alpha$. Pour conclure, nous allons montrer que $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \Gamma(x) = 0$. Soit $\epsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \lambda(x) = 0$, il existe $a > 0$ tel que pour tout $t \geq a$, $|\lambda(t)| \leq \epsilon$. Donc, pour tout $x \geq a$,
$$\left|\int_x^{+\infty} \lambda(t)g(t)dt\right| \leq \int_x^{+\infty} |\lambda(t)g(t)|dt \leq \epsilon\int_x^{+\infty} g(t)dt.$$
Cette inégalité, s'écrit aussi, que pour tout $x \geq a$, $|\Gamma(x)| \leq \epsilon$. Ceci montre que $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \Gamma(x) = 0$ et finalement
$$\int_x^{+\infty} f(t)dt \sim_{+\infty} \int_x^{+\infty} g(t)dt.$$

2. On suppose que f n'est pas intégrable. Puisque f est positive, ceci équivaut, en vertu du théorème 2, que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est divergente. D'après le théorème 3, $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt$ est divergente et puisque $g > 0$, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)dt = +\infty$. En utilisant (1.11), on déduit que pour tout $x \geq \alpha$, on a
$$\int_0^x f(t)dt = (1+\Gamma_1(x))\int_0^x g(t)dt$$
avec
$$\Gamma_1(x) = \frac{\int_0^\alpha f(t)dt - \int_0^\alpha g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt} + \frac{\int_\alpha^x \lambda(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}.$$

Pour conclure, nous allons montrer que $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\Gamma_1(x)=0$. Puisque $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\displaystyle\int_0^x g(t)dt=+\infty$, on a clairement

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\int_0^\alpha f(t)dt-\int_0^\alpha g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}=0.$$

Soit $\epsilon>0$. Puisque $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\lambda(x)=0$, il existe $a_1>\alpha$ tel que pour tout $t\geq a_1$, $|\lambda(t)|\leq\frac{\epsilon}{2}$. En outre, il existe $a_2>a_1$ tel que pour tout $x\geq a_2$,

$$\left|\int_\alpha^{a_1}\lambda(t)g(t)dt\right|\leq\frac{\epsilon}{2}\int_0^x g(t)dt.$$

Maintenant, pour tout $x\geq a_2$,

$$\begin{aligned}\left|\int_\alpha^x\lambda(t)g(t)dt\right| &\leq \left|\int_\alpha^{a_1}\lambda(t)g(t)dt\right|+\left|\int_{a_1}^x\lambda(t)g(t)dt\right|\\ &\leq \frac{\epsilon}{2}\int_0^x g(t)dt+\frac{\epsilon}{2}\int_{a_1}^x g(t)dt\leq\epsilon\int_0^x g(t)dt.\end{aligned}$$

Ceci montre que

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{\int_\alpha^x\lambda(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}=0$$

et achève de montrer que $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}\Gamma_1(x)=0$. En conclusion,

$$\int_0^x f(t)dt\sim_{+\infty}\int_0^x g(t)dt.$$

Exercice 14 *1. Soit $f:[0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}f(x)=\ell$. Montrer que si $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)dt$ est convergente alors $\ell=0$.*

2. Soit $f:[0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe C^1. On suppose que $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}f'(t)dt$ sont convergentes. Montrer que $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}f(x)=0$.

Solution -

1. Raisonnons par l'absurde et supposons que $\ell \neq 0$. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que $\ell > 0$. Puisque $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$, il existe $a > 0$ tel que pour tout $t \geq a$, $f(t) > \frac{\ell}{2}$. On déduit alors que, pour tout $x \geq a$, $\displaystyle\int_a^x f(t)dt \geq (x-a)\frac{\ell}{2}$. Il en résulte alors que
$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = +\infty.$$
Ceci contredit le fait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente. En conclusion, $\ell = 0$.
2. Puisque, pour tout $x \geq 0$ on a
$$\int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0),$$
on déduit que
$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t)dt.$$
Ainsi $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$ est finie et donc nécessairement nulle, d'après la question précédente.

Exercice 15 *Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $(f)^2$ et $(f'')^2$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$.*

1. *Monter que $(f')^2$ est intégrable.*
2. *Monter que*
$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (f'(t))^2 dt\right) \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (f''(t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Solution -

1. En vertu du théorème 2, l'intégrabilité de $(f')^2$ est équivalente à la convergence de
$$\int_{-\infty}^0 (f'(t))^2 dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} (f'(t))^2 dt.$$

Pour tout $t \geq 0$,

$$|f(t)f''(t)| \leq \frac{1}{2}(f(t)^2 + f''(t)^2),$$

et donc, en vertu de la proposition 3, ff' est intégrable. D'un autre côté, en utilisant une intégration par parties on obtient, pour tout $x \geq 0$,

$$\int_0^x (f'(t))^2 dt = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^x f(t)f''(t)dt.$$

En utilisant cette relation, il est facile de voir que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f'(t))^2 dt$ est divergente si et seulement si

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(t)f'(t) = +\infty.$$

Supposons que c'est le cas. Il existe donc $a > 0$ tel que, pour tout $t \geq a$, $f(t)f'(t) \geq 1$. Ainsi, pour tout $x \geq a$,

$$(x - a) \leq \int_a^x f(t)f'(t)dt = \frac{1}{2}(f^2(x) - f^2(0))$$

et donc, pour tout $x \geq a$,

$$f(x)^2 \geq g(x) := 2(x - a) + f^2(0).$$

Puisque $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)dx$ est divergente, il s'ensuit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)^2 dt$ est divergente (*cf.* Proposition 6). On aboutit alors à une contradiction. En conclusion, $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f'(t))^2 dt$ est convergente. Un raisonnement analogue montre que $\displaystyle\int_{-\infty}^0 (f'(t))^2 dt$ est aussi convergente et finalement $(f')^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, en vertu du théorème 2.

2. En utilisant une intégration par parties, on déduit alors que, pour tout $x > 0$,

$$\int_{-x}^x (f'(t))^2 dt = f(x)f'(x) - f(-x)f'(-x) - \int_{-x}^x f(t)f''(t)dt.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit que

$$\int_{-x}^x (f'(t))^2 dt \leq \phi(x) + \left(\int_{-x}^x (f(t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-x}^x (f''(t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.12)$$

avec $\phi(x) = f(x)f'(x) - f(-x)f'(-x)$. Maintenant, des relations

$$|ff'| \leq \frac{1}{2}(f^2 + (f')^2) \quad \text{et} \quad |f'f''| \leq \frac{1}{2}((f')^2 + (f'')^2),$$

on déduit que les intégrales

$$\int_0^{+\infty} f(t)f'(t)dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} f'(t)f''(t)dt$$

sont convergentes. Posons $h(t) = f(t)^2$. On a

$$\int_0^{+\infty} h(t)dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} h'(t)dt$$

sont convergente et donc, en utilisant l'exercice 14, on déduit que

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} h(x) = 0,$$

et par suite

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Un raisonnement analogue montre que

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f'(x) = 0.$$

En passant à la limite dans (1.12), on déduit que

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} (f'(t))^2 dt\right) \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (f''(t))^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Exercice 16 *Soit $f \in C^2([0, +\infty[, \mathbb{R})$ telle que*

$$\int_0^{+\infty} f(t)dt \quad et \quad \int_0^{+\infty} f''(t)dt$$

sont convergentes.

1. *Monter que $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f'(x) = 0$.*
2. *Monter que $\int_0^{+\infty} f(t)f'(t)dt$ est convergente.*

Solution -

1. Puisque, pour tout $x \geq 0$,

$$\int_0^x f''(t)dt = f'(x) - f'(0),$$

on déduit que

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f'(x) = f'(0) + \int_0^{+\infty} f''(t)dt.$$

Ainsi $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f'(x) = \ell$ est finie. Raisonnons par l'absurde et supposons $\ell \neq 0$. Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que $\ell > 0$. Puisque $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f'(x) = \ell$, il existe $a > 0$ tel que pour tout $t \geq a$, $f'(t) > \frac{\ell}{2}$. On déduit alors que pour tout $x \geq a$,

$$\int_a^x f'(t)dt \geq (x-a)\frac{\ell}{2}.$$

Il en résulte alors que

$$f(x) \geq g(x) := (x-a)\frac{\ell}{2} + f(a).$$

Puisque $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ est divergente, il s'ensuit que $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est divergente (*cf.* Proposition 6). On aboutit alors à une contradiction. En conclusion, $\ell = 0$.

2. Pour tout $x > 0$, on a

$$\int_0^x f(t)f'(t)dt = \frac{1}{2}\left[f(t)^2\right]_0^x = \frac{1}{2}f(x)^2 - \frac{1}{2}f(0)^2.$$

D'un autre côté, $f(x) = \int_0^x f'(t)dt + f(0)$. Ainsi

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_0^x f(t)f'(t)dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} f'(t)dt + f(0)\right)^2 - \frac{1}{2}f(0)^2.$$

Il en résulte que $\int_0^{+\infty} f(t)f'(t)dt$ est convergente.

Exercice 17 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que*

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell \quad et \quad \lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \ell'.$$

1. *Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t+1) - f(t))\, dt$ est convergente et calculer sa valeur.*
2. *En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (\arctan(t+1) - \arctan(t))\, dt$.*

Solution -

1. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

En appliquant le théorème des accroissements finis sur $[x, x+1]$, il existe $c_x \in]x, x+1[$ tel que

$$F(x+1) - F(x) = F'(c_x) = f(c_x).$$

Maintenant, en utilisant le changement de variable $u = t + 1$ et la relation ci-dessus, nous obtenons, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \int_0^x (f(t+1) - f(t))dt &= \int_1^{x+1} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt \\ &= \int_1^0 f(t)dt + F(x+1) - F(x) \\ &= \int_1^0 f(t)dt + f(c_x). \end{aligned}$$

En passant à la limite respectivement en $+\infty$ et $-\infty$ et puisque

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} c_x = \pm\infty,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (f(t+1) - f(t))dt &= \int_1^0 f(t)dt + \ell, \\ \int_{-\infty}^0 (f(t+1) - f(t))dt &= \int_0^1 f(t)dt - \ell'. \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(t+1) - f(t))dt = \ell - \ell'.$$

2. Puisque

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} \arctan x = \pm\frac{\pi}{2},$$

en appliquant le résultat de la question précédente à la fonction arctan, nous obtenons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\arctan(t+1) - \arctan(t))\, dt = \pi.$$

Exercice 18 *Soit* $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$. *On pose, pour tout* $t > 0$ *et sous réserve de convergence,*

$$g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nt).$$

1. *Montrer que si* f *est monotone et intégrable alors* $g(t)$ *existe pour tout* $t > 0$ *et on a*

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} tg(t) = \int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

Solution -

1. On suppose que f est décroissante. Soit $t > 0$ fixé. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [(k-1)t, kt]$, on a

$$f(kt) \leq f(x) \leq f((k-1)t)$$

et donc

$$tf(kt) \leq \int_{(k-1)t}^{kt} f(x)dx \leq tf((k-1)t).$$

En sommant et en utilisant la relation de Chasles, on obtient,

$$t\sum_{k=1}^{n} f(kt) \leq \int_0^{nt} f(x)dx \leq t\sum_{k=1}^{n} f((k-1)t).$$

En posant $S_n = \sum_{k=0}^{n} f(kt)$, on obtient alors

$$t(S_n - f(0)) \leq \int_0^{nt} f(x)dx \leq t(S_n - f(nt)) \leq tS_n.$$

Finalement, on obtient

$$\int_0^{nt} f(x)dx \leq tS_n \leq \int_0^{nt} f(x)dx + tf(0).$$

Puisque la série $\sum f(nt)$ est une série à termes positifs et

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^{nt} f(x)dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx,$$

on déduit que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et, par suite la série $\sum f(nt)$ est convergente et on a

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx \leq tg(t) \leq \int_0^{+\infty} f(x)dx + tf(0).$$

De cette double inégalité, on déduit aisément que

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} tg(t) = \int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

Dans le cas où f est croissante, $-f$ est décroissante et on déduit le résultat aisément.

Exercice 19 *Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue telle que $\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ converge. On pose, pour tout $x \geq 0$,*

$$F(x) = \int_x^{+\infty} f(t)dt.$$

1. *Justifier l'existence de $F(x)$ et monter que $\lim_{x \longrightarrow +\infty} xF(x) = 0$.*
2. *Montrer que $\int_0^{+\infty} F(t)dt = \int_0^{+\infty} tf(t)dt$.*

Solution -

1. Soit $x \geq 0$. Pour tout $u \geq x$, on pose
$$g(u) = \int_x^u f(t)dt.$$
Puisque f est positive cette fonction est croissante et, pour tout $x \leq t \leq u$,
$$0 \leq xf(t) \leq tf(t)$$
et donc
$$0 \leq xg(u) \leq \int_x^u tf(t)dt \leq \int_x^{+\infty} tf(t)dt.$$
Ainsi, la fonction g est croissante majorée et donc $\lim_{u \longrightarrow +\infty} g(u)$ existe. En conclusion, $F(x)$ est bien définie et on a
$$0 \leq xF(x) \leq \int_x^{+\infty} tf(t)dt.$$
Maintenant, on a
$$\int_x^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^{+\infty} tf(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$$
et donc $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} tf(t)dt = 0$ et par suite
$$\lim_{x \longrightarrow 0} xF(x) = 0.$$

2. On a, pour tout $x \geq 0$,
$$F(x) = \int_0^{+\infty} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt$$
et donc F est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = -f(x)$. Maintenant,
$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} tf(t)dt &= -\int_0^{+\infty} tF'(t)dt \\ &= -\left[tF(t)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} F(t)dt \\ &= -\lim_{t \longrightarrow +\infty} tF(t) + \int_0^{+\infty} F(t)dt \\ &\stackrel{1.}{=} \int_0^{+\infty} F(t)dt. \end{aligned}$$

Exercice 20 *Montrer que les fonctions* $\frac{\sin^2 x}{x^2}$ *et* $\frac{\sin^4 x}{x^2}$ *sont intégrables sur* $]0,+\infty[$ *et calculer leurs intégrales en fonction de* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.
(On pourra utiliser une intégration par parties.)

Solution -
On a

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{\sin^2 x}{x^2}=1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{\sin^4 x}{x^2}=0,$$

et donc les deux fonctions sont intégrables sur $]0,1]$, en vertu de la proposition 1.
D'un autre côté, pour tout $x>0$, on a

$$0\leq\frac{\sin^2 x}{x^2}\leq\frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad 0\leq\frac{\sin^4 x}{x^2}\leq\frac{1}{x^2}.$$

Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ est une intégrale de Riemann convergente en vertu de (1.3), on déduit, grâce à la proposition 6, que

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx$$

sont convergentes.
En conclusion, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^4 x}{x^2}dx$ sont convergentes et donc, en vertu du théorème 2, les deux fonctions sont intégrables sur $[1,+\infty]$.
En conclusion, les fonctions $\frac{\sin^2 x}{x^2}$ et $\frac{\sin^4 x}{x^2}$ sont intégrables sur $]0,+\infty[$.
Maintenant, nous allons utiliser l'intégration par parties des intégrales sur un intervalle quelconque (*cf.* Théorème 7).
Posons $u(x)=-\frac{1}{x}$ et $v(x)=\sin^2 x$. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 0^+}u(x)v(x) &= -\lim_{x\longrightarrow 0^+}\sin x\frac{\sin x}{x}=0,\\
\lim_{x\longrightarrow +\infty}u(x)v(x) &= -\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{\sin^2 x}{x}=0, \qquad (\text{car } 0\leq\frac{\sin^2 x}{x}\leq\frac{1}{x}).
\end{aligned}$$

Puisque

$$\int_0^{+\infty}u'(x)v(x)dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$$

est convergente, d'après le théorème 7,

$$\int_0^{+\infty} u(x)v'(x)dx = -\int_0^{+\infty} \frac{2\sin x\cos x}{x}dx$$

est convergente et on a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx &= -\left[\frac{\sin^2 x}{x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2\sin x\cos x}{x}dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x}dx.\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $u = 2x$, on déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x}dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}du.$$

Finalement,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx.$$

De la même manière, en appliquant le théorème 7, on déduit que

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}dx &= -\left[\frac{\sin^4 x}{x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{4\cos x\sin^3 x}{x}dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{4\cos x\sin^3 x}{x}dx.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}4\cos x\sin^3 x &= 2\sin(2x)\sin^2 x \\ &= \sin(2x)(1-\cos(2x)) \\ &= \sin(2x) - \frac{1}{2}\sin(4x).\end{aligned}$$

En effectuant, respectivement, les changements de variable $u = 2x$ et $v = 4x$, on déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{4\cos x\sin^3 x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx.$$

Ainsi

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx.$$

Exercice 21 *Soit* $I = -\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}}dx.$

1. *Montrer que* I *est convergente.*
2. *Calculer la dérivée de* $\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ *sur* $]0,1[$.
3. *En déduire que* $I = 2\pi$.

Solution -

1. On écrit

$$I = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}}dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}}dx.$$

La fonction $x \mapsto -\frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}}$ est continue, positive sur $]0, \frac{1}{2}]$ et

$$-\frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}} \sim_0 -\frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

D'après le théorème 3, les intégrales

$$-\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}}dx \quad \text{et} \quad -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$$

sont de même nature. Or, en utilisant une intégration par parties, on obtient, pour tout $t \in]0, \frac{1}{2}]$,

$$\begin{aligned}
\int_t^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx &= \left[2\sqrt{x}\ln x\right]_t^{\frac{1}{2}} - 2\int_t^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x}}{x}dx \\
&= -\frac{2}{\sqrt{2}}\ln 2 - 2\sqrt{t}\ln t - 2\int_t^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}}dx \\
&= -\frac{2}{\sqrt{2}}\ln 2 - 2\sqrt{t}\ln t - 4\left[\sqrt{x}\right]_t^{\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{2}{\sqrt{2}}\ln 2 - 2\sqrt{t}\ln t - \frac{4}{\sqrt{2}} + 4\sqrt{t}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \int_t^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = -\frac{2}{\sqrt{2}}\ln 2 - \frac{4}{\sqrt{2}}.$$

En conclusion, $-\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}}dx$ est convergente.

D'un autre côté, $x \mapsto -\frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}}$ est continue, positive sur $[\frac{1}{2}, 1[$ et, puisque

$$\ln(x) = \ln(1 + x - 1) \sim_1 (x-1),$$

on a

$$-\frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}} \sim_1 -\frac{x-1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

D'après le théorème 3, les intégrales

$$-\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}}dx \quad \text{et} \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}dx$$

sont de même nature. Or

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}dx &= \lim_{t \longrightarrow 1^-} \left[-2\sqrt{1-x}\right]_{\frac{1}{2}}^t \\
&= \lim_{t \longrightarrow 1^-} (-2\sqrt{1-t} + \frac{2}{\sqrt{2}}) \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

En conclusion, $-\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}}dx$ est convergente.

Finalement, I est convergente.

2. On a, pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)' = \frac{1}{2(1-x)^2}\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}}.$$

3. D'après la question précédente, on a

$$I = \int_0^1 u'(x)v(x)dx,$$

avec $u(x) = -2\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ et $v(x) = \ln x$. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow 0^+} u(x)v(x) &= -2 \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}\ln x}{\sqrt{1-x}} = 0, \\
\lim_{x \longrightarrow 1^-} u(x)v(x) &= -2 \lim_{x \longrightarrow 1^-} \sqrt{x}\frac{\ln x}{\sqrt{1-x}} = 0, \qquad (\ln x \sim_1 x-1).
\end{aligned}$$

Les conditions d'intégration par parties des intégrales sur un intervalle quelconque sont alors satisfaites (voir théorème 7), on a alors

$$I = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)dx = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}.$$

Calculons cette intégrale. On a

$$\sqrt{x-x^2} = \sqrt{\frac{1}{4} - (x-\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1-(2x-1)^2}.$$

On pose alors $\sin t = 2x - 1$. On a alors

$$2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} \quad = \quad 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t dt}{|\cos t|} = 2\pi.$$

Finalement,

$$I = 2\pi.$$

Exercice 22 *1. Montrer que les deux intégrales*

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx \quad et \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$$

sont convergentes.

2. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$ *est convergente et que*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx = 0.$$

3. Soit $a > 0$. *A l'aide d'un changement de variable montrer que*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2a}\ln a.$$

Solution -

1. La fonction $x \mapsto -\frac{\ln x}{1+x^2}$ est continue, positive sur $]0,1]$ et

$$-\frac{\ln x}{1+x^2} \sim_0 -\ln x.$$

D'après le théorème 3, les intégrales

$$-\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx \quad \text{et} \quad -\int_0^1 \ln x dx$$

sont de même nature. Or, en utilisant une intégration par parties, on obtient, pour tout $t \in]0,1]$,

$$\int_t^1 \ln x dx = [x \ln x]_t^1 - \int_t^1 dx = -t \ln t + t - 1.$$

Donc

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \int_t^1 \ln x dx = -1.$$

En conclusion, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx$ est convergente.
D'un autre côté, en effectuant le changement de variable $u = \frac{1}{x}$ (*cf.* Théorème 8), on a $dx = -\frac{1}{u^2}du$ et donc

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx &= \int_1^0 \frac{\ln(\frac{1}{u})}{1+\frac{1}{u^2}} \left(-\frac{1}{u^2}du\right) \\ &= -\int_0^1 \frac{\ln u}{1+u^2}du. \end{aligned}$$

On déduit alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$ est convergente et que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx = -\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx.$$

2. On écrit

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx = 0,$$

d'après la question précédente.

3. On effectue le changement de variable $u = \frac{x}{a}$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2+x^2}dx &= a\int_0^{+\infty} \frac{\ln(au)}{a^2+a^2u^2}du \\ &= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{\ln a + \ln u}{1+u^2}du \\ &= \frac{\ln a}{a}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}du + \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2}du. \end{aligned}$$

Or, d'après la question précédente,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2}du = 0,$$

et d'un autre côté,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}du = [\arctan u]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Finalement,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi \ln a}{2a}.$$

Exercice 23 *Soit f une fonction positive décroissante sur $[1,+\infty[$ telle que $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ soit divergente. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$S_n = \int_1^n f(t)dt \quad \text{et} \quad I_n = \sum_{k=1}^n f(k).$$

1. *Montrer que la suite $(I_n - S_n)_{n\geq 1}$ est décroissante minorée.*
2. *En déduire que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{I_n}{S_n} = 1$ et donc $S_n \sim_{+\infty} I_n$.*
3. **Application :** *Donner un équivalent lorsque $n \longrightarrow +\infty$ des suites*

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k},\ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}\ (0<\alpha<1) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k^2+1}}.$$

Solution -

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [k, k+1]$, on a, du fait que f est décroissante,

$$f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$$

et donc

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k).$$

En sommant, pour $k = 1, \dots, n-1$, et en utilisant la relation de Chasles, on obtient

$$I_n - f(1) \leq \int_0^n f(t)dt \leq I_n - f(n) \leq I_n,$$

soit

$$0 \leq I_n - S_n \leq f(1).$$

Ceci montre que la suite $(I_n - S_n)_{n\geq 1}$ est minorée. D'un autre côté,

$$I_{n+1} - S_{n+1} - I_n + S_n \ = \ f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)dt \leq 0$$

et donc la suite $(I_n - S_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et par suite convergente.

2. On écrit

$$\frac{I_n}{S_n} = \frac{I_n - S_n}{S_n} + 1.$$

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est divergente et donc, puisque f est positive,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = +\infty.$$

Puisque $(I_n - S_n)_{n\geq 1}$ est convergente,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{I_n - S_n}{S_n} = 0$$

et finalement,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{I_n}{S_n} = 1.$$

En conclusion, $S_n \sim_{+\infty} I_n$.

3. • La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est positive, décroissante sur $[1, +\infty[$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ est divergente, donc d'après ce ce qui précède

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim_{+\infty} \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln n.$$

• La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est positive, décroissante sur $[1, +\infty[$ et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est divergente (*cf.* (1.3)) donc, d'après ce ce qui précède,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim_{+\infty} \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - 1\right).$$

- La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ est positive, décroissante sur $[1, +\infty[$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$ est divergente car

$$\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \sim_{+\infty} \frac{1}{t},$$

(*cf.* Théorème 3). Donc, d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k^2+1}} &\sim_{+\infty} \int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \\ &= \arg\sinh n - \arg\sinh(1) \\ &= \ln\left(\frac{n+\sqrt{n^2+1}}{1+\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

Exercice 24 *Soit $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge. Pour $0 < a < b$ et $0 < x < y < 0$ on pose :*

$$F(x, y) = \int_x^y \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt.$$

1. *Montrer que $F(x, y) = \displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{ay}^{by} \frac{f(t)}{t} dt$.*
   On note $G(x) = \displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt$ et $H(y) = \displaystyle\int_{ay}^{by} \frac{f(t)}{t} dt$.
2. *Montrer que $\displaystyle\lim_{y \longrightarrow +\infty} H(y) = 0$.*
3. *Montrer que*
$$G(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t) - f(0)}{t} dt + f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$
4. *Montrer que $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} G(x) = f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right)$.*
5. *Montrer que*
$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Solution -

1. Calculons

$$\begin{aligned}
F(x,y) &= \int_x^y \frac{f(at)}{t}dt - \int_x^y \frac{f(bt)}{t}dt \\
&\overset{u=at,v=bt}{=} \int_{ax}^{ay} \frac{f(u)}{u}du - \int_{bx}^{by} \frac{f(v)}{v}dv \\
&= \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}dt + \int_{bx}^{ay} \frac{f(t)}{t}dt - \int_{bx}^{ay} \frac{f(t)}{t}dt - \int_{ay}^{by} \frac{f(t)}{t}dt \\
&= \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}dt - \int_{ay}^{by} \frac{f(t)}{t}dt.
\end{aligned}$$

2. On a

$$H(y) = \int_1^{by} \frac{f(t)}{t}dt - \int_1^{ay} \frac{f(t)}{t}dt,$$

et puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt$ converge,

$$\lim_{y\longrightarrow+\infty} H(y) = \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt - \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}dt = 0.$$

3. On a

$$\begin{aligned}
G(x) &= \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)-f(0)+f(0)}{t}dt \\
&= \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)-f(0)}{t}dt + f(0)\int_{ax}^{bx} \frac{1}{t}dt \\
&= \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)-f(0)}{t}dt + f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right).
\end{aligned}$$

4. Puisque f est continue en 0, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$(0 < t < \delta) \Longrightarrow (|f(t) - f(0)| < \epsilon).$$

Maintenant, pour tout $x \in]0, \frac{\delta}{b}[$, on a $[ax, bx] \subset]0, \delta[$ et donc

$$\left|\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)-f(0)}{t}dt\right| \leq \int_{ax}^{bx} \frac{|f(t)-f(0)|}{t}dt \leq \epsilon\int_{ax}^{bx} \frac{dt}{t} = \epsilon\ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Ce qui prouve que

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)-f(0)}{t}dt = 0$$

et par suite $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} G(x) = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$.

5. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt$ est convergente si et seulement si

$$\int_0^1 \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt$$

sont convergentes. Or, pour tout $0 < x < 1$ et tout $1 < y$, on a

$$\begin{aligned} \int_x^1 \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt &= F(x, 1) = G(x) - H(1), \\ \int_1^y \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt &= F(1, y) = G(1) - H(y). \end{aligned}$$

En vertu de ce qui précède, on a

$$\lim_{x \longrightarrow 0} G(x) = f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad \text{et} \quad \lim_{y \longrightarrow +\infty} H(y) = 0,$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt &= f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right) - H(1), \\ \int_1^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt &= G(1). \end{aligned}$$

Finalement, puisque $G(1) = H(1)$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Exercice 25 *1. Pour quelles valeurs réelles α l'intégrale*

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

est convergente.

2. *Calculer $I(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*
3. *Pour $r, s \in \mathbb{R}$, on définit l'intégrale*

$$I(r, s) = \int_0^1 x^r \left(\ln \frac{1}{x}\right)^s dx.$$

Montrer que $I(r, s)$ est convergente si et seulement si $r > -1$ et $s > -1$.

4. Si $r > -1$ et $s > -1$ montrer que

$$I(r,s) = \int_0^{+\infty} e^{-(r+1)x} x^s dx = \frac{1}{(r+1)^{s+1}} I(0,s).$$

5. Si $r > -1$ et $n \in \mathbb{N}$ calculer $I(r,n)$.

Solution -

1. L'intégrale $I(\alpha)$ est convergente si et seulement si les deux intégrales

$$\int_0^1 t^{\alpha-1} e^{-t} dt \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

sont convergentes.
La fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}e^{-t}$ est continue, positive sur $]0,1]$ et on a

$$t^{\alpha-1}e^{-t} \sim_0 t^{\alpha-1},$$

et donc, d'après le théorème 3, l'intégrale $\int_0^1 t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ a la même nature que $\int_0^1 t^{\alpha-1}dt$. Or, d'après (1.2), cette intégrale est convergente si et seulement si $1-\alpha < 1$, soit $\alpha > 0$.
La fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}e^{-t}$ est continue, positive sur $[1,+\infty[$ et on a

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} t^2 t^{\alpha-1} e^{-t} = 0.$$

Donc, d'après le corollaire 2, $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ est convergente pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
En conclusion, $I(\alpha)$ est convergente pour tout $\alpha > 0$.

2. Soit $n \geq 2$. On fait une intégration par parties :

$$\begin{aligned} I(n) &= \left[-t^{n-1}e^{-t}\right]_0^{+\infty} + (n-1)\int_0^{+\infty} t^{n-2}e^{-t}dt \\ &= -\lim_{t \longrightarrow +\infty} t^{n-1}e^{-t} + (n-1)I(n-1) \\ &= (n-1)I(n-1). \end{aligned}$$

D'un autre côté, $I(1) = 1$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I(n) = (n-1)!.$$

3. L'intégrale $I(r,s)$ est convergente si et seulement si les intégrales

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^r \left(\ln \frac{1}{x}\right)^s dx \quad \text{et} \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 x^r \left(\ln \frac{1}{x}\right)^s dx$$

sont convergentes. Etudions leur convergence séparément.

- Commençons par $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 x^r \left(\ln \frac{1}{x}\right)^s dx$. La fonction $x \mapsto x^r \left(\ln \frac{1}{x}\right)^s$ est continue, positive sur $[\frac{1}{2}, 1[$ et on a

$$x^r \left(\ln \frac{1}{x}\right)^s \sim_1 (1-x)^s.$$

Or, $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^s dx$ est convergente si et seulement si $-s < 1$, soit $s > -1$. En utilisant le théorème 3, on déduit que $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 x^r \left(\ln \frac{1}{x}\right)^s dx$ est convergente si et seulement si $s > -1$.

- Supposons que $s > -1$. La fonction $x \mapsto x^r \left(\ln \frac{1}{x}\right)^s$ est continue et positive sur $]0, \frac{1}{2}]$.
Si $r > -1$, prenons α tel que $r > \alpha > -1$. Alors

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} x^{-\alpha} x^r \left(\ln \frac{1}{x}\right)^s = \lim_{x \longrightarrow 0^+} x^{r-\alpha} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^s = 0.$$

Il en résulte, d'après le corollaire 1, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^r \left(\ln \frac{1}{x}\right)^s dx$ est convergente.
Si $r < -1$, prenons α tel que $r < \alpha < -1$. Alors

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} x^{-\alpha} x^r \left(\ln \frac{1}{x}\right)^s = \lim_{x \longrightarrow 0^+} x^{r-\alpha} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^s = +\infty.$$

Il en résulte, d'après le corollaire 1, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} x^r \left(\ln \frac{1}{x}\right)^s dx$ est divergente.
Si $r = 1$, on a, pour tout $t \in]0, \frac{1}{2}[$,

$$\begin{aligned} \int_t^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^s dx &= \left[-\frac{1}{s+1} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{s+1}\right]_t^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{s+1} (\ln 2)^{s+1} + \frac{1}{s+1} \left(\ln \frac{1}{t}\right)^{s+1}. \end{aligned}$$

Il en résulte alors que

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \int_t^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x}\left(\ln \frac{1}{x}\right)^s dx = +\infty$$

et donc $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x}\left(\ln \frac{1}{x}\right)^s dx$ est divergente.
En conclusion, nous avons montré que $I(r,s)$ est convergente si et seulement si $r > -1$ et $s > -1$.

4. On fait le changement de variable $u = \ln \frac{1}{x}$, soit $x = e^{-u}$ et $dx = -e^{-u}du$ et donc

$$\begin{aligned} I(r,s) &= -\int_{+\infty}^{0} e^{-(r+1)u} u^s du \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(r+1)u} u^s du. \end{aligned}$$

Maintenant, on fait le changement de variable $v = (r+1)u$ et on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-(r+1)u} u^s du = \frac{1}{(r+1)^{s+1}} \int_0^{+\infty} e^{-v} v^s dv.$$

Finalement,

$$I(r,s) = \frac{1}{(r+1)^{s+1}} I(0,s).$$

5. D'après la question précédente et la question 2., on a

$$I(r,n) = \frac{1}{(r+1)^{n+1}} I(0,n) = \frac{1}{(r+1)^{n+1}} I(n+1) = \frac{n!}{(r+1)^{n+1}}.$$

Exercice 26 *On note f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.*

1. *On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$I_n = \int_n^{+\infty} f(x)dx.$$

Montrer que l'intégrale I_n est convergente et exprimer I_n en fonction de n. En déduire que $I_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$.

2. *Montrer que la série $\sum f(n)$ est convergente.*

3. *Établir que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,*

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k).$$

4. *En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq I_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}.$$

5. *Déduire de ce qui précède un équivalent en $+\infty$ de* $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$.

Solution -

1. La fonction f est continue sur $[n, +\infty[$ et on a, pour tout $t \geq n$,

$$\begin{aligned} \int_n^t f(x)dx &= \left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_n^t \\ &= -e^{\frac{1}{t}} + e^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Il en résulte alors que

$$I_n = \lim_{t \longrightarrow +\infty} \int_n^t f(x)dx = e^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Maintenant,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

et donc $I_n \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$.

2. La série $\sum f(n)$ est une série à termes positifs et on a

$$f(n) \sim_{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Donc la série $\sum f(n)$ a la même nature que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ qui est convergente donc $\sum f(n)$ est convergente.

3. Pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$f'(x) = -\frac{(2x+1)e^{\frac{1}{x}}}{x^4} < 0$$

et donc f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [k, k+1]$, on a

$$f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$$

et par suite

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k).$$

4. En faisant la somme dans l'inégalité précédente pour $k = n, \ldots, +\infty$ et en utilisant la relations de Chasles, on obtient

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq I_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) + \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}.$$

5. La double inégalité précédente peut s'écrire aussi

$$I_n - \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq I_n.$$

En multipliant par n, on obtient

$$nI_n - \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n} \leq n \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \leq nI_n.$$

Or, d'après la question 1. $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} nI_n = 1$ et on a aussi $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n} = 0$, par suite

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} n \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) = 1,$$

et finalement

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \sim_{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Exercice 27 *Soit f définie par* $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}dt.$

1. *Déterminer l'ensemble de définition de f.*
2. *Etudier les variations de f.*
3. *Montrer que*

$$0 < y \leq x \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq f(y) - f(x) \leq \frac{1}{y} - \frac{1}{x}.$$

   En déduire que f est continue.

4. *Calculer $f(x+1) + f(x)$ pour tout $x > 0$. En déduire $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$.*

Solution -

1. La fonction qui à $t \mapsto \frac{t^{-x}}{1+t}$ est continue, positive sur $[1, +\infty[$ et on a

$$\frac{t^{-x}}{1+t} \sim_{+\infty} \frac{1}{t^{1+x}}.$$

   Donc, d'après le théorème 3, les intégrales

$$\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}dt \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{1+x}}dt$$

   sont de même nature. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{1+x}}dt$ est une intégrale de Riemann qui converge, en vertu de (1.3), si et seulement si $1 + x > 1$.
   En conclusion, l'ensemble de définition de f est $]0, +\infty[$.

2. Soit $0 < x < y$. On a, pour tout $t \in [1, +\infty[$, $t^{-y} \leq t^{-x}$ et donc

$$\frac{t^{-y}}{1+t} \leq \frac{t^{-x}}{1+t}.$$

   Il en résulte alors que $f(y) \leq f(x)$ et donc f est décroissante.

3. Soit $0 < y \leq x$. On a

$$f(y) - f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-y} - t^{-x}}{t+1}dt.$$

   Or, pour tout $t \geq 1$,

$$0 \leq \frac{t^{-y} - t^{-x}}{t+1} \leq \frac{t^{-y} - t^{-x}}{t},$$

et donc

$$0 \leq f(y) - f(x) \leq \int_1^{+\infty} \frac{t^{-y} - t^{-x}}{t} dt.$$

Maintenant,

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{t^{-y} - t^{-x}}{t} dt &= \left[-\frac{t^{-y}}{y} + \frac{t^{-x}}{x} \right]_1^{+\infty} \\ &= \frac{1}{y} - \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$0 \leq f(y) - f(x) \leq \frac{1}{y} - \frac{1}{x}.$$

Fixons $a > 0$. D'après la double inégalité précédente, pour tout $x \geq a$,

$$0 \leq f(x) - f(a) \leq \frac{a - x}{ax}.$$

On déduit donc que $\lim\limits_{x \longrightarrow a^-} f(x) = f(a)$. De la même manière, on a aussi $\lim\limits_{x \longrightarrow a^+} f(x) = f(a)$. Ceci montre que f est continue sur $]0, +\infty[$.

4. On a

$$\begin{aligned} f(x+1) + f(x) &= \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x-1} + t^{-x}}{t+1} dt \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{(t^{-1} + 1)t^{-x}}{t+1} dt \\ &= \int_1^{+\infty} t^{-x-1} dt \\ &= \left[-\frac{1}{x} t^{-x} \right]_1^{+\infty} \\ &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \longrightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} - f(x+1) \right) \\ &= +\infty - f(1) = +\infty. \quad (f \text{ est continue}) \\ \lim_{x \longrightarrow +\infty} (f(x) + f(x+1)) &= 0, \end{aligned}$$

et donc $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Exercice 28 *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $\beta > 0$.*

1. *Pour quelles valeurs de α l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{t^\alpha}{1+t^\beta \sin^2(t)}dt$ est-elle convergente ?*
2. *On suppose pour cette question que $\alpha = 0$.*
   (a) *Montrer que, pour $0 < \beta < 2$, la série $\displaystyle\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1+t^\beta \sin^2(t)}$ est divergente.*
   (b) *En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\beta \sin^2(t)}$ est divergente pour $0 < \beta < 2$.*
   (c) *Montrer que, pour $\beta > 2$, la série $\displaystyle\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1+t^\beta \sin^2(t)}$ est convergente.*
   (d) *En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\beta \sin^2(t)}$ est convergente pour $\beta > 2$.*

Solution - Notons, pour tout $t \in]0, \pi]$,

$$f(t) = \frac{t^\alpha}{1+t^\beta \sin^2(t)}.$$

1. La fonction f est continue, positive sur $]0, \pi]$ et

$$f(t) \sim_0 t^\alpha.$$

   Il en résulte, en vertu du théorème 3 et la relation (1.2), que $\displaystyle\int_0^{\pi} f(t)dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > -1$.
2. Posons

$$I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1+t^\beta \sin^2(t)}.$$

   Nous allons montrer que la série $\sum I_n$ est divergente. En utilisant le changement de variable $t = n\pi + x$, on obtient

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+(x+n\pi)^\beta \sin^2(x)}.$$

D'un autre côté, pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$n\pi + x \leq (n+1)\pi \quad \text{et} \quad \sin^2(x) \leq x^2,$$

et donc

$$I_n \geq \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + ((n+1)\pi)^{\beta} x^2} = \frac{\arctan(\alpha_n \pi)}{\alpha_n},$$

avec $\alpha_n = ((n+1)\pi)^{\frac{\beta}{2}}$. Puisque $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$, on déduit que

$$v_n = \frac{\arctan(\alpha_n \pi)}{\alpha_n} \sim_{+\infty} \frac{\pi}{2\pi^{\frac{\beta}{2}}} \frac{1}{(n+1)^{\frac{\beta}{2}}}.$$

Puisque $0 < \beta < 2$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{(n+1)^{\frac{\beta}{2}}}$ est divergente, donc la série $\sum v_n$ est divergente et par suite $\sum I_n$ est divergente.

3. On suppose $0 < \beta < 2$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^{\beta} \sin^2(t)}$ est continue et positive sur $[\pi, +\infty[$. D'après la proposition 7, puisque la suite $(n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers $+\infty$ et la série

$$\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1 + t^{\beta} \sin^2(t)}$$

est divergente, on déduit que $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^{\beta} \sin^2(t)}$ est divergente.

4. Posons

$$I_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1 + t^{\beta} \sin^2(t)}.$$

En utilisant le changement de variable $t = n\pi + x$, on obtient

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + (x + n\pi)^{\beta} \sin^2(x)} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + (x + n\pi)^{\beta} \sin^2(x)} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{1 + (x + n\pi)^{\beta} \sin^2(x)} \\ &= J_n + K_n. \end{aligned}$$

Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$n\pi + x \geq n\pi \quad \text{et} \quad \sin^2(x) \geq \left(\frac{2}{\pi} x\right)^2.$$

La deuxième inégalité est due à la concavité de la fonction sin sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Ainsi

$$J_n \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a_n^2x^2} = \frac{\arctan(a_n\frac{\pi}{2})}{a_n},$$

avec $a_n = \frac{2}{\pi}(n\pi)^{\frac{\beta}{2}}$. Or, puisque $\lim_{n \longrightarrow +\infty} a_n = +\infty$,

$$w_n = \frac{\arctan(a_n\frac{\pi}{2})}{a_n} \sim_{+\infty} \frac{\pi^{2-\frac{\beta}{2}}}{4}\frac{1}{n^{\frac{\beta}{2}}}.$$

Puisque $\beta > 2$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{\frac{\beta}{2}}}$ est convergente, donc la série $\sum w_n$ est convergente et par suite $\sum J_n$ est convergente.
D'un autre côté, en faisant le changement de variable $t = \pi - u$, on obtient

$$K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1+(n\pi+\pi-u)^\beta \sin^2(u)}.$$

Une étude analogue à celle faite pour $\sum J_n$ permet de montrer que $\sum K_n$ est convergente.
En conclusion, $\sum I_n$ est convergente.

5. On suppose $\beta > 2$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^\beta \sin^2(t)}$ est continue et positive sur $[\pi, +\infty[$. Pour montrer que $\int_\pi^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\beta \sin^2(t)}$ est convergente, nous allons utiliser la proposition 8. En effet, la suite $(n\pi)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement croissante qui tend vers $+\infty$ et la série

$$\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1+t^\beta \sin^2(t)}$$

est convergente et donc $\int_\pi^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\beta \sin^2(t)}$ est convergente.

Exercice 29 *1. Soit $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}} \quad \textit{pour } x \neq 0 \quad \textit{et} \quad f(0) = 0.$$

Montrer que f est de classe C^1 sur $[0, \pi]$.

2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère*

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}dx.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = I_n$ et calculer I_n.

3. *Montrer que si ϕ est de classe C^1 sur $[0,\pi]$ alors*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^\pi \phi(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)xdx = 0.$$

4. *En déduire que l'intégrale de Dirichlet est donnée par*

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}.$$

Solution -

1. La fonction f est clairement de classe C^1 sur $]0,\pi]$ et pour tout $x \in]0,\pi]$,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{\cos\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Etudions maintenant cette fonction en 0. On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2\sin\frac{x}{2}-x}{2x\sin\frac{x}{2}} \quad \text{(Règle de l'Hôpital)}\\ &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\cos\frac{x}{2}-1}{2\sin\frac{x}{2}+x\cos\frac{x}{2}}\\ &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}-\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}} = 0.\end{aligned}$$

Ceci montre que f est continue en 0. D'un autre côté, en utilisant la règle de l'Hôpital deux fois,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2\sin\frac{x}{2}-x}{2x^2\sin\frac{x}{2}}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\cos\frac{x}{2}-1}{4x\sin\frac{x}{2}+x^2\cos\frac{x}{2}}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{2x\cos\frac{x}{2}+4\sin\frac{x}{2}+2x\cos\frac{x}{2}-\frac{x^2}{2}\sin\frac{x}{2}}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}{4x\cos\frac{x}{2}+(4-\frac{x^2}{2})\sin\frac{x}{2}}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{-\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}}{4\cos\frac{x}{2}-2x\sin\frac{x}{2}-x\sin\frac{x}{2}+(2-\frac{x^2}{4})\cos\frac{x}{2}}\\
&= -\frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

Ceci montre que f est dérivable à droite de 0 et on a $f'_d(0) = -\frac{1}{24}$. Montrons maintenant que f' est continue en 0. On a

$$f'(x) = \frac{x^2\cos\frac{x}{2}-4\sin^2\frac{x}{2}}{4x^2\sin^2\frac{x}{2}}.$$

En effectuant un développement limité au voisinage de 0, on obtient que

$$\begin{aligned}
x^2\cos\frac{x}{2}-4\sin^2\frac{x}{2} &= -\frac{1}{24}x^4+o(x^4),\\
4x^2\sin^2\frac{x}{2} &= x^4+o(x^4),
\end{aligned}$$

et donc $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f'(x) = -\dfrac{1}{24}$ ce qui montre que f' est continue en 0. En conclusion, f est de classe C^1 sur $[0,\pi]$.

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction $x\mapsto \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$ est continue sur $]0,\pi]$ et

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} = n+\frac{1}{2},$$

et donc I_n est convergente. D'un autre côté, en utilisant les formules classiques de trigonométrie, on obtient

$$\begin{aligned}
\sin\left(n+1+\frac{1}{2}\right)x &= \sin((n+1)x)\cos\frac{x}{2}+\cos((n+1)x)\sin\frac{x}{2},\\
2\sin((n+1)x)\cos\frac{x}{2} &= \sin(n+1-\frac{1}{2})x+\sin(n+1+\frac{1}{2})x.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^\pi \frac{\sin\left(n+1+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}dx \\ &= \frac{1}{2}I_n + \frac{1}{2}I_{n+1} + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos((n+1)x)dx. \end{aligned}$$

Puisque

$$\int_0^\pi \cos((n+1)x)dx = \frac{1}{n+1}\left[\sin((n+1)x)\right]_0^\pi = 0,$$

on déduit que $I_{n+1} = I_n$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = I_0 = \frac{\pi}{2}.$$

3. En utilisant une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^\pi \phi(x)\sin\left(nx+\frac{1}{2}x\right)dx \\ &= \left[-\phi(x)\frac{\cos\left(nx+\frac{1}{2}x\right)}{n+\frac{1}{2}}\right]_0^\pi + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^\pi \phi(x)'\cos\left(nx+\frac{1}{2}x\right)dx \\ &= \frac{\phi(0)}{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\int_0^\pi \phi(x)'\cos\left(nx+\frac{1}{2}x\right)dx. \end{aligned}$$

Puisque ϕ est de classe C^1, ϕ' est continue sur $[0,\pi]$ et donc bornée, c'est-à-dire, $M = \sup\limits_{x\in[0,\pi]} |\phi'(x)|$ est fini. Il en résulte alors que

$$|J_n| \leq \frac{|\phi(0)|}{n+\frac{1}{2}} + \frac{\pi M}{n+\frac{1}{2}}$$

et donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} J_n = 0$.

4. Nous avons déjà vu dans le cours que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ est convergente. On alors

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin x}{x}dx.$$

En utilisant le changement de variable $x = (n+\frac{1}{2})t$, on obtient

$$\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin x}{x}dx = \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}dt.$$

Maintenant, d'après la définition de f,

$$\int_0^\pi f(t)\sin(n+\frac{1}{2})tdt = \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}dt - I_n.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\sin x}{x}dx \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{t}dt \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(\int_0^\pi f(t)\sin(n+\frac{1}{2})tdt + I_n\right) \\
&= I_0 \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 30 *1. Montrer que les intégrales*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx \quad et \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$$

sont convergentes et à l'aide d'une intégration par parties montrer qu'elles sont égales.

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{x^2}dx,\ B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin^2 x}dx \quad et \quad A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x\sin^2 nx}{\sin^2 x}dx.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n \le I_n \le B_n.$$

3. Calculer $B_n + B_{n+2} - 2B_{n+1}$ et $B_n - A_n$. En déduire les valeurs de A_n et B_n en fonction n.

4. Montrer que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{I_n}{n} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx.$$

5. *En déduire la valeur de de l'intégrale de Dirichlet* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$.

Solution -

1. Nous avons vu dans le cours que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$ est convergente. Dans l'exercice 20, nous avons que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$ est convergente et que
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx.$$
2. On a
$$\begin{aligned}I_n-A_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 nx\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}\right)dx,\\ B_n-I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 nx\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)dx.\end{aligned}$$
Maintenant, si on pose $f(x)=\tan x-x$ pour $x\in[0,\frac{\pi}{2}[$ et $g(x)=\sin x-x$ pour tout $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$, on a
$$f'(x)=\tan^2 x\geq 0\quad\text{et}\quad g'(x)=\cos x-1\leq 0$$
et donc, pour tout $x\in]0,\frac{\pi}{2}[$,
$$f(x)\geq f(0)=0\quad\text{et}\quad g(x)\leq g(\frac{\pi}{2})<0.$$
On déduit donc que, pour tout $x\in]0,\frac{\pi}{2}[$,
$$\sin x\leq x\leq\tan x.$$
Cette double inégalité permet alors de déduire que
$$A_n\leq I_n\leq B_n.\tag{1.13}$$
3. Posons
$$a_n(x)=\sin^2 nx+\sin^2(n+2)x-2\sin^2(n+1)x.$$
Simplifions l'expression de $a_n(x)$. On a
$$\begin{aligned}a_n(x)&=\frac{1}{2}(1-\cos(2nx))+\frac{1}{2}(1-\cos(2(n+2)x))-(1-\cos(2(n+1)x))\\&=\frac{1}{2}(\cos(2(n+1)x)-\cos(2nx))+\frac{1}{2}(\cos(2(n+1)x)-\cos(2(n+2)x)).\end{aligned}$$

On utilise maintenant la formule

$$\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right),$$

et on déduit que

$$\begin{aligned} a_n(x) &= -\sin((2n+1)x)\sin x + \sin((2n+3)x)\sin x \\ &= \sin x\,(\sin((2n+3)x) - \sin((2n+1)x)) \\ &\overset{(a)}{=} 2\sin^2 x\cos(2(n+1)x), \end{aligned}$$

où dans (a), nous avons utilisé la formule

$$\sin a - \sin b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

On obtient déduit alors que

$$\begin{aligned} B_n + B_{n+2} - 2B_{n+1} &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2(n+1)x)dx \\ &= \frac{1}{n+2}\left[\sin(2(n+1)x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned} B_n - A_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 nx dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos(2nx))dx \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

L'ensemble des suites vérifiant

$$u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$$

est un espace vectoriel de dimension 2 engendré par les suites $u_n = 1$ et $v_n = n$. La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à cet espace vectoriel et donc il existe deux constante $a, b \in \mathbb{R}$ telles que

$$B_n = an + c.$$

Puisque $B_0 = 0$ et $B_1 = \frac{\pi}{2}$, on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n = \frac{n\pi}{2} \quad \text{et} \quad A_n = \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}. \tag{1.14}$$

4. On effectue le changement de variable $u = nx$ et on obtient

$$I_n = n \int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 u}{u^2} du.$$

De cette relation, on déduit que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{I_n}{n} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^{n\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du. \tag{1.15}$$

5. En combinant (1.13) et (1.14), on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4n} \leq \frac{I_n}{n} \leq \frac{\pi}{2}.$$

De cette double inégalité, on déduit que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{I_n}{n} = \frac{\pi}{2}.$$

Maintenant, en utilisant la première question et (1.15), on déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} du = \frac{\pi}{2}.$$

Noter que cette intégrale a été calculée d'une autre manière dans l'exercice précédent.

Chapitre 2

Théorème de convergence dominée et intégrales dépendant d'un paramètre

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités a, b, $C_m^0(I, \mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux sur I et $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ le sous-espace vectoriel des fonctions intégrables ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Pour toute $A \subset \mathbb{R}$, on notera $1_A : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la **fonction caractéristique** de A définie par

$$1_A(x) = 1 \text{ si } x \in A \quad \text{et} \quad 1_A(x) = 0 \text{ si } x \notin A.$$

2.1 Convergence en moyenne et convergence en moyenne quadratique

Pour tout $f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{C})$, on pose

$$N_1(f) = \int_a^b |f(x)| dx.$$

Les propriétés suivantes sont une conséquence immédiate des propriétés de l'intégrale :

1. $N_1(f) \geq 0$,
2. $N_1(\lambda f) = |\lambda| N_1(f)$ $(\lambda \in \mathbb{C})$,
3. $N_1(f + g) \leq N_1(f) + N_1(g)$.

Néanmoins N_1 n'est pas une norme sur $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{C})$ car il y a des fonctions f dans $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{C})$ qui ne sont pas nulles et qui vérifient $N_1(f)=0$. Par exemple, une fonction qui s'annule sur I excepté un nombre fini de points. Par contre, si on considère $\mathcal{L}^1_c(I,\mathbb{C})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{C})$ formé des fonctions continues sur I, la proposition suivante découle immédiatement de la proposition 4.

Proposition 11 $(\mathcal{L}^1_c(I,\mathbb{C}),N_1)$ *est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé.*

Bien que ce n'est qu'une semi-norme sur $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{C})$, on appellera N_1 **norme de convergence en moyenne** et on dira qu'une suite $(f_n)_{n\in N^*}$ dans $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{C})$ converge en moyenne vers $f\in\mathcal{L}^1(I,\mathbb{C})$ si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} N_1(f_n-f)=0$.

Une fonction $f\in C^0_m(I,\mathbb{C})$ est dite **de carrée intégrable** sur I si $|f|^2\in\mathcal{L}^1(I,\mathbb{C})$. On notera $\mathcal{L}^2(I,\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de carrée intégrable et $\mathcal{L}^2_c(I,\mathbb{C})$ son sous-ensemble formé des fonctions continues de carrée intégrable. Pour tout $f\in\mathcal{L}^2(I,\mathbb{C})$, on pose

$$N_2(f)=\left(\int_a^b |f(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 12 *1. $\mathcal{L}^2(I,\mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et si f et g sont dans $\mathcal{L}^2(I,\mathbb{C})$ alors $fg\in\mathcal{L}^1(I,\mathbb{C})$.*

2. N_2 est une semi-norme sur $\mathcal{L}^2(I,\mathbb{C})$ et l'application

$$(f,g)\mapsto\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

définit un forme bilinéaire symétrique positive sur $\mathcal{L}^2(I,\mathbb{C})$ dont la semi-norme associée est N_2.

3. $(\mathcal{L}^2_c(I,\mathbb{C}),\langle\ ,\ \rangle)$ est un espace préhilbertien dont la norme associée est N_2.

La norme N_2 est appelée **norme de convergence en moyenne quadratique** et on dira qu'une suite $(f_n)_{n\in N^*}$ dans $\mathcal{L}^2(I,\mathbb{C})$ converge en moyenne quadratique vers $f\in\mathcal{L}^2(I,\mathbb{C})$ si $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} N_2(f_n-f)=0$.

Proposition 13 (**Inégalité de Cauchy-Schwarz**) *Soient $f,g\in\mathcal{L}^2(I,\mathbb{C})$. Alors*

$$|\langle f,g\rangle|\leq N_1(fg)\leq N_2(f)N_2(g).$$

En particulier, $\langle\ ,\ \rangle$ est continue sur $\mathcal{L}^2(I,\mathbb{C})$ pour N_2, c'est-à-dire, si $(f_n)_{n\in N^*}$ et $(g_n)_{n\in N^*}$ sont deux suites de $\mathcal{L}^2(I,\mathbb{C})$ qui convergent en moyenne quadratique, respectivement vers $f,g\in\mathcal{L}^2(I,\mathbb{C})$ alors

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\langle f_n,g_n\rangle=\langle f,g\rangle.$$

2.2 Théorème de convergence dominée

Le théorème qui suit connu sous le nom de théorème de convergence dominée est l'un des théorèmes les plus importants de la théorie de l'intégration de Lebesgue. Sa puissance découle de la simplicité de ses hypothèses et de ces nombreuses applications.

Théorème 9 (**Théorème de convergence dominée**) *Soit $(f_n)_{n\in N^*}$ une suite de fonctions dans $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{C})$. On suppose que :*

1. *la suite $(f_n)_{n\in N^*}$ converge simplement sur I, c'est-à-dire, pour tout $x\in I$, la suite $(f_n(x))_{n\in N^*}$ converge vers un réel $f(x)$,*
2. *la fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x)$ est continue par morceaux sur I,*
3. **hypothèse de domination :** *il existe une fonction $\phi \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}^+)$ telle que,*
$$\forall n \in N^*, \forall x \in I, \quad |f_n(x)| \leq \phi(x).$$

Alors $f \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{C})$ et on a

$$\int_I f(x)dx = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_I f_n(x)dx.$$

En plus, la suite $(f_n)_{n\in N^*}$ converge en moyenne vers f, c'est-à-dire,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} N_1(f_n - f) = 0.$$

Exemples - En appliquant le théorème de convergence dominée, nous allons calculer les limites suivantes :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx, \; \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}dx, \; \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x+\frac{1}{2})^n}}{\sqrt{x}}dx.$$

- **On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in N^*}$ définie sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ par**
$$f_n(x) = \tan^n x.$$
Pour tout $n \in N^*$, la fonction f_n est continue sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ et donc intégrable sur $[0,\frac{\pi}{4}]$. D'un autre côté, la suite $(f_n)_{n\in N^*}$ converge simplement vers la fonction $f : [0,\frac{\pi}{4}] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in [0,\frac{\pi}{4}[, \quad f(x) = 0 \quad \textbf{et} \quad f(\frac{\pi}{4}) = 1.$$
Cette fonction est clairement continue par morceaux sur $[0,\frac{\pi}{4}]$. Vérifions maintenant l'hypothèse de domination. En effet,
$$\forall n \in N^*, \forall x \in [0,\frac{\pi}{4}], \quad |f_n(x)| \leq \phi(x)$$

avec $\phi(x) = 1$ **pour tout** $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$**. La fonction** ϕ **est clairement intégrable sur** $[0, \frac{\pi}{4}]$**. Les hypothèses du théorème 9 étant vérifiées, on peut affirmer que**

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \frac{\pi}{4}.$$

- **On considère la suite de fonctions** $(g_n)_{n\in N^*}$ **définie sur** $[0, +\infty[$ **par**

$$g_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} 1_{[0,n]}(x).$$

Pour tout $n \in N^*$**, la fonction** g_n **est continue par morceaux sur** $[0, +\infty[$**. D'un autre côté, pour tout** $x \in [0, +\infty[$**, il existe** $n_0 \in \mathbb{N}$ **tel que** $x \in [0, n]$ **pour tout** $n \geq n_0$**. Donc**

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} g_n(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} = e^{-x}.$$

La suite $(g_n)_{n\in N^*}$ **converge donc simplement vers la fonction** $g : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ **définie par**

$$g(x) = e^{-x}.$$

Cette fonction est continue sur $[0, +\infty[$**. Vérifions maintenant l'hypothèse de domination. En effet,**

$$\forall n \in N^*, \forall x \in [0, +\infty[, \quad |g_n(x)| \leq \phi(x) \qquad (d)$$

avec $\phi(x) = e^{-x}$**. On a**

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} \int_0^t e^{-x} dx = 1,$$

et donc, en vertu du théorème 2, ϕ **est intégrable sur** $[0, +\infty[$**. De** (d) **on déduit aussi que, en vertu de la proposition 3, pour tout** $n \in N^*$**,** g_n **est intégrable sur** $[0, +\infty[$**. Les hypothèses du théorème 9 étant vérifiées, on peut affirmer que**

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1.$$

- **On considère la suite de fonctions** $(h_n)_{n\in N^*}$ **définie sur** $]0, +\infty[$ **par**

$$h_n(x) = \frac{e^{-(x+\frac{1}{2})^n}}{\sqrt{x}}.$$

Pour tout $n \in N^*$**, la fonction** h_n **est continue sur** $]0, +\infty[$**. D'un autre côté, la suite** $(h_n)_{n\in N^*}$ **converge simplement vers la fonction** $h :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ **définie par**

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si} \quad x < \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{si} \quad x > \frac{1}{2}, \\ \frac{\sqrt{2}}{e} & \text{si} \quad x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Cette fonction est clairement continue par morceaux sur $]0, +\infty[$**. Vérifions maintenant l'hypothèse de domination. En effet, pour tout** $x > 0$**,** $-(x + \frac{1}{2})^n \leq -x$ **et donc,**

$$\forall n \in N^*, \forall x \in]0, +\infty[, \quad |h_n(x)| \leq \phi(x) \qquad (d')$$

avec $\phi(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$**. On a**

$$\phi(x) \sim_0 \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \textbf{et} \quad \lim_{x \longrightarrow +\infty} x^2 \phi(x) = 0.$$

Il en résulte, d'après le théorème 3 que $\int_1^{+\infty} \phi(x)dx$ **est convergente et, en vertu du théorème 2, que** ϕ **est intégrable sur** $[1, +\infty[$**. De même, en vertu du corollaire 2,** ϕ **est intégrable sur** $]0, 1]$ **et donc, toujours en vertu du théorème 2, elle est intégrable sur** $]0, 1]$**. Finalement,** ϕ **est intégrable sur** $]0, +\infty]$**. De** (d') **on déduit aussi que, en vertu de la proposition 3, pour tout** $n \in N^*$**,** h_n **est intégrable sur** $]0, +\infty[$**. Les hypothèses du théorème 9 étant vérifiées, on peut affirmer que**

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x+\frac{1}{2})^n}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\left[\sqrt{x}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

Le théorème suivant est d'emploi très fréquent. Il permet l'inversion d'une série et d'une intégrale.

Théorème 10 *Soit* $(f_n)_{n \in N^*}$ *une suite de fonctions dans* $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{C})$*. On suppose que :*

1. *La série de fonctions* $\sum f_n$ *converge simplement, c'est-à-dire, pour tout* $x \in I$*, la série* $\sum f_n(x)$ *converge vers un réel* $S(x)$*,*
2. *la fonction* $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$*,* $x \mapsto S(x)$ *est continue par morceaux sur* I*,*
3. *la série* $\sum \int_I |f_n(x)| dx$ *converge.*

Alors $S \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{C})$ *et on a*

$$\int_I S(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(x)dx.$$

Remarque importante - Tout dans ce théorème repose sur l'hypothèse $\sum \int_I |f_n(x)| dx < +\infty$ **qu'il ne faut pas omettre de vérifier. L'exemple suivant illustre l'importance de cette hypothèse. En effet, on a**

$$\sum_{n \geq 1} \left(n \sin^{n-1}(x) - (n+1)\sin^n(x)\right)\cos(x) = \cos(x).$$

Alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(n \sin^{n-1}(x) - (n+1)\sin^n(x)\big)\cos(x)dx = 0 \quad \textbf{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = 1.$$

La série $\sum \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\big(n \sin^{n-1}(x) - (n+1)\sin^n(x)\big)\cos(x)|dx$ est donc divergente.

Exemple - En appliquant le théorème 10, nous allons calculer la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^1 x^{2n}(1-x)dx$$

de deux manières différentes et déduire la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}.$$

Pour tout $n \in N^n$, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{2n}(1-x)dx &= \left[\frac{1}{2n+1}x^{2n+1} - \frac{1}{2n+2}x^{2n+2}\right] \\
&= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}.
\end{aligned}$$

D'un autre côté, considérons la série de fonctions $\sum f_n$ définies sur $[0,1[$ par

$$f_n(x) = (-1)^n x^{2n}(1-x).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $[0,1[$ et admet un prolongement par continuité à $[0,1]$. En vertu de la proposition 1, f_n est intégrable sur $[0,1[$. On a, pour tout $x \in [0,1[$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n - x\sum_{n=0}^{+\infty}(-x^2)^n \\
&= \frac{1}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} \\
&= \frac{1-x}{1+x^2} = S(x).
\end{aligned}$$

Cette fonction est continue positive sur $[0,1[$. En outre,

$$\int_0^1 |f_n(x)|dx = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \sim \frac{1}{4n^2}.$$

Or, la série de Riemann $\sum \frac{1}{4n^2}$ est convergente et donc la série $\sum \int_0^1 |f_n(x)|dx$ est convergente. Les hypothèses du théorème 10 étant vérifiées, on déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^1 x^{2n}(1-x)dx &= \int_0^1 \frac{1-x}{1+x^2}dx \\ &= \left[\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

On obtient finalement,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

2.3 Intégrales dépendant d'un paramètre

Les deux résultats principaux de cette section se déduisent d'une manière relativement aisée du théorème de convergence dominée. Ils illustrent la puissance de ce théorème.

2.3.1 Continuité sous le signe intégrale

Théorème 11 (**Continuité sous le signe intégrale**) *Soit $A \subset \mathbb{R}^p$ et $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{C}$ une application. On suppose que :*

1. *pour tout $t \in I$, la fonction $f_t : A \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue,*
2. *pour tout $x \in A$, la fonction $f_x : I \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto f(x,t)$ appartient à $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{C})$,*
3. **hypothèse de domination locale :** *pour tout compact $K \subset A$, il existe une fonction $\phi_K \in \mathcal{L}^1(I,\mathbb{R}^+)$ telle que,*

$$\forall (x,t) \in K \times I, \quad |f(x,t)| \leq \phi_K(t).$$

Alors la fonction $F : A \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto \int_I f(x,t)dt$ est continue sur A.

Remarque - Dans ce théorème l'hypothèse de domination locale entraîne, en vertu de la proposition 3, l'intégrabilité de f_x pour tout $x \in A$. Donc il y a redondance et, en pratique, on vérifie d'abord l'hypothèse de domination locale et on déduit l'intégrabilité de f_x.

Exemples -

1. **En utilisant le théorème 11, nous allons montrer que l'application $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par**
$$F(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+|x-t|)}{1+t^2}dt$$
est bien définie et est continue sur $\mathbb{R}$. En effet, la fonction $f : \mathbb{R} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,t) = \frac{\ln(1+|x-t|)}{1+t^2},$$
est continue et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction f_x est continue sur $[0,1]$ et donc elle est intégrable. Vérifions maintenant l'hypothèse de domination. Soit $K \subset \mathbb{R}$ un compact. Il existe alors $a > 0$ tel que $K \subset [-a,a]$. On a alors
$$\forall (x,t) \in K \times [0,1], \quad |f(x,t)| \leq \phi_K(t)$$
avec $\phi_K(t) = \frac{\ln(1+a+|t|)}{1+t^2}$. Cette fonction est continue sur $[0,1]$ et donc intégrable. Les hypothèses du théorème 11 étant vérifiées, on déduit que F est continue sur $\mathbb{R}$.
2. **On considère la fonction F définie par**
$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+t^4}dt.$$
Nous allons montrer que F est définie et continue sur $]0,+\infty[$. On définit $f :]0,+\infty[\times[0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ par
$$f(x,t) = \frac{1}{x^2+t^4}.$$
Cette fonction est continue sur $]0,+\infty[\times[0,+\infty[$. Nous allons montrer qu'elle vérifie l'hypothèse de domination. En effet, si K est un compact de $]0,+\infty[$, il existe $b > a > 0$ tel que $K \subset [a,b]$. On considère la fonction $\phi_K : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$\phi_K(t) = \frac{1}{a^2+t^4}.$$
Il est claire que ϕ_K est continue et positive. D'un autre côté,
$$\phi_K(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{t^4}$$
et donc, d'après le théorème 3 et la relation (1.3), $\displaystyle\int_0^{+\infty} \phi_K dt$ est convergente. Le théorème 2 permet d'affirmer que ϕ_K est intégrable. Finalement, pour tout $(x,t) \in K \times [0,+\infty[$,
$$|f(x,t)| \leq \phi_K(t).$$

De cette inégalité et de la proposition 3, on déduit que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f_x \in \mathcal{L}^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$. Les hypothèses du théorème 11 étant vérifiées, on déduit que F est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$.

2.3.2 Dérivation sous le signe intégrale

Théorème 12 (**Dérivation sous le signe intégrale**) *Soit $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : J \times I \longrightarrow \mathbb{C}$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$ une application telle que la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie sur $J \times I$. On suppose que :*

1. *pour tout $t \in I$, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}(., t) : J \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur J,*
2. *pour tout $x \in J$, les fonctions $f_x : I \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto f(x, t)$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x, .) : I \longrightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ appartiennent à $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{C})$,*
3. **hypothèse de domination locale :** *pour tout segment $K \subset J$, il existe une fonction $\phi_K \in \mathcal{L}^1(I, \mathbb{R}^+)$ telle que,*

$$\forall (x, t) \in K \times I, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \phi_K(t).$$

Alors la fonction $F : J \longrightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto \int_I f(x, t)dt$ est de classe C^1 sur J et on a la formule de Leibniz

$$\forall x \in J, \quad F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt.$$

Exemples -

1. **On considère la fonction F définie par**

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + t^4} dt.$$

En utilisant le théorème 12, Nous allons montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. On définit $f :]0, +\infty[\times [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x, t) = \frac{1}{x^2 + t^4}.$$

Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\frac{2x}{(x^2 + t^4)^2}.$$

Pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}(., t)$ est continue sur $]0, +\infty[$. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, les fonctions f_x et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, .)$ sont continues sur $[0, +\infty[$ et

$$|f_x| \sim_{+\infty} \frac{1}{t^4} \quad \textbf{et} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, .) \right| \sim_{+\infty} \frac{2x}{t^8}.$$

Les intégrales de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^4}$ **et** $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^8}$ **étant convergentes, en utilisant les théorème 3 et 2 on déduit que les fonctions** f_x **et** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,.)$ **sont intégrables sur** $[0,+\infty[$**.**
Nous allons maintenant montrer que la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ **vérifie l'hypothèse de domination locale. En effet, si** K **est un compact de** $]0,+\infty[$**, il existe** $b > a > 0$ **tel que** $K \subset [a,b]$**. On considère la fonction** $\psi_K : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ **définie par**

$$\psi_K(t) = \frac{2b}{(a^2+t^4)^2}.$$

Il est claire que ψ_K **est continue et positive. D'un autre côté,**

$$\psi_K(t) \sim_{+\infty} \frac{2b}{t^8}$$

et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_K dt$ **est convergente et, en vertu du théorème 2,** ψ_K **est intégrable. Finalement, pour tout** $(x,t) \in K \times [0,+\infty[$**,**

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq \psi_K(t).$$

Les conditions du théorème 12 étant vérifiées, on déduit que F **est de classe** C^1 **sur** $]0,+\infty[$ **et pour tout** $x \in]0,+\infty[$**, la formule de Leibniz donne**

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+t^4)^2} dt.$$

2. **Nous utiliser les théorèmes 11 et 12 pour calculer l'intégrale dépendant d'un paramètre** $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(x+\cos t)dt$ **avec** $x \in]1,+\infty[$**. Vérifions d'abord que les hypothèses du théorème 12 sont vérifiées. On définit**

$$f :]1,+\infty[\times [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$$

par $f(x,t) = \ln(x+\cos t)$**. On a**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{x+\cos t}.$$

Pour tout $t \in [0,\pi]$**, la fonction** $\frac{\partial f}{\partial x}(.,t)$ **est continue sur** $]1,+\infty[$**.**
Pour tout $x \in]0,+\infty[$**, les fonctions** f_x **et** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,.)$ **sont continues sur** $[0,\pi]$ **et donc intégrables.**
Soit $K \subset]1,+\infty[$ **un compact. Il existe alors** $1 < a < b$ **tel que** $K \subset [a,b]$ **et donc**

$$\forall (x,t) \in K \times [0,1], \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq \phi_K(t)$$

avec $\phi_K(t) = \frac{1}{a+\cos t}$. Cette fonction est continue sur $[0,\pi]$ et donc intégrable. Les hypothèses du théorème 12 étant vérifiées et donc l'application $F :]1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_0^\pi \ln(x+\cos t)dt$$

est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ et, pour tout $x \in]1,+\infty[$, la formule de Leibniz donne

$$F'(x) = \int_0^\pi \frac{dt}{x+\cos t}.$$

Calculons cette intégrale. Le changement de variable $u = \tan\frac{t}{2}$ donne

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(x+1)+(x-1)u^2} = \frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, x \in]1,+\infty[,\quad F(x) = \pi\ln(x+\sqrt{x^2-1}) + c. \qquad (*)$$

Pour conclure nous allons calculer la constante c. Pour cela, remarquons d'abord que

$$\forall\, x \in]1,+\infty[,\quad F(x) = \pi\ln x + \int_0^\pi \ln\left(1+\frac{1}{x}\cos t\right)dt,$$

et considérons l'application

$$G : [0,1[\times[0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R},\quad (y,t)\mapsto \ln(1+y\cos t).$$

Pour tout $t\in[0,\pi]$, la fonction G_t est continue sur $[0,1[$. Pour tout $y\in[0,1[$, la fonction G_y est continue sur $[0,\pi]$ et donc intégrable. D'un autre côté, pour tout compact $K\subset[0,a]\subset[0,1[$, on a

$$\forall (y,t)\in K\times[0,\pi],\qquad |G(y,t)| \le \ln(1+a|\cos t|).$$

La fonction, $t\mapsto \ln(1+a|\cos t|)$ est continue sur $[0,\pi]$ et donc intégrable. En utilisant le théorème 11 on déduit que l'application $g : [0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $y\in]0,1[$, par

$$g(y) = \int_0^\pi G(y,t)dt$$

est continue. En particulier,

$$\lim_{y\longrightarrow 0^+} g(y) = g(0) = 0.$$

Il en résulte que

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} F(x)-\pi\ln x=0.$$

Or, d'après $(*)$**, on a aussi**

$$\lim_{x\to+\infty} F(x)-\pi\ln x=c+\pi\ln 2.$$

et on déduit que $c=-\pi\ln 2$**, et finalement, pour tout** $x\in]1,+\infty[$**,**

$$\int_0^\pi \ln(x+\cos t)dt=\pi\ln\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}.$$

3. On considère la fonction $G:]0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ **définie par**

$$G(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}e^{-xt}dt.$$

Nous allons montrer que G **est définie et de classe** C^1 **sur** $]0,+\infty[$**. Posons** $f(x,t)=\dfrac{\sin t}{t}e^{-xt}$**. pour** $(x,t)\in]0,+\infty[\times]0,+\infty[$**. On a**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=-\sin te^{-xt}.$$

Pour tout $t\in]0,+\infty[$**, la fonction** $\frac{\partial f}{\partial x}(.,t)$ **est continue sur** $]0,+\infty[$**. Pour tout** $x\in]0,+\infty[$**, les fonctions** f_x **et** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,.)$ **sont continues sur** $]0,+\infty[$ **et se prolongent par continuité en 0 donc elles sont intégrable au voisinage de 0. D'un autre côté, pour** $x>0$**, on a**

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} t^2|f_x(t)|=0.$$

D'après le corollaire 2, l'intégrale $\int_0^{+\infty}|f_x(t)|dt$ **est convergente et le théorème 2 permet de conclure que** f_x **est intégrable sur** $[0,+\infty[$**. D'un autre côté, soit** $K\subset[a,b]$ **un compact de** $]0,+\infty[$ **avec** $0<a<b$**. On a, pour tout** $(x,t)\in K\times[0,+\infty[$**,**

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\le e^{-at}.$$

Posons $\psi_K(t)=e^{-at}$ **pour tout** $t\in[0,+\infty[$**. La fonction** ψ_K **est continue et positive sur** $[0,+\infty[$ **et**

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} t^2\psi_K(t)=0.$$

Donc, d'après le corollaire 2, $\int_0^{+\infty}\psi_K(t)dt$ **est convergente et le théorème 2 permet de conclure que** ψ_K **est intégrable sur** $[0,+\infty[$**. L'hypothèse de domination entraîne, en vertu de la proposition 3, que**

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,.)$ **est intégrable. Donc, d'après le théorème 12,** G **est de classe** C^1 **et pour tout** $x \in]0,+\infty[$**, la formule de Leibniz donne**

$$G'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin t dt.$$

En effectuant une double intégration par parties, on obtient

$$\int e^{-xt} \sin t dt = -\frac{e^{-xt}}{1+x^2}\left(\cos t + x \sin t\right).$$

Il en résulte que

$$G'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Il existe donc une constante c **telle que, pour tout** $x \in]0,+\infty[$,

$$G(x) = -\arctan x + c.$$

Calculons la constante c**. Remarquons que pour tout** $(x,t) \in]0,+\infty[\times[0,+\infty[$,

$$|g(t)e^{-xt}| \leq e^{-xt}$$

et donc

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt\right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}.$$

Il en résulte que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} G(x) = 0$ **et donc** $c = \frac{\pi}{2}$**. Finalement, pour tout** $x \in]0,+\infty[$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt = -\arctan x + \frac{\pi}{2}.$$

2.4 Exercices corrigés

Exercice 31 *Calculer les limites suivantes :*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^1 t^n\ln(1+t^2)dt,\ \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^{+\infty}\sin^n(t)e^{-t}dt,$$
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{t^n+e^t}dt,\ \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^{n}\left(\cos\left(\frac{x}{n}\right)\right)^{n^2}dt.$$

Solution -

Nous allons utiliser le théorème de convergence dominée (*cf.* Théorème 9).

- On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in N^*}$ définie sur $[0,1]$ par
$$f_n(t)=t^n\ln(1+t^2).$$
Pour tout $n\in N^*$, la fonction f_n est continue sur $[0,1]$ et donc elle est intégrable sur $[0,1]$. D'un autre côté, la suite $(f_n)_{n\in N^*}$ converge simplement vers la fonction f nulle sur $[0,1[$ et $f(1)=\ln 2$ qui est clairement continue par morceaux. Vérifions maintenant l'hypothèse de domination. En effet,
$$\forall n\in N^*,\forall t\in[0,1],\quad |f_n(t)|\le\phi(t)$$
avec $\phi(t)=\ln(1+t^2)$ pour tout $t\in[0,1]$. La fonction ϕ est continue sur $[0,1]$ et donc intégrable sur $[0,1]$. Les hypothèses du théorème 9 étant vérifiées, on peut affirmer que
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^1 t^n\ln(1+t^2)dt=\int_0^1 f(t)dt=0.$$
- On considère la suite de fonctions $(g_n)_{n\in N^*}$ définie sur $[0,+\infty[$ par
$$g_n(t)=\sin^n(t)e^{-t}.$$
Pour tout $n\in N^*$, la fonction g_n est continue sur $[0,+\infty[$. D'un autre côté, la suite $(g_n)_{n\in N^*}$ converge simplement vers la fonction g définie par
$$g(t)=\left\{\begin{array}{lll}0 & \text{si} & t\in[0,+\infty[\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{N}\},\\ e^{-t} & \text{si} & t\in\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{N}\}.\end{array}\right.$$
Cette fonction est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$. En plus, g coïncide avec la fonction nulle sur $[0,+\infty[\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{N}\}$ et donc, en vertu

de la proposition 2, g est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $\int_0^{+\infty} g(t)dt = 0$. Vérifions maintenant l'hypothèse de domination. En effet,

$$\forall n \in N^*, \forall t \in [0,+\infty[, \quad |g_n(t)| \leq \phi(t)$$

avec $\phi(t) = e^{-t}$ pour tout $t \in [0,+\infty[$. La fonction ϕ est continue sur $[0,+\infty[$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ est clairement convergente. Donc, d'après le théorème 2, elle est intégrable sur $[0,+\infty[$. Grâce à la proposition 3, on déduit aussi que, pour tout $n \in N$, g_n est intégrable sur $[0,+\infty[$.
Les hypothèses du théorème 9 étant vérifiées, on peut affirmer que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \sin^n(t)e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} g(t)dt = 0.$$

En effet, g coïncide avec la fonction nulle sur $[0,+\infty[\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{N}\}$ et donc, en vertu de la proposition 2, g est intégrable sur $[0,+\infty[$ et $\int_0^{+\infty} g(t)dt = 0$.

- On considère la suite de fonctions $(h_n)_{n\in N^*}$ définie sur $[0,+\infty[$ par

$$h_n(t) = \frac{1}{t^n + e^t}.$$

Pour tout $n \in N^*$, la fonction h_n est continue sur $[0,+\infty[$. D'un autre côté, la suite $(h_n)_{n\in N^*}$ converge simplement vers la fonction h définie par

$$h(t) = \begin{cases} e^{-t} & \text{si} \quad t \in [0,1[, \\ 0 & \text{si} \quad t > 1, \\ \frac{1}{1+e} & \text{si} \quad t = 1. \end{cases}$$

Cette fonction est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$. Vérifions maintenant l'hypothèse de domination. En effet,

$$\forall n \in N^*, \forall t \in [0,+\infty[, \quad |h_n(t)| \leq \phi(t)$$

avec $\phi(t) = e^{-t}$ pour tout $t \in [0,+\infty[$. La fonction ϕ est continue sur $[0,+\infty[$ et $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ est clairement convergente. Donc, d'après le théorème 2, elle est intégrable sur $[0,+\infty[$. Grâce à la proposition 3, on déduit aussi que, pour tout $n \in N$, h_n est intégrable sur $[0,+\infty[$.
Les hypothèses du théorème 9 étant vérifiées, on peut affirmer que h est intégrable et que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^n + e^t}dt = \int_0^{+\infty} h(t)dt = 1 - e^{-1}.$$

- On considère la suite de fonctions $(k_n)_{n\in N^*}$ définie sur $[0,+\infty[$ par

$$k_n(t)=\left(\cos\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{n^2}1_{[0,n]}(t).$$

Pour tout $n\in N^*$, la fonction k_n est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$. Soit $t\geq 0$, il existe donc $n_0\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n\geq n_0$, $t\in[0,n]$ et donc $1_{[0,n]}(t)=1$. On a aussi

$$\left(\cos\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{n^2}=e^{n^2\ln\left(\cos\left(\frac{t}{n}\right)\right)}\sim_{n\longrightarrow+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Ainsi, la suite $(k_n)_{n\in N^*}$ converge simplement vers la fonction k définie par $k(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}$, pour tout $t\in[0,+\infty[$. Cette fonction est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$. Vérifions maintenant l'hypothèse de domination. On a d'abord,

$$\forall t\in[0,+\infty[,\quad \ln(1+t)\leq t. \qquad (*)$$

D'un autre côté, en étudiant les variation de la fonction $\psi(t)=\cos(t)-1+\frac{t^2}{4}$ sur $[0,1]$, on déduit que

$$\forall t\in[0,1],\quad \cos(t)\leq 1-\frac{t^2}{4}. \qquad (**)$$

De $(*)$ et $(**)$, on déduit alors que

$$\forall t\in[0,n],\quad |k_n(t)|\leq e^{-\frac{t^2}{4}}.$$

Cette inégalité est aussi vraie pour $t\geq n$. On déduit alors que

$$\forall n\in N^*,\forall t\in[0,+\infty[,\quad |k_n(t)|\leq\phi(t)$$

avec $\phi(t)=e^{-\frac{t^2}{4}}$ pour tout $t\in[0,+\infty[$. La fonction ϕ est continue sur $[0,+\infty[$ et

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{4}}=0$$

et donc en vertu du corollaire et du théorème 2, on déduit que ϕ est intégrable sur $[0,+\infty[$. Grâce à la proposition 3, on déduit aussi que, pour tout $n\in N$, k_n est intégrable sur $[0,+\infty[$.
Les hypothèses du théorème 9 étant vérifiées, on peut affirmer que k est intégrable sur $[0,+\infty[$ et

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^n\left(\cos\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{n^2}dt=\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Or, $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (voir Exercice 36 ou Exercice 41), on déduit alors que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^n \left(\cos\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{n^2})dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Exercice 32 *Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^1 f(t^n)dt = f(0)$$

et calculer $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^1 nf(t)e^{-nt}dt.$

Solution - Nous allons utiliser le théorème de convergence dominée (*cf.* Théorème 9).

1. On considère la suite de fonctions $(g_n)_{n\in N^*}$ définie sur $[0,1]$ par

$$g_n(t) = f(t^n).$$

Pour tout $n \in N^*$, la fonction g_n est continue sur $[0,1]$ et donc intégrable. Pour tout $t \in [0,1[$, la suite $(t^n)_{n\in N}$ tend vers 0 et puisque f est continue en 0, on déduit que la suite $(g_n(t))_{n\in N}$ converge vers $f(0)$. Ainsi, la suite $(g_n)_{n\in N^*}$ converge simplement vers la fonction g définie par

$$g(t) = \begin{cases} f(0) & \text{si} \quad t \in [0,1[, \\ f(1) & \text{si} \quad t = 1. \end{cases}$$

Cette fonction est continue par morceaux sur $[0,1]$ et se prolonge par continuité en 1 et donc elle est intégrable sur $[0,1]$. Vérifions maintenant l'hypothèse de domination. La fonction f étant continue sur $[0,1]$ qui est compact donc elle est bornée, il existe donc $M > 0$ tel que, pour tout $x \in [0,1]$, $|f(x)| \leq M$. On déduit alors que

$$\forall n \in N^*, \forall t \in [0,1], \quad |g_n(t)| \leq \phi(t)$$

avec $\phi(t) = M$ pour tout $t \in [0,1]$. La fonction ϕ est continue sur $[0,1]$ et donc intégrable. Les hypothèses du théorème 9 étant vérifiées, on peut affirmer que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^1 f(t^n)dt = \int_0^1 g(t)dt = f(0).$$

2. En faisant le changement de variable $u = nt$, on obtient
$$\int_0^1 nf(t)e^{-nt}dt = \int_0^n f\left(\frac{t}{n}\right)e^{-t}dt.$$
On considère la suite de fonctions $(h_n)_{n\in N^*}$ définie sur $[0, +\infty[$ par
$$h_n(t) = f\left(\frac{t}{n}\right)e^{-t}1_{[0,n]}(t).$$
Pour tout $n \in N^*$, la fonction h_n est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$. Soit $t \geq 0$, il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $t \in [0, n]$ et donc $1_{[0,n]}(t) = 1$. La suite $\left(\frac{t}{n}\right)_{n\in N^*}$ converge vers 0 et donc puisque f est continue en 0, on déduit que la suite $(h_n)_{n\in N^*}$ converge simplement vers la fonction h définie par $h(t) = f(0)e^{-t}$, pour tout $t \in [0, +\infty[$. Cette fonction est continue sur $[0, +\infty[$. Vérifions maintenant l'hypothèse de domination. La fonction f étant continue sur $[0, 1]$ qui est compact donc elle est bornée, il existe donc $M > 0$ tel que, pour tout $x \in [0, 1]$, $|f(x)| \leq M$. On déduit alors que
$$\forall n \in N^*, \forall t \in [0, +\infty[, \quad |h_n(t)| \leq \phi(t)$$
avec $\phi(t) = Me^{-t}$. Cette fonction est intégrable sur $[0, +\infty[$. Grâce à la proposition 3, on déduit aussi que, pour tout $n \in N$, h_n est intégrable sur $[0, +\infty[$.
Les hypothèses du théorème 9 étant vérifiées, on peut affirmer que
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^1 nf(t)e^{-nt}dt = f(0)\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = f(0).$$

Exercice 33 *Montrer que les fonctions suivantes sont intégrables et déterminer* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_I f_n(t)dt$ *:*

1. $I = [0, 1]$ *et* $f_n(t) = \dfrac{nt\sin(t)}{1 + (nt)^\alpha}$, $1 < \alpha$.
2. $I = [1, +\infty[$ *et* $f_n(t) = \dfrac{n^2 t\exp(-n^2t^2)}{1 + t^2}$.

Solution -

Nous allons utiliser le théorème de convergence dominée (*cf.* Théorème 9).

1. Pour tout $n \in N$, la fonction f_n est continue sur $[0, 1]$ et donc intégrable. On a, pour tout $t \in]0, 1]$,

$$f_n(t) = \frac{\sin(t)}{\frac{1}{nt} + (nt)^{\alpha-1}},$$

et puisque $\alpha > 1$, on déduit que la suite $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. On a aussi $f_n(0) = 0$. Il en résulte que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle.
D'un autre côté, en étudiant la fonction $\psi(t) = \frac{t}{1+t^\alpha}$ sur $[0, +\infty[$, on déduit que

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad \psi(t) \leq \psi\left(\frac{1}{(\alpha-1)^{\frac{1}{\alpha}}}\right) = a.$$

On déduit alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1], \quad |f_n(t)| \leq \phi(t),$$

avec $\phi(t) = a \sin t$. Cette fonction est continue sur $[0, 1]$ et donc intégrable. On peut maintenant appliquer le théorème de convergence dominée (*cf.* Théorème 9) et obtenir que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = 0.$$

2. Pour tout $n \in N$, la fonction f_n est continue et positive sur $[1, +\infty[$ et

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} t^2 f_n(t) = 0.$$

D'après le corollaire 2, f_n est à intégrale convergente sur $[0, +\infty[$ et donc, d'après le théorème 2, elle est intégrable.
D'un autre côté, pour tout $t \in [1, +\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(t)| \leq n \exp(-n^2 t^2),$$

ce qui montre que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, +\infty[$.
Maintenant, en étudiant les variations de la fonction $\psi(x) = xe^{-x}$ sur $[0, +\infty[$, on peut déduire que

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad xe^{-x} \leq e^{-1}.$$

De cette inégalité, on déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [1, +\infty[, \quad |f_n(t)| \leq \phi(t),$$

avec $\phi(t) = \frac{e^{-1}}{t(1+t^2)}$. Cette fonction est continue et positive sur $[0, +\infty[$ et on a

$$\phi(t) \sim_{+\infty} \frac{e^{-1}}{t^3}.$$

L'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3}$ étant convergente (voir (1.3)), d'après le théorème 3, ϕ est à intégrale convergente et donc, d'après le théorème 2, elle est intégrable. On peut maintenant appliquer le théorème de convergence dominée (*cf.* Théorème 9) et obtenir que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = 0.$$

Exercice 34 *Étudier la convergence et calculer la somme de la série*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_{2^{\frac{1}{3}}}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}.$$

Solution -

Nous allons appliquer le théorème 10. On considère la série de fonctions $\sum f_n$ sur $[2^{\frac{1}{3}}, +\infty[$ définie par

$$f_n(t) = \frac{(-1)^n}{(1+t^3)^n}.$$

Cette série de fonction est simplement convergente et on a

$$\begin{aligned} S(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(t) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+t^3)^n} \\ &= -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+t^3)^n} \\ &= -1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+t^3}} \\ &= -\frac{1}{2+t^3}. \end{aligned}$$

La fonction S est continue sur $[2^{\frac{1}{3}}, +\infty[$. Nous allons maintenant montrer que la série $\sum_{n\geq 1}\int_{2^{\frac{1}{3}}}^{+\infty}|f_n(t)|dt$ est convergente en utilisant le théorème de convergence dominée. On a, pour tout $t \in [2^{\frac{1}{3}}, +\infty[$,

$$\begin{aligned} h_n(x) = &= \sum_{k=1}^{n}|f_n(t)| = \frac{1}{1+t^3} \times \frac{1-(1+t^3)^{-n}}{1-(1+t^3)^{-1}} \\ &= \frac{1-(1+t^3)^{-n}}{t^3}. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in N^*$, la fonction h_n est continue et positive sur $[2^{\frac{1}{3}}, +\infty[$. D'un autre côté, la suite $(h_n)_{n\in N^*}$ converge simplement sur $[2^{\frac{1}{3}}, +\infty[$ vers la fonction $h(t) = \frac{1}{t^3}$ qui est continue. Vérifions maintenant l'hypothèse de domination. En effet,

$$\forall n \in N^*, \forall t \in [2^{\frac{1}{3}}, +\infty[, \quad |h_n(t)| \leq h(t).$$

La fonction h est intégrable sur $[2^{\frac{1}{3}}, +\infty[$ (*cf.* (1.3)). Les hypothèses du théorème 9 étant vérifiées, on peut affirmer que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_{2^{\frac{1}{3}}}^{+\infty} h_n(t)dt = \int_{2^{\frac{1}{3}}}^{+\infty}\frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2^{\frac{5}{3}}}.$$

En conclusion, la série $\sum_{n\geq 1}\int_{2^{\frac{1}{3}}}^{+\infty}|f_n(t)|dt$ est convergente. Les hypothèse du théorème 10 étant vérifiées, on déduit que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\int_{2^{\frac{1}{3}}}^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^3)^n} = \int_{2^{\frac{1}{3}}}^{+\infty} S(t)dt.$$

Calculons $-\int_{2^{\frac{1}{3}}}^{+\infty} S(t)dt$. On a

$$\begin{aligned} -\int_{2^{\frac{1}{3}}}^{+\infty} S(t)dt &= \int_{2^{\frac{1}{3}}}^{+\infty}\frac{dt}{2+t^3} \\ &= \frac{1}{2}\int_{2^{\frac{1}{3}}}^{+\infty}\frac{dt}{1+\left(\frac{t}{2^{\frac{1}{3}}}\right)^3} \\ &\overset{t=2^{\frac{1}{3}}u}{=} \frac{2^{\frac{1}{3}}}{2}\int_{1}^{+\infty}\frac{du}{1+u^3}. \end{aligned}$$

Or, en utilisant le calcul de l'exercice 45, on déduit que

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{du}{1+u^3} = \frac{\sqrt{3}\pi}{9} - \frac{1}{3}\ln 2.$$

Finalement

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\int_1^{+\infty}\frac{dt}{(1+t^3)^n}=-2^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{9}-\frac{1}{3}\ln 2\right).$$

Exercice 35 *Pour tout $n\in N^*$, on définit $f_n:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ par*

$$f_n(x)=n(1-x)^n\sin^2(nx)1_{[0,1]}(x).$$

1. *Déterminer la limite simple f de $(f_n)_{n\in N^*}$.*
2. *Justifier que, pour tout $x\geq 0$, $1-x\leq e^{-x}$..*
3. *En déduire que la suite $\left(\int_{\mathbb{R}}f_n(t)dt\right)_{n\in N^*}$ converge alors que*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_{\mathbb{R}}f_n(t)dt\neq\int_{\mathbb{R}}f(t)dt.$$

Solution -

1. Soit $x\in\mathbb{R}$. Si $x\in]-\infty,0]\cup[1,+\infty[$ alors $f_n(x)=0$ et donc la suite $(f_n(x))_{n\in N^*}$ converge vers 0. Si $x\in]0,1[$ alors

$$|f_n(x)\leq n(1-x)^n\quad\text{et}\quad\lim_{n\longrightarrow+\infty}n(1-x)^n=0.$$

   En conclusion, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in N^*}$ converge simplement vers la fonction f nulle partout sur $\mathbb{R}$.
2. On considère la fonction $\psi(x)=e^{-x}+x-1$. Cette fonction est dérivable sur $[0,+\infty[$ et, pour tout $x\in[0,+\infty[$, $\psi'(x)=1-e^{-x}\geq 0$. Ainsi ψ est croissante sur $[0,+\infty[$ et donc, pour tout $x\geq 0$, $\psi(x)\geq\psi(0)=0$, ceci établit l'inégalité souhaitée.
3. En effectuant le changement de variable $u=nx$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}f_n(x)dx &= \int_0^1 n(1-x)^n\sin^2(nx)dx\\ &= \int_0^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\sin^2(x)dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^+}g_n(x)dx,\end{aligned}$$

avec $g_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \sin^2(x) 1_{[0,n]}(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}^+$, il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $x \in [0, n]$ et donc

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} g_n(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \sin^2(x) = e^{-x} \sin^2(x).$$

Donc la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction g définie par $g(x) = e^{-x} \sin^2(x)$. Cette fonction est continue et positive sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} x^2 g(x) = 0.$$

D'après le corollaire 2, g est à intégrale convergente sur $[0, +\infty[$ et donc, d'après le théorème 2, elle est intégrable.
D'un autre côté, d'après la question précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \geq 0, \quad |g_n(x)| \leq g(x).$$

Donc l'hypothèse de domination est vérifiée et on peut alors appliquer le théorème de convergence dominée (*cf.* Théorème 9). Il en résulte alors que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^2(x) dx.$$

Or la fonction g est continue, positive et non nulle et donc, d'après la proposition 4, $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^2(x) dx > 0$. Puisque $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(t) dt = 0$, on déduit alors que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx \neq \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(t) dt.$$

Exercice 36 *Pour tout $n \in N^*$, on définit $f_n, g_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ par*

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n 1_{[0, \sqrt{n}]}(x) \quad \text{et} \quad g_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} f_n(x).$$

1. *Montrer que f_n et g_n sont intégrables sur $\mathbb{R}$. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t) dt$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} g_n(t) dt$.*
2. *Montrer que $I_n J_n = \frac{n}{n+1} \frac{\pi}{4}$.*

3. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Solution -

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions f_n et g_n sont continues par morceaux et positives sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $x \geq n$, on a
$$\int_0^x f_n(t)dt = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \quad \text{et} \quad \int_0^x g_n(t)dt = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} dt.$$
Donc f_n et g_n sont à intégrale convergente sur $\mathbb{R}^+$ et donc sont intégrables en vertu du théorème 2.
2. En effectuant le changement de variable $\cos t = \frac{x}{\sqrt{n}}$, on obtient
$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \\ &= -\sqrt{n} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1 - \cos^2 t)^n \sin t dt \\ &= \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} dt, \\ J_n &= \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2(n+1)} dt. \end{aligned}$$
En reconnaît ici les intégrales de Wallis $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$. On a alors
$$I_n = \sqrt{n} W_{2n+1} \quad \text{et} \quad I_n = \sqrt{n} W_{2n+2}.$$
Rappelons les formules bien connues :
$$W_{2n} = \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2^n n!} \frac{\pi}{2}, \quad (n \geq 1), \tag{2.1}$$
$$W_{2n+1} = \frac{2^n n!}{1 \times 3 \times \ldots \times (2n+1)}, \quad (n \geq 0). \tag{2.2}$$
En utilisant ces deux formules on déduit aisément que
$$I_n J_n = \frac{n}{n+1} \frac{\pi}{4}.$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}^+$, il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $x \in [0, \sqrt{n}]$ et donc
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = e^{-x^2}.$$
De même
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} g_n(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = e^{-x^2}.$$
Donc les suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction f définie par $f(x) = e^{-x^2}$. Cette fonction est continue et positive sur $\mathbb{R}^+$ et
$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} x^2 f(x) = 0.$$
D'après le corollaire 2, f est à intégrale convergente sur $[0, +\infty[$ et donc, d'après le théorème 2, elle est intégrable.
D'un autre côté, en utilisant la deuxième question de l'exercice 35, on obtient
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \geq 0, \quad |f_n(x)| \leq f(x) \quad \text{et} \quad |g_n(x)| \leq f(x).$$
Donc l'hypothèse de domination est vérifiée et on peut alors appliquer le théorème de convergence dominée (*cf.* Théorème 9). Il en résulte alors que
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} J_n = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$
En passant à la limite dans la relation $I_n J_n = \frac{n}{n+1}\frac{\pi}{4}$, on déduit la valeur de l'intégrale de Gauss :
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 37 *Pour tout $n \geq 2$, on définit $f_n :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ par*
$$f_n(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{n}} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}.$$

1. *Montrer que, pour tout $n \geq 2$, f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$.*
2. *Montrer que, pour tout $n \geq 2$ et tout $x \geq 1$, $f_n(x) \leq \frac{4}{x^2}$.*

3. Calculer $\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx.$

Solution -

1. La fonction f_n est continue et positive sur $]0,+\infty[$ et on a

$$f_n(x) \sim_0 \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}} \quad \text{et} \quad f_n(x) \sim_{+\infty} \frac{n^n}{x^{\frac{1}{n}+n}}.$$

Puisque $\frac{1}{n} < 1$ et $\frac{1}{n}+n > 1$, les intégrales de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}}dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{n^n}{x^{\frac{1}{n}+n}}dx$ sont convergentes (*cf.* (1.2) et (1.3)) et donc $\int_0^1 f_n(t)dt$ et $\int_1^{+\infty} f_n(t)dt$ sont convergente. Ainsi $\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$ est convergente et, en vertu du théorème 2, f_n est intégrable sur $]0,+\infty[$.

2. On commence par étudier la fonction

$$\psi(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n - \left(1+\frac{x}{2}\right)^2$$

sur $[0,+\infty[$. Cette fonction est de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$ et, pour tout $x \in [0,+\infty[$, on a

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} - \left(1+\frac{x}{2}\right), \\ \psi''(x) &= \frac{n-1}{n}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-2} - \frac{1}{2}, \\ \psi^3(x) &= \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-3} > 0. \end{aligned}$$

Donc ψ'' est croissante sur $[0,+\infty[$. Ainsi, pour tout $x \in [0,+\infty[$,

$$\psi''(x) \geq \psi''(0) = \frac{n-1}{n} - \frac{1}{2} = \frac{n-2}{2n} \geq 0.$$

Il en résulte alors que, pour tout $x \in [0,+\infty[$,

$$\psi'(x) \geq \psi'(0) = 0.$$

Ainsi ψ est aussi croissante sur $[0,+\infty[$ et, puisque $\psi(0) = 0$, on obtient

$$\forall x \geq 0, \quad \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq \left(1+\frac{x}{2}\right)^2 \geq \frac{x^2}{4}.$$

D'un autre côté,

$$\forall x \geq 1, \quad \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}} \leq 1.$$

En combinant ce qui précède, on déduit que

$$\forall n \geq 2, \forall x \geq 1, \quad f_n(x) \leq \frac{4}{x^2}.$$

3. Nous allons utiliser le théorème de convergence dominée (*cf.* Théorème 9).
Nous avons vu que la suite de fonction $(f_n)_{n\geq 2}$ est une suite de fonctions intégrables sur $]0, +\infty[$. Cette suite converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $f(x) = e^{-x}$. Cette fonction est continue sur $]0, +\infty[$.
D'un autre côté,

$$\forall n \geq 2, \forall x \in]0, 1], \quad |f_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{x}},$$

et d'après la question précédente,

$$\forall n \geq 2, \forall x \in [0, +\infty[, \quad |f_n(x)| \leq \frac{4}{x^2}.$$

On obtient alors que

$$\forall n \geq 2, \forall x \in]0, +\infty[, \quad |f_n(x)| \leq \phi(x),$$

avec $\phi :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si} \quad x \in]0, 1], \\ \frac{4}{x^2} & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

La fonction ϕ est positive et continue par morceaux sur $]0, +\infty[$. Puisque les intégrales de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{4dx}{x^2}$ sont convergentes (voir (1.2)-(1.3)), ϕ est à intégrale convergente sur $]0, +\infty[$ et donc intégrable, d'après le théorème 2. Les hypothèses du théorème de convergence dominée étant vérifiées, on obtient alors

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1.$$

Exercice 38 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie et intégrable sur $\mathbb{R}$. Calculer*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos^n(\pi x) dx.$$

Solution - Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_n(x) = f(x) \cos^n(\pi x).$$

Puisque la fonction f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \cos^n(\pi x)$ est continue $\mathbb{R}$, la fonction g_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. On a aussi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x) \cos^n(\pi x)| \leq |f(x)|. \tag{$*$}$$

Puisque la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}$, on déduit en vertu de la proposition 3 que la fonction g_n est intégrable. En vertu du théorème 6,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} g_n(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |g_n(x)| dx. \tag{$**$}$$

Maintenant la suite de fonctions $(|g_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}, \\ |f(x)| & \text{si} \quad x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Cette fonction est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et coïncide avec la fonction nulle sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ donc, d'après la proposition 2, g est intégrable et son intégrale est nulle. L'inégalité $(*)$ montre que l'hypothèse de domination est vérifiée et donc, d'après le théorème de convergence dominée (*cf.* Théorème 9),

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x) \cos^n(\pi x)| dx = 0.$$

En utilisant $(**)$, on déduit que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos^n(\pi x) dx = 0.$$

Exercice 39 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie et intégrable sur $\mathbb{R}$. La* **transformée de Fourier** *de f est la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par*

$$\hat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\imath xy} f(x) dx.$$

1. *Montrer que $\hat{f}$ est bien définie et est continue sur $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer que $\hat{f}$ est bornée et que $\sup \hat{f} \leq N_1(f)$.*
3. *Montrer que si la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto xf(x)$ est intégrable alors $\hat{f}$ est dérivable et calculer sa dérivée.*

Solution - Définissons $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ par

$$F(y, x) = e^{-\imath xy} f(x).$$

Nous allons appliquer les théorèmes 11 et 12.

1. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $F_y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $x \longrightarrow F(y, x)$ est continue par morceaux et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|F_y| \leq |f(x)|$. Puisque f est intégrable, on déduit en vertu de la proposition 3 que F_y est intégrable sur $\mathbb{R}$. D'un autre côté, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $F_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $y \longrightarrow F(y, x)$ est clairement continue sur $\mathbb{R}$. En plus, on a
$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad |F(y, x) \leq |f(x)|$$
avec f intégrable. Les hypothèses du théorème de continuité sous le signe intégrale sont vérifiées (voir Théorème 11), on déduit alors que $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. On a
$$\frac{\partial F}{\partial y}(y, x) = -\imath x e^{-\imath xy} f(x).$$
Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a
$$|F(y, x)| \leq |f(x)| \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial F}{\partial y}(y, x) \right| \leq |g(x)|. \qquad (*)$$
Puisque f et g sont intégrables, on déduit en vertu de la proposition 3 que F_y et $\frac{\partial F}{\partial y}(y, .)$ sont intégrables. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto \frac{\partial F}{\partial y}(y, x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. La deuxième inégalité dans $(*)$ et l'intégrablité de la fonction g montrent que l'hypothèse de domination est vérifiée. Les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe intégrale sont vérifiées (voir Théorème 12), on déduit alors que $\hat{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on a
$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}'(y) = -\imath \int_{\mathbb{R}} x e^{-\imath xy} f(x) dx = -\imath \hat{g}(y).$$

Exercice 40 *Soit $F :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{t+x} dt.$$

1. *Montrer que F est définie et continue sur $]0, +\infty[$. Etudier les variations de F.*
2. *Calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} F(x)$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F(x)$.*
3. *Déterminer un équivalent de F en $+\infty$.*

Solution -

1. On considère la fonction $f :]0, +\infty[\times [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,t) = \frac{\cos t}{t+x}.$$

Pour tout $(x,t) \in]0, +\infty[\times [0, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{\cos t}{(t+x)^2}.$$

Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}(., t)$ est continue $]0, +\infty[$. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, les fonctions f_x et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, .)$ sont continues sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et donc intégrables.
Pour tout compact $K \subset [a,b] \subset]0, +\infty[$, on a

$$\forall (x,t) \in K \times [0, \frac{\pi}{2}], \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq \phi_K(t),$$

avec $\phi_K(t) = \frac{1}{(t+a)^2}$. Cette fonction est continue et donc intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. En vertu du théorème 12, la fonction F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a

$$F'(x) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{(t+x)^2} dt.$$

Il est claire que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $F'(x) < 0$ et donc F est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

2. On a, pour tout $(x,t) \in]0,+\infty[\times[0,\frac{\pi}{2}]$,
$$0 \leq \frac{\cos t}{t+x} \leq \frac{1}{x+t},$$
et donc
$$0 \leq F(x) \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{x+t} = \ln\left(\frac{x+\frac{\pi}{2}}{x}\right).$$
On déduit de cette double inégalité que $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} F(x) = 0$.
D'un autre côté, on a
$$F(x) \geq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t dt}{x+t}.$$
Maintenant, pour tout $(x,t) \in]0,+\infty[\times[0,\frac{\pi}{4}]$,
$$\frac{\cos t}{x+t} \geq \frac{\sqrt{2}}{2(x+t)}$$
et donc
$$F(x) \geq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t dt}{x+t} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\frac{x+\frac{\pi}{4}}{x}\right).$$
De cette double inégalité que $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} F(x) = +\infty$.
3. On a, pour tout $(x,t) \in]0,+\infty[\times[0,\frac{\pi}{2}]$,
$$\frac{\cos t}{x+\frac{\pi}{2}} \leq \frac{\cos t}{x+t} \leq \frac{1}{x}\cos t,$$
et donc, pour tout $x \in]0,+\infty[$,
$$\frac{1}{x+\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt \leq F(x) \leq \frac{1}{x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt,$$
soit
$$\frac{1}{x+\frac{\pi}{2}} \leq F(x) \leq \frac{1}{x}.$$
De cette inégalité, on déduit que $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} xF(x) = 1$ et donc
$$F(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}.$$

Exercice 41 *Soit $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$$

1. *Montrer que F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que*

$$F'(x) = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt.$$

2. *Calculer $F(0)$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F(x)$.*
3. *On pose $G(x) = F(x^2)$. Montrer que*

$$G(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

4. *En déduire que*

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Solution -

1. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,t) = \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2}.$$

Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1]$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{-(1+t^2)e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} = -e^{-x(1+t^2)}.$$

Pour tout $t \in [0,1]$, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}(.,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, les fonctions f_x et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,.)$ sont continues sur $[0,1]$ et donc intégrables.

Pour tout compact $K \subset [-a,a] \subset \mathbb{R}$, on a

$$\forall (x,t) \in K \times [0,1], \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq \phi_K(t),$$

avec $\phi_K(t) = e^{a(1+t^2)}$. Cette fonction est continue et donc intégrable sur $[0,1]$. En vertu du théorème 12, la fonction F est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a

$$F'(x) = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt.$$

2. On a
$$F(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan t]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$
D'un autre côté, pour tout $x > 0$ et pour tout $t \in [0,1]$,
$$0 < \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} \leq \frac{e^{-x}}{1+t^2}$$
et donc
$$0 \leq F(x) \leq \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+t^2} dt = \frac{\pi e^{-x}}{4}.$$
De cette double inégalité, on déduit que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F(x) = 0$.

3. On a
$$\begin{aligned} G'(x) &= 2xF'(x^2) \\ &= -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt \\ &= -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-(xt)^2} dt \\ &\overset{u=xt}{=} -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du \\ &= -\left(\left(\int_0^x e^{-u^2} du \right)^2 \right)'. \end{aligned}$$
Ainsi
$$G(x) = -\left(\int_0^x e^{-u^2} du \right)^2 + G(0) = -\left(\int_0^x e^{-u^2} du \right)^2 + \frac{\pi}{4}.$$

4. De la relation précédente, on déduit que
$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \right)^2 = \lim_{x \longrightarrow +\infty} (-G(x) + \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4},$$
car
$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} G(x) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} F(x) = 0.$$
Finalement, on obtient la valeur de l'intégrale de Gauss
$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 42 *Pour $x \in A = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, on définit l'intégrale de Poisson*

$$I(x) = \int_0^\pi \ln(1 - 2x\cos t + x^2)dt.$$

1. *Montrer que I est bien définie sur A et que I est paire.*
2. *Pour tout $x \in A \setminus \{0\}$, calculer $I(\frac{1}{x})$ en fonction de $I(x)$.*
3. *Montrer que I est de classe C^1 sur $[0, 1[$ et calculer $I'(x)$ pour tout $x \in [0, 1[$.*
4. *Déduire de ce qui précède la valeur de $I(x)$ pour tout $x \in A$.*

Solution -

1. Remarquons d'abord que,

$$1 - 2x\cos t + x^2 = (x - \cos t)^2 + \sin^2 t \geq 0$$

et que

$$(x - \cos t)^2 + \sin^2 t = 0$$

si et seulement si $\sin t = 0$, $x = \cos t = \pm 1$. En conclusion, pour tout $(x, t) \in A \times [0, \pi]$,

$$1 - 2x\cos t + x^2 = (x - \cos t)^2 + \sin^2 t > 0.$$

D'un autre côté, pour tout $x \in A$, la fonction

$$t \mapsto \ln\left(1 - 2x\cos t + x^2\right)$$

est continue sur $[0, \pi]$ et donc $I(x)$ est bien définie.
Soit $x \in A$, on a $-x \in A$ et

$$\begin{aligned}
I(-x) &= \int_0^\pi \ln(1 + 2x\cos t + x^2)dt \\
&\overset{t=\pi-u}{=} -\int_\pi^0 \ln(1 + 2x\cos(u + \pi) + x^2)du \\
&= I(x).
\end{aligned}$$

2. Soit $x \in A \setminus \{0\}$, on a

$$\begin{aligned} I\left(\frac{1}{x}\right) &= \int_0^\pi \ln(1 - \frac{2}{x}\cos t + \frac{1}{x^2})dt \\ &= \int_0^\pi \ln\left(\frac{x^2 - 2x\cos t + 1}{x^2}\right) dt \\ &= I(x) - 2\pi \ln|x|. \end{aligned} \tag{2.3}$$

3. On considère la fonction $f : [0, 1[\times[0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, t) = \ln\left(1 - 2x\cos t + x^2\right).$$

Pour tout $(x, t) \in [0, 1[\times[0, \pi]$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{2(x - \cos t)}{1 - 2x\cos t + x^2}.$$

Pour tout $t \in [0, \pi]$, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}(., t)$ est continue sur $[0, 1[$. Pour tout $x \in [0, 1[$, les fonctions f_x et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, .)$ sont continues sur $[0, \pi]$ et donc intégrables.
Soit $K \subset [a, b] \subset [0, 1[$ un compact. Pour tout $(x, t) \in K \times [0, \pi]$, on a

$$1 - 2x\cos t + x^2 \geq (1 - x)^2 \geq (1 - b)^2$$

et donc

$$\forall (x, t) \in K \times [0, \pi], \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \leq \phi_K(t),$$

avec

$$\phi_K(t) = \frac{2(b + |\cos t|)}{(1 - b)^2}.$$

Cette fonction est continue et donc intégrable sur $[0, \pi]$. En vertu du théorème 12, la fonction I est de classe C^1 sur $[0, 1[$ et, pour tout $x \in [0, 1[$, on a

$$F'(x) = \int_0^\pi \frac{2(x - \cos t)}{1 - 2x\cos t + x^2} dt.$$

On a clairement

$$F'(0) = -2\int_0^\pi \cos t dt = 0.$$

On suppose $x \in]0, 1[$ et on effectue le changement de variable $u = \tan(\frac{t}{2})$. On a

$$\cos t = \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \quad \text{et} \quad du = \frac{1}{2}(1 + u^2)dt.$$

$$F'(x) \quad = \quad 4\int_0^{+\infty} \frac{((1+x)u^2+x-1)\,du}{((x+1)^2u^2+(x-1)^2)\,(1+u^2)}.$$

Décomposons en éléments simples la fraction rationnelle

$$Q(u) = \frac{((1+x)u^2+x-1)}{((x+1)^2u^2+(x-1)^2)\,(1+u^2)}.$$

Puisque $Q(-u) = Q(u)$, on a alors

$$Q(u) = \frac{c}{(x+1)^2u^2+(x-1)^2} + \frac{e}{u^2+1}.$$

En prenant $u = 0$, on obtient

$$\frac{c}{(x-1)^2} + e = \frac{1}{x-1}.$$

En multipliant par $1+u^2$ et en prenant $u = i$, on obtient $e = \frac{1}{2x}$ et $c = \frac{x^2-1}{2x}$. On obtient alors pour $x \in]0,1[$

$$F'(x) = \frac{2(x^2-1)}{x}\int_0^{+\infty} \frac{du}{(x+1)^2u^2+(x-1)^2} + \frac{2}{x}\int_0^{+\infty}\frac{du}{u^2+1}.$$

Or, puisque $\frac{x-1}{x+1} < 0$,

$$\lim_{u \longrightarrow +\infty} \arctan\left(\frac{(x+1)u}{x-1}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

et donc

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{du}{(x+1)^2u^2+(x-1)^2} &= \frac{1}{x^2-1}\left[\arctan\left(\frac{(x+1)u}{x-1}\right)\right]_0^{+\infty}\\ &= -\frac{\pi}{2(x^2-1)}\end{aligned}$$

On obtient finalement, pour tout $x \in [0,1[$,

$$F'(x) = 0. \tag{2.4}$$

4. En utilisant (2.4), le fait que I est paire et (2.3), on déduit que

$$I(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in]-1,1[\\ 2\pi \ln|x| & \text{si} \quad |x| > 1. \end{cases}$$

Exercice 43 *1. Pour tout $x \in]-1,+\infty[$, on pose*

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + x\sin^2 t)dt.$$

2. Montrer que F est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$ et

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \qquad F'(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{x+1}(1+\sqrt{x+1})}.$$

3. En déduire que, pour tout $x \in [-1,+\infty[$, $\quad F(x) = \pi \ln \frac{1+\sqrt{x+1}}{2}$.

Solution -

1. Pour tout $x > -1$ et tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$x\sin^2 t \geq -\sin^2 t$$

et donc

$$x\sin^2 t + 1 \geq 1 - \sin^2 t \geq 0.$$

Aussi $x\sin^2 t + 1 = 0$ entraine que $t = \frac{\pi}{2}$ et donc $x = -1$. Par suite, pour tout $x > -1$ et tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$x\sin^2 t + 1 > 0.$$

Ainsi la fonction $f :]-1,+\infty[\times [0, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x,t) = \ln(1 + x\sin^2 t)$$

est bien définie et, pour tout $(x,t) \in]-1,+\infty[\times [0, \frac{\pi}{2}]$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{\sin^2 t}{1 + x\sin^2 t}.$$

Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}(.,t)$ est continue sur $]-1,+\infty[$. Pour tout $x \in]-1,+\infty[$, les fonctions f_x et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,.)$ sont continues sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et donc intégrables.
Soit $K \subset [a,b] \subset]-1,+\infty[$ un compact. On a

$$\forall (x,t) \in K \times [0, \frac{\pi}{2}], \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \phi_K(t),$$

avec

$$\phi_K(t) = \frac{\sin^2 t}{1 + a\sin^2 t}.$$

Cette fonction est continue et donc intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. En vertu du théorème 12, la fonction F est de classe C^1 sur $]-1, +\infty[$ et, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a

$$F'(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 t}{1 + x\sin^2 t} dt.$$

Posons $u = \tan t$. On a

$$du = (1 + u^2)dt \quad \text{et} \quad \sin^2 t = \frac{u^2}{1 + u^2}.$$

Il en résulte que

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{u^2 du}{(1 + (1 + x)u^2)(1 + u^2)}.$$

Une décomposition en éléments simples donne pour $x \neq 0$

$$\frac{u^2}{(1 + (1 + x)u^2)(1 + u^2)} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1 + u^2} - \frac{1}{1 + (1 + x)u^2}\right).$$

Il en résulte que, pour tout $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{x}\left([\arctan(u)]_0^{+\infty} - \left[\frac{1}{\sqrt{x+1}} \arctan(\sqrt{x+1}u)\right]_0^{+\infty}\right) \\ &= \frac{\pi}{2x} - \frac{\pi}{2x\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{\pi(\sqrt{x+1} - 1)}{2x\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1} + 1)}. \end{aligned}$$

Puisque F' est continue en 0, la relation ci-dessus est aussi valable pour $x = 0$ et finalement, pour tout $x \in]-1, +\infty[$,

$$F'(x) = \frac{\pi}{2\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1} + 1)}. \tag{2.5}$$

2. D'après (2.5), on a, pour tout $x \in]-1, +\infty[$,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \frac{\pi}{2\sqrt{t+1}(\sqrt{t+1}+1)}dt + F(0) \\ &= \pi\left[\ln(\sqrt{t+1}+1)\right]_0^x \\ &= \pi \ln\frac{\sqrt{x+1}+1}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 44 *1. Calculer, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $I(x) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{dt}{\cos^2 t + x\sin^2 t}$.*

2. En déduire, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, la valeur de $J(x) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin^2 t}{(\cos^2 t + x\sin^2 t)^2}dt$.

Solution -

1. Pour tout $x > 0$ et tout $t \in [0, \pi]$, $\cos^2 t + x\sin^2 t > 0$ et donc $I(x)$ est bien définie. D'un autre côté, en effectuant le changement de variable $u = t - \frac{\pi}{2}$,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dt}{\cos^2 t + x\sin^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sin^2 u + x\cos^2 u}.$$

On déduit alors que

$$I(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\cos^2 t + x\sin^2 t} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin^2 t + x\cos^2 t}.$$

Maintenant, on pose $u = \tan t$. On a $du = (1+u^2)dt$ et donc

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\cos^2 t + x\sin^2 t} &= \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+xu^2}, \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}}\left[\arctan(\sqrt{x}u)\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{x}}. \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin^2 t + x\cos^2 t} &= \int_0^{+\infty} \frac{du}{x+u^2} \\ &= \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+\frac{u^2}{x}} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$I(x) = \frac{\pi}{\sqrt{x}}. \tag{2.6}$$

2. On considère la fonction $f :]0, +\infty[\times[0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,t) = \frac{1}{\cos^2 t + x \sin^2 t}.$$

Cette fonction est bien définie sur $]0, +\infty[\times[0, \pi]$ et pour tout $(x, t) \in]0, +\infty[\times[0, \pi]$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{-\sin^2 t}{(\cos^2 t + x \sin^2 t)^2}.$$

Pour tout $t \in [0, \pi]$, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}(., t)$ est continue sur $]0, +\infty[$. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, les fonctions f_x et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, .)$ sont continues sur $[0, \pi]$ et donc intégrables.
Soit $K \subset [a, b] \subset]0, +\infty[$ un compact. On a

$$\forall (x,t) \in K \times [0, \pi], \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \phi_K(t),$$

avec

$$\phi_K(t) = \frac{\sin^2 t}{(\cos^2 t + a \sin^2 t)^2}.$$

Cette fonction est continue et donc intégrable sur $[0, \pi]$. En vertu du théorème 12, la fonction I est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et, pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a

$$I'(x) = -J(x).$$

En utilisant (2.6), on déduit que

$$J(x) = \frac{\pi}{2x\sqrt{x}}.$$

Exercice 45 *Soit* $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+t^3} dt$$

1. *Calculer $F(0)$ en réalisant le changement de variable $t = \frac{1}{u}$.*
2. *Montrer que F est continue et dérivable et étudier les variations de F sur $\mathbb{R}$.*
3. *Calculer la limite de F en $+\infty$.*

Solution -

1. On a
$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3} dt.$$
Cette intégrale est convergente en vertu du théorème 3 et la relation (1.3). En effet, la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^3}$ est continue positive sur $[0, +\infty[$ et
$$\frac{1}{1+t^3} \sim_{+\infty} \frac{1}{t^3}.$$
En faisant le changement de variable $t = \frac{1}{u}$, on obtient,
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3} dt \quad = \quad \int_0^{+\infty} \frac{udu}{u^3+1}.$$
Il en résulte alors que
$$2F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3} dt + \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-t+t^2} dt.$$
On écrivant
$$t^2 - t + 1 = (t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2t}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right).$$
On obtient que
$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1-t+t^2} dt &= \left[\frac{2\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{2t}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}. \end{aligned}$$
Finalement,
$$F(0) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.$$

2. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,t) = \frac{e^{-tx^2}}{1+t^3}.$$

Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{-2xte^{-tx^2}}{1+t^3}.$$

Pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}(.,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, la fonction f_x est continue et positive sur $[0, +\infty[$ et on a

$$f_0(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{t^3} \quad \text{et} \quad \lim_{t \longrightarrow +\infty} t^3 f_x(t) = 0 \text{ si } x > 0.$$

En utilisant le théorème 3, le corollaire 2 et le théorème 2, on déduit que f_x est intégrable sur $[0, +\infty[$.
Soit $K \subset [-a, a] \subset \mathbb{R}$ est un compact où $a > 0$. On a, pour tout $(x,t) \in K \times [0, +\infty[$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq \phi_K(t),$$

où

$$\phi_K(t) = 2a \frac{te^{-ta^2}}{1+t^3}.$$

La fonctions ϕ_k est continue et positive sur $[0, +\infty[$ et

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} t^2 \phi_k(t) = 0.$$

Donc, en vertu du corollaire 2, l'intégrales $\int_0^{+\infty} \phi_K(t)dt$ est convergente et donc ϕ_k est intégrable, en vertu du théorème 2. On déduit aussi, en vertu de la proposition 3, que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,.)$ est intégrable, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Les hypothèses du théorème 12 étant vérifiées, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = -2x \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx^2}}{1+t^3} dt.$$

De cette relation, on déduit que $F'(x)$ est de signe $-x$ et donc F est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

3. On a, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[$,

$$0 \leq \frac{e^{-tx^2}}{1+t^3} \leq e^{-tx^2}$$

et donc

$$0 \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dt = \frac{1}{x^2}.$$

De cette relation, on déduit que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F(x) = 0$.

Exercice 46 *On pose* $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+xt^2)}{1+t^2} dt$.

1. *Montrer que $f(x)$ est bien définie pour tout $x \geq 0$.*
2. *Montrer que f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et exprimer $f'(x)$ pour tout $x > 0$ à l'aide d'une intégrale.*
3. *Montrer que f est continue en 0.*
4. *Soit $x > 0$ et $x \neq 1$. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle*

$$Q(t) = \frac{t^2}{(1+t^2)(1+xt^2)}.$$

5. *Déduire la valeur de $f'(x)$.*
6. *Calculer $f(x)$ pour tout $x \geq 0$.*

Solution -

1. Soit $x \geq 0$. La fonction $t \mapsto \frac{\ln(1+xt^2)}{1+t^2}$ est continue et positive sur $[0,+\infty[$ et, pour α tel que $1 < \alpha < 2$, on a

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} t^{\alpha} \frac{\ln(1+xt^2)}{1+t^2} = 0.$$

Donc, d'après le corollaire 2, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+xt^2)}{1+t^2} dt$ est convergente. En conclusion, $f(x)$ est définie pour tout $x \geq 0$.

2. On considère la fonction $F :]0,+\infty[\times [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,t) = \frac{\ln(1+xt^2)}{1+t^2}.$$

Pour tout $(x,t) \in]0,+\infty[\times[0,+\infty[$, on a

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,t) = \frac{t^2}{(1+t^2)(1+xt^2)}.$$

Pour tout $t \in [0,+\infty[$, la fonction $\dfrac{\partial F}{\partial x}(.,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$. Soit $x \in]0,+\infty[$, la fonction F_x est intégrable sur $[0,+\infty[$ d'après la première question.
Soit $K \subset [a,b] \subset]0,+\infty[$ un compact où $0 < a < b$. On a, pour tout $(x,t) \in K \times [0,+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\right| \leq \phi_K(t),$$

où

$$\phi_K(t) = \frac{t^2}{(1+t^2)(1+at^2)}.$$

La fonction ϕ_k est continue et positive sur $[0,+\infty[$ et

$$\phi_K(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{at^2}.$$

Donc, d'après le théorème 3, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_K(t)dt$ est convergente et donc ϕ_k est intégrable sur $[0,+\infty[$ en vertu du théorème 2. On déduit aussi, en vertu de la proposition 3, que $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,.)$ est intégrable pour tout $x \in]0,+\infty[$. Les hypothèses du théorème 12 étant vérifiées, f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)(1+xt^2)}dt.$$

3. La décomposition en éléments simples de $Q(t)$ donne

$$Q(t) = \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+xt^2}\right).$$

4. Nous allons utiliser le théorème 11. On considère la fonction

$$F : [0,+\infty[\times[0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par

$$F(x,t) = \frac{\ln(1+xt^2)}{1+t^2}.$$

Pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction F_t est continue sur $[0, +\infty[$. Pour tout $x \in [0, +\infty[$, la fonction F_x est intégrable sur $[0, +\infty[$, d'après la première question.
Soi $K \subset [a, b] \subset [0, +\infty[$ un compact où $0 \leq a < b$. On a, pour tout $(x, t) \in K \times [0, +\infty[$,

$$|F(x,t)| \leq \phi_K(t),$$

où

$$\phi_K(t) = \frac{\ln(1+bt^2)}{1+t^2}.$$

La fonctions ϕ_k est continues et positives sur $[0, +\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+bt^2)}{1+t^2} dt = f(b)$$

est donc convergente. D'après le théorème 2, ϕ_K est intégrable sur $[0, +\infty[$. Les hypothèse du théorème 11 étant vérifiées, f est continue sur $[0, +\infty[$ et, en particulier, en 0.

5. Pour $x > 0$ et $x \neq 1$, on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \int_0^{+\infty} Q(t)dt \\ &= \frac{1}{x-1}\left[\arctan t - \frac{1}{\sqrt{x}}\arctan(\sqrt{x}t)\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi(\sqrt{x}-1)}{2(x-1)\sqrt{x}} \\ &= \frac{\pi}{2(x+\sqrt{x})}. \end{aligned}$$

Puisque f' est continue, on déduit que la formule ci-dessus reste valable pour $x = 1$ et donc, pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\pi}{2(x+\sqrt{x})}.$$

6. Puisque

$$\int \frac{\pi}{2(x+\sqrt{x})} dx = \pi \ln(1+\sqrt{x}),$$

on déduit que, pour tout $x > 0$

$$f(x) = \pi \ln(1+\sqrt{x}) + c.$$

D'après la question 3., f est continue en 0 et donc

$$0 = f(0) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \left(\pi \ln(1+\sqrt{x}) + c\right) = c.$$

Finalement, on déduit que, pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$f(x) = \pi \ln(1+\sqrt{x}).$$

Exercice 47 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{xt} dt.$$

1. *Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation différentielle*

$$y' - \frac{1}{2} xy = 0. \qquad (E)$$

2. *En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{xt} dt = \sqrt{\pi} e^{\frac{x^2}{4}}.$$

Solution -

1. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,t) = e^{xt - t^2}.$$

Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = t e^{xt - t^2}.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}(., t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, la fonction f_x est continue et positive sur $\mathbb{R}$ et

$$\lim_{t \longrightarrow \pm\infty} t^2 f_x(t) = 0.$$

Il en résulte, en vertu du corollaire 2, que $\int_{\mathbb{R}} f_x(t) dt$ est convergente et donc, en vertu du théorème 2, f_x est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Soit $K \subset [-a,a] \subset \mathbb{R}$ un compact où $a>0$. On a, pour tout $(x,t) \in K \times \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \phi_K(t),$$

où

$$\phi_K(t) = |t|e^{a|t|-t^2}.$$

La fonction ϕ_k est continue et positive sur $\mathbb{R}$ et

$$\lim_{t\longrightarrow+\infty} t^2\phi_k(t) = 0.$$

Donc, en vertu du corollaire 2, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \phi_K(t)dt$ est convergente. La fonction ϕ_k étant paire, on déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_K(t)dt$ est convergente. En vertu du théorème 2, ϕ_K est intégrable sur $\mathbb{R}$. On déduit aussi, en vertu de la proposition 3, que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,.)$ est intégrable pour tout $x \in \mathbb{R}$. En vertu du théorème 12, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} te^{xt-t^2}dt.$$

2. Calculons en utilisant la question précédente :

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} te^{xt-t^2}dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-2t)e^{xt-t^2}dt + \frac{1}{2}x\int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt-t^2}dt \\
&= -\frac{1}{2}\left[e^{xt-t^2}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2}xF(x) \\
&= -\frac{1}{2}\left(\lim_{t\longrightarrow+\infty} e^{xt-t^2} - \lim_{t\longrightarrow+\infty} e^{xt-t^2}\right) + \frac{1}{2}xF(x) \\
&= \frac{1}{2}xF(x).
\end{aligned}$$

Donc F vérifie l'équation différentielle (E).

3. Les solutions de (E) sont de la forme $y = ce^{\frac{x^2}{4}}$ et donc

$$F(x) = F(0)e^{\frac{x^2}{4}}.$$

Or
$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$
On retrouve l'intégrale de Gauss que nous avons déjà calculé dans l'exercice 41. Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} e^{xt} dt = \sqrt{\pi} e^{\frac{x^2}{4}}.$$

Exercice 48 *1. Établir, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'existence de*
$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{1+t^2} dt, \\ h(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2} dt, \quad k(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2} dt. \end{aligned}$$

2. Établir que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$xf(x) = 2h(x). \tag{2.7}$$

3. Montrer que h et k sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que
$$h' = f - k \quad \text{et} \quad k' = -h \tag{2.8}$$

4. En déduire que f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et que $f'' = f$.

5. Établir que, tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{\pi}{2} e^{-|x|},$$
puis, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
$$g(x) = \frac{\pi}{2} \mathrm{sgn}(x) e^{-|x|},$$
où $\mathrm{sgn}(x)$ désigne le signe de x.

Solution -

1. Pour tout $t \in [1, +\infty[$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\cos(xt)}{1+t^2}\right| &\leq \frac{1}{1+t^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{t^2}, \\
\left|\frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}\right| &\leq \frac{t}{(1+t^2)^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{t^3}, \\
\left|\frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2}\right| &\leq \frac{1}{(1+t^2)^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{t^4}.
\end{aligned}$$

Puisque les fonctions de Riemann $t \mapsto \frac{1}{t^i}, i = 2, 3, 4$ sont intégrables au voisinage de $+\infty$, on déduit, en vertu de la proposition 3, que les fonctions $t \mapsto \frac{\cos(xt)}{1+t^2}$, $t \mapsto \frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}$, $t \mapsto \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2}$ sont intégrables sur $[0, +\infty[$. En utilisant le théorème 5, on déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x), h(x)$ et $k(x)$ sont bien définis.
On a clairement $g(0) = 0$. Soient $x \neq 0$ et $u > 0$. Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}
\int_0^u \frac{t\sin(xt)}{1+t^2}dt &= \left[-\frac{t\cos(tx)}{x(1+t^2)}\right]_0^u + \frac{1}{x}\int_0^u \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{2t^2}{(1+t^2)^2}\right)\cos(tx)dt \\
&= -\frac{u\cos(ux)}{x(1+u^2)} + \frac{1}{x}\int_0^u \phi(t)\cos(tx)dt,
\end{aligned}$$

avec

$$\phi(t) = \frac{1}{1+t^2} - \frac{2t^2}{(1+t^2)^2}.$$

Puisque $\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty} \dfrac{u\cos(ux)}{x(1+u^2)} = 0$, $g(x)$ est définie si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} \phi(t)\cos(tx)dt$ est convergente. Or

$$|\phi(t)\cos(tx)| \leq \left(\frac{1}{1+t^2} + \frac{2t^2}{(1+t^2)^2}\right) \sim_{+\infty} \frac{3}{t^2}.$$

De la même manière que ci-dessus, on peut conclure que $g(x)$ est bien définie.

2. En utilisant une intégration par parties (*cf.* Théorème 7), on obtient

$$\begin{aligned}
xf(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{x\cos(xt)}{1+t^2}dt \\
&= \left[\frac{\sin(xt)}{1+t^2}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}dt \\
&= \lim_{t\longrightarrow+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t^2} + 2h(x) \\
&= 2h(x).
\end{aligned}$$

3. On considère la fonction $H : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$H(x,t) = \frac{t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}.$$

Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$, on a

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,t) = \frac{t^2\cos(xt)}{(1+t^2)^2}.$$

Pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $\frac{\partial H}{\partial x}(.,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons vu dans la première question que H_x est intégrable sur $[0, +\infty[$. Soit $K \subset [-a, a] \subset \mathbb{R}$ un compact où $0 < a$. On a, pour tout $(x,t) \in K \times [0, +\infty[$,

$$\left|\frac{\partial H}{\partial x}(x,t)\right| \leq \phi_K(t),$$

où

$$\phi_K(t) = \frac{t^2}{(1+t^2)^2}.$$

La fonction ϕ_k est continue, positive sur $[0, +\infty[$ et

$$\phi_K(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{t^2}.$$

Puisque l'intégrales de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente (voir (1.3)), on déduit, en vertu du théorème 3, que l'intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \phi_K(t)dt$ est convergente. Le théorème 2 permet de conclure que ϕ_K est intégrable et la proposition 3 entraîne que $\frac{\partial H}{\partial x}(x,.)$ est intégrable. En vertu du théorème 12, h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t^2\cos(xt)}{(1+t^2)^2}dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)}dt - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2}dt \\ &= f(x) - k(x). \end{aligned}$$

Un raisonnement analogue donne que k est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$k'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-t\sin(xt)}{(1+t^2)^2}dt = -h(x).$$

4. La fonction h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc, d'après (2.7), f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$. D'un autre côté, $h' = f - k$, k de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et f de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ donc h' est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et par suite h est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$. Il en résulte, d'après (2.7), que f est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$.
D'après (2.7), pour tout $x \in]0,+\infty[$,
$$f(x) + xf'(x) = 2h'(x) \quad \text{et} \quad 2f'(x) + xf''(x) = 2h''(x).$$
Des relations (2.8), on déduit que
$$h''(x) = f'(x) + h(x).$$
En remplaçant dans ce qui précède, on déduit que $xf''(x) = 2h(x)$. Or $xf(x) = 2h(x)$ et finalement, pour tout $x \in]0,+\infty[$,
$$f''(x) = f(x).$$
5. D'après la question précédente, la restriction de f à $]0,+\infty[$, vérifie l'équation différentielle
$$y'' - y = 0.$$
Les solutions de cette équation différentielle sont de la forme $y(x) = ae^x + be^{-x}$. Or, pour tout $x \in]0,+\infty[$,
$$|f(x)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{|\cos(xt)|}{1+t^2} dt \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$
Ceci montre que $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) \neq \pm\infty$ et donc, pour tout $x \in]0,+\infty[$,
$$f(x) = be^{-x}.$$
On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = h'(x) + k(x)$, h et k sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur $\mathbb{R}$. Il en résulte que
$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$
On déduit alors que, pour tout $x \in [0,+\infty[$,
$$f(x) = \frac{\pi}{2} e^{-x}.$$
Soit $x \in]-\infty, 0]$, on a
$$f(x) = f(-x) = \frac{\pi}{2} e^{x}.$$

Finalement, nous avons montré que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} e^{-|x|}.$$

En remplaçant dans (2.7) et (2.8), on déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h(x) = \frac{\pi}{4} x e^{-|x|} \quad \text{et} \quad k(x) = \frac{\pi}{4} e^{-|x|} + \frac{\pi}{4} x \mathrm{sgn}(x) e^{-|x|}.$$

Maintenant, en effectuant une intégration par parties (*cf.* Théorème 7), on obtient

$$\begin{aligned}
xg(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{tx\sin(xt)}{1+t^2} dt \\
&= \left[\frac{-t\cos(xt)}{1+t^2} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{(1-t^2)\cos(xt)}{(1+t^2)^2} dt \\
&= \lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{-t\cos(xt)}{1+t^2} + + \int_0^{+\infty} \frac{(1-t^2)\cos(xt)}{(1+t^2)^2} dt \\
&= k(x) - \int_0^{+\infty} \frac{t^2\cos(xt)}{(1+t^2)^2} dt \\
&= k(x) - (f(x) - k(x)) \\
&= \frac{\pi}{2} x \mathrm{sgn}(x) e^{-|x|}.
\end{aligned}$$

Il en résulte que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$g(x) = \frac{\pi}{2} x \mathrm{sgn}(x) e^{-|x|}.$$

N.B. Attention, on ne peut pas appliquer le théorème 12 à la fonction $f(x)$ et déduire $g(x)$ comme dérivée de $f(x)$ du fait qu'il n'est pas évident de montrer que $\frac{\partial F}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination locale quand $F(x,t) = \frac{\cos(xt)}{1+t^2}$.

Exercice 49 *On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{t^2+1} dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2(t^2+1)} dt.$$

1. *Montrer que F et G sont continues sur $\mathbb{R}$ puis calculer $F(0)$ et $G(0)$.*
2. *Établir que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$F(0) - F(x) + G(x) = C|x| \quad \text{où} \quad C = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt.$$

3. *Montrer que G est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et vérifie $G''(x) = F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*
4. *En déduire que F est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et vérifie une équation différentielle du second ordre.*
5. *Calculer $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*
6. *Déduire de tout ce qui précède la valeur de C.*

Solution -

1. Nous allons utiliser le théorème 11. On considère les fonctions
$$f, g : \mathbb{R}\times]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
définie par
$$f(x,t) = \frac{\cos(tx)}{t^2+1} \quad \text{et} \quad g(x,t) = \frac{1-\cos(tx)}{t^2(t^2+1)}.$$
Pour tout $t \in]0, +\infty[$, les fonction f_t et g_t sont clairement continues sur $\mathbb{R}$. Puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$1 - \cos(x) \leq \frac{x^2}{2},$$
on déduit que, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times]0, +\infty[$,
$$|f(x,t)| \leq \frac{1}{t^2+1} \quad \text{et} \quad |g(x,t)| \leq \frac{x^2}{1+t^2}.$$
Puis l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ est convergente, en vertu du théorème 2, la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. Ceci entraîne que les fonctions f et g vérifient l'hypothèse de domination locale et pour tout $x \in \mathbb{R}$, f_x et g_x sont intégrables sur $]0, +\infty[$ et donc, d'après le théorème 11, f et g sont continues sur $\mathbb{R}$. On a clairement,
$$F(0) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad G(0) = 0.$$
2. Calculons
$$\begin{aligned} F(0) - F(x) + G(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t^2(1-\cos(tx)) + 1 - \cos(tx)}{t^2(t^2+1)} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2} dt \\ &= 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{tx}{2}\right)}{t^2} dt \\ &\overset{u=\frac{1}{2}|x|t}{=} |x| \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2} du. \end{aligned}$$

3. On reconsidère la fonction $g : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,t) = \frac{1-\cos(tx)}{t^2(t^2+1)}.$$

Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$, on a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{\sin(xt)}{t(t^2+1)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\cos(tx)}{t^2+1}.$$

Pour tout $t \in]0,+\infty[$, les fonctions $\frac{\partial g}{\partial x}(.,t)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(.,t)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons vu que g_x est intégrable sur $]0,+\infty[$. Soit $K \subset [-a,a] \subset \mathbb{R}$ un compact où $a > 0$. On a, pour tout $(x,t) \in K \times [0,+\infty[$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \psi_K(t) \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq \xi_K(t),$$

où

$$\psi_K(t) = \frac{a}{t^2+1} \quad \text{et} \quad \xi_K(t) = \frac{1}{t^2+1}.$$

Les intégrales

$$\int_0^{+\infty} \psi_k(t)dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \xi_k(t)dt$$

sont convergentes et par suite $\dfrac{\partial h}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}$ satisfont la condition de domination locale. En plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x,.)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,.)$ sont intégrables. En vertu du théorème 12, G est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t(t^2+1)}dt \quad \text{et} \quad G''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{t^2+1}dt = F(x). \tag{2.9}$$

4. D'après la question 2., pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$F(x) = -Cx + F(0) + G(x).$$

Puisque G est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $]0,+\infty[$, on déduit que F est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$F''(x) = G''(x) = F(x).$$

5. D'après la question précédente, la fonction F vérifie l'équation différentielle
$$y'' - y = 0$$
sur $]0,+\infty[$. Il existe donc deux constantes a et b telles que, pour tout $x \in]0,+\infty[$,
$$F(x) = ae^x + be^{-x}.$$
Maintenant, pour tout $(x,t) \in]0,+\infty[\times[0,+\infty[$,
$$\left|\frac{\cos(tx)}{t^2+1}\right| \leq \frac{1}{t^2+1}.$$
De cette inégalité, on déduit que, pour tout $x \in]0,+\infty[$,
$$|F(x)| \leq \frac{\pi}{2}.$$
Ceci entraîne que $a = 0$. Maintenant, d'après la question 1., F est continue en 0 et donc
$$F(0) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} F(x) = b.$$
Or,
$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{\pi}{2}.$$
Ainsi, pour tout $x \in [0,+\infty[$,
$$F(x) = \frac{\pi e^{-x}}{2}.$$
Puisque F est paire, on déduit finalement que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$F(x) = \frac{\pi e^{-|x|}}{2}.$$

6. Pour tout $x > 0$, on a
$$Cx = F(0) - F(x) + G(x).$$
En dérivant, on obtient, pour tout $x > 0$,
$$C = G'(x) - F'(x) = G'(x) + \frac{\pi}{2}e^{-x}.$$
Puisque G est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, on a
$$C = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \left(G'(x) + \frac{\pi}{2}e^{-x}\right) = G'(0) + \frac{\pi}{2}.$$

Or, d'après (2.9), pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t(t^2+1)}dt$$

et donc $G'(0) = 0$. Finalement,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt = \frac{\pi}{2}.$$

Nous avons montré dans l'exercice 30 que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}dt.$$

Nous déduisons alors que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 50 *Pour $x > 0$, on pose*

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt.$$

1. *Justifier l'existence de F.*
2. *Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F(x)$.*
3. *Montrer que, pour tout $x > 0$,*

$$F'(x) = \ln x - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t^2+x^2)dt.$$

4. *Vérifier la convergence des intégrales*

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln t dt \quad et \quad J = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t^2+1)dt.$$

5. *En déduire $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} F'(x)$ puis trouver un équivalent de $F'(x)$ au voisinage de 0^+.*

6. *Montrer que* F *est deux fois dérivable sur* $]0,+\infty[$ *et, pour tout* $x>0$,
$$F''(x)+F(x)=\frac{1}{x},$$
et en déduire que
$$F(x)=\int_x^{+\infty}\frac{\sin(t-x)}{t}dt.$$
7. *En déduire que l'intégrale de Dirichlet est donnée par* $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$.

Solution -

1. Soit $x>0$. La fonction $t\mapsto\frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est continue, positive sur $[0,+\infty[$ et, pour tout $t\in[0,+\infty[$,
$$0\leq\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\leq\frac{1}{1+t^2}.$$
L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}$ est convergente et par suite, d'après la proposition 6, l'intégrale définissant $F(x)$ est convergente et donc F est bien définie.
2. On considère la fonction $f:]0,+\infty[\times[0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par
$$f(x,t)=\frac{e^{-xt}}{1+t^2}.$$
Pour tout $(x,t)\in]0,+\infty[\times[0,+\infty[$, on a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=-\frac{te^{-xt}}{1+t^2}.$$
Pour tout $t\in[0,+\infty[$, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}(.,t)$ est continue sur $]0,+\infty[$. Pour tout $x\in]0,+\infty[$,
$$|f_x(t)|\leq\frac{1}{1+t^2},$$
la fonction $t\mapsto\frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ et donc, en vertu de la proposition 3, f_x est intégrable sur $[0,+\infty[$.
Soit $K\subset[a,b]\subset]0,+\infty$ un compact où $0<a<b$. On a, pour tout $(x,t)\in K\times[0,+\infty[$,
$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\leq\psi_K(t),$$

où $\psi_K(t) = \frac{te^{-at}}{1+t^2}$. La fonction ψ_K est continue, positive sur $[0, +\infty[$ et

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} t^2 \psi_K(t) = 0.$$

Donc, d'après le corollaire 2, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \psi_K(t)dt$ est convergente. En vertu du théorème 2, ψ_K est intégrable sur $[0, +\infty[$. En plus, en vertu de la proposition 3, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, .)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. En vertu du théorème 12, F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$F'(x) \quad = \quad -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^2} dt.$$

Calculons la limite de F en $+\infty$. Pour tout $(x, t) \in]0, +\infty[\times[0, +\infty[$,

$$0 \leq \frac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq e^{-xt}$$

et donc

$$0 \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}.$$

On déduit alors que

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} F(x) = 0.$$

3. Nous avons montré que, pour tout $x > 0$,

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{te^{-xt}}{1+t^2} dt.$$

En utilisant le changement de variable $u = xt$ (voir Théorème 8), on obtient

$$F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{ue^{-u}}{x^2+u^2} du.$$

Maintenant, en utilisant une intégration par parties (voir Théorème 7), on obtient

$$\begin{aligned} F'(x) \quad &= \quad \left[-\frac{1}{2} e^{-u} \ln(x^2+u^2)\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-u} \ln(x^2+u^2) du \\ &= \quad \ln x - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-u} \ln(x^2+u^2) du. \end{aligned}$$

4. L'intégrale I est convergente si et seulement si les intégrales
$$\int_0^1 e^{-t}\ln t dt \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} e^{-t}\ln t dt$$
sont convergentes.
La fonction $t \mapsto e^{-t}\ln t$ est continue, négative sur $]0,1]$ et on a
$$e^{-t}\ln t \sim_{0^+} \ln t.$$
Or, pour tout $x \in]0,1]$,
$$\int_x^1 \ln t dt = [t\ln t - t]_x^1 = x\ln x - x - 1$$
et donc
$$\int_0^1 \ln t dt = \lim_{x\longrightarrow 0^+}(x\ln x - x - 1) = -1.$$
Ainsi $\int_0^1 \ln t dt$ est convergente et donc $\displaystyle\int_0^1 e^{-t}\ln t dt$ est convergente en vertu du théorème 3.
D'un autre côté, la fonction $t \mapsto e^{-t}\ln t$ est continue, positive sur $[1,+\infty[$ et on a
$$\lim_{t\longrightarrow +\infty} t^2 e^{-t}\ln t = 0.$$
Donc, d'après le corollaire 2, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln t dt$ est convergente.
Finalement, I est convergente.
La fonction $t \mapsto e^{-t}\ln(t^2+1)$ est continue, positive sur $[0,+\infty[$ et on a
$$\lim_{t\longrightarrow +\infty} t^2 e^{-t}\ln(t^2+1) = 0.$$
Donc, d'après le corollaire 2, l'intégrale J est convergente.
5. Pour tout $0 < x < 1$ et tout $t \in [0,+\infty[$, on a
$$-e^{-t}\ln(t^2+1) \leq -e^{-t}\ln(t^2+x^2) \leq -e^{-t}\ln(t^2)$$
et donc
$$-J \leq -\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t^2+x^2)dt \leq -2I.$$
En utilisant l'expression de $F'(x)$ donné dans la question 3., on déduit que
$$\ln x - \frac{1}{2}J \leq F'(x) \leq \ln x - I.$$

En multipliant par $(\ln x)^{-1}$ qui est négatif, on déduit que

$$1 - \frac{I}{\ln x} \leq \frac{F'(x)}{\ln x} \leq 1 - \frac{J}{2\ln x}.$$

Puisque I et J sont finis, en passant à la limite, on déduit que

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} F'(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{F'(x)}{\ln x} = 1.$$

Ainsi $F'(x) \sim_{0^+} \ln x$.

6. On reconsidère la fonction $f :]0, +\infty[\times [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie en 2. par

$$f(x,t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}.$$

Nous avons déjà montré que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination locale. Nous allons montré maintenant que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ vérifie aussi cette hypothèse. En effet, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2},$$

et si $K \subset [a,b] \subset]0, +\infty[$ est un compact où $0 < a < b$, pour tout $(x,t) \in K \times [0, +\infty[$,

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) \right| \leq \frac{t^2 e^{-at}}{1+t^2}.$$

La fonction $t \longrightarrow \frac{t^2 e^{-at}}{1+t^2}$ est continue, positive sur $[0, +\infty[$ et

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} t^2 \frac{t^2 e^{-at}}{1+t^2} = 0.$$

Donc, d'après le corollaire 2, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-at}}{1+t^2} dt$ est convergente. En vertu du théorème 12, F est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned}
F''(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1+t^2} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{(t^2+1)e^{-xt}}{1+t^2} dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt - F(x) \\
&= \frac{1}{x} - F(x).
\end{aligned}$$

En conclusion, pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$F''(x) + F(x) = \frac{1}{x}.$$

7. Posons provisoirement,

$$G(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt.$$

Puisque

$$\sin(t-x) = \sin t \cos x - \cos t \sin x,$$

on a

$$G(x) = \cos x T(x) - \sin x S(x),$$

où

$$T(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt \quad \text{et} \quad S(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt.$$

Commençons par vérifier que G vérifie l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x}. \tag{E}$$

Puisque

$$T(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt,$$

on a $T'(x) = -\frac{\sin x}{x}$. De même, $S'(x) = -\frac{\cos x}{x}$. Calculons :

$$\begin{aligned}
G'(x) &= -\sin x T(x) - \cos x \frac{\sin x}{x} - \cos x S(x) + \sin x \frac{\cos x}{x} \\
&= -\sin x T(x) - \cos x S(x), \\
G''(x) &= -\cos x T(x) + \sin x \frac{\sin x}{x} + \sin x S(x) + \cos x \frac{\cos x}{x} \\
&= -G(x) + \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Donc G vérifie l'équation différentielle (E). Puisque F vérifie (E) sur $]0,+\infty[$, il existe donc $A, B \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$F(x) = A \cos x + B \sin x + G(x).$$

Puisque

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} T(x) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} S(x) = 0,$$

on déduit que $\lim_{x \longrightarrow +\infty} G(x) = 0$. Or, d'après 2., $\lim_{x \longrightarrow +\infty} F(x) = 0$ et donc nécessairement $A = B = 0$. En conclusion, pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt.$$

8. D'après la formule ci-dessus,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = [\arctan t]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$