Calcul des Probabilités pour la licence

Professeur Mohamed BOUCETTA

Préface

Alors que la réforme de l'enseignement supérieur est en marche, nos étudiants ont besoin d'outils pédagogiques adaptés aux exigences du passage au système **L-M-D** (Licence, Master, Doctorat).
Ce polycope couvre le programme de probabilités des filières d'ingénieurs. Chaque chapitre comporte :

- un rappel de cours copieusement illustré par des exemples. Nous avons tenu à ce que chaque définition, chaque proposition et chaque théorème soient suivis d'exemples détaillés pour les illustrer, les rendre moins abstraits et préparer l'étudiant à aborder les exercices ;
- une collection d'exercices typiques recouvrant les différentes parties du cours ainsi que leurs solutions détaillées. Ces solutions se réfèrent d'une manière systématique et répétitive aux résultats du cours pour permettre à l'étudiant une assimilation profonde de ces résultats.

Nous pensons que ce polycopes sera un outil de travail précieux pour les étudiants afin de les aider à préparer leurs examens et, surtout, à développer leurs capacités d'**auto-formation** qualité indispensable pour la poursuite de leurs études supérieures.

Table des matières

Chapitre 1

Outils mathématiques pour les modèles probabilistes

Ce livre est destiné à un public non mathématicien : étudiants de la licence sciences de la vie, sciences de la terre, physique, chimie et filières d'ingénieurs. C'est pour cela que nous avons favorisé l'approche intuitive des modèles probabilistes et nous avons réduit l'outil mathématique à son strict minimum. Dans ce chapitre, nous allons passé en revue les outils mathématiques prérequis de ce cours. Le language des ensembles, les techniques de dénombrement, la convergence des suites et des séries et la convergence des intégrales impropres sont les sections de ce chapitre.

1.1 Language des ensembles

Une **ensemble** est une collection d'objets appelés **éléments**. L'ensemble vide noté $\emptyset$ ne contient aucun élément.
Soit Ω un ensemble. Un ensemble A est une **partie** de Ω si tout élément de A est élément de Ω. On dira que A est inclus dans Ω et on notera $A \subset \Omega$.
Si un élément x de Ω est élément de A on écrira $x \in A$ sinon on écrira $x \notin A$.
L'ensemble des parties de Ω est noté $\mathcal{P}(\Omega)$. L'ensemble vide est considéré comme partie de Ω.

Exemple - Pour $\Omega = \{a, b, c\}$ on a

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Soient Ω un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$.

- Le **complémentaire** de A noté $\overline{A}$ est l'ensemble des éléments de Ω qui n'appartiennent pas à A. Ainsi
$$\overline{A} = \{x \in \Omega,\ x \notin A\}.$$
- La **réunion** de A et B est l'ensemble noté $A \cup B$ et défini par
$$A \cup B = \{x \in \Omega, x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$
- L'**intersection** de A et B est l'ensemble noté $A \cap B$ et défini par
$$A \cap B = \{x \in \Omega, x \in A \text{ et } x \in B\}.$$
- La **différence** de A et B est l'ensemble noté $A \setminus B$ défini par
$$A \setminus B = A \cap \overline{B}.$$
- Les parties A et B sont dits **disjoints** si $A \cap B = \emptyset$.

On a clairement
$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A, \quad A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset,$$
$$(A \subset B) \Rightarrow (A \cup B = B \text{ et } A \cap B = A).$$

Proposition 1 *Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$. Alors :*

1. $A \cup B = B \cup A$,
2. $A \cap B = B \cap A$,
3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
5. $\overline{\overline{A}} = A$,
6. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,
7. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Si un ensemble Ω contient un nombre fini d'éléments alors toute partie A de Ω contient un nombre fini d'éléments. Le nombre d'éléments de A est appelé **cardinal** de A et sera noté $\mathrm{Card}A$. On a
$$\mathrm{Card}\emptyset = 0.$$

Proposition 2 *Soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ avec cardinal de Ω fini. Alors*

1. $\mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}\Omega - \mathrm{Card}A$,

2. $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}A + \text{Card}B - \text{Card}(A \cap B)$,

3. $\text{Card}(A \setminus B) = \text{Card}A - \text{Card}(A \cap B)$.

Soient Ω_1 et Ω_2 deux ensembles. Une **application** de Ω_1 vers Ω_2 est une correspondance qui à chaque élément $x \in \Omega_1$ associe un unique élément $f(x) \in \Omega_1$. On notera $f : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ une telle application. On notera $\mathcal{F}(\Omega_1, \Omega_2)$ l'ensemble des applications de Ω_1 vers Ω_2.

Exemple - Si $\Omega_1 = \{a, b\}$ et $\Omega_2 = \{0, 1\}$ alors $\mathcal{F}(\Omega_1, \Omega_2)$ contient 4 applications :

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} a & \longrightarrow & 1 & a & \longrightarrow & 1 & a & \longrightarrow & 2 & a & \longrightarrow & 2 \\ b & \longrightarrow & 1, & b & \longrightarrow & 2, & b & \longrightarrow & 1, & b & \longrightarrow & 2. \end{array}$$

1.2 Formules classiques de dénombrement

La résolution de beaucoup de problème en probabilité nécessite le calcul du cardinal de certains ensembles finis. Les techniques de dénombrement permettent ce calcul. Les formules de cette sections seront très utiles dans le calcul des probabilités des modèles probabilistes finis et équiprobables (voir chapitre 2).

1.2.1 Principe de multiplication

La plupart des formules de cette section s'obtiennent d'une manière simple en utilisant le **principe de multiplication**. Avant d'énoncer ce principe, considérons l'exemple suivant :

Exemple - Un chateau contient 50 chambres, chaque chambres contient 2 interrupteurs et chaque interrupteur commande 4 lampes. Si tous les interrupteurs sont actionnés, combien il y a t-il de lampes allumées ? La réponse qui est $50 \times 2 \times 4 = 400$ lampes s'obtient d'une manière intuitive à partir du principe de multiplication que nous allons maintenant formuler d'une manière mathématique.

Principe : Si un événement A peut se produire de p façons différentes et un événement B de q façons différentes alors l'événement A suivi de B peut se produire de $p \times q$ façons différentes.
Plus généralement, pour $i = 1, \ldots, n$, si A_i est un événement qui peut se produire de p_i manières différentes alors A_1 suivi de A_2 … suivi de A_n peut se produire de $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$ façons différentes.

Exemples -

1. Si on lance un dé 3 fois de suite alors le nombre de résultats possibles est 6^3.
2. Si une urne contient 4 boules de couleurs différentes et si on tire trois boules de suites sans remise alors le nombre de résultats possibles est $4 \times 3 \times 2 = 24$.

1.2.2 Arrangements et permutations

On considère un ensemble fini Ω à n éléments et un entier $p \leq n$.
Un **arrangement sans répétition** de p éléments pris parmi n est une suite **ordonnée et sans répétition** de p éléments formée à partir des n éléments de Ω.

Exemples -

1. Pour $p = 1$ et $n = 3$ les arrangements sans répétition d'un éléments parmi $\{a, b, c\}$ sont tous les éléments : a, b, c.
2. Pour $p = 2$ et $n = 3$ les arrangements sans répétition de deux éléments parmi $\{a, b, c\}$ sont tous les couples : (a, b), (a, c), (b, a), (b, c), (c, a), (c, b).
3. Pour $p = 3$ et $n = 3$ les arrangements sans répétition de trois éléments parmi $\{a, b, c\}$ sont tous les triples : (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).

Le principe de multiplication nous donne que le nombre d'arrangements sans répétition de p éléments pris parmi n noté A_n^p est

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1).$$

En utilisant la notation factorielle

$$n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n,$$

on obtient

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}. \tag{1.1}$$

Pour la cohérence des formules, nous allons poser par convention $0! = 1$.

Exemples -

1. Le nombre de mots de passe formés de 4 lettres différentes est $A_{26}^4 = 358800$.
2. Le nombre de manières différentes dont 5 passagers occupent un compartiment de train à 8 places est $A_8^5 = 6720$.

Les permutations sont un cas particulier d'arrangement sans répétition. **Les permutations de n objets** sont définies comme toutes les suites **ordonnées et sans répétition** obtenues en prenant ces objets ; c'est le nombre d'arrangements sans répétition à n éléments dans un ensemble à n éléments.

Exemple - Soit $\Omega = \{a, b, c\}$. Les permutations de Ω sont

$$(a, b, c), (b, a, c), (c, a, b), (a, c, b), (b, c, a), (c, b, a).$$

On déduit de (1.1) que le nombre de permutations de n éléments, noté P_n est donné par

$$\mathrm{P}_n = n!. \tag{1.2}$$

Nous avons :

$0! = 1$	$1! = 1$	$2! = 2$	$3! = 6$	$4! = 24$
$5! = 120$	$6! = 720$	$7! = 5040$	$8! = 40320$	$9! = 362880$

Exemples -

1. Il y a $6! = 720$ manières différentes d'occuper une table avec 6 chaises par 6 invités.
2. A l'issu d'un championnat de football avec 10 équipes il y a $10! = 3628800$ classements possibles.

Un **arrangement avec répétition** de p éléments pris parmi n est une suite **ordonnée et avec répétition** de p éléments formée à partir des n éléments de Ω.

Exemple - Pour $p = 2$ et $n = 3$ les arrangements avec répétition de deux éléments parmi $\{a, b, c\}$ sont tous les couples : (a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c).

Le principe de multiplication donne que le nombre d'arrangements avec répétition de p éléments pris parmi n est n^p.

Exemples -

1. Le nombre de mots de passe formés de 4 lettres est $26^4 = 456976$.
2. Le nombre de numéros de téléphone avec 4 chiffres formé avec $\{0, \ldots, 9\}$ est 10^4.
3. Le nombre de numéros de téléphone avec 8 chiffres formé avec $\{0, \ldots, 9\}$ est 10^8.

1.2.3 Combinaisons

Une combinaison de p objets pris parmi n est par définition une partie constituée par p éléments dans un ensemble de n éléments.

Exemple - Soit $\Omega = \{a, b, c, d\}$. Les combinaisons de deux élements parmi les quatre éléments de E sont

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}.$$

La différence entre un arrangement sans répétition et une combinaison étant l'ordre, on déduit facilement que si C_n^p désigne nombre de combinaisons de p éléments pris parmi n alors

$$A_n^p = p! C_n^p.$$

Ainsi, en vertu de (1.1),

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}, \tag{1.3}$$

où $p \leq n$.

On a clairement

$$C_n^0 = C_n^n = 1,\ C_n^1 = C_n^{n-1} = n,$$

et plus généralement

$$C_n^p = C_n^{n-p}. \tag{1.4}$$

Remarque - Il est important de noter que la différence entre une combinaison et un arrangement sans répétition est l'ordre. Ainsi $\{a, b\} = \{b, a\}$ alors que l'arrangement (a, b) est différent de (b, a).

Exemples -

1. Au loto un bulletin de jeu est formé de 6 nombres choisis parmi les nombres $\{1, \ldots, 49\}$. Il y a donc

$$C_{49}^6 = 13983816 \tag{1.5}$$

bulletins possibles. Si on veut être sûr de gagner, on doit jouer tous ces bulletins, à $2,5 DH$ le bulletin cela coûtera

$$34\ 991\ 908\ DH.$$

2. Une main dans un jeu de carte de 52 cartes est formée de 14 cartes ainsi il y a

$$C_{52}^{14} = 1768966344600$$

mains possibles.

Soient Ω une ensemble formé de n éléments, a un élément de Ω et $0 \leq p \leq n-1$. Notons $\mathcal{P}(p,a)$ l'ensemble des parties de Ω qui contiennent a et qui sont formées de p éléments et $\mathcal{P}(p,\bar{a})$ l'ensemble des parties de Ω qui ne contiennent pas a et qui sont formées de p éléments. On a clairement

$$\mathrm{Card}\mathcal{P}(p,a) = C_{n-1}^{p-1} \quad \text{et} \quad \mathrm{Card}\mathcal{P}(p,\bar{a}) = C_{n-1}^{p}.$$

Comme l'ensemble des combinaisons à p éléments de Ω est réunion disjointe de $\mathcal{P}(p,a)$ et $\mathcal{P}(p,\bar{a})$ on déduit la **relation de Pascal :**

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p}, \quad 2 \leq n; \quad 1 \leq p \leq n-1. \tag{1.6}$$

1.2.4 Développement du binôme du Newton

L'analyse combinatoire permet aisément le développement de $(a+b)^n$ où n est un entier strictement positif.
Elever $(a+b)$ à la puissance n revient à multiplier n binômes identiques à $(a+b)$. Le résultats est une somme ; chaque élément de cette somme est le produit de n facteurs du type a ou b, choisis chacun dans un binôme différent. On obtient donc des termes de la formes $a^p b^{n-p}$ $(0 \leq p \leq n)$. Chacun d'eux sera présent autant de fois qu'il existe de façons de choisir les p facteurs a, c'est à dire de choisir les p binômes parmi les n (les binômes où l'on choisit b sont alors bien déterminés) ; il en a donc C_n^p. On obtient ainsi, si $n \in \mathbb{N}$ et $n \neq 0$

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^p b^{n-p}. \tag{1.7}$$

D'après (1.6), le coefficient C_n^p peut être obtenu par l'addition de C_{n-1}^p et de C_{n-1}^{p-1} d'où l'idée du **triangle de Pascal** qui permet d'obtenir, par recurrence, les coefficients numériques du développement du binôme de Newton.

p	0	1	2	3	4	5	6	7
n								
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	$\underline{6}$	$\underline{4}$	1			
5	1	5	10	$\underline{10}$	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

Tout nombre dans le triangle de Pascal est obtenu en faisant la somme des deux nombres rencontrés en remontant et en tournant à gauche. Par exemple, le nombre 10 souligné est obtenu en additionnant le nombre au dessus ici 4 au nombre 6 qui est à gauche.

Les nombres de la ligne p constituent les coefficients du développement de Newton de $(a+b)^p$, ainsi

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2,\\
(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3,\\
(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,\\
(a+b)^5 &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.
\end{aligned}$$

1.2.5 Cardinal de $\mathcal{P}(\Omega)$ et cardinal de $\mathcal{F}(\Omega_1,\Omega_2)$

Soit Ω un ensemble fini à n éléments. Alors

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^n. \tag{1.8}$$

Puisque l'ensemble des parties d'une ensemble à n éléments est la réunion disjointe de l'ensemble des parties formées de p éléments quand p varie entre 0 et n, on obtient alors

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n. \tag{1.9}$$

Soient Ω_1 et Ω_2 deux ensembles finis avec $\mathrm{Card}\Omega_1 = p$ et $\mathrm{Card}\Omega_2 = n$. Alors

$$\mathrm{Card}\mathcal{F}(\Omega_1,\Omega_2) = n^p. \tag{1.10}$$

1.3 Suites et séries numériques

Une suite dans $\mathbb{R}$ est une application qui associe à tout entier $n \geq n_0$ un réel qu'on notera u_n. Une telle suite sera notée $(u_n)_{n\geq n_0}$ et u_{n_0} est appelé le

premier terme de la suite.
On dit que $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et on note $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell$ si

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \geq n_0 \text{ tel que : } \forall n \geq N,\ \ell - \epsilon \leq u_n \leq \ell + \epsilon.$$

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On définit une nouvelle suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = u_0 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'appelle **série de terme général** u_n et sera noté $\sum u_n$.
L'élément S_n sera appelé **somme partielle d'ordre** n.
On dira que la série $\sum u_n$ **converge** si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dans le cas contraire, on dira qu'elle **diverge**.
Lorsque la série $\sum u_n$ converge, on posera

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} S_n,$$

et on l'appellera **somme** de la série $\sum u_n$.
Etudier la **nature** de la série $\sum u_n$, c'est étudier la convergence de cette série.
Deux séries sont **de même nature** si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

Exemples -

1. Soit $z \in \mathbb{R}$. Considérons la série géométrique $\sum z^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_n = 1 + z + \cdots + z^n = \begin{cases} n+1 & \text{si} \quad z = 1 \\ \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z} & \text{si} \quad z \neq 1. \end{cases}$$

   Il en résulte que $\sum z^n$ est convergente si et seulement si $|z| < 1$ et, dans ce cas, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}. \tag{1.11}$$

   Par exemple, pour tout $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{p^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1}.$$

2. Etudions la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ définie pour $n \geq 1$. Pour tout $k \geq 1$, on a
$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$
et donc, pour tout $n \geq 1$,
$$S_n = u_1 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$
Ainsi $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente et on a
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

3. Nous allons montrer maintenant que la série
$$\sum \frac{1}{n}$$
dite série harmonique est divergente. En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, puisque l'inégalité $\ln(1+x) \geq x$ est vérifiée pour tout $x \geq 0$, on obtient
$$\ln(1+k) - \ln k = \ln(1 + \frac{1}{k}) \leq \frac{1}{k}.$$
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1)$$
ce qui implique $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$ et donc
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty. \tag{1.12}$$

Une série $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Proposition 3 *Si une série numérique converge absolument, alors elle converge.*

La réciproque de cette proposition est fausse

Nous finissons cette section par la **formule de Stirling** qui donne une approximation de $n!$. Deux suites $(a_n)_{n \geq n_0}$ et $(b_n)_{n \geq n_0}$ sont dites équivalentes, on notera $a_n \sim b_n$ si
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Théorème 1 *Quand $n \longrightarrow +\infty$, on a*

$$n! \sim \sqrt{2n\pi}e^{-n}n^n. \tag{1.13}$$

Le tableau suivant donne les valeurs de $Q(n) = \frac{\sqrt{2n\pi}e^{-n}n^n}{n!}$ pour quelques valeurs de n.

n	$Q(n)$	7	0.9881
1	0.9221	8	0.9896
2	0.9595	9	0.9907
3	0.9727	10	0.9917
4	0.9794	11	0.9924
5	0.9834	20	0.9958
6	0.9862	200	0.9995

1.4 Intégrales généralisées

Pour aborder la notion d'intégrale généralisée il est nécessaire de connaître les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. Il s'agit de généraliser cette notion à toute fonction f définie sur un intervalle semi-ouvert $[a, b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (resp. $]a, b]$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$) qui est continue par morceaux sur tout intervalle de la forme $[a, c]$ avec $c \in [a, b[$ (resp. $[c, b]$ avec $c \in]a, b]$). Une telle fonction sera dite continue par morceaux sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).

Les définitions seront données sur les intervalles de la forme $[a, b[$ ou $[a, +\infty[$, le lecteur peut étendre sans difficultés ces définitions aux cas des intervalles de la forme $]a, b]$ et $]-\infty, a]$.

Définition 1 1. *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente si $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow b^-} \int_a^x f(t)dt$ existe et est finie. On pose alors*

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \longrightarrow b^-} \int_a^x f(t)dt.$$

Dans le cas contraire, on dira que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est divergente.

2. *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente si $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$ existe et est*

finie. On pose alors

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt.$$

Dans le cas contraire, on dira que $\int_a^b f(t)dt$ *est divergente.*

Déterminer la nature d'une intégrale généralisée c'est dire si elle est convergente ou divergente.

Soit f continue par morceaux sur $[a,b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Pour tout $c \in]a,b[$, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ ont la même nature et si l'une des deux converge on a la relation de Chasle

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt. \tag{1.14}$$

Soit f continue par morceaux sur $]a,b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Alors

$$\int_a^b f(t)dt \quad \text{converge} \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^c f(t)dt \;\text{ et }\; \int_c^b f(t)dt \;\text{ convergent},$$

où $c \in]a,b[$.

Si f et g sont continues par morceaux sur $[a,b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et si $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont convergentes alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\int_a^b (f(t) + \alpha g(t))dt$ est convergente et on a

$$\int_a^b (f(t) + \alpha g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \alpha \int_a^b g(t)dt.$$

Exemples - (Intégrales de Riemann)

1. Au voisinage de 0. On considère l'intégrale généralisée

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha},$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in]0,1]$, on a

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} -\ln x & \text{si} \quad \alpha = 1, \\ \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right) & \text{si} \quad \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Puisque $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \alpha < 1, \\ +\infty & \text{si} \quad \alpha > 1, \end{cases}$$

on déduit que

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \quad \text{converge} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 1. \tag{1.15}$$

et dans ce cas

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

2. Au voisinage de $+\infty$. On considère l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha},$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a

$$\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \ln x & \text{si} \quad \alpha = 1, \\ \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right) & \text{si} \quad \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Puisque $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \alpha < 1, \\ 0 & \text{si} \quad \alpha > 1, \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \quad \text{converge} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1. \tag{1.16}$$

et dans ce cas

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

1.4.1 Intégrales généralisées des fonctions positives

Dans ce paragraphe, $[a, b[$ est un intervalle semi-ouvert avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Si f est une fonction continue par morceaux et positive sur $[a, b[$ alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est croissante et admettra une limite en b si elle est bornée. Cette remarque a pour conséquence les propositions suivantes.

Proposition 4 *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ et telles qu'il existe $c \in [a, b[$, pour tout $x \in [c, b[$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Alors :*

1. *Si* $\int_a^b g(x)dx$ *converge alors* $\int_a^b f(x)dx$ *converge.*
2. *Si* $\int_a^b f(x)dx$ *diverge alors* $\int_a^b g(x)dx$ *diverge.*

Exemple - Nous allons étudier la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{1+t^2} dt$. La fonction $t \mapsto \frac{\sin^2 t}{1+t^2}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$ et on a, pour tout $t \in [0, +\infty[$,

$$0 \leq \frac{\sin^2 t}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

Or

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

Il en résulte que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ est convergente et, en vertu de la proposition 4, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{1+t^2} dt$ est convergente.

Définition 2 *Soit f continue par morceaux sur $[a, b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dira que que $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente.*

La convergence absolue entraîne la convergence.

Proposition 5 *Soit f continue par morceaux sur $[a, b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Si $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente alors elle est convergente et on a*

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Exemple - Nous allons montrer que $\int_0^1 \frac{\sin(1/t)}{\sqrt{t}} dt$ est absolument convergente. La fonction $t \mapsto \frac{\sin(1/t)}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, 1]$ et ne garde pas un signe constant au voisinage de 0. On a

$$0 \leq \left| \frac{\sin(1/t)}{\sqrt{t}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Or $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ est une intégrale de Riemann convergente en vertu de (1.15). Ainsi, $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ est convergente et donc $\int_0^1 \frac{\sin(1/t)}{\sqrt{t}} dt$ est absolument convergente et donc convergente.

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$ dite de Gauss est très utile en probabilité, elle est convergente et on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \tag{1.17}$$

1.5 Exercices corrigés

Exercice 1 *Combien de nombres peut-on former avec les chiffres 0,1,2,3,4,5,6,7, chaque chiffre n'étant présent qu'une fois, de façon que chaque nombre commence par un 7 et soit divisible par 5,*

1. *si les nombres sont de 8 chiffres ?*
2. *si les nombres sont de 6 chiffres ?*

Solution -

1. Un nombre de 8 chiffres qui commence par 7 et qui est divisible par 5 est formé de la manière suivante :
   On place un 0 ou un 5 comme chiffre des unités ce qui nous donne 2 possibilités, on place un 7 comme premier chiffre et les six chiffres restants seront placés dans les six places qui restent ce qui nous donne 6 !=720 possibilités. Ainsi, on obtient $2 \times 720 = 1440$ possibilités.
2. Un nombre de 6 chiffres qui commence par 7 et qui est divisible par 5 est formé de la manière suivante :
   On place un 0 ou un 5 comme chiffre des unités ce qui nous donne 2 possibilités, on place un 7 comme premier chiffre , on choisit 4 chiffres parmi les 6 restants cela fait $C_6^4 = 15$ choix et on les place dans les 4 places restants cela fait 4 !=24 choix. Le résultat est donc $2 \times 15 \times 24 = 720$ possibilités.

Exercice 2 *Cinq hommes et quatre femmes vont au cinéma. Il disposent d'une rangée de neuf places. De combien de façons différentes peuvent-ils s'asseoir si l'on veut que chaque femme soit entourée de deux hommes ?*

Solution - On numérote les places de 1 à 9. Pour que chaque femme soit entourée de deux hommes, il est nécessaire que les places 1, 3, 5, 7, 9 soient occupées par un homme ce qui nous donne 5 !=120 possibilités et il reste donc 4 !=24 possibilités pour les femmes soit au total $24 \times 120 = 2880$ possibilités.

Exercice 3 *Dans une classe de n étudiants, on veut former k groupes contenant respectivement $r_1, r_2, \ldots, r_k$ étudiants avec $r_1 + \ldots + r_k = n$. De combien de façons peut-on les réaliser ?*

Solution -

On commence par choisir r_1 étudiant parmi les n étudiants de la classe ce qui donne $C_n^{r_1}$ possibilités, ensuite on choisit r_2 étudiants parmi les $n - r_1$ restants soit $C_{n-r_1}^{r_2}$ possibilités et ainsi de suite. On obtient donc comme possibilités

$$\frac{n!}{(n-r_1)!r_1} \times \frac{(n-r_1)!}{(n-r_1-r_2)!r_2} \times \ldots \times \frac{(n-r_1-\ldots-r_{k-2})!}{(n-r_1\ldots-r_{k-1})!r_{k-1}} \times \frac{(n-r_1-\ldots-r_{k-1})!}{(n-r_1\ldots-r_k)!r_k}$$

soit, après simplifications,

$$\frac{n!}{r_1!\ldots r_k!}.$$

Exercice 4 *On dispose de 5 billes rouges, 2 blanches et 3 bleus. Si les billes de même couleur sont indiscernables, de combien de façons peut-on les aligner ?*

Solution -

Aligner les billes revient à numéroter les places de 1 à 10, et créer trois groupes composés respectivement de 5, 3 et 2 places. D'après l'exercice précédent, les posssibilités sont au total de $\frac{10!}{5!3!2!} = 2520$.

Exercice 5 *Un groupe de 5 mathématiciens et 7 physiciens doit élire un comité représentatif formé de deux mathématiciens et 2 physiciens. Quel est le nombre de résultats possibles si :*

1. *les 12 personnes sont éligibles ?*
2. *un physicien est élu d'office ?*
3. *2 mathématiciens ne sont pas éligibles ?*

Solution -

1. Si les 12 personnes sont éligibles, on choisit 2 mathématiciens parmi les 5 i.e $C_5^2 = 10$ possibilités, 2 physiciens parmi 7 i.e $C_7^2 = 21$ possibilités, soit au total $10 \times 21 = 210$ possibilités.

2. Si un physicien est élu d'office ceci nous limite les choix des physiciens à 6 et le tolal à $10 \times 6 = 60$.
3. Si 2 mathématiciens ne sont pas éligibles ceci nous limite les choix des mathématiciens à $C_3^2 = 3$ possibilités et le total à $3 \times 21 = 63$ possibilités.

Exercice 6 *Quel est le nombre de groupes de six personnes que l'on peut former avec 4 garçons et 6 filles si l'on veut qu'il contiennent obligatoirement 2 garçons,*

1. *donnés ?*
2. *seulement ?*
3. *au moins ?*

Solution -

1. Former un groupe de 6 personnes avec deux garçons donnés revient à choisir 4 personnes parmi les 8 restantes soit $C_8^4 = 70$ possibilités.
2. Former un groupe de 6 personnes avec deux garçons seulement revient à choisir deux garçons parmi 4 i.e $C_4^2 = 6$ possibilités et 4 filles parmi 6 i.e $C_6^4 = 15$ possibilités. Au total, on obtient $15 \times 6 = 90$ possibilités.
3. Le nombre de groupes de 6 personnes avec deux garçons au moins est la somme du nombre de groupes avec exactement deux garçons soit $C_4^2 \times C_6^4 = 90$, du nombre de groupes avec exactement trois garçons soit $C_4^3 \times C_6^3 = 80$ et du nombre de groupes avec exactement quatre garçons soit $C_4^4 \times C_6^2 = 15$. Au total, on obtient $90 + 80 + 15 = 185$ possibilités.

Exercice 7 *Résoudre les équations où n est l'inconnue.*

$$C_n^2 = 190; \quad C_n^4 = 13C_n^2; \quad A_n^2 = 15 - 3n; \quad A_n^3 = 2n(n-1);$$

$$C_{2n+4}^{3n-1} = C_{2n+4}^{n^2-3n+4}; \quad C_n^3 - C_n^2 = \frac{n^3 - 6n^2}{6} + 5.$$

Solution -

1. L'équation $C_n^2 = 190$ est équivalente à $n^2 - n - 380 = 0$ dont le descriminant $\Delta = (39)^2$. On obtient donc que $n = 20$.
2. L'équation $C_n^4 = 13C_n^2$ avec $n \geq 4$ est équivalente à $n^2 - 5n - 150 = 0$ dont le descriminant est $\Delta = 25^2$. On obtient donc que $n = 15$.
3. On considère l'équation $A_n^2 = 15 - 3n$. On a nécessairement $2 \leq n < 5$. Cette équation équivaut à $n^2 + 2n - 15 = 0$ soit $(n-3)(n+5) = 0$ et donc $n = 3$.
4. On considère l'équation $A_n^3 = 2n(n-1)$. On a nécessairement $n \geq 3$. L'équation s'écrit alors $n(n-1)(n-2) = 2n(n-1)$ avec $n \geq 3$ soit $n(n-4) = 0$ et donc $n = 4$.
5. On considère l'équation

$$C_{2n+4}^{3n-1} = C_{2n+4}^{n^2-3n+4}. \qquad (E)$$

Pour résoudre cette équation, on va montrer l'équivalence suivante :

$$C_n^a = C_n^b \Leftrightarrow a = b \quad \text{ou} \quad a + b = n.$$

Ce sens $\Leftarrow$ est trivial. On suppose que $C_n^a = C_n^b$. Ceci équivaut à

$$a!(n-a)! = b!(n-b)!. \qquad (*)$$

Si $a \neq b$ par exemple $a < b$, on aura $b = a + p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. $(*)$ équivaut donc à

$$(a+1)(a+2)\ldots(a+p) = (n-b+1)(n-b+2)\ldots(n-b+p).$$

On aura nécessairement $a = n - b$. On obtient donc l'équivalence souhaitée.
On remarque d'abord que pour que (E) ait un sens il faut que $3n - 1 \leq 2n + 4$ et $n^2 - 3n + 4 \leq 2n + 4$. Soit $n \leq 5$.
D'après ce qui prècède, (E) est équivalente à

$$n^2 - 6n + 5 = 0 \quad \text{ou} \quad n^2 - 2n - 1 = 0.$$

Les solutions de (E) sont $n = 1$ ou $n = 5$.
6. En développant l'équation

$$C_n^3 - C_n^2 = \frac{n^3 - 6n^2}{6} + 5,$$

on obtient $n = 6$.

Exercice 8 *Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq p$,*

$$A_p^p + A_{p+1}^p + \ldots + A_n^p = \frac{1}{p+1} A_{n+1}^{p+1}.$$

Solution - Montrons par recurrence sur n que pour tout $p \leq n$, on a

$$A_p^p + A_{p+1}^p + \ldots + A_n^p = \frac{1}{p+1} A_{n+1}^{p+1}.$$

Pour $n = 0$, on a $A_0^0 = A_1^1$.

Supposons que le résultat est vrai à l'ordre n. Soit $p \leq n+1$.

Pour $p \leq n$, on a

$$\begin{aligned}
A_p^p + A_{p+1}^p + \ldots + A_{n+1}^p &= A_p^p + A_{p+1}^p + \ldots + A_n^p + A_{n+1}^p \\
&= \frac{1}{p+1} A_{n+1}^{p+1} + A_{n+1}^p \\
&= \frac{1}{p+1} \frac{(n+1)!}{(n-p)!} + \frac{(n+1)!}{(n+1-p)!} \\
&= \frac{1}{p+1} \frac{(n+1)![n+1-p+p+1]}{(n+1-p)!} \\
&= \frac{1}{p+1} A_{n+2}^{p+1}.
\end{aligned}$$

Pour $p = n+1$, il suffit de vérifer que $A_{n+1}^{n+1} = \frac{1}{n+1} A_{n+2}^{n+2}$. Ce qui est évident.

Exercice 9 *En développant* $(1-1)^n$ *; prouver que*

$$\sum_{k \text{ pair}} C_n^k = \sum_{k \text{ impair}} C_n^k.$$

Solution -

On a

$$\begin{aligned}
0 = (1-1)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \\
&= \sum_{k \text{ paire}} C_n^k - \sum_{k \text{ impaire}} C_n^k.
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\sum_{k \text{ paire}} C_n^k = \sum_{k \text{ impaire}} C_n^k.$$

Exercice 10 *Prouver que* $\sqrt{10}[(1+\sqrt{10})^{100} - (1-\sqrt{10})^{100}]$ *est un entier.*

Solution -
On a

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{10}[(1+\sqrt{10})^{100} - (1-\sqrt{10})^{100}] \\ &= \sqrt{10}[\sum_{k=0}^{100} C_{100}^k(\sqrt{10})^k - \sum_{k=0}^{100} C_{100}^k(-1)^{100-k}(\sqrt{10})^k] \\ &= 2\sqrt{10} \sum_{k \text{ impaire}} C_{100}^k(\sqrt{10})^k \\ &= 2 \sum_{k \text{ impaire}} C_{100}^k(\sqrt{10})^{k+1}. \end{aligned}$$

S est alors un entier.

Exercice 11 *Soit* $f(x) = (1+x)^n$. *Exprimer* f' *et* f'' *de deux manières différentes et en déduire une expression pour*

$$S_1 = C_n^1 + 2C_n + \ldots + nC_n^n \quad et \quad S_2 = 2C_n^2 + 6C_n^3 + 12C_n^4 + \ldots + n(n-1)C_n^n.$$

Solution - On a

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k \\ f'(x) &= n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k x^{k-1}. \\ f''(x) &= n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k x^{k-2}. \end{aligned}$$

En prenant $x = 1$, on obtient

$$\begin{array}{rcl} 2^n & = & C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n, \quad n \geq 0 \\ n2^{n-1} & = & C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n, \quad n \geq 1 \\ n(n-1)2^{n-2} & = & 2C_n^2 + 6C_n^3 + \ldots + n(n-1)C_n^n, \quad n \geq 2. \end{array}$$

Exercice 12 *Calculer le déterminant*

$$\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 \\ 1 & C_{n+1}^1 & C_{n+1}^2 \\ 1 & C_{n+2}^1 & C_{n+2}^2 \end{vmatrix}.$$

Solution -

Pour cette exercice, on va utiliser les propriétés des déterminants et la relation de Pascal

$$C_{n+1}^p - C_n^p = C_n^{p-1}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 \\ 1 & C_{n+1}^1 & C_{n+1}^2 \\ 1 & C_{n+2}^1 & C_{n+2}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 \\ 1 & C_{n+1}^1 & C_{n+1}^2 \\ 0 & C_{n+1}^0 & C_{n+1}^1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 \\ 0 & C_n^0 & C_n^1 \\ 0 & C_{n+1}^0 & C_{n+1}^1 \end{vmatrix} = 1.$$

Exercice 13 *Soit E un ensemble de cardinal n.*

On appelle combinaison avec répétition de p élément de E toute collection notée $[x_1, \ldots, x_p]$ de p éléments x_i de E, les x_i n'étant pas nécessairement distincts et n'étant pas ordonnés. On note Γ_n^p le nombre de ces combinaisons avec répétition.

1. *Calculer Γ_n^1 ,Γ_n^2 ,Γ_n^3 ,Γ_2^3.*
2. *Soit x un élément donné de E. Combien de fois x figure-t-il dans l'ensemble des combinaisons avec répétition de p éléments de E ?*
3. *Montrer que*
$$\frac{p}{n}\Gamma_n^p = \Gamma_n^{p-1} + \frac{p-1}{n}\Gamma_n^{p-1}.$$
En déduire Γ_n^p.
4. *Application : combien y a-t-il de suites de n entiers naturels dont la somme est égale à p ?*

Solution -

1. Le nombre de combinaisons avec répétition de 1 éléments de E est n ainsi
$$\Gamma_n^1 = n, \quad n \geq 1.$$
Le nombre de combinaisons avec répétition de 2 éléments de E est la somme du nombre de combinaisons avec deux éléments distincts soit C_n^2 avec le nombre de combinaison avec 1 élément répété deux fois soit n. Ainsi
$$\Gamma_n^2 = C_n^2 + n = \frac{n(n+1)}{2} = C_{n+1}^2, \quad n \geq 1.$$
Le nombre de combinaisons avec répétition de 3 éléments de E est la somme du nombre de combinaisons avec 3 éléments distincts soit C_n^3, du nombre de combinaisons de la forme $[a, a, b]$ avec $a \neq b$ soit $2 \times C_n^2$ et du nombre des combinaisons de la forme $[a, a, a]$ soit n. Ainsi
$$\Gamma_n^3 = C_n^3 + 2 \times C_n^2 + n = C_{n+2}^3.$$

2. Si α_p le nombre de fois qu'un élément de E apparaît dans toutes les combinaisons avec répétition de p éléments de E. Ce nombre est le même pour tous les éléments de E puisque ces derniers jouent un rôle identique. Ainsi $n\alpha_p = p\Gamma_n^p$, soit
$$\alpha_p = \frac{p}{n}\Gamma_n^p.$$

3. On se propose de calculer α_p d'une autre manière. Soit x un élément de E. On s'intèresse au nombre β_p de combinaisons avec répétition à p éléments de E qui contiennent x. Une combinaison avec répétition à p éléments de E qui contient x est de la forme $[x, C]$ où C est une combinaison avec répétition à $p-1$ éléments de E. Ainsi
$$\beta_p = \Gamma_n^{p-1}.$$
On déduit aussi que $\alpha_p = \beta_p + \alpha_{p-1}$ ce qui s'écrit donc
$$\frac{p}{n}\Gamma_n^p = \Gamma_n^{p-1} + \frac{p-1}{n}\Gamma_n^{p-1}.$$
Cette relation s'écrit aussi
$$\Gamma_n^p = \frac{n+p-1}{p}\Gamma_n^{p-1} = \frac{n+p-1}{p} \times \frac{n+p-2}{p-1} \times \ldots \times \frac{n+1}{2}\Gamma_n^1 = C_{n+p-1}^p.$$

4. On note $\{x_1, \dots, x_n\}$ les éléments de E. Soit C une combinaison avec répétition à p éléments de E. On note m_i le nombre de fois que x_i apparaît dans C. On a clairement

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_n = p.$$

Inversement, étant donné une suite d'entiers $(m_1, \dots, m_n)$ telle que $m_1 + \ldots + m_n = p$, on lui associe une unique combinaison avec répétition à p éléments de E ou x_1 apparaît m_1 fois etc.... On obtient donc une bijection entre l'ensemble des combinaisons avec répétition à p éléments et l'ensemble des suites n entiers naturels dont la somme vaut p. Il y a dont Γ_n^p suites de n entiers naturels dont la somme vaut p.

Exercice 14 *Dans un polygone régulier de n côtés, on appelle diagonale tout segment joignant deux sommet non consécutifs. Exprimer le nombre de diagonales en fonction de n.*

Solution -

On notera $(a_1, \dots, a_n)$ les sommets consécutifs du polygone. Pour $1 \leq n \leq 3$, il n'y a pas de diagonale. On suppose que $n \geq 4$. Pour dénombrer le nombre N de diagonales du polygone, on procède de la manière suivante : pour chaque $1 \leq p \leq n$, on calculera α_p le nombre de diagonales qui joinent a_p aux sommets $(a_{p+1}, \dots, a_n)$. Il est clair que

$$\alpha_1 = n - 3, \quad \alpha_2 = n - 3, \quad \alpha_3 = n - 4, \dots, \alpha_{n-2} = 1, \alpha_{n-1} = \alpha_n = 0.$$

Ainsi le nombre de diagonales total du polygone $(a_1, \dots, a_n)$ est

$$N = 1 + \ldots + n - 3 + n - 3 = \frac{(n-3)(n-2)}{2} + n - 3 = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Autre méthode proposée par un étudiant : Le nombre des diagonales N est égales aux nombres des couples (a_i, a_j) avec $i \neq j$ i.e C_n^2 auquel on retranche les n côtés. On obtient donc

$$N = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Exercice 15 *Un facteur arrive dans le hall d'un immeuble. Il doit distribuer 7 prospectus dans dix boites aux lettres nominatives.*

De combien de façons peut-il le faire dans chacun des cas suivants :

1. *Chaque boite aux lettres peut contenir au plus un prospectus et :*
   (a) *Les prospectus sont distincts.*
   (b) *Les prospectus sont identiques.*
2. *Chaque boite aux lettres peut contenir un nombre quelconque de prospectus et :*
   (a) *Les prospectus sont distincts.*
   (b) *Les prospectus sont identiques.*

Solution -

1. Le facteur va commencer par choisir 7 boites aux lettres parmi 10, il a C_{10}^7 choix et ensuite :
   (a) si les prospectus sont différents, il a $7!$ manières de mettre les prospectus dans les boites aux lettres choisies soit au total $7!C_{10}^7 = 86400$ manières de les distribuer ;
   (b) si les prospectus sont identiques, il n'y a qu'une seule manière de les mettre dans les boites aux lettres choisies soit 120 manières de les distribuer.
2. On note $\{B_1, \ldots, B_{10}\}$ les boites aux lettres.
   (a) On numérote les prospectus de 1 jusqu'à 7. Une distribution est donc une application de $\{1, \ldots, 7\}$ vers $\{B_1, \ldots, B_{10}\}$. Il y a donc 10^7 façon d'effectuer la distribution.
   (b) On utilise l'exercice 14. On appelle n_i le nombre de prospectus mis dans la boite B_i, on doit avoir $n_1 + \ldots + n_{10} = 7$. Une distribution est décrite par une suite de 10 entiers naturels dont la somme est 7. D'après l'exercice 14, il y a $\Gamma_{10}^7 = C_{16}^7$ suites de ce type.

Exercice 16 *Soient n et p deux entiers non nuls.*

1. *De combien de façons distinctes peut-on répartir p enveloppes identiques dans n boites aux lettres ?*
2. *En déduire le cardinal de l'ensemble $E_1 = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n, x_1 + \ldots + x_n = p\}$.*

3. *On suppose $p \geq n$. De combien de façons distinctes peut-on répartir p enveloppes identiques dans n boites aux lettres de telle sorte qu'aucune boite aux lettres ne reste vide ?*
4. *De quelle ensemble E_2 (construit comme E_1) peut-on déduire le cardinal ?*
5. *De combien de façons distinctes peut-on répartir p enveloppes distinctes dans n boites aux lettres ?*

Solution -

Exercice 17 *Soient n et p deux entiers non nuls.*

1. *Déterminer le cardinal de l'ensemble des suites croissantes (au sens stricte) formées de p éléments de $\{1, \ldots, n\}$.*
2. *Déterminer le cardinal de l'ensemble des suites croissantes (au sens large) formées de p éléments de $\{1, \ldots, n\}$.*

Solution -

Exercice 18 *On considère le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Dans cet exercice, tous les points ont des coordonnées entières positives.*

On appelle **chemin monotone** *d'origine A et d'extrémité B, toute ligne polygonale définie par $M_0 = A$, $M_n = B$ et constiuée de segments M_kM_{k+1} ($k \in [0, n-1]$) appelés* **pas** *tels que $\overrightarrow{M_kM_{k+1}} = \overrightarrow{i}$ (pas horizontal) ou $\overrightarrow{M_kM_{k+1}} = \overrightarrow{j}$ (pas vertical.*

1. *Combien y a t-il de chemins monotones à n pas partant de l'origine O du repère ?*
2. *Combien y a t-il de chemins monotones :*
   (a) *d'origine O et d'extrémité $M(x, y)$?*
   (b) *d'origine $A(a, b)$ et d'extrémité $B(c, d)$?*
3. *Soient $A(a, b)$ et $B(p, p)$. Combien y a-t-il de chemins monotones d'origine O, d'extrémité A et passant par B ?*
4. *Soit $A(a, b)$ tel que $a > b$. Combien y a-t-il de chemins monotones d'origine O et d'extrémité A qui ne rencontre la droite d'équation $y = x$ qu'au point O ?*

Solution -

1. Si l'on note H un pas horizontal et V un pas vertical, un chemin monotone à n pas partant de O est décrit par une n-liste de l'ensemble $\{H, V\}$. Il y a donc 2^n chemins monotones d'origine O.
2. (a) Tout chemin monotone d'origine O et d'extrémité $M(x, y)$ est un chemin à $x + y$ pas dont x sont horizontaux et y verticaux. Un tel chemin est entièrement déterminé par le choix de x places parmi $x + y$. Il y a donc C_{x+y}^{x} chemins monotones d'origine O et d'extrémité M.

   (b) Pour qu'il existe un chemin monotone d'extrémité $A(a, b)$ et $B(c, d)$ il est nécessaire que $c \geq a$ et $d \geq b$.Un tel chemin aura alors $(c - a) + (d - b)$. Le même raisonnement que ce qui prècède nous donne qu'il y a $C_{(c-a)+(d-b)}^{c-a}$ chemin monotone d'origine A et d'extrémité B.
3. Un chemin OA passant par B est la réunion de deux chemin OB et BA. Il y a C_{2p}^{p} chemins monotones OB et pour chacun d'eux C_{a+b-2p}^{a-p} chemins monotones BA si $a \geq p$ et $b \geq p$. Donc $C_{2p}^{p} \times C_{a+b-2p}^{a-p}$ chemins monotones OA passant par B.
4. Puisque $a \geq b$, un chemin monotone OA ne rencontrant pas la droite D d'équation $y = x$ doit commencer nécessairement par un pas horizontal OI. Le nombre de chemins cherchés est donc le nombre de chemins IA ne coupant pas D. Il y a C_{a+b-1}^{a-1} chemins IA. Cherchons le nombre de chemins IA coupant D et par différence nous aurons le résultat souhaité. On note J le symétrique de I par rapport à D. Tout chemin monotone JA coupe D et sont symétrique par rapport à D est un chemin monotone IA qui coupe D et inversment à tout chemin monotone IA qui coupe D est associé un chemin JA de la manière suivante : on considère le dernier point B où IA rencontre D et on considère le chemin réunion du symétrique de IB et de BI. Ainsi, le nombre de chemins monotones IA qui coupe D est égal au nombre de chemins monotones JA soit C_{a+b-1}^{a}.

   Il y a donc $C_{a+b-1}^{a-1} - C_{a+b-1}^{a}$ chemins OA ne coupant pas D, c'est à dire

   $$C_{a+b}^{a} \times \frac{a-b}{a+b}.$$

Chapitre 2

Bases du calcul des probabilités

2.1 Expériences aléatoires, univers des éventualités et événements

L'objet de la théorie des probabilités est l'étude mathématique des phénomènes où le hasard intervient. Lancer un dé, prendre un individu dans une population et noter ses caractéristiques, compter le nombre de voitures dans un péage, observer la durée de vie d'une ampoule, observer les mutations dans le génome sont tous des expériences qui donnent des résultats "hasardeux". Ces expériences sont appelés **expériences aléatoires.**

Définition 3 *1. Une expérience $\mathcal{E}$ est dite aléatoire si, répétée plusieurs fois dans des conditions identiques, elle donne des résultats différents et imprévisibles.*

2. L'ensemble des résultats possibles de l'expérience $\mathcal{E}$ est appelé univers des éventualités. On notera Ω cet ensemble. Un élément $\omega \in \Omega$ est appelé éventualité.

Exemples - Voici quelques exemples :

Expérience	Ω
Lancé d'une pièce	$\{Pile, Face\}$
Observer le spin d'une particule	$\{+1, -1\}$
Relever l'état d'une case mémoire	$\{0, 1\}$
Lancer un dé	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Compter les clients d'une file d'attente	$\mathbb{N}$
Observer une durée de fonctionnement	$\mathbb{R}^+$
Lancer deux dés consécutivement	$\{(n, m) : n = 1 \ldots 6; m = 1 \ldots 6\}$

Définition 4 *On appelle événement aléatoire associé à $\mathcal{E}$ tout fait qui dépend du résultat de l'expérience aléatoire dont on pourra dire à l'issue de l'expérience s'il est réalisé ou non. On peut donc l'assimiler à un sous-ensemble de Ω formé par les éventualités pour lesquelles il est réalisé. Un événement s'identifie donc sans ambiguité à une partie de Ω.*

Exemple -

1. **On considère l'expérience aléatoire du lancé d'un dé. On a**

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

   L'événement le résultat du lancé d'un dé est pair correspondant à la partie A de Ω

$$A = \{2, 4, 6\}.$$

2. **On considère l'expérience aléatoire du lancé de deux dés consécutifs. On a**

$$\Omega = \{(n, m) : n = 1 \dots 6; m = 1 \dots 6\}.$$

   L'événement la somme des valeurs apparues est égale à 6 correspond à la partie A de Ω donnée par

$$A = \{(1, 5), (5, 1), (4, 2), (2, 4), (3, 3)\}.$$

3. **On considère l'expérience aléatoire observer la durée de fonctionnement d'une machine. On a**

$$\Omega = \mathbb{R}^+.$$

   L'événement la durée de fonctionnement est inférieure à $100h$ correspond à la partie A de Ω

$$A = [0, 100].$$

Certains événements sont remarquables dont voici quelques exemples :

- **Evénément certain :** c'est l'événement lié à une propriétés qui est toujours réalisée à l'issue de l'expérience aléatoire ; c'est l'événement assimilé à l'ensemble Ω. L'événement " le résultat d'un lancé de dé est inférieur à 7" est un événement certain.

- **Evénément impossible :** c'est l'événement lié à une propriétés qui n'est jamais réalisée à l'issue de l'expérience aléatoire ; c'est l'événement assimilé à l'ensemble vide $\emptyset$. L'événement " le résultat d'un lancé de dé est inférieur à -1" est un événement impossible.
- **Evénément complémentaire :** Si un événement est assimilé à $A \subset \Omega$ son contraire appelé complémentaire est assimilé à $\overline{A}$.
- **La réunion et l'intersection :** Si A et B sont deux événements, l'événement "A ou B" est assimilé à $A \cup B$ et l'événement "A et B" est assimilé à $A \cap B$.
- Deux événements A et B sont dit **incompatibles** s'il ne peuvent pas se produire en même temps c'est à dire que $A \cap B = \emptyset$. Dans un lancé de dé, les événements "le résultat du lancé est paire" et "le résultat du lancé est impaire" sont incompatibles.
- Le fait que la réalisation de A entraîne la réalisation de B se traduit par $A \subset B$.

2.2 Axiomes d'une loi de probabilité

L'une des idée majeure de la théorie des probabilités qui fait sa richesse est la **loi des grands nombres.** Nous allons donner ici une idée intuitive de cette loi et on verra plus tard une formulation plus précise. L'idée de base est que bien que les résultats d'une expérience aléatoire varient d'une manière hasardeuse, la **répétition de l'expérience** un grand nombre de fois permet de déceler des **lois** qui régissent les résultats. En effet, si A est un événement associé à une expérience aléatoire $\mathcal{E}$, en répétant l'expérience n fois et en notant n_A le nombre de fois ou l'événement A s'est produit, la **fréquence expérimentale** de A est le rapport

$$F_A = \frac{n_A}{n}. \tag{2.1}$$

Il est clair que

$$0 \leq F_A \leq 1; \quad F_\Omega = 1; \qquad F_{A\cup B} = F_A + F_B \quad si \quad A \cap B = \emptyset. \tag{2.2}$$

La loi des grands nombres assure que la fréquence expérimentale sur un grand nombre de répitions varie peu et tend vers une limite qui sera la probabilité de l'événement. Cette limite vérifiera les propriétés de (2.2). Il est donc naturel, une fois que cette approche intuitive est bien comprise, de poser la définition mathématique suivante :

Définition 5 *Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire et soit Ω l'univers des éventualités associé. Une loi de probabilité est une fonction $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $A \subset \Omega$ associe un nombre $\mathbb{P}(A)$ vérifiant les axiomes suivants :*

1. *Pour tout événement A, $0 \leq \mathbb{P}(A)$.*
2. *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements disjoints deux à deux, alors*
$$\mathbb{P}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n).$$
3. *La probabilité de l'événement certain est 1, c'est-à-dire,*
$$\mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

Les propriétés suivantes découlent immédiatement des axiomes 1.,2. et 3. :
- Pour tout événement A,
$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) \tag{2.3}$$
et en particulier $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- Pour tout couple d'événements A et B,
$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B). \tag{2.4}$$
En particulier
$$\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$
- Pour tout couple d'événements $A \subset B$, $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ en particulier, pour tout événement A,
$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1.$$

Si $\mathcal{E}$ est une expérience aléatoire et $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω alors $(\Omega, \mathbb{P})$ est **un modèle probabiliste** qui décrit mathématiquement l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$.

Etudions maintenant quelques exemples simples de modèles probabilistes.

Exemples -

1. **Lancé d'une pièce de monnaie :**
On considère l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$ qui consiste à lancer une pièce de monnaie et noter la face obtenue. Il y a deux résultats possibles à savoir pile (P) et face (F). L'univers des éventuallités est $\Omega = \{P, F\}$ et les événements sont $\{P, F\}$, $\{F\}$, $\{P\}$ et $\emptyset$.

Une loi de probabilité sur $(\mathcal{E}, \Omega)$ est entièrement donnée par $\mathbb{P}(\{F\})$. En effet si $\mathbb{P}(\{F\}) = p$ avec $0 \leq p \leq 1$, on aura

Evénement	$\{F\}$	$\{P\}$	$\{P, F\}$	$\emptyset$
Probabilité	p	$1-p$	**1**	**0**

Si on fait l'hypothèse que les événements $\{F\}$ et $\{P\}$ sont équiprobables ie $1 - p = p$, on en déduit que $p = \frac{1}{2}$.

2. **Lancé d'un dé truqué :**
   Un dé non homogène est un peu plus lourd vers la face 2 que vers son opposée la face 5. On observe expérimentalement que cette face 5 est trois fois plus fréquente que la face 2 et deux fois plus fréquente que chacune des faces latérales qui, elles, apparaissent avec la même fréquence. On se propose de trouver un modèle probabiliste à cette situation.

   L'expérience aléatoire $\mathcal{E}$ consiste à lancer le dé et à noter la face apparue. L'univers des éventualités est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. La loi de probabilité est entièrement déterminée si on connaît les valeurs $p_i = P(\{i\})$ pour $i = 1, \ldots, 6$. L'énoncé se traduit par

$$p_5 = 3p_2; \quad p_5 = 2p_1; \quad p_1 = p_3 = p_4 = p_6.$$

   L'axiome 3. de la définition 5 donne

$$p_1 + \ldots + p_6 = 1.$$

   Un calcul direct donne

$$p_1 = p_3 = p_4 = p_6 = \frac{3}{20}; \quad p_2 = \frac{1}{10}; \quad p_5 = \frac{3}{10}.$$

   Ainsi, par exemple si A désigne l'événement "la face obtenue est paire", on a

$$\mathbb{P}(A) = p_2 + p_4 + p_6 = \frac{2}{5}.$$

2.3 Les modèles probabilistes discrets

Dans ce cas l'ensemble des éventualités Ω est fini ou dénombrable

$$\Omega = \{\omega_i : i \in I \subset \mathbb{N}\}.$$

Comme tout événement est réunion finie ou dénombrable de singletons, il suffit de définir la probabilité de chaque singleton. On pose alors, pour tout $i \in I$,

$$\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i. \tag{2.5}$$

Ainsi la probabilité de chaque événement A sera déterminée par l'axiome 2. de la définition 5

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i. \tag{2.6}$$

D'un autre côté, les axiomes 2. et 3. de la définition 5 entraînent que

$$\sum_{i \in I} p_i = 1. \tag{2.7}$$

Un cas particulier intéressant est le cas où Ω est fini

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\},$$

et les p_i sont aussi constants. On dit qu'on est dans une situation **d'équiprobabilité**. La relation (2.7) entraîne que, pour tout $1 \leq i \leq n$,

$$\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n}. \tag{2.8}$$

La probabilité de tout événement A est alors donnée par

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}. \tag{2.9}$$

Exemples -

1. **Jouer au loto est une expérience aléatoire qui consiste à choisir 6 numéros parmi 49. Ainsi (voir (??))**

   $$\mathrm{Card}(\Omega) = C_{49}^{6} = 13983816.$$

   La chance de gagner si on remplis un seul bulletin est donc

   $$p_\ell = \frac{1}{13983816}.$$

2. **On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer consécutivement deux dés et noter respectivement leurs faces supérieurs. On a**

   $$\Omega = \{(m, n), 1 \leq m, n \leq 6\}.$$

Si les dès ne sont pas truqués on suppose qu'on est dans un schéma equiprobable et on pose, pour tout $(m, n) \in \Omega$**,**

$$\mathbb{P}(\{(m, n)\}) = p_{m,n} = \frac{1}{36}.$$

Ainsi si A **désigne l'événement les valeurs des deux dès sont identiques on a**

$$A = \{(1, 1), \ldots, (6, 6)\}$$

et donc en vertu de (2.9)

$$\mathbb{P}(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Notons maintenant S **la somme des deux dés et** $\{S = k\}$ **l'événement la somme des deux dés est égale à** k**. Alors on a**

$$\begin{array}{ll}
\{S=2\} = \{(1,1)\} & \mathbb{P}(S=2) = \frac{1}{36}, \\
\{S=3\} = \{(1,2),(2,1)\} & \mathbb{P}(S=3) = \frac{1}{18}, \\
\{S=4\} = \{(1,3),(2,2),(3,1)\} & \mathbb{P}(S=4) = \frac{1}{12}, \\
\{S=5\} = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\} & \mathbb{P}(S=5) = \frac{1}{9}, \\
\{S=6\} = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\} & \mathbb{P}(S=6) = \frac{5}{36}, \\
\{S=7\} = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\} & \mathbb{P}(S=7) = \frac{1}{6}, \\
\{S=8\} = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\} & \mathbb{P}(S=8) = \frac{5}{36}, \\
\{S=9\} = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\} & \mathbb{P}(S=9) = \frac{1}{9}, \\
\{S=10\} = \{(4,6),(5,5),(6,4)\} & \mathbb{P}(S=10) = \frac{1}{12}, \\
\{S=11\} = \{(5,6),(6,5)\} & \mathbb{P}(S=11) = \frac{1}{18}, \\
\{S=12\} = \{(6,6)\} & \mathbb{P}(S=12) = \frac{1}{36}.
\end{array}$$

3. **Supposons que** r **personnes sont réunis dans une seul pièce. Quelle est la probabilité que deux d'entre eux au moins aient le même jour d'anniversaire ? Si les personnes sont numérotés de** 1 **à** r **la liste de leur jours d'anniversaire** $(n_1, \ldots, n_r)$ **est une application de** $\{1, \ldots, r\}$ **vers les 365 jours de l'année. Ainsi, d'après le théorème ??,**

$$\text{Card}(\Omega) = (365)^r.$$

Notons A **l'événement "deux personnes au moins ont le même jour anniversaire". Son événement complémentaire** $\overline{A}$ **est l'événement "toutes les** r **personnes ont des jours d'anniversaire deux à deux différents. Ainsi**

$$\text{Card}(\overline{A}) = A_{365}^r = 365 \times (364) \times (363) \times \ldots \times (365 - r + 1).$$

Il en résulte en faisant l'hypothèse que nous sommes dans un modèle equiprobable et en utilisant (2.3) que

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{365 \times (364) \times (363) \times \ldots \times (365 - r + 1)}{(365)^r} = p_r.$$

Il est intéressant de noter les valeurs suivantes de p_r :

r	**10**	**15**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**30**	**40**	**55**
p_r	**0.12**	**0.25**	**0.41**	**0.44**	**0.48**	**0.51**	**0.54**	**0.57**	**0.71**	**0.89**	**0.99**

Cette table montre en particulier que si plus de 23 personnes sont dans la même pièce alors il y a plus d'une chance sur 2 que deux d'entre eux partagent le même jour d'anniversaire.

2.4 Probabilités conditionnelles et formule de Bayes

On lance deux dés consécutifs et on s'intéresse à la probabilité de l'événement A "la somme est supérieur ou égal à 10". On a alors

$$A = \{(4,6), (5,5), (5,6), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

et donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}.$$

Si dans la même expérience aléatoire on s'interesse à la probabilité de l'événement A sachant que le premier dés est un 6. Dans ce cas l'univers des éventualités devient $\Omega' = \{(6,n), 1 \leq n \leq 6\}$ et

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A \cap \Omega')}{\text{Card}(\Omega')} = \frac{1}{2}.$$

Dans cette exemple, nous avons disposé d'une **information à priori** qui a modifié à la fois l'univers des éventualités et la probabilité de l'événement étudié.
Cette exemple, nous amène à introduire la notion de **probabilité conditionnelle** qui est l'une des plus fructueuse en théorie des probabilités. Elle nous fournit la manière de calculer la probabilité d'un événement sur la base d'une **information à priori**. Pour être plus précis, étant donné un modèle

probabiliste $(\mathcal{E}, \Omega, \mathbb{P})$. Supposons que l'on sait que le résultat de l'expérience aléatoire $\mathcal{E}$ est dans un événement B. On cherche à calculer la probabilité que le résultat soit dans un événement A. Pour cela, on va construire une nouvelle loi de probabilité qui tient compte de cette information et qui à tout événement A associe la **probabilité conditionnelle de** A **sachant** B qu'on notera $\mathbb{P}(A|B)$.

Définition 6 *Soit* $(\mathcal{E}, \Omega, \mathbb{P})$ *un modèle probabiliste et soient* A *et* B *deux événements tels que* $\mathbb{P}(B) \neq 0$. *La probabilité conditionnelle de* A *sachant* B *est*

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Une loi de probabilité conditionnelle est une loi de probabilité. En effet :

1. $\mathbb{P}(A|B) \geq 0$;
2. $\mathbb{P}(\Omega|B) = 1$;
3. $\mathbb{P}((\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n)|B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n|B)$ si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements deux à deux disjoints.

Exemples -

1. **On lance une pièce de monnaie trois fois de suite. On cherche la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(A|B)$ où A est l'événement " il y a plus de face que de pile" et B l'événement " le premier lancé est une face". L'univers des éventualités, A et B sont donnés par**

$$\begin{aligned} \Omega &= \{FFF, FFP, FPF, FPP, PFF, PFP, PPF, PPP\}, \\ A &= \{FFF, FFP, FPF, PFF\}, \\ B &= \{FFF, FFP, FPF, FPP\}. \end{aligned}$$

   Ainsi

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{3}{4}.$$

2. **Un radar détecte un avion dans l'air avec une probabilité de 0.99. On suppose qu'un avion est présent avec une probabilité de 0.05. Quelle est la probabilité d'une fausse alerte ? Quelle est la probabilité que l'avion soit présent et que le radar ne le détecte pas ?**

   On considère les événements $A =$" un avion est présent dans l'air" et $B =$" le radar détecte un avion". Les événements " une fausse alerte" et " un avion est présent et le radar ne le détecte

pas" sont représentés respectivement par $B \cap A^c$ et $A \cap B^c$. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B^c) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c|A) = 0.0005;\\ \mathbb{P}(B \cap A^c) &= \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B|A^c) = 0.095.\end{aligned}$$

2.5 Théorème des probabilités totales et règle de Bayes

Une **partition** de Ω est une famille de parties $(A_1, \ldots, A_p)$ telle que, pour tout $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ et $\cup_{1 \leq i \leq p} A_i = \Omega$.

Théorème 2 (Théorème des probabilités totales) *Soit $(\mathcal{E}, \Omega, \mathbb{P})$ un modèle probabiliste et soit $(A_1, \ldots, A_n)$ une partition de Ω telle que, pour tout $1 \leq p \leq n$, $\mathbb{P}(A_p) > 0$. Alors pour tout événement B,*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \ldots + \mathbb{P}(A_n \cap B)\\ &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B|A_1) + \ldots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B|A_n).\end{aligned}$$

Exemples -

1. **Lors d'une élection, les électeurs sont reparties en trois catégories. Les démocrates représentent** 45% **des électeurs, les socialistes** 35% **et les non affiliés** 20%**. Un candidat** C **à reçu** 10% **des voix des démocrates,** 60% **des voix des socialistes et** 40% **des voix des non affiliés. Un électeur est choisi au hasard. Quelle est la probabilité qu'il a voté pour le candidat** C **? Notons** C **l'événement que l'électeur a voté** C**,** D **qu'il soit démocrate,** S **qu'il soit socialiste et** A **qu'il soit non affilié. Comme les événements** D**,** S **et** A **forment une partition de l'ensemble des électeurs, on peut appliquer le théorème 2 et on obtient alors**

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C) &= \mathbb{P}(C|D)\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(C|S)\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(C|A)\mathbb{P}(A)\\ &= \frac{10}{100} \times \frac{45}{100} + \frac{60}{100} \times \frac{35}{100} + \frac{40}{100} \times \frac{20}{100} = 0.335.\end{aligned}$$

2. **Une urne contient** n **boules noires et** r **boules rouges. On tire sans remise deux boules de cette urne. Quelle est la probabilité que la deuxième soit noire ? Soient** A **l'événement "la deuxième boule est noire" et** B **l'événement "la première boule**

est noire". Les événements B et $\overline{B}$ forment une partition et donc on peut appliquer le théorème 2 et obtenir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|\overline{B})\mathbb{P}(\overline{B}) \\ &= \frac{n-1}{n+r-1} \times \frac{n}{n+r} + \frac{n}{n+r-1} \times \frac{r}{n+r} = \frac{n}{n+r}.\end{aligned}$$

3. **On dispose d'une caisse C et de deux urnes U_1 et U_2. La caisse C contient p_1 plaques portant le numéro 1 et p_2 plaque portant le numéro 2. Pour $i = 1, 2$ l'urne U_i contient r_i boules rouges et n_i boules noires.**
   On tire une plaque au hasard de C et si la plaque porte le numéro i $(i = 1, 2)$ on choisit dans l'urne U_i une boule. Nous allons calculer probabilité de l'événement R "la boule choisit est rouge". Pour $i = 1, 2$ notons A_i l'événement "la plaque choisie porte le numéro i". Les événements A_1 et A_2 forment une partition et donc on peut appliquer le théorème 2 et obtenir

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R) &= \mathbb{P}(R|A_1)\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(R|A_2)\mathbb{P}(A_2) \\ &= \frac{r_1}{r_1+n_1} \times \frac{p_1}{p_1+p_2} + \frac{r_2}{r_1+n_1} \times \frac{p_2}{p_1+p_2}.\end{aligned}$$

   Prenons le cas particulier $r_1 = 10$, $n_1 = 5$, $r_2 = 5$ et $n_2 = 10$.
   - $p_1 = 2$ **et** $p_2 = 8$. **Dans ce cas**

$$\mathbb{P}(R) = \frac{10}{15} \times \frac{2}{10} + \frac{5}{15} \times \frac{8}{10} = \frac{6}{15} < \frac{1}{2}.$$

   - $p_1 = 5$ **et** $p_2 = 5$. **Dans ce cas**

$$\mathbb{P}(R) = \frac{10}{15} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{15} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

   - $p_1 = 9$ **et** $p_2 = 1$. **Dans ce cas**

$$\mathbb{P}(R) = \frac{10}{15} \times \frac{9}{10} + \frac{5}{15} \times \frac{1}{10} = \frac{95}{150} > \frac{1}{2}.$$

Soient A et B deux événement d'un modèle probabiliste tels que $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$. Alors

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}. \tag{2.10}$$

Cette formule d'apparence simple si elle est combinée avec la formule de probabilité totale donne la règle de Bayes qui est très puissante. Avant d'énoncer la règle de Bayes, nous allons donner un exemple pour illustrer la formule (2.10).

Exemple - Dans l'exemple 1 ci-dessus, si un électeur est choisi au hasard et s'il a voté pour le candidat C la probabilité qu'il soit socialiste est donnée par la formule (2.10). Ainsi

$$\mathbb{P}(C|S) = \frac{\mathbb{P}(S|C)\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(S)} = (0.6 \times 0.35)/0.335 \simeq 0.63.$$

Théorème 3 **(Règle de Bayes)** *Soit $(\mathcal{E}, \Omega, P)$ un modèle probabiliste et soit $(A_1, \ldots, A_n)$ une partition de Ω telle que, pour tout $1 \leq p \leq n$, $P(A_p) > 0$. Alors pour tout événement B tel que $P(B) > 0$ et pour tout $1 \leq p \leq n$,*

$$P(A_p|B) = \frac{P(A_p)P(B|A_p)}{P(A_1)P(B|A_1) + \ldots + P(A_n)P(B|A_n)}.$$

Exemples -

1. **On dispose de trois caisses C_i, $i = 1, 2, 3$. La caisse C_1 contient deux boules rouges, C_2 une boule rouge et une boule noire et C_3 deux boules noires. On choisit une caisse au hasard et une boule dans cette caisse. Si la boule est rouge, nous allons calculer la probabilité que c'était la caisse C_1 qui a été choisie. Notons A_i l'événement "la caisse C_i est choisie" et R "une boule rouge est choisie". D'après la règle de Bayes**

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1|R) &= \frac{\mathbb{P}(R|A_1)\mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(R|A_1) + \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(R|A_2) + \mathbb{P}(A_3)\mathbb{P}(R|A_3)} \\ &= \frac{1\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 0} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

2. **Dans une usine la production est assurée par deux machines A et B qui produisent, respectivement, 60% et 40% du total des marchandises. La machine A produit 3% des produits défectueux et la machine B 5%. Etant donné un produit défectueux, nous allons calculer la probabilité qu'il soit produit par la machine B. Notons D l'événement que le produit est défectueux. D'après la règle de Bayes on a**

$$\mathbb{P}(B|D) = \frac{\mathbb{P}(D|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(D|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(D|A)\mathbb{P}(A)} = \frac{0.05 \times 0.4}{0.05 \times 0.4 + 0.03 \times 0.6} = 52.63\%.$$

3. **Les laboratoires pharmaceutiques indiquent pour chaque test sa sensibilité α qui est la probabilité que le test soit positif quand le sujet est malade et sa spécifité β qui est la probabilité que le test soit négatif si le sujet est sain. Sachant qu'en moyenne il y a un malade sur 1000, que $\alpha = 98\%$ et $\beta = 97\%$, nous allons calculer la probabilité qu'un sujet soit sain alors que son test est positif et la probabilité qu'un sujet soit malade alors que le test soit négatif. Notons M l'événement "le sujet est malade" et S l'événement le" sujet est sain", P l'événement "le test est positif" et l'événement "le test est négatif". En utilisant la règle de Bayes nous allons calculer $\mathbb{P}(S|P)$ et $\mathbb{P}(M|N)$. On a**

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S|P) &= \frac{\mathbb{P}(P|S)\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(P|S)\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(P|M)\mathbb{P}(M)} \\
&= \frac{0.02 \times (1 - 0.001)}{0.02 \times (1 - 0.001) + 0.98 \times 0.001} \simeq \frac{30}{31}, \\
\mathbb{P}(M|N) &= \frac{\mathbb{P}(N|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(N|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(N|S)\mathbb{P}(S)} \\
&= \frac{0.03 \times 0.001}{0.03 \times 0.001 + 0.97 \times (1 - 0.001)} \simeq 3.10^{-5}.
\end{aligned}$$

2.6 Evénements indépendants

Cette notion est très importante, elle signifie que la probabilité d'un événement A est la même que l'on connaisse ou non l'événement B. Cette phrase se traduit par

$$P(A) = P(A|B)$$

ce qui entraîne que

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Ceci est la définition de deux événements indépendants. Plus généralement

Définition 7 *Soit $(\mathcal{E}, \Omega, \mathbb{P})$ un modèle probabiliste. Les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont dits indépendants si pour tout sous-ensemble d'indices $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$,*

$$\mathbb{P}(\cap_{j=1}^{k} A_{i_j}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \ldots \times \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Ainsi deux événements A et B sont $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Alors que trois événements A, B et C sont indépendants si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B),\ \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C),\ \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

Exemple - Une urne contient 4 boules blanches et 2 boules rouges. On tire avec remise deux boules de l'urne. Soient A l'événement "la première boule est blanche" et B l'événement "la deuxième boule est blanche". Nous allons montrer que ces deux événements sont indépendants. L'univers des éventualités est $\Omega = \{(m,n), 1 \leq m, n \leq 6\}$. On a alors

$$A = \{(m,n), 1 \leq m \leq 4, 1 \leq n \leq 6\} \quad \textbf{et} \quad B = \{(m,n), 1 \leq m \leq 6, 1 \leq n \leq 4\}.$$

On a alors

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}.$$

D'un autre côté,

$$A \cap B = \{(m,n), 1 \leq m \leq 4, 1 \leq n \leq 4\}$$

et donc

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Des événements peuvent être indépendant deux à deux sans être globalement indépendant comme le montre l'exemple suivant.

Exemple - On considère le modèle equiprobable $(\Omega, \mathbb{P})$ défini par $\Omega = \{a, b, c, d\}$. On considère les événements

$$A = \{a, b\}, \ B = \{a, c\} \quad \textbf{et} \quad C = \{a, d\}.$$

Alors $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$ et

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \ \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C), \ \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

alors que

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

2.7 Exercices corrigés

Exercice 19 *Dans un espace probabilisé Ω, on donne trois événements A, B, C tels que $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,4$, $P(C) = 0,3$, $P(A\cap B) = 0,2$, $P(A\cap C) = 0,1$, $P(B \cap C) = 0,1$ et $P(A \cap B \cap C) = 0,05$.*

1. *Calculer la probabilité des événements $A\cap(B\cup C)$, $A\cup(B\cap C)$, $A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$.*
2. *Démontrer en général, que pour des événements quelconques A, B, C :* $P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cup C)+P(A\cap B\cap C)$.
3. **Continuité des probabilités**
   (a) *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$. Montrer que*
   $$P\left(\bigcup_n A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$
   (b) *Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$. Montrer que*
   $$P\left(\bigcap_n A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

Solution -

1. On a
   $$\begin{aligned}\diamond P(A\cap(B\cup C)) &= P((A\cap B)\cup(A\cap C))\\ &= P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C) = 0.25.\\ \diamond P(A\cup(B\cap C)) &= P(A)+P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C) = 0.65.\end{aligned}$$
2. On a $A\cap\overline{B}\cap\overline{C} = A\cap(\overline{B\cup C})$ et
   $$A = [A\cap(B\cap C)]\cup[A\cap(\overline{B\cup C})] \quad \text{réunion disjointe.}$$
   et donc
   $$\diamond P(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}) = P(A) - P(A\cap B\cap C) = 0.35.$$

3. On a

$$\begin{aligned} P(A\cup(B\cup C) &= P(A)+P(B\cup C)-P(A\cap(B\cup C)) \\ &= P(A)+P(B)+P(C)-P(B\cap C)-P(A\cap B)-P(A\cap C) \\ &+ P(A\cap B\cap C). \end{aligned}$$

4. (a) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements tels que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. On a

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_0 \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_{n+1}\backslash A_n) = A_0 \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_{n+1}\cap\overline{A_n}) \text{ (réunion disjointe).}$$

D'après l'axiome d'additivité, on aura

$$P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = P(A_0) + \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_{n+1}\cap\overline{A_n}).$$

Or

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}\cap\overline{A_n}) &= 1-P(\overline{A_{n+1}}\cup A_n) \\ &= 1-(1-P(A_{n+1}))-P(A_n) = P(A_{n+1})-P(A_n). \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

(b) Se déduit de a) par passage au complémentaire.

Exercice 20 *Trois chasseurs tirent sur un oiseau. Quelle est la probabilité que l'oiseau soit touché, sachant que les probabilités de toucher l'oiseau pour chaque homme sont* $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{2}{3}, P(C)=\frac{1}{4}$?

Solution - Les trois événements sont indépendants. L'événement "l'oiseau est touché" est représenté par $A\cup B\cup C$. On a

$$\begin{aligned} P(A\cup B\cup C) &= 1-P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}) \\ &= 1-P(\overline{A})\times P(\overline{B})\times P(\overline{C}) = \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

Exercice 21 *Une population est composée de 40% d'hommes et de 60% de femmes ; 50% des hommes et 30% des femmes fument. Quelle est la probabilité pour qu'un fumeur choisi au hasard soit une femme ?*

Solution - L'expérience aléatoire consiste à choisir un individu parmi une population composée de 40% d'hommes et 60% de femmes. On considère les événements suivants :
H : "L'individu choisi est un homme"
F : " L'individu choisi est une femme"
T : " L'individu choisi fume"
On veut calculer $P(F|T)$. On a

$$P(F|T) = \frac{P(F \cap T)}{P(T)}.$$

D'un autre côté, d'après le théorème des propabilité totales

$$P(F \cap T) = P(T|F)P(F) \quad \text{et} \quad P(T) = P(T|F)P(F) + P(T|H)P(H).$$

On en déduit que

$$P(F|T) = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{3}{10}}{\frac{3}{5} \times \frac{3}{10} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{2}} = \frac{3}{19}.$$

Exercice 22 *Une urne contient b boules blanches et r rouges. On tire successivement n boules en remettant la boule après tirage si elle est rouge et en ne la remettant pas si elle est blanche.*
Quelle est la probabilité P d'obtenir exactement une boule blanche en n tirages ?

Solution - La boule blanche peut être obtenue à l'un quelconque des n tirages, les autres boules obtenues étant rouges.

Soit B_k (resp. R_k) l'événement : " On obtient une boule blanche (resp. rouge) au k-ième tirage." On a

$$\begin{aligned}
P &= P\left[\bigcup_{k=1}^{n}(R_1 \cap \ldots \cap R_{k-1} \cap B_k \cap R_{k+1} \cap \ldots \cap R_n)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(R_1 \cap \ldots \cap R_{k-1} \cap B_k \cap R_{k+1} \cap \ldots \cap R_n) \\
&= \sum_{k=1}^{n}[P(R_1) \ldots P(R_{k-1}|R_1 \cap \ldots \cap R_{k-1})P(B_k|R_1 \cap \ldots \cap R_k) \ldots \\
&\quad P(R_n|R_1 \cap \ldots \cap B_k \cap \ldots \cap R_{n-1})] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{r}{b+r}\right)^{k-1} \times \frac{b}{b+r} \times \left(\frac{r}{b+r-1}\right)^{n-k} \\
&= \frac{br^{n-1}}{(b+r-1)^n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{b+r-1}{b+r}\right)^k \\
&= \frac{br^{n-1}(b+r-1)}{(b+r-1)^n(b+r)} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b+r-1}{b+r}\right)^k \\
&= b\left(\frac{r}{b+r-1}\right)^{n-1}\left[1-\left(\frac{b+r-1}{b+r}\right)^n\right].
\end{aligned}$$

Exercice 23 *Deux amis se trouvent dans la queue à l'entrée du restaurant universitaire. Sachant que la queue comporte* n *personnes alignées, quelle est la probabilité pour qu'ils soient séparés par cinq personnes exactement ?*

Solution - n étudiants s'alignent à l'entrée du restaurant. Soit E l'événement " les deux amis sont séparés par r personnes". Pour que l'événément soit possible, il faut que $n \geq r+2$. Si on ne tient pas compte de l'ordre relatif des deux amis, il y a $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ couples de places possibles pour eux, tous équiprobable. L'intervalle fermé délimité par les deux amis comprend $r+2$ places. Il y a autant de couples réalisant E que de manière de choisir la place la plus près del'entrée, c'est à dire $n-(r+2)+1 = n-r-1$. On a donc

$$P(E) = \frac{2(n-r-1)}{n(n-1)}.$$

Exercice 24 *On a mélangé, par inadvertance, des graines de deux provenances différentes : A et B. On a ainsi un ensemble de graines dont $\frac{1}{3}$ provient de A et $\frac{2}{3}$ de B. La moitié des graines de A et les trois quarts des graines de B sont noires.*
On choisit une graine au hasard : elle est noire. Quelle est la probabilité pour qu'elle provient de A

Solution - L'expérience aléatoire consiste à choisir une graine. Soient A, B et N les événements :
A : "la graine provient de A" ;
B : "la graine provient de B" ;
N : "la graine est noire".
On a $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{2}{3}$, $P(N|A) = \frac{1}{2}$ et $P(N|B) = \frac{3}{4}$. On a

$$P(A|N) = \frac{P(N|A)P(A)}{P(N|A)P(A) + P(N|B)P(B)} = \frac{1}{4}.$$

Exercice 25 *Cinq hommes et quatre femmes vont au cinéma. Ils disposent de 9 places alignées. Ils s'assoient au hasard, mais de manière à ce que chaque femme soit entourée de deux hommes. Quelle est la probabilité pour que monsieur P soit à côté de mademoiselle C ?*

Solution - Les possibilités pour les 5 hommes et les quatre femmes sont de l'ordre $4!5!$. Les posibilités pour l'événement E : " monsieur P est à côté de mademoiselle C" sont de l'ordre de $4 \times 2 \times 3! \times 4!$ (4 sont les possibilités pour madame C, 2 possibilités pour monsieur pour chacun des choix de madame C, $3!$ les choix pour les 3 autres femmes et $4!$ les choix pour les autres hommes). On aura donc

$$P(E) = \frac{8 \times 4! \times 3!}{4! \times 5!} = \frac{2}{5}.$$

Exercice 26 *On dispose de quatre jetons : A, B, C, D tels que A et B ont deux faces blanches, C a une face noire et une face blanche, D a deux faces noires. On tire un jeton au hasard et on ne voit que l'une de ses faces : elle est blanche. Calculer la probabilité pour que l'autre face soit blanche.*

Solution - L'expérience aléatoire consiste à tirer un jeton, le poser sur la table, noter sa première face et ensuite sa deuxième face. L'univers des événtualités est

$$\Omega = \{(B, B), (B, N), (N, B), (N, N)\}.$$

Déterminons maintenant la loi des probabilités de cette expérience aléatoire. On a

$$\begin{aligned} P((B, B)) &= P(\text{"Tirer les jetons } A \text{ ou } B\text{"}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}. \\ P((N, N)) &= P(\text{"Tirer le jeton } D \text{ "}) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

D'un autre côté

$$P((N, B)) + P((B, N)) = P(\text{"Tirer le jeton } C\text{"}) = \frac{1}{4}.$$

Or $P((N, B)) = P((B, N))$ (l'apparition des deux faces du jeton C est équiprobable.) On en déduit, la loi des probabilités de l'expérience aléatoire

$$P((B, B)) = \frac{1}{2}, \quad P((N, N)) = \frac{1}{4}, \quad P((N, B)) = P((B, N)) = \frac{1}{8}.$$

On note B_i ($i = 1, 2$), l'événement : " la i-ème face est blanche". On a

$$P(B_2|B_1) = \frac{P(B_1 \cap B_2)}{P(B_1)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{8}} = \frac{4}{5}.$$

Exercice 27 *Soit une urne contenant 10 boules rouges, 5 blanches, 3 noires et 2 jaunes.*

1. *On tire successivement 4 boules (tirage exhaustif) :*
   (a) *Calculer la probabilité d'obtenir dans l'ordre : 1 rouge, 1 noire, 1 blanche, 1 jaune.*
   (b) *Calculer la probabilité d'obtenir seulement 3 boules rouges dans les 4 tirées.*
   (c) *Calculer la probabilité pour que la deuxième soit rouge.*
2. *On tire successivement 3 boules (tirage non exhaustif) :*

(a) *Calculer la probabilité d'obtenir seulement 2 boules rouges sur les 3 tirées.*

(b) *Calculer la probabilité d'obtenir au moins 2 boules rouges sur les 3 tirées.*

(c) *Calculer la probabilité pour que la deuxième boule soit rouge.*

Solution -

1. L'expérience aléatoire consiste à tirer sans remise 4 boules et noter leurs couleurs. On a $Card\Omega = A_{20}^{4} = 20 \times 19 \times 18 \times 17$.

   (a) Soit A l'événement obtenir dans l'ordre 1 rouge, 1 noire, 1 blanche et 1 jaune. On a

   $$P(A) = \frac{10 \times 3 \times 5 \times 2}{20 \times 19 \times 18 \times 17} = \frac{5}{1938}.$$

   (b) Soit B l'événement obtenir 3 boules rouge seulement dans les 4 tirés. On a

   $$P(B) = \frac{A_4^3 \times C_{10}^3 \times 10}{20 \times 19 \times 18 \times 17} = \frac{80}{323}.$$

   (c) Soit C l'événement obtenir la deuxième boule rouge. On a

   $$P(C) = \frac{A_{19}^3 \times 10}{20 \times 19 \times 18 \times 17} = \frac{1}{2}.$$

2. L'expérience aléatoire consiste à tirer avec remise 3 boules et noter leurs couleurs. On a $Card\Omega = 20^3$.

   (a) Soit A l'événement obtenir seulement 2 boules rouges. On a

   $$P(A) = \frac{C_3^2 \times 10^2 \times 10}{20^3} = \frac{3}{8}.$$

   (b) Soit B l'événement obtenir au moins deux boules rouges sur les 3 tirés. On a

   $$P(B) = \frac{3}{8} + \frac{10^3}{20^3} = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

   (c) Soit C l'événement la deuxième boule est rouge. On a

   $$P(C) = \frac{20 \times 10 \times 20}{20^3} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 28 *Dans une population donnée, un individu peut être atteint d'une affection A avec la probabilité* $p_A = 1/100$ *et d'une affection B, indépendante de A, avec une probabilité* $p_B = 1/20$. *Quelle est la probabilité pour qu'un individu choisi au hasard soit atteint d'au moins une des deux maladies ?*

Solution - On a

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = \frac{19}{2000} = 5.95\%.$$

Exercice 29 *On jette 3 fois un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note a, b et c les numéros obtenues. Soit* $Q(x) = ax^2 + bx + c$.
Déterminer la probabilité pour que le polynôme Q :

1. *ait deux racines réelles distinctes.*
2. *ait une racine double.*
3. *n'ait pas de racine réelle.*

Solution - L'univers des éventualités de l'expérience aléatoire qui consiste à lancer successivement 3 dés et noter leurs numéros et

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3.$$

On a $Card\Omega = 6^3 = 216$. La probabilité est définie par l'équiprobabilité.
Soit $Q(x) = ax^2 + bx + c$. Les racines de Q dépendent du signe de $\Delta = b^2 - 4ac$. Le tableau suivant contient pour les différents valeurs de (a, c), la valeur de $4ac$.

a / c	1	2	3	4	5	6
1	4	8	12	16	20	24
2	8	16	24	32	40	48
3	12	24	36	48	60	72
4	16	32	48	64	80	96
5	20	40	60	80	100	120
6	24	48	72	96	120	144

$b^2 \in \{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$

1. Soit A_1 l'événement : " Q a deux racines réelles distinctes". $A_1 = \{(a,b,c)/4ac < b^2\}$.
   Pour dénombrer A_1, on considère successivement chacune des valeurs de b et pour chacune d'elles, on détermine à l'aide du tableau le nombre de couples (a,c) tels que $4ac < b^2$. On obtient $CardA_1 = 0+0+3+5+14+16 = 38$. Donc
   $$P(A_1) = \frac{38}{216} = \frac{19}{108}.$$
2. Soit A_2 l'événement : " Q a une racine réelle double". $A_2 = \{(a,b,c)/4ac = b^2\}$. En procédant comme précédemment, on obtient que $CardA_2 = 5$ et
   $$P(A_2) = \frac{5}{216}.$$
3. Soit A_3 l'événement : " Q n'a pas de racine réelle". On a
   $$P(A_3) = 1 - P(A_2) - P(A_1) = \frac{173}{216}.$$

Exercice 30 *Pour se rendre au lycée, un élève a le choix entre 4 itinéraires : A, B, C, D. La probabilité qu'il a de choisir A (resp. B, C) est* $\frac{1}{3}$ *(resp.* $\frac{1}{4}$ *,* $\frac{1}{12}$ *).*
La probabilité d'arriver en retard en empruntant A (resp. B, C) est $\frac{1}{20}$ *(resp.* $\frac{1}{10}, \frac{1}{5}$*). En empruntant D, il n'est jamais en retard.*

1. *Quelle est la probabilité que l'élève choisisse l'itinéraire D ?*
2. *L'élève arrive en retard. Quelle est la probabilité qu'il ait emprunté l'itinéraire C ?*

Solution - Soit A (resp. B, C, D) l'événement : " L'élève choisit l'itinéraire A (resp. B, C, D)". Soit R l'événement : " L'élève arrive en retard".

1. On a
   $$P(D) = 1 - P(A) - P(B) - P(C) = \frac{1}{3}.$$

2. On a

$$\begin{aligned} P(C|R) &= \frac{P(C)P(R|C)}{P(A)P(R|A)+P(B)P(R|B)+P(C)P(R|C)+P(D)P(R|D)} \\ &= \frac{\frac{1}{12}\times\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}\times\frac{1}{20}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{10}+\frac{1}{12}\times\frac{1}{5}} = \frac{2}{7}. \end{aligned}$$

Exercice 31 *Un trafiquant utilise trois filières pour passer des lingots d'or en Suisse. La filière aérienne concerne 50% du trafic et comporte 15% de risque. La filière terrestre concerne 20% de trafic et comporte 10% de risque. La filière fluviale comporte 20% de risque. Un industriel confie un lingot au trafiquant.*

1. *Quelle est la probabilité pour que ce lingot n'arrive pas à destination ?*
2. *Sachant que ce lingot est en sécurité dans une banque suisse, quelle est la probabilité pour qu'il ait emprunté la voie terrestre ?*

Solution - Soit A l'événement : "le lingot n'arrive pas à destination", FA l'évement : " le lingot a emprunté la filière aérienne", FT l'évement : " le lingot a emprunté la filière terrestre" et FF l'évement : " le lingot a emprunté la filière fluviale".

1. On a d'après la loi des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|FA)P(FA)+P(A|FT)P(FT)+P(A|FF)P(FF) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{15}{100}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{10}+\frac{1}{10}\times\frac{1}{5} = \frac{31}{200} = 15,5\% \end{aligned}$$

2. On a

$$P(FT|\overline{A}) = \frac{P(FT\cap\overline{A})}{1-P(A)} = \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{31}{200}} = \frac{20}{169}.$$

Exercice 32 *On considère n équipes de football de première division et n équipes de deuxième division. On tire au sort n rencontre entre ces $2n$ équipes (chaque équipes joue un match et un seul).*

1. *Calculer la probabilité p_n pour que tous les matchs opposent une équipe de première division à une équipe de deuxième division.*

2. *Calculer la probabilité q_n pour que tous les matchs opposent 2 équipes de la même division.*
3. *Montrer que*
$$\frac{2^{2n-1}}{n} \leq C_{2n}^{n} \leq 2^{2n}$$
et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n$.

Solution - Un tirage au sort des matchs est représenté par n groupes de de 2 équipes prises parmi les $2n$ équipes. Toutes ces n-listes sont équiprobables. Donc pour tout événement A, $P(A)$ est le quotient du nombre des cas favorables pat le nombre de cas possibles. D'après l'exercice 3 TD 1, il y a
$$N = \frac{(2n)!}{2^n} \quad \text{cas possibles.}$$

1. Soit A_1 l'événement :" Chaque match oppose une équipe de DI à une équipe de DII".
   Il $(n!)^2$ cas favorables pour A_1, soit
$$p_n = P(A_2) = \frac{2^n(n!)^2}{(2n)!} = \frac{2^n}{C_{2n}^n}.$$
2. Soit A_2 l'événement :" Chaque match oppose deux équipes de la même division".
   Si n est impair $q_n = 0$ car A_2 est impossible.
   Si $n = 2k$. Il y a C_{2k}^k façons de choisir les k numéros des tirages de matchs entre équipes de DI puis pour chacune d'elles $\frac{(2k)!}{2^k}$ façons de choisir la $2k$-liste de ces matchs et $\frac{(2k)!}{2^k}$ de choisir la $2k$-liste des matchs entre équipes de DII. D'où
$$q_{2k} = C_{2k}^k \left(\frac{(2k)!}{2^k}\right) \frac{2^{2k}}{(4k)!} = \frac{C_{2k}^k}{C_{4k}^{2k}}.$$
3.
$$\begin{aligned} C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!n!} &= \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)\dots 4\times 3\times 2\times 1}{n!n!} \\ &= 2^n\frac{(2n-1)(2n-3)\dots 5\times 3\times 1}{n!}. \end{aligned}$$

Pour tout k, $2n-k-1 \leq 2n-k \leq 2n-k+1$. Donc

$$2^n \frac{(2n-2)(2n-4)\dots 4\times 2}{n!} \leq C_{2n}^n \leq 2^n \frac{(2n)(2n-2)\dots 4\times 2}{n!}$$

soit

$$\frac{2^{2n-1}}{n} \leq C_{2n}^n \leq 2^{2n}.$$

4. De ce qui prècède, on déduit que

$$0 \leq p_n \leq \frac{n}{2^{n-1}}$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = 0.$$

On a aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq q_n \leq p_n$ et donc

$$\lim_{n\to+\infty} q_n = 0.$$

Exercice 33 *Trois enfants A, B, C jouent avec une balle. Lorsque A a la balle, la probabilité pour qu'il l'envoie à B est $\frac{3}{4}$, et la probabilité pour qu'il l'envoie à C est $\frac{1}{4}$. Lorsque B a la balle, la probabilité pour qu'il l'envoie à A est $\frac{3}{4}$, et la probabilité pour qu'il l'envoie à C est $\frac{1}{4}$. C envoie toujours la balle à B.*
On désigne par A_n (resp. B_n et C_n) les probabilités pour qu'à l'issue de n^e lancer, ce soit A (resp. B et C) qui ait la balle.

1. *Montrer qu'il existe une matrice carrée d'ordre 3 que l'on notera M, telle que :*
$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \\ C_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix}.$$
2. *Diagonaliser M et calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}$.*
3. *Calculer les limites lorsque n tend vers l'infini des probabilités A_n, B_n et C_n. On vérifiera que ces limites sont indépendantes de l'enfant qui avait la balle au début du jeu.*

Solution -

1. En utilisant la formule des probabilités totales et les données de l'énoncé, on obtient :
$$\begin{cases} A_{n+1} & = & 0.A_n & + & \frac{3}{4}.B_n & + & 0.C_n \\ B_{n+1} & = & \frac{3}{4}.A_n & + & 0.B_n & + & 1.C_n \\ C_{n+1} & = & \frac{1}{4}.A_n & + & \frac{1}{4}.B_n & + & 0.C_n \end{cases}$$
Ce qui se traduit matriciellement par :
$$\begin{pmatrix} A_{n+1} \\ B_{n+1} \\ C_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix}$$

2. On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$. Cherchons les valeurs propres et les vecteurs propres de M. On a
$$P(\lambda) = det(M - \lambda I_3) = -\lambda^3 + \frac{13}{16}\lambda + \frac{3}{16}.$$
Donc les valeurs propres de M sont $1, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}$. Des vecteurs propres respectivement associés sont :
$$v_1 = (12, 16, 7), v_2 = (3, -1, -2), v_3 = (1, -1, 0).$$
Donc $M = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 1 \\ 16 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$.
On en déduit pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$M^n = PD^nP^{-1}.$$
Soit
$$M^n = \frac{1}{70}\begin{pmatrix} 24 + 21(-\frac{1}{4})^n + 25(-\frac{3}{4})^n & 24 + 21(-\frac{1}{4})^n - 45(-\frac{3}{4})^n & 24 - 84(-\frac{1}{4})^n + 60(-\frac{3}{4})^n \\ 32 - 7(-\frac{1}{4})^n - 25(-\frac{3}{4})^n & 32 - 7(-\frac{1}{4})^n + 45(-\frac{3}{4})^n & 32 + 28(-\frac{1}{4})^n - 60(-\frac{3}{4})^n \\ 14 - 14(-\frac{1}{4})^n & 14 - 14(-\frac{1}{4})^n & 14 + 56(-\frac{1}{4})^n \end{pmatrix}$$

3. $\begin{pmatrix} A_n \\ B_n \\ C_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ C_0 \end{pmatrix}$ (A_0, B_0 et C_0 désignent les probabilités respectives pour A, B et C aient la balle au début. On déduit que
$$\begin{aligned} &= \frac{1}{70}[\left(24 + 21(-\frac{1}{4})^n + 25(-\frac{3}{4})^n\right) A_0 + \left(24 + 21(-\frac{1}{4})^n - 45(-\frac{3}{4})^n\right) B_0 \\ &+ \left(24 - 84(-\frac{1}{4})^n + 60(-\frac{3}{4})^n\right) C_0]. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \frac{24}{70}(A_0 + B_0 + C_0).$$

et comme $A_0 + B_0 + C_0 = 1$, on déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = \frac{24}{70}.$$

De la même manière

$$\lim_{n\to+\infty} B_n = \frac{32}{70}, \quad \lim_{n\to+\infty} C_n = \frac{14}{70}.$$

On voit immédiatement que ces 3 limites sont indépendantes de l'enfant qui avait la balle au début du jeu.

Chapitre 3

Variables aléatoires discrètes

Lors d'une expérience aléatoire on peut associer à chaque éventualité $\omega \in \Omega$ une quantité mesurable ou non. Par exemple, choisir un individu dans une population et noter sa taille, son poids ou la couleur de ses yeux. Lors de cinq lancés consécutifs d'une pièce de monnaie, noter le nombre de piles obtenus. Ces quantités dépendant du résultat d'une expérience aléatoire sont modélisées comme fonctions sur Ω et son appelées **variables aléatoires**. Au lieu de s'intéresser aux valeurs de ces fonctions, on essaye de déterminer les chances pour qu'elles tombent dans un intervalle donné de $\mathbb{R}$. C'est ce qu'on appellera la **loi de la variable aléatoire**. Cette notion de loi d'une variable aléatoire est la base du raisonnement probabiliste moderne.

3.1 Loi d'une variable aléatoire

Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un univers probabilisé. Une **variable aléatoire** de $(\Omega, \mathbb{P})$ est une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Nous allons adopter les notations suivantes :

- Pour toute partie $A \in \mathbb{R}$, notons

$$\mathbb{P}(X = A) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega, X(\omega) \in A\}\right).$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on notera

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\}\right).$$

- Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on notera

$$\mathbb{P}(y \leq X \leq x) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega, y \leq X(\omega) \leq x\}\right).$$

Exemple - Lors de l'expérience aléatoire du lancé d'un dé, on désigne par X la variable aléatoire qui consiste à noter la valeur de la face supérieur du dé. On a $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par $X(\omega) = \omega$ pour tout $\omega \in \Omega$. On a, pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\mathbb{P}(X = \omega) = \frac{1}{6}.$$

La **loi d'une variable aléatoire** X est le mode de répartition de la probabilité de Ω sur l'ensemble des valeurs de X. Elle est concrètement définie par la loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ sur $\mathbb{R}$ définie, pour tout $A \subset \mathbb{R}$, par

$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(X = A). \tag{3.1}$$

Exemple - On jette deux dés successivement et on définit pour chaque éventualité repérées par un couple (a, b) la somme $X = a + b$. Dans cette exemple simple, la loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ sera déterminée dès lors que l'on connaîtra toutes les probabilités d'obtenir les différentes valeurs de X.

Valeurs x_i de X	**Obtenues avec les couples :**	$\mathbb{P}(X = x_i)$
2	**(1,1)**	**1/36**
3	**(1,2),(2,1)**	**2/36**
4	**(1,3),(2,2),(3,1)**	**3/36**
5	**(1,4),(2,3),(4,1),(3,2)**	**4/36**
6	**(1,5),(2,4),(3,3),(5,1),(4,2)**	**5/36**
7	**(1,6),(2,5),(3,4),(6,1),(5,2),(4,3)**	**6/36**
8	**(2,6),(3,5),(4,4),(6,2),(5,3)**	**5/36**
9	**(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)**	**4/36**
10	**(4,6),(5,5),(6,4)**	**3/36**
11	**(5,6),(6,5)**	**2/36**
12	**(6,6)**	**1/36**

Lorsque une variable aléatoire prend un grand nombre de valeurs, on ne pourra plus calculer leurs probabilités et on cherchera une formule. C'est alors que le mot loi prendra tout son sens.

3.2 Fonction de répartition d'une variable aléatoire

La **fonction de répartition** est une notion mathématique communes à toutes les variables aléatoires. C'est une autre façon de coder la loi de probabilité d'une variable aléatoire.

Définition 8 *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$. On appelle fonction de répartition de X la fonction $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par*

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X < t).$$

Les propriétés suivantes de la fonction de répartition sont importantes.

1. La fonction de répartition d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ est une fonction croissante au sens large, c'est-à-dire,
$$a < b \;\Rightarrow\; F_X(a) \leq F_X(b).$$
2. $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} F_X(t) = 1^-$ et $\lim\limits_{t \longrightarrow -\infty} F_X(t) = 0^+$.
3. Si $a < b$,
$$F_X(b) - F_X(a) = \mathbb{P}(a \leq X < b). \tag{3.2}$$
4. La fonction de répartition d'une variable aléatoire est continue à gauche en tout point.

La loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ est parfaitement définie par sa fonction de répartition, le calcul de $\mathbb{P}(X = t)$ en tout point t combiné avec la relation (3.2) permettra en effet d'ouvrir ou de fermer les intervalles à volonté.

Exemple - **On reprend l'exemple précédent. On jette deux dés successivement et on définit pour chaque éventualité repérées par un couple (a,b) la somme $X = a + b$. En utilisant le tableau donnant la loi de probabilité de X, on déduit que la fonction de répartition de X est la fonction en escalier définie par**

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \textbf{si} \quad t \leq 2 \\ 1 & \textbf{si} \quad t > 12 \\ \frac{1}{36} & \textbf{si} \quad 2 < t \leq 3 \\ \frac{1}{12} & \textbf{si} \quad 3 < t \leq 4 \\ \frac{1}{6} & \textbf{si} \quad 4 < t \leq 5 \\ \frac{5}{18} & \textbf{si} \quad 5 << 6 \end{cases} \quad \textbf{et} \quad F_X(t) = \begin{cases} \frac{5}{12} & \textbf{si} \quad 6 < t \leq 7 \\ \frac{7}{12} & \textbf{si} \quad 7 < t \leq 8 \\ \frac{13}{18} & \textbf{si} \quad 8 < t \leq 9 \\ \frac{5}{6} & \textbf{si} \quad 9 < t \leq 10 \\ \frac{11}{12} & \textbf{si} \quad 10 < t \leq 11 \\ \frac{35}{36} & \textbf{si} \quad 11 < t \leq 12 \end{cases}.$$

3.3 Variables aléatoires discrètes

Définition 9 *Soit* $(\Omega, \mathbb{P})$ *un univers probabilisé. On dit qu'une variable aléatoire* X *sur* $(\Omega, \mathbb{P})$ *est discrète si elle ne prend qu'un nombre fini ou dénombrable de valeurs :*

$$X(\Omega) \subset \{x_k : k \in K \subset \mathbb{N}\}. \tag{3.3}$$

Dans ce cas la loi de probabilité est bien déterminée si on connaît les probabilités $\mathbb{P}(X = x_k)$ pour tout $k \in K$. Il est clair que

$$\sum_{k \in K} \mathbb{P}(X = x_k) = 1. \tag{3.4}$$

Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète X c'est :

1. Déterminer l'ensemble des valeurs que peut prendre X.
2. Calculer $\mathbb{P}(X = x_k)$ pour chacune des valeurs x_k.

La fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète est une fonction en escalier.

Proposition 6 *Soit* X *une variable aléatoire discrète. Si* $Y = g(X)$ *est une fonction de* X *alors* Y *est une variable aléatoire discrète et on a pour tout* $y \in Y(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{\{x | g(x) = y\}} \mathbb{P}(X = x). \tag{3.5}$$

Exemple - Soit X **la variable aléatoire discrète telle que** $X(\Omega) = \{-4, \dots, 4\}$ **et pour tout** $x \in \{-4, \dots, 4\}$**, on a** $\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{9}$**.**

• **La variable aléatoire** $Y = |X|$ **prend les valeurs** $\{0, \dots, 4\}$ **et on a**

$$\mathbb{P}(Y = y) = \begin{cases} \frac{2}{9} & \textbf{si} \quad y = 1, 2, 3, 4, \\ \frac{1}{9} & \textbf{si} \quad y = 0. \end{cases}$$

• **La variable aléatoire** $Z = X^2$ **prend les valeurs** $0, 1, 4, 9, 16$ **et on a**

$$\mathbb{P}(Z = z) = \begin{cases} \frac{2}{9} & \textbf{si} \quad z = 1, 4, 9, 16, \\ \frac{1}{9} & \textbf{si} \quad z = 0. \end{cases}$$

3.4 Espérance, variance et écart-type d'une variable aléatoire discrète

Dans toute cette section, X est une variable aléatoire discrète.

On appelle **espérence** de X et on note $E(X)$ le nombre réel, s'il existe, défini par
$$E(X) = \sum_x x\mathbb{P}(X = x). \tag{3.6}$$
La réserve s'il existe concerne le cas où l'ensemble des valeurs est infini : l'existence de $E(X)$ dépend de la convergence de la somme.

Noter que si $X(\Omega) = \{x_i, i \in J\}$, pour $x \notin X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x) = 0$ et donc
$$\sum_x x\mathbb{P}(X = x) = \sum_{i\in J} x_i\mathbb{P}(X = x_i).$$

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire est l'un des concepts les plus importants en théorie des probabilités. C'est dans les jeux de hasard que le mot espérance trouve son origine et sa signification. En effet, si X désigne l'apport ou la perte pour un joueur lors d'un jeu de hasard alors si $E(X) = 0$ le jeu est équitable, si $E(X) > 0$ le jeu est favorable et si $E(X) < 0$ le jeu est défavorable.

Exemples -

1. **Khalid propose à Hassan le jeu suivant : tous deux misent la même somme puis Hassan lance n fois les deux dés ; s'il obtient au moins une paire il emporte la mise, sinon c'est Khalid. Quand $n = 2$ ou $n = 4$, le jeu est t-il équitable ?**
   Notons m le montant de la mise commune et X le montant du gain de Hassan. La variable aléatoire X prend deux valeur $\{2m, -m\}$. On a
   $$E(X) = 2m\mathbb{P}(A) - m\mathbb{P}(\overline{A}) = 2m(1 - \mathbb{P}(\overline{A})) - m\mathbb{P}(\overline{A}) = m(2 - 3\mathbb{P}(\overline{A})),$$
   où A est l'événement "Sortie d'au moins une paire lors de n lancés". Puisque les lancés sont indépendants, on a
   $$\mathbb{P}(\overline{A}) = \left(\frac{30}{36}\right)^n = \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

- **Pour** $n=2$**, on a**
$$E(X) = -\frac{m}{12}.$$
Le jeu est favorable à Khalid.
- **Pour** $n=4$**, on a**
$$E(X) = \frac{239m}{432}.$$
Le jeu n'est pas équitable, il est favorable à Hassan.

2. **Un dé truqué est tel que les faces 1 et 2 sont équiprobables, la face 3 est deux fois plus probable que la face 1, les faces 4 et 5 sont équiprobables et ayant trois fois plus de chance que la face 1 et la face 6 est quatre fois plus probable que la face 3.**
En jouant deux fois de suite, on décide que ce jeu fera gagner une somme S **pour chaque apparition de 1,2 ou 3, les faces 4 et 5 ne rapportent rien et enfin la face 6 fait perdre un dirham. Pour quelle somme le jeu est-il équitable ?**
L'énoncé se traduit par $p_1 = p_2$ **;** $p_3 = 2p_1$ **;** $p_4 = p_5 = 3p_1$ **et** $p_6 = 4p_3$**. Comme** $p_1 + \ldots + p_6 = 1$**, on en déduit facilement que**
$$p_1 = p_2 = \frac{1}{18}; p_3 = \frac{1}{9}; p_4 = p_5 = \frac{1}{6}; p_6 = \frac{4}{9}.$$
Nous allons calculer $E(X)$**.**

x_i	**Obtenues avec les couples**	$\mathbb{P}(X = x_i)$
-2	**(6,6)**	**16/18**
-1	**(4,6),(5,6),(6,4),(6,5)**	**8/27**
0	**(4,4),(4,5),(5,4),(5,5)**	**1/9**
$S-1$	**(1,6),(2,6),(3,6),(6,1),(6,2),(6,3)**	**16/81**
S	**(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)** **(4,1),(5,1),(4,2),(5,2),(4,3),(5,3)**	**4/27**
2S	**(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)**	**4/81**

Un calcul direct donne
$$E(X) = \frac{4S-8}{9}.$$
Le jeu est équitable si et seulement si $S = 2Dh$**.**

La proposition suivante simplifie énormément les calculs.

Proposition 7 *Si $Y = g(X)$ alors*

$$E(Y) = \sum_x g(x)\mathbb{P}(X = x). \tag{3.7}$$

On appelle **variance** de X, et on note $V(X)$ ou σ_X^2, l'espérance de $(X - E(X))^2$ quand il existe, c'est-à-dire,

$$V(X) = E((X - E(X))^2) \overset{(*)}{=} \sum (x_i - E(X))^2 \mathbb{P}(X = x_i). \tag{3.8}$$

On notera que $(*)$ est justifiée par la relation (3.7) et qu'une variance, somme de termes positifs, ne peut avoir qu'une valeurs positive.

Une valeur élevée de la variance signifie que les valeurs éloignées de l'espérence ont une forte probabilité ; on dit que la variance est un paramètre de **dispersion.**

On appelle **écart-type** la racine carré de la variance

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}. \tag{3.9}$$

C'est un réel positif ; il s'agit d'un indice de dispersion qui présente l'avantage d'avoir la même unité que les observables (les valeurs de X).

Exemple - Soit X la variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \{-4, \ldots, 4\}$ et pour tout $x \in \{-4, \ldots, 4\}$, on a $\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{9}$. On a

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{9}(-4-3-2-1+0+1+2+3+4) = 0, \\ V(X) &= \frac{1}{9}(16+9+4+1+0+1+4+9+16) = \frac{20}{3}, \\ \sigma_X &= 2\sqrt{\frac{5}{3}}. \end{aligned}$$

Les formules suivantes sont très utiles. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$E(aX + b) = aE(X) + b,\ V(aX + b) = a^2 V(X), \tag{3.10}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2. \tag{3.11}$$

3.5 La loi conjointe de plusieurs variables aléatoires

Les modèles probabilistes impliquent souvent plusieurs variables aléatoires. Par exemple, dans le contexte d'un diagnostic médical, les résultats de plusieurs tests peuvent être importants. Dans cette section, nous allons étendre la notion de loi de probabilité à plusieurs variables aléatoires associées à la même expéreience aléatoire et au même modèle probabiliste.
Soit $(\mathcal{E}, \Omega, \mathbb{P})$ un modèle probabiliste et soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\mathcal{E}, \Omega, \mathbb{P})$.
La loi de probabilité conjointe de X et Y est la donnée de tous les couples $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et les réels

$$\mathbb{P}_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}). \tag{3.12}$$

La loi de probabilité conjointe de X et Y détermine la probabilité de tout événement A qui peut être défini à l'aide des valeurs de X et Y. Par exemple, si A est l'ensemble des couples (x, y) qui vérifient une certaine propriété alors

$$\mathbb{P}((X, Y) \in A) = \sum_{(x,y)\in A} \mathbb{P}_{X,Y}(x, y). \tag{3.13}$$

La loi de probabilité conjointe permet de calculer les lois de probabilité de X et de Y dites **lois marginales** par les formules

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum_{y} \mathbb{P}_{X,Y}(x, y), \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x} \mathbb{P}_{X,Y}(x, y). \tag{3.14}$$

Exemple - Un sac contient 4 boules numérotées 1 à 4. On tire successivement et avec remise deux boules et on note X_1 et X_2 les numéros obtenus. Soit $X = X_1$ et $Y = sup(X_1, X_2)$. La loi conjointe de X et Y est donnée par le tableau :

$X/^Y$	1	2	3	4	$\mathbb{P}_X$
1	**1/16**	**1/16**	**1/16**	**1/16**	**4/16**
2	**0**	**2/16**	**1/16**	**1/16**	**4/16**
3	**0**	**0**	**3/16**	**1/16**	**4/16**
4	**0**	**0**	**0**	**4/16**	**4/16**
$\mathbb{P}_Y$	**1/16**	**3/16**	**5/16**	**7/16**	**1**

La loi de probabilité conjointe permet aussi de déterminer la loi de probabilité de toute variable aléatoire définie comme fonction de X et Y. Si $Z = g(X, Y)$, on a, pout tout $z \in Z(\Omega)$,

$$\mathbb{P}(Z = z) = \sum_{\{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega): g(x,y)=z\}} \mathbb{P}_{X,Y}(x, y). \tag{3.15}$$

et

$$E(g(X, Y)) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} g(x, y)P_{X,Y}(x, y). \tag{3.16}$$

En particulier, si $Z = aX + bY + c$, on retrouve

$$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c. \tag{3.17}$$

Cette relation se généralise facilement à plusieurs variables aléatoires. Ainsi si $X_1, \ldots, X_n$ est une famille de variables aléatoires et $a_1, \ldots, a_n$ des réels

$$E(a_1X_1 + \ldots + a_nX_n) = a_1E(X_1) + \ldots + a_nE(X_n). \tag{3.18}$$

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur $(\mathcal{E}, \Omega, P)$. On dira que X et Y sont **indépendantes** si, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,

$$\mathbb{P}_{X,Y}(x, y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y).$$

Ceci équivaut au fait que les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants.

Remarque. On peut vérifier que si X et Y sont indépendantes alors $g(X)$ et $h(Y)$ sont indépendantes pour tout couple de fonctions (g, h).

Proposition 8 *Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes. Alors*

$$E(XY) = E(X)E(Y) \quad \textit{et} \quad V(X + Y) = V(X) + V(Y). \tag{3.19}$$

3.6 Lois discrètes classiques

3.6.1 Loi discrète uniforme

Une variable aléatoire X suit la loi de probabilité uniforme si

1. $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$;
2. pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$\mathbb{P}(X = x_k) = \frac{1}{n}. \tag{3.20}$$

Exemple - Dans le lancé d'un dé régulier, si X est la variable aléatoire qui associe à la face obtenue le nombre de points qu'elle représente, la loi de X est définie par

k	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$P(X=k)$	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**	**1/6**

On a

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = \frac{21}{6}, \\
E(X^2) &= \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) = \frac{91}{6}, \\
V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{35}{12}, \\
\sigma_X &= \sqrt{\frac{35}{12}}.
\end{aligned}$$

3.6.2 Variable de Bernoulli

Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire pouvant entraîner l'observation d'un événement A ou de son contraire $\overline{A}$. On appelle **variable indicatrice** ou **variable de Bernoulli** de l'événement A une variable aléatoire X qui associe à A la valeur 1 et à $\overline{A}$ la valeur zéro. On pose $\mathbb{P}(A) = p$ et $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1-p$.
La loi de probabilité de cette variable est $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(A) = p$ et $\mathbb{P}(X=0) = \mathbb{P}(\overline{A}) = q$.
La loi de X est donc définie par

k	0	1
$P(X=k)$	$1-p$	p

Les paramètres descriptifs de cette loi sont donnés par

$$E(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1-p). \tag{3.21}$$

Les variables aléatoires de Bernoulli sont importantes malgré leur simplicité. Leurs combinaisons donnent des variables aléatoires plus compliquées.

3.6.3 La loi binomiale

La loi binomiale est le résultat du schéma de Bernoulli que nous allons décrire maintenant.
Soit une suite finie de n expériences aléatoires $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_n$ obéissant aux conditions suivantes :

1. Chaque expérience peut entraîner l'observation d'un événement E ou de son contraire $\overline{E}$;
2. la probabilité de E, notée p, est la même pour chaque expérience, ceci est également vraie pour la probabilité de $\overline{E}$, notée $q = 1 - p$;
3. le résultat d'une expérience est indépendant des résultats des autres expériences.

On note E_k l'événement " E se réalise à la k-ième expérience" et A_k l'événement "E se réalise k fois dans la suite d'expériences".
L'événement A_k peut se réaliser de plusieurs manières mutuellement incompatibles. La probabilité de A_k est la somme des probabilités de chacune de ces éventualités. L'une d'elle est, par exemple : "$E_1 \cap \ldots \cap E_k \cap \overline{E}_{k+1} \cap \ldots \cap \overline{E}_n$" ; sa probabilité est $p^k q^{n-k}$, à cause de l'indépendance des événements. Toute autre éventualité réalisant A_k aura la même probabilité, obtenue par le produit de k termes égaux à p et $n-k$ termes égaux à q.
Pour obtenir la probabilité de A_k, il suffit donc de dénombrer les éventualités qui réalisent A_k. Il est clair qu'il en a autant que de manières de choisir, parmi les n expériences, celles qui réalisent E, c'est à dire C_n^k et on écrit $\mathbb{P}(A_k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.
Ce shéma, dit de Bernoulli, s'applique par exemple, à une suite de jets d'une pièce de monnaie (E=pile) ou un tirage avec remise (non exhaustif) de n boules dans une urne à deux catégories (E=boule tirée est marquée).
Si on associe à une suite d'expériences de Bernoulli, la variable aléatoire représentant le nombre d'événements E que l'on peut observer, l'événement A_k s'écrit "$X = k$" et on a $\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.
On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $0 < p < 1$, si

1. $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$;
2. pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}. \tag{3.22}$$

Le nom de cette loi provient du fait que $\mathbb{P}(X = k)$ est donné par le terme de rang $k+1$ du développement, suivant les puissances croissantes de p, du binôme de Newton $(p + q)^n$.

Les paramètres descriptifs d'une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ sont donnés par

$$E(X) = np \quad \text{et} \quad V(X) = np(p-1). \tag{3.23}$$

3.6.4 La loi géométrique

Soit une suite d'expériences aléatoires $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n, \ldots$ obéissant aux conditions du schéma de Bernoulli :

1. Chaque expérience peut entraîner l'observation d'un événement E ou de son contraire $\overline{E}$;
2. la probabilité de E, notée p, est la même pour chaque expérience ;
3. le résultat d'une expérience est indépendant des résultats des autres expériences.

On note E_k l'événement "E se réalise à la k-ième expérience".
Si on considère maintenant la variable aléatoire X qui associe à toute suite de résultat le rang du premier événement E, on a

$$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(\overline{E}_1 \cap \ldots \cap \overline{E}_{k-1} \cap E_k).$$

L'indépendance des événements permet d'écrire

$$\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{P}(\overline{E}_1)\ldots\mathbb{P}(\overline{E}_{k-1})\mathbb{P}(E_k) = (1-p)^{k-1}p. \tag{3.24}$$

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p avec $0 < p < 1$, ou de Pascal, si

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$,
2. pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1}p. \tag{3.25}$$

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre p. Alors

$$E(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1-p}{p^2}. \tag{3.26}$$

3.6.5 La loi hypergéométrique

La loi hypergéométrique est la loi du tirage exhaustif ou sans remise. D'une population de taille N, on extrait au hasard un échantillon de taille n. Parmi les N individus m sont marqués. Ainsi si on tire au hasard un individu alors la probabilité qu'il soit marqué est

$$p = \frac{m}{N}.$$

Le nombre X d'individus marqués sur les n choisis suit la loi hypergéométrique de paramètres N, n, p notée $\mathcal{H}(N, n, p)$. La variable aléatoire X prend ses valeurs dans $\{0, \ldots, n\}$, et pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{C_{pN}^{k} C_{N-pN}^{n-k}}{C_N^n}. \tag{3.27}$$

Les paramètres descriptifs sont donnés par

$$E(X) = pn \quad \text{et} \quad V(X) = n\frac{p(1-p)(N-n)}{N-1}. \tag{3.28}$$

3.6.6 La loi de Poisson

C'est la plus courante des lois pour une variable aléatoire discrète. La loi de Poisson intervient à propos d'événements rares dans un intervalle de temps ou d'espace déterminé, pour un grand nombre d'observations. Ainsi en est-il des problèmes de pannes de machines, d'erreurs dans un livre, de fils d'attente (arrivée d'une personne à un guichet), etc...
Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ si

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}$;
2. pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}. \tag{3.29}$$

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, alors

$$E(X) = V(X) = \lambda. \tag{3.30}$$

3.7 Comportement asymptotique de la loi binomiale

Nous avons vu dans le chapitre 3 qu'une variable aléatoire X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $0 < p < 1$, si

1. $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$;
2. pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$,
$$\mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Le théorème suivant décrit le comportement de cette loi quand n devient assez grand.

Théorème 4 *Soit* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels dans* $]0,1[$ *vérifiant*

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = 0 \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda.$$

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to+\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Si n tend vers l'infini et p vers 0 de telle sorte que le produit np ait une limite finie λ, la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ tend vers la loi de poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ en ce sens que $\mathbb{P}(\mathcal{B}(n,p) = k)$ tend vers $P(\mathcal{P}(\lambda) = k)$.

Ce résultat est très intéressant sur le plan pratique : il permet de remplacer numériquement la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par la loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$ lorsque n est grand, p petit. La loi de Poisson présente l'avantage de ne dépendre que d'un seul paramètre.

On utilise numériquement l'approximation de Poisson

$$C_n^k p^k q^{n-k} \simeq e^{-np}\frac{(np)^k}{k!} \tag{3.31}$$

dans les conditions $n > 50; p < 0.1$.

Le tableau suivant compare la loi binomiale $\mathcal{B}(70, 0.05)$ et la loi de Poisson $\mathcal{P}(70 \times 0.05)$:

	Loi binomiale	Loi de Poisson
$\mathbb{P}(X=0)$	0.0275	0.0301
$\mathbb{P}(X=1)$	0.1016	0.1056
$\mathbb{P}(X=2)$	0.1845	0.1849
$\mathbb{P}(X=3)$	0.2201	0.2157
$\mathbb{P}(X=4)$	0.1940	0.1881
$\mathbb{P}(X=5)$	0.1348	0.1321
$\mathbb{P}(X=6)$	0.0768	0.0770

3.8 Comportement asymptotique de la loi hypergéométrique

Une variable aléatoire X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N,n,p)$ si X prend ses valeurs dans $\{0,\ldots,n\}$, et pour tout $k\in\{0,\ldots,n\}$:

$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{C_{pN}^{k}C_{N-pN}^{n-k}}{C_N^n}.$$

Le théorème suivant décrit le comportement de cette loi quand N devient assez grand.

Théorème 5 *Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $p\in]0,1[$ et $k\in\{0,\ldots,n\}$. Alors*

$$\lim_{N\to+\infty}\frac{C_{Np}^{k}C_{N-Np}^{n-k}}{C_N^n}=C_n^kp^k(1-p)^{n-k}.$$

Ce résultat est tout à fait précieux sur le plan pratique. En effet, dans les applications du calcul des probabilités aux sondages de nature diverse (contrôle de qualité, enquêtes socio-éconimique etc...) les échantillons sont prélevés de façon exhaustive (sans remise) et en toute rigueur c'est la loi hypergéométrique qu'il conviendrait d'appliquer. Mais si l'urne de tirage est de grande taille par rapport à l'échantillon, tirages exhaustifs et tirages avec remise sont équivalents. On pourra donc numériquement, assimiler la loi hypergéométrique à la loi binomiale, plus simple puisqu'elle ne dépend que de deux paramètres.
En pratique, la loi $\mathcal{H}(N,n,p)$ peut être approchée par la loi $\mathcal{B}(n,p)$, c'est-à-dire,

$$\frac{C_{Np}^{k}C_{N-Np}^{n-k}}{C_N^n}\simeq C_n^kp^k(1-p)^{n-k} \tag{3.32}$$

si $N\geq 10n$. Le tableau suivant compare $\mathcal{H}(105,10,0.8)$ à $\mathcal{B}(10,0.8)$:

	Loi hypergéométrique	Loi binomiale
$\mathbb{P}(X=4)$	0.0036	0.0055
$\mathbb{P}(X=5)$	0.0217	0.0264
$\mathbb{P}(X=6)$	0.0843	0.0880
$\mathbb{P}(X=7)$	0.2088	0.2013
$\mathbb{P}(X=8)$	0.3173	0.3019
$\mathbb{P}(X=9)$	0.2679	0.2684
$\mathbb{P}(X=10)$	0.0957	0.1073

3.9 Exercices corrigés

Exercice 34 *Deux urnes U_1 et U_2 contiennent des boules blanches et noires en nombres respectifs b_1, n_1, b_2, n_2. On effectue un premier tirage dans une urne choisie au hasard et on remet la boule dans son urne d'origine. Si l'on obtient une boule blanche (resp. noire), le 2^e tirage se fait dans U_1 (reps. U_2). Au i^e tirage si la boule obtenue est blanche, le $(i+1)^e$ tirage se fait dans U_1, sinon dans U_2.*
Soit B_i l'événement :" On obtient une boule blanche au i^e tirage".

1. *Calculer $P(B_1)$, $P(B_2)$, $P(B_n)$ en fonction de $P(B_{n-1})$. Etudier $\lim_{n\longrightarrow+\infty} P(B_n)$.*
2. *Soit X le nombre de boules blanches obtenues lors des n premiers tirages. Calculer $E(X)$.*

Solution - Soit U_1 (resp. U_2) l'événement : " le tirage se fait dans U_1 (resp. U_2)".

1. On a
$$\diamond P(B_1) = P(B_1|U_1)P(U_1) + P(B_2|U_2)P(U_2)$$
car $\{U_1, U_2\}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles. Donc
$$P(B_1) = \frac{1}{2}[\frac{b_1}{b_1+n_1} + \frac{b_2}{b_2+n_2}].$$
$$\diamond P(B_2) = P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|\overline{B_1})P(\overline{B_1}).$$
Si le premier tirage donne une boule blanche, le second tirage se fait dans U_1 donc
$$P(B_2|B_1) = \frac{b_1}{b_1+n_1}$$
et de même
$$P(B_2|\overline{B_1}) = \frac{b_2}{b_2+n_2}.$$
Notons $p_1 = \dfrac{b_1}{b_1+n_1}$ et $p_2 = \dfrac{b_2}{b_2+n_2}$, on obtient
$$P(B_2) = \frac{1}{2}(p_1^2 - p_2^2) + p_2.$$
$$\begin{aligned}\diamond P(B_n) &= P(B_n|B_{n-1})P(B_{n-1}) + P(B_n|\overline{B_{n-1}})P(\overline{B_{n-1}})\\ &= (p_1-p_2)P(B_{n-1}) + p_2.\end{aligned}$$

La suite $(P(B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique, elle converge vers le point fixe c car $-1 < p_1 - p_2 < 1$.

$$c = (p_1 - p_2)c + p_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad c = \frac{p_2}{1 - p_1 - p_2}$$

2. Soit X le nombre de boules blanches obtenues lors des n premiers tirages. Si X_i est le nombre de boules blanches obtenues lors du i-ème tirage, on a
$$X = X_1 + \ldots + X_n$$
et donc
$$E(X) = E(X_1) + \ldots + E(X_n).$$
Or $E(X_i) = P(B_i)$ et donc
$$E(X) = P(B_1) + \ldots + P(B_n).$$
La suite $(P(B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique de point fixe c, on sait que
$$P(B_q) = (p_1 - p_2)^{q-1}(P(B_1) - c) + c.$$
Donc
$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{q=1}^{n}[(p_1 - p_2)^{q-1}(P(B_1) - c) + c] \\ &= (P(B_1) - c)\sum_{q=1}^{n}(p_1 - p_2)^{q-1} + nc \\ &= \left[\frac{1}{2}(p_1 + p_2) - \frac{p_2}{1 - p_1 + p_2}\right]\frac{1 - (p_1 - p_2)^n}{1 - p_1 + p_2} + \frac{np_2}{1 - p_1 + p_2}. \end{aligned}$$

Exercice 35 *Une classe a une mauvaise réputation quand à l'assiduité de ses étudiants. Pour remédier à cela le professeur décide de ne faire cours que si au moins k des n étudiants de la classe sont présents. Chaque étudiant peut être présent indépendamment des autres avec une probabilité p si le temps est bon et avec une probabilité q si le temps est mauvais. Si demain la chance que le temps soit mauvais est $P(B)$, calculer la probabilité que le professeur fasse cours.*

Solution - Soit n le nombre des étudiants de la classe. Pour $0 \leq r \leq n$, on note E_r l'événement : " r étudiants sont présents". On note T l'événement : " il fait beau". On a

$$P(E_r) = P(E_r|T)P(T) + P(E_r|\overline{T})P(\overline{T}).$$

On a

$$\begin{aligned} P(E_r|T) &= C_n^r p^r (1-p)^{n-r}. \\ P(E_r|\overline{T}) &= C_n^r q^r (1-q)^{n-r}. \end{aligned}$$

Soit A l'événement : "le professeur fasse cours". On a

$$A = \cup_{r=k}^n E_r$$

et donc

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{r=k}^n P(E_r) \\ &= P(B)\sum_{j=0}^{n-k} C_n^{k+j} p^{k+j}(1-p)^{n-k-j} + (1-P(B))\sum_{j=0}^{n-k} C_n^{k+j} q^{k+j}(1-q)^{n-k-j}. \end{aligned}$$

Exercice 36 *On considère une pièce de monnaie truquée qui donne face avec une probabilité p et pile avec la probabilité $1-p$. Soit q_n la probabilité d'avoir après n lancés consécutifs indépendants un nombre paire de faces.*

1. *Montrer que $q_n = p(1-q_{n-1}) + (1-p)q_{n-1}$.*
2. *Montrer que $q_n = (1+(1-2p)^n)/2$.*

Solution - Soit, pour $1 \leq k \leq n$, E_k l'événement : " on obtient face au k-ème lancé", et I_n l'événement : " on obtient un nombre paire de faces pendant les n-lancés". On a

$$I_n = (I_{n-1} \cap \overline{E_n}) \cup (\overline{I_{n-1}} \cap E_n).$$

Puisque les événements I_{n-1} et E_n sont indépendants, on obtient

$$\begin{aligned} q_n &= p(1-q_{n-1}) + (1-p)q_{n-1} \\ &= (1-2p)q_{n-1} + p. \end{aligned}$$

Puisque $q_0 = 1$, en déduit que

$$q_n = \frac{1}{2}(1 + (1 - 2p)^n).$$

Exercice 37 *1. Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs 1,2,3,4,5,6 avec les probabilités respectives 0.1 ; 0.2 ; 0.1 ; 0.3 ; 0.1 ; 0.2. Calculer l'espérance et la variance de X.*

2. Soit Y une variable aléatoire discrète prenant les valeurs 3,4,5,6.

(a) Déterminer la loi de probabilité de Y sachant que :

$$P(Y < 5) = \frac{1}{3}, \quad P(Y > 5) = \frac{1}{2}, \quad P(Y = 3) = P(Y = 4).$$

(b) Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

3. Soit $Z = X + Y$. Déterminer la loi de Z si on suppose que X et Y sont indépendantes.

Solution -

1. La loi de X :

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0.1	0.2	0.1	0.3	0.1	0.2

$E(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i p_i = 3.7$ et $E(X^2) = \sum_{i=1}^{6} x_i^2 p_i = 16.3$et donc $V(X) = 16.3 - (3.7)^2 = 2.61$.

2. (a) La loi de Y :

y_i	3	4	5	6
p_i	a	b	c	d

On sait que $P(Y < 5) = \frac{1}{3}$ et donc $a+b = \frac{1}{3}$, $P(Y > 5) = \frac{1}{2}$ et donc $d = \frac{1}{2}$, $P(Y = 3) = P(Y = 4)$ et donc $a = b$ et $a + b + c + d = 1$. On en déduit $a = b = \frac{1}{6}$, $d = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{6}$ et la loi de Y :

y_i	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

(b) $E(Y) = \sum_{i=1}^{4} y_i p_i = 5$. $E(Y^2) = \sum_{i=1}^{4} y_i^2 p_i = \frac{158}{6}$ et donc $V(Y) = \frac{158}{6} - 5^2 = \frac{4}{3}$.

3. Z prend les valeurs entières de 4 à 12, et pour tout $4 \leq k \leq 12$, on a

$$P(Z = k) = \sum_{i+j=k} P(X = i)P(Y = j)$$

puisque X et Y sont indépendantes. On obtient ainsi la loi de Z :

z_i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{60}$	$\frac{3}{60}$	$\frac{4}{60}$	$\frac{9}{60}$	$\frac{11}{60}$	$\frac{9}{60}$	$\frac{12}{60}$	$\frac{5}{60}$	$\frac{6}{60}$

Exercice 38 *On dispose de k urnes chacune contenant m boules blanches et n boules noires. On choisit au hasard une boule de l'urne 1 et on la met dans l'urne 2, ensuite on choisit une boule de l'urne 2 et on la met dans la boule 3 et ainsi de suite. A la fin on choisit au hasard une boule de l'urne k. Montrer que la probabilité que la dernière boule est blanche est la même que la première soit blanche ie $m/(m+n)$.*

Solution - Soit, pour tout $p \geq 1$, B_p l'événement : " la boule choisie à la p-ème urne est blanche". On a

$$P(B_p) = P(B_p|B_{p-1})P(B_{p-1}) + P(B_p|\overline{B_{p-1}})P(\overline{B_{p-1}}).$$

Or

$$P(B_p|B_{p-1}) = \frac{m+1}{n+m+1}, \quad P(B_p|\overline{B_{p-1}}) = \frac{m}{n+m+1}.$$

On en déduit que

$$P(B_p) = P(B_{p-1})\frac{1}{n+m+1} + \frac{m}{n+m+1}.$$

On vérifie que si $P(B_{p-1}) = \frac{m}{n+m}$ alors $P(B_p) = \frac{m}{n+m}$ d'où le résultat.

Exercice 39 *Mohamed a dans sa poche deux boites d'allumettes indiscernables ; l'une contient 5 allumettes, l'autre 2. Il choisit au hasard une des boites, allume sa cigarette avec une seule allumette, puis remet la boite dans sa poche si elle n'est pas vide, ou la jette lorsqu'elle est vide. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de cigarettes allumées avant de jeter une des deux boites. Déterminer la loi de X et calculer son espérance et sa variance.*

Solution - L'expérience aléatoire $\mathcal{E}$ consiste à allumer successivement 7 cigarettes. On note X la variable qui associe à $\mathcal{E}$ le nombre de cigrarettes allumées avant de jeter une des deux boites. X est une variable discrète. On se propose de calculer $P(X = k)$ avec $k \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.
On considère les événements :
A : "pour une cigarette on tire la première boites de 5 allumettes" ;
B : "pour une cigarette on tire la deuxième boite de 2 allumettes" ;
A^d : "le dernier choix est A" ;
B^d : "le dernier choix est B" ;
(iA, jB) :" les $(i + j)$ premiers choix ont donné i fois A et j fois B".
On a $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ et $P(iA, jB) = C_{i+j}^{i}(\frac{1}{2})^{i+j}$ si $(iA, jB) \neq \emptyset$.
On écrit successivement

$$\begin{aligned}
P(X = 2) &= P(B)P(B) = \frac{1}{4},\\
P(X = 3) &= P((1A, 1B) \cap B^d) = P((1A, 1B))P(B) = C_2^1(\frac{1}{2})^2\frac{1}{2} = \frac{1}{4},\\
P(X = 4) &= P((2A, 1B) \cap B^d) = P((2A, 1B))P(B) = C_3^1(\frac{1}{2})^3\frac{1}{2} = \frac{3}{16}\\
P(X = 5) &= P((3A, 1B) \cap B^d) + P(4A \cap A^d) = C_4^3(\frac{1}{2})^4\frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^4\frac{1}{2} = \frac{5}{32}\\
P(X = 6) &= P((4A, 1B)) = C_5^1(\frac{1}{2})^5 = \frac{5}{32}.
\end{aligned}$$

D'où la loi de probabilité :

x_i	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{8}{32}$	$\frac{8}{32}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{32}$

On vérifie que $p_2 + \ldots + p_6 = 1$.
On en déduit :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum x_i p_i = \frac{1}{32}(16 + 24 + 24 + 25 + 30) = \frac{119}{32} \simeq 3.719.\\
E(X^2) &= \sum x_i^2 p_i = \frac{1}{32}(32 + 72 + 96 + 125 + 180) = \frac{505}{32} \simeq 15.78.\\
V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1999}{1024} \simeq 1.95.
\end{aligned}$$

Exercice 40 *Un sac contient trois tickets numérotés 1,2,3.*

1. *Soit X_1 le numéro que l'on peut obtenir en tirant un ticket. Quelle est sa loi de probabilité ? Calculer son espérance et son écart-type.*
2. *Soit X_2 la variable représentant la moyenne arithmétique des deux numéros que l'on peut obtenir en tirant deux tickets. Déterminer sa loi de probabilité et calculer son espérance et son écart-type selon les deux modes de tirages : exhaustif et non exhaustif.*

Solution -

1. X est une variable aléatoire discrète de loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$. On a

   $$P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = \frac{1}{3}, E(X) = 2, V(X) = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

   On note pour la suite X et Y les numéros tirés en premier et deuxièmes tirage.

2. **Tirage exhaustif** On a pour résultat possibles :

   $$\begin{aligned} \left(X_2 = \frac{3}{2}\right) &= (X = 1 \cap Y = 2) \cup (X = 2 \cap Y = 1) \\ (X_2 = 2) &= (X = 1 \cap Y = 3) \cup (X = 3 \cap Y = 1) \\ \left(X_2 = \frac{5}{2}\right) &= (X = 2 \cap Y = 3) \cup (X = 3 \cap Y = 2) \end{aligned}$$

   En appliquant l'axiome des probabilités totales puis la relation de probabilité conditionnelle, on a, par exemple,

   $$\begin{aligned} P(X_2 = \frac{3}{2}) &= P(X = 1)P(Y = 2|X = 1) + P(X = 2)P(Y = 1|X = 2) \\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

   On a la loi :

x_i	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

   On en déduit :

   $$E(X_2) = 2, \quad V(X_2) = \frac{1}{6}, \quad \sigma(X_2) = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Tirage non exhaustif On a pour résultats possibles :

$$\begin{aligned}
(X_2 = 1) &= (X = 1 \cap Y = 1) \\
\left(X_2 = \frac{3}{2}\right) &= (X = 1 \cap Y = 2) \cup (X = 2 \cap Y = 1) \\
(X_2 = 2) &= (X = 1 \cap Y = 3) \cup (X = 2 \cap Y = 2) \cup (X = 3 \cap Y = 1) \\
\left(X_2 = \frac{5}{2}\right) &= (X = 2 \cap Y = 3) \cup (X = 3 \cap Y = 2) \\
(X_2 = 3) &= (X = 3 \cap Y = 3)
\end{aligned}$$

En appliquant l'axiome des probabilités totales puis la relation de probabilité conditionnelle, on a, par exemple,

$$\begin{aligned}
P(X_2 = 2) &= P(X = 1)P(Y = 3) + P(X = 2)P(Y = 2) + P(X = 3)P(Y = 1) \\
&= 3\frac{1}{3}\frac{1}{3} = \frac{3}{9}.
\end{aligned}$$

On a la loi :

x_i	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
$P(X_2 = x_i)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

On en déduit :

$$E(X_2) = 2, \quad V(X_2) = \frac{1}{3}, \quad \sigma(X_2) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Exercice 41 *Un gardien de nuit a 10 clés, dont une seule marche, pour ouvrir une porte. Il emploie deux méthodes :*
A : méthode rationnelle ; à jeun, il retire les clés déjà essayées.
B : ivre, chaque clé peut être essayée plusieurs fois.
Soit X_A le nombre de clés déjà essayées avant d'ouvrir, y compris la bonne, dans le cas A, X_B dans le cas B.

1. *Déterminer la loi de probabilité de X_A et de X_B ;*
2. *Calculer les espérances de X_A et X_B ;*
3. *On sait que le gardien est ivre un jour sur trois. Un jour après avoir essayé 8 clés, le gardien n'a toujours pas ouvert la porte. Calculer la probabilité pour qu'il soit ivre.*

Solution - On note E_i l'événement : " la bonne clef est tirée i-ème fois". Si X est le nombre d'essai, on a

$$(X = k) = \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \ldots \cap \overline{E_{k-1}} \cap E_k, \quad k \in \{1, 2, \ldots, 10\}.$$

1. **Méthode A (tirage exhaustif)**

$$\begin{aligned}
P(X_A = 1) &= P(E_1) = \frac{1}{10} \\
P(X_A = 2) &= P(\overline{E_1} \cap E_2) = P(\overline{E_1})P(E_2|\overline{E_1}) = \frac{9}{10}\frac{1}{9} = \frac{1}{10} \\
P(X_A = 3) &= P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap E_3) = \frac{9}{10}\frac{8}{9}\frac{1}{8} = \frac{1}{10} \\
\vdots &= \vdots \\
P(X_A = 10) &= P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \ldots \cap \overline{E_9} \cap E_{10}) = \frac{9}{10}\frac{8}{9}\frac{7}{8} \ldots \frac{3}{2}\frac{1}{2}1 = \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

Il s'agit d'une loi uniforme sur $\{1, 2, \ldots, 10\}$.
Méthode B (tirage non exhaustif) $k \in \mathbb{N}^*$

$$P(X = k) = P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \ldots \cap \overline{E_{k-1}} \cap E_k) = \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} \frac{1}{10}.$$

C'est la loi géométrique.

2. $E(X_A) =$ et $E(X_B) =$
3. On a

$$\begin{aligned}
P(X_A > 8) &= P(X_A = 9) + P(X_A = 10) = 0.2 \\
P(X_B > 8) &= 1 - P(X_B \leq 8) = (\frac{9}{10})^8 \simeq 0.43 \\
P(X > 8) &= P(X = X_A)P(X > 8|X = X_A) + P(X = X_B)P(X > 8|X = X_B) \\
&= \frac{2}{3} \times 0.2 + \frac{1}{3} \times 0.43 \simeq \frac{1}{3}0.83
\end{aligned}$$

On peut alors écrire

$$P(\text{"gardien ivre"}|X > 8) = P(X = X_B|X > 8) = \frac{P(X = X_B \cap X > 8)}{P(X > 8)} \simeq \frac{\frac{1}{3}0.43}{\frac{1}{3}0.83} \simeq 0.5$$

Exercice 42 *Un groupe de 10 personnes est composé de 4 hommes et 6 femmes. On choisit dans ce groupe un échantillon de 4 personnes. Déterminer la loi de probabilité du nombre de femmes que l'on peut observer dans un tel échantillon ; calculer son espérance et sa variance.*

Solution - Il s'agit d'une loi hypergéométrique $E(X) = 2.4$; $V(X) = 0.64$.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{210}$	$\frac{24}{210}$	$\frac{90}{210}$	$\frac{80}{210}$	$\frac{15}{210}$

Exercice 43 *1. Montrer l'égalité :* $C_{2n}^n = \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2$.

2. A et B jouent à pile ou face : les lancers sont indépendants et la pièce non truquée, chaque joueur lançant n fois.

Calculer la probabilité que A et B obtiennent pile le même nombre de fois.

Solution -

1. Soient $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ et $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. C_{2n}^n est le nombre de parties à n éléments de $A \coprod B$. On note pour $0 \leq k \leq n$, $\mathcal{P}_k(A)$ l'ensemble des parties à k éléments de A. On définit l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_n(A \coprod B) & \to & \coprod_{k=0}^n \mathcal{P}_k(A) \times \mathcal{P}_{n-k}(B) \\ C & \mapsto & (C \cap A, C \cap B). \end{array}$$

Il est facile d vérifier que cette application est bijective ce qui nous donne la formule

$$C_{2n}^n = \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2.$$

2. Soient X le nombre de faces obtenues par A en n lancés et Y celles obtenues par B. On a

$$(X = Y) = \coprod_{k=0}^n (X = k) \cap (Y = k).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} P(X=Y) &= \sum_{k=0}^{n} P((X=k)\cap(Y=k)) \\ &= \sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 (\frac{1}{2})^{2k} (\frac{1}{2})^{2(n-k)} \\ &= \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^{n}. \end{aligned}$$

Exercice 44 *Soit X une variable aléatoire dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$P(X=n) = \frac{4}{n} P(X=n-1).$$

Trouver la loi de X et son espérance.

Solution - On a, par récurrence,

$$P(X=n) = \frac{4^n}{n!} P(X=0)$$

et de la relation

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(X=n) = 1$$

on déduit que

$$P(X=0) = e^{-4}.$$

X suit la la loi de Poisson $\mathcal{P}(4)$ et donc $E(X) = 4$.

Exercice 45 *On lance n fois une pièce non truquée. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où on obtient pile et soit*

$$Y = \frac{a^X}{2^n} \qquad (a \in \mathbb{R}^+).$$

Calculer $E(Y)$.

Solution - On a

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{2^n}\frac{a^k}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n} a^k C_n^k = \frac{1}{2^{2n}}(1+a)^n. \end{aligned}$$

Exercice 46 *Une urne contient 10 boules numérotées : 3 numéros 1, 2 numéros 2, 5 numéros 3. On tire deux boules et on considère la variable aléatoire représentant le total des numéros marqués sur les deux boules.*

1. *Déterminer sa loi de probabilité, son espérance et sa variance ;*
2. *Quelle est la probabilité pour que ce total prenne une valeur au moins égale à 6 ? strictement compris entre 2 et 6 ?*

Solution -

1. L'espace des événéments Ω associée à l'expérience aléatoire qui consiste à choisir 2 boules contient $C_1^2 0 = 45$ événements élémentaires équiprobables. On peut alors distinguer les événements suivants :
   (1,1) de probabilité $\frac{1}{45}C_3^2 = \frac{3}{45}$.
   (1,2) de probabilité $\frac{1}{45}3 \times 2 = \frac{6}{45}$.
   (1,3) de probabilité $\frac{1}{45}3 \times 5 = \frac{15}{45}$.
   (2,2) de probabilité $\frac{1}{45}C_2^2 = \frac{1}{45}$.
   (2,3) de probabilité $\frac{1}{45}2 \times 5 = \frac{10}{45}$.
   (3,3) de probabilité $\frac{1}{45}C_5^2 = \frac{10}{45}$.
   On en déduit aisément la loi de probabilité :

x_i	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{3}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{10}{45}$	$\frac{10}{45}$

   puis $E(X) = 4.4$ et $V(X) \simeq 1.35$.
2. $P(X \geq 6) = P(X = 6) = \frac{10}{45}$; et $P(2 < X < 6) = 1 - \frac{13}{45} = \frac{32}{45}$.

Exercice 47 *Combien de fois faut-il envisager de lancer une pièce de monnaie pour être "pratiquement sûr" d'observer au moins une fois l'événement "face" ?*

Solution - Chaque jet peut entraîner l'observation de l'événement "Face" avec la probabilité $\frac{1}{2}$ ou "Pile" avec la probabilité $\frac{1}{2}$. Les différents jets sont indépendants. Si X est la variable aléatoire " Nombre de faces que l'on peut obtenir sur n jets", on a $X \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$. Si on qualifie de "pratiquement sûr" un événement de probabilité supérieur à 0.99, il faut déterminer n pour que

$$P(X \geq 1) \geq 0.99 \Leftrightarrow P(X = 0) \leq 0.01.$$

Or $P(X = 0) = \frac{1}{2^n}$ ce qui donne $n \geq 7$.

Exercice 48 *Calculer l'espérance et la variance de la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p)$.*

Solution - Une population shématisée par une urne contient N individus (boules) dont M sont marqués (rouges). On considère l'expérience $\mathcal{E}$ qui consiste à prélever, sans remise, une échantillon de n individus (boules) $(n \leq N)$. Si X est la variable aléatoire associant à un tel échantillon le nombre d'individus marqués (boules rouges) qu'il contient. La loi de probabilité de X est définie par

$$P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \quad k \in \chi = [Max(n + M - N), Min(M, n)].$$

On dira que X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N, n, p = \frac{M}{N})$.
On a

$$E(X) = \sum_{k \in \chi} k \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} = \sum_{k \in \chi \setminus \{0\}} k \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}.$$

On sait que $kC_M^k = MC_{M-1}^{k-1}$. Donc

$$\begin{aligned} E(X) &= M \sum_{k \in \chi} \frac{C_{M-1}^{k-1} C_{N-1-(M-1)}^{n-1-(k-1)}}{C_N^n} \\ &= \frac{M}{C_N^n} \sum_{k_1 + k_2 = n-1} C_{M-1}^{k_1} C_{N-M}^{k_2} = \frac{M}{C_N^n} C_{N-1}^{n-1} \\ &= \frac{nM}{N} = np. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k\in\chi} k^2 \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \\
&= \sum_{k\in\chi\setminus\{0\}} k(k-1)\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} + \sum_{k\in\chi} k\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} \\
&= \sum_{k\in\chi\setminus\{0,1\}} M(M-1)\frac{C_{M-2}^{k-2} C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n} + n\frac{M}{N} \\
&= \frac{M(M-1)}{C_N^n} \sum_{k_1+k_2=n-2} C_{M-2}^{k_1} C_{N-M}^{k_2} + n\frac{M}{N} \\
&= \frac{M(M-1)}{C_N^n} C_{N-2}^{n-2} + n\frac{M}{N} = \frac{M(M-1)n(n-1)}{N(N-1)} + n\frac{M}{N}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
V(X) &= n\frac{M}{N}\left(\frac{(M-1)(n-1)}{N-1} + 1 - n\frac{M}{N}\right) \\
&= n\frac{M}{N}\left[\frac{(N-M)(N-n)}{N(N-1)}\right] = n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right).
\end{aligned}$$

Exercice 49 1. *On pose 20 questions à un candidat. Pour chaque question, k réponses sont proposées dont une seule est la bonne. Le candidat choisit au hasard une des réponses proposées. On lui attribue un point par bonne réponse. Soit X_1 le nombre de points obtenus. Quelle est la loi de X_1 ?*

2. *Lorsque le candidat donne une mauvaise réponse, il peut choisir à nouveau une des autres réponses proposées. On lui attribue $\frac{1}{2}$ point par bonne réponse. Soit X_2 le nombre de points obtenus lors de ces seconds choix. Quelle est la loi de X_2 ?*

3. *Soit X le nombre total de points obtenus. Calculer $E(X)$.*

4. *Déterminer k pour que le candidat obtienne en moyenne une note de 5 sur 20.*

Solution -

1. X_1 est le nombre de réalisations de l'événement A : " le candidat choisit la bonne réponse", de probabilité constante $\frac{1}{k}$, au cours de 20 épreuves indépendantes. Donc X_1 suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20, \frac{1}{k})$.
2. Soit Y_2 le nombre de bonnes réponses lors du seconds choix.
Sachant que $X_1 = i$ ($i \in [0, 20]$), Y_2 est le nombre de réalisationsde l'événement A de probabilité constante $\frac{1}{k-1}$ au cours de $20 - i$ épreuves indépendantes. Donc sachant que $X_1 = i$, Y_2 suit la loi suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20 - i, \frac{1}{k-1})$. On en déduit la loi de Y_2 :
Y_2 prend les valeurs de $[0, 20]$ et pour tout $j \in [0, 20]$,
$$P(Y_2 = j) = \sum_{i=0}^{20} P(X_1 = i)P((Y_2 = j)|(X_1 = i)).$$
Or si $j > 20 - i$, $P((Y_2 = j)|(X_1 = i)) = 0$ et si $0 \leq j \leq 20 - i$,
$$P((Y_2 = j)|(X_1 = i)) = C_{20-i}^{j} \frac{1}{(k-1)^j} \left(1 - \frac{1}{k-1}\right)^{20-i-j}.$$
Par conséquent
$$\begin{aligned} P(Y_2 = j) &= \sum_{i=0}^{20-j} C_{20}^{i} \frac{1}{k^i} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{20-i} C_{20-i}^{j} \frac{1}{(k-1)^j} \left(1 - \frac{1}{k-1}\right)^{20-i-j} \\ &= \sum_{i=0}^{20-j} \frac{20!}{i!(20-i)!} \times \frac{(20-i)!}{j!(20-i-j)!} \times \frac{(k-1)^{20-i}}{k^{20}} \times \frac{(k-2)^{20-i-j}}{(k-1)^{20-i}} \\ &= C_{20}^{j} \frac{1}{k^{20}} \sum_{i=0}^{20-j} C_{20-j}^{i} (k-2)^{20-j-i} \\ &= C_{20}^{j} \frac{1}{k^{20}} (k-1)^{20-j} = C_{20}^{j} \frac{1}{k^j} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{20-j}. \end{aligned}$$
Y_2 suit la loi $\mathcal{B}(20, \frac{1}{k})$.
On en déduit la loi de $X_2 = \frac{1}{2} Y_2$:
X_2 prend les valeurs $\frac{j}{2}$ avec $j \in [0, 20]$ et
$$P(X_2 = \frac{j}{2}) = P(Y_2 = j) = C_{20}^{j} \frac{1}{k^j} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{20-j}.$$
3. $X = X_1 + X_2$ et donc
$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) = 20\frac{1}{k} + E(\frac{1}{2} Y_2) = \frac{20}{k} + \frac{1}{2} \times 20 \times \frac{1}{k} = \frac{30}{k}.$$

4. La note obtenue à la fin du questionnaire est X. On a

$$E(X) = 5 \Leftrightarrow k = 6.$$

Exercice 50 *Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires. On tire les boules une à une sans les remettre jusqu'à ce qu'il ne reste que des boules d'une seule couleur dans l'urne. Soit X le nombre de tirage nécessaires. Quelle est la loi de X ?*

Solution - Soit B_i (resp. N_i) l'événement : " le i-ème tirage donne une boule blanche (resp. noire)". Pour alléger l'écriture, un événement de la forme $A \cap B$ sera noté AB.
X prend les valeurs 2,3,4,5. On a de manière évidente :

$$\begin{aligned}
P(X=2) &= P(B_1B_2) = P(B_1)P(B_2|B_1) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15} \\
P(X=3) &= P(B_1N_2B_3) + P(N_1B_2B_3) = \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{15} \\
P(X=4) &= P(B_1N_2N_3B_4) + P(N_1B_2N_3B_4) + P(N_1N_2B_3B_4) + P(N_1N_2N_3N_4) \\
&= \frac{2}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \\
&= \frac{4}{15} \\
P(X=5) &= P(B_1N_2N_3N_4B_5) + P(N_1B_2N_3N_4B_5) + P(N_1N_2B_3N_4B_5) \\
&+ P(N_1N_2N_3N_4B_5) + P(B_1N_2N_3N_4N_5) + P(N_1B_2N_3N_4N_5) \\
&+ P(N_1N_2B_3N_4N_5) + P(N_1N_2N_3B_4N_5) \\
&= 8 \times \frac{4 \times 3 \times 2 \times 2}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} = \frac{8}{15}
\end{aligned}$$

On en déduit le tableau de la loi de X :

x_i	2	3	4	5
p_i	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{8}{15}$

Exercice 51 *Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, prenant toutes les valeurs entières entre 1 et n, avec les probabilités :*

$$P(X = k) = P(Y = k) = 1/n, \qquad k \in [1, n].$$

Calculer $P(X = Y)$ et $P(X \geq Y)$. Déterminer la loi de $Z = X - Y$.

Solution - $\diamond$ On a

$$P(X=Y)=\sum_{k=1}^{n}P((X=k)\cap(Y=k))=\sum_{k=1}^{n}P(X=k)P(Y=k)$$

car X et Y sont indépendantes et par suite

$$P(X=Y)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n}.$$

$\diamond$ On a

$$P(X\geq Y)=\sum_{k=1}^{n}P((Y=k)\cap(X\geq k))=\sum_{k=1}^{n}P(Y=k)P(X\geq k).$$

Or

$$P(X\geq k)=\sum_{j=k}^{n}P(X=j)=\frac{n-k+1}{n}$$

et donc

$$P(X\geq Y)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\times\frac{n-k+1}{n}=\frac{n+1}{2n}.$$

Autre méthode : On a

$$P(X>Y)+P(X<Y)+P(X=Y)=1.$$

Et puisque X et Y joue des rôles symétriques, on a $P(X<Y)=P(X>Y)$. On en déduit que

$$\begin{aligned}P(X>Y) &= \frac{1}{2}(1-\frac{1}{n})=\frac{n-1}{2n}.\\ P(X\geq Y) &= P(X>Y)+P(X=Y)=\frac{n-1}{2n}+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{2n}.\end{aligned}$$

$\diamond$ X et Y prennent toutes les valeurs entières de 1 à n et donc $D=X-Y$ prend toutes les valeurs entière dans $[-n+1,n-1]$ et pour $k\in[-n+1,n-1]$, on a

$$\begin{aligned}P(D=k) &= \sum_{i-j=k}P((X=i)\cap(Y=j))=\sum_{i-j=k}P(X=i)P(Y=j)\\ &= \sum_{j=1}^{n}P(Y=j)P(X=j+k).\end{aligned}$$

Il est clair que

$$P(X = j + k) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq j + k \leq n.$$

Si $0 \leq k \leq n - 1$,

$$1 \leq j + k \leq n \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq j \leq n - k,$$

et donc

$$P(D = k) = \sum_{j=1}^{n-k} \frac{1}{n^2} = \frac{n-k}{n^2}.$$

Si $-n + 1 \leq k \leq -1$,

$$1 \leq j + k \leq n \quad \Leftrightarrow \quad 1 - k \leq j \leq n,$$

et donc

$$P(D = k) = \sum_{j=-k+1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{n+k}{n^2}.$$

En conclusion :

$$P(D = k) = \begin{cases} \frac{n-k}{n^2} & \text{si} \quad 0 \leq k \leq n - 1 \\ \frac{n+k}{n^2} & \text{si} \quad -n + 1 \leq k \leq -1 \end{cases}$$

Exercice 52 *Une urne contient N boule numérotées de 1 à N. On en tire n une à une ($n \leq N$).*
Soit X et Y le plus petit et le plus grand des nombres obtenus.

1. *Calculer $P(X \geq k)$ pour tout $k \in [1, N]$ et en déduire la loi de X.*
2. *Calculer $P(Y \geq k)$ pour tout $k \in [1, N]$ et en déduire la loi de Y.*
3. *Calculer $P((X > k) \cap (Y \leq q)$ pour tout $(k, q) \in [1, N]^2$ et en déduire la loi conjointe de X et Y.*
   On étudiera le cas des tirages avec remise et le cas des tirages sans remise.

Solution -

- **Cas des tirages avec remise**
  Le résultat d'un tirage possible est décrit par une liste de de n nombres de $[1, N]$. Toutes ces n-listes sont équiprobables, donc, pour tout événement A, $P(A)$ est le quotient du nombre des cas favorables par le nombre des cas possibles et il y a N^n cas possibles.

1. Soit $x \in [1, N]$. $(X \geq x)$ est réalisé si et seulement si les n nombres obtenus sont supérieurs ou égaux à x. On en déduit que
$$P(X \geq x) = \frac{(N - x + 1)^n}{N^n}$$
car il y a $N - x + 1$ nombre dans $[x, N]$.
X prend les valeurs $1, 2, \ldots, N$ avec, pour tout $x \in [1, N-1]$,
$$P(X = x) = P(X \geq x) - P(X \geq x + 1) = \frac{(N - x + 1)^n - (N - x)^n}{N^n}.$$
Cette formule est encore valable pour $x = N$ car $P(X = N) = \frac{1}{N^n}$.
2. Soit $y \in [1, N]$. $(Y \leq y)$ est réalisé si et seulement si les n nombres obtenus sont inférieurs ou égaux à y. On en déduit que
$$P(Y = y) = \frac{y^n}{N^n}$$
car il y a y nombres dans $[1, y]$.
Y prend les valeurs $1, 2, \ldots, N$ avec, pour tout $y \in [2, N]$,
$$P(Y = y) = P(Y \leq y) - P(Y \leq y - 1) = \frac{(y)^n - (y-1)^n}{N^n}.$$
Cette formule est encore valable pour $y = 1$ car $P(Y = 1) = \frac{1}{N^n}$.
3. Soit $(x, y) \in [1, N]^2$.
$P((X > x) \cap (Y \leq y)) = 0$ si $x \geq y$ car on a toujours $X \leq Y$.
Si $x < y$, $(X > x) \cap (Y \leq y)$ est réalisé si et seulement si les n nombres obtenus appartiennent à $[x + 1, y]$. Donc
$$P((X > x) \cap (Y \leq y)) = \frac{(y - x)^n}{N^n}.$$
Cette formule est encore valable si $x = y$.
$\diamond$ Si $x > y$, $P((X = x) \cap (Y = y)) = 0$ car on a toujours $X \leq Y$.
$\diamond$ Si $x = y$, $P((X = x) \cap (Y = y)) = \frac{1}{N^n}$ car les n nombres tirés sont alors égaux à x.
$\diamond$ Si $x < y$, on a
$$\begin{aligned} P((X = x) \cap (Y = y)) &= P((X > x - 1) \cap (Y = y)) - P((X > x) \cap (Y = y)) \\ &= P((X > x - 1) \cap (Y \leq y)) - P((X > x - 1) \cap (Y \leq y - \\ &- P((X > x) \cap (Y \leq y)) + P((X > x) \cap (Y \leq y - 1)). \end{aligned}$$

Si $x < y$, $x-1 < y$, $x-1 < y-1$ et $x \leq y-1$. Donc

$$\begin{aligned} P((X=x)\cap(Y=y)) &= \frac{1}{N^n}\{[y-(x-1)]^n - [(y-1)-(x-1)]^n \\ &- [y-x]^n + [(y-1)-x]^n\} \\ &= \frac{1}{N^n}[(y-x+1)^n - 2(y-x)^n + (y-x-1)^n]. \end{aligned}$$

- **Cas des tirages sans remise**
Le résultat d'un tirage possible est décrit par une combinaison de n nombres de $[1, N]$. Toutes ces combinaisons sont équiprobables, donc, pour tout événement A, $P(A)$ est le quotient du nombre des cas favorables par le nombre des cas possibles et il y a C_N^n cas possibles.
  1. La plus grande valeur prise par X est $N-n+1$ correspondant au tirage $\{N-n+1, N-n+2, \ldots, N\}$.
  X prend les valeurs $1, 2, \ldots, N-n+1$. Pour tout $x \in [1, N-n+1]$, on obtient en raisonnant comme 1.a) :
  $$P(X \geq x) = \frac{C_{N-x+1}^n}{C_N^n}, \quad P(X=x) = \frac{C_{N-x+1}^n - C_{N-x}^n}{C_N^n}$$
  en convenant de poser $C_{n-1}^n = 0$.
  2. La plus petite valeur prise par Y est n correspondant au tirage $\{1, \ldots, n\}$.
  Y prend les valeurs $n, \ldots, N$. Pour tout $y \in [n, N]$, on obtient en raisonnant comme 1.b) :
  $$P(Y \leq y) = \frac{C_y^n}{C_N^n}, \quad P(Y=y) = \frac{C_y^n - C_{y-1}^n}{C_N^n}.$$
  3. Soient $x \in [1, N-n+1]$ et $y \in [n, N]$. On a toujours $Y \geq X+n-1$ et donc :
  si $y \leq x+n-1$, $P((X > x)\cap(Y \leq y)) = 0$;
  si $y \geq x+n$, $P((X > x)\cap(Y \leq y)) = \frac{C_{y-x}^n}{C_N^n}$ car il y a $(y-x)$ dans $[x+1, y]$.
  D'où la loi du couple (X, Y) :
  $\diamond$ Si $y < x+n-1$, $P((X=x)\cap(Y=y)) = 0$.
  $\diamond$ Si $y = x+n-1$, $P((X=x)\cap(Y=y)) = \frac{1}{C_N^n}$ car le seul cas favorable est $\{x, x+1, \ldots, x+n-1\}$.
  $\diamond$ Si $y \geq x+n$, en raisonnant comme 1.c), on obtient :
  $$P((X=x)\cap(Y=y)) = \frac{1}{C_N^n}(C_{y-x+1}^n - 2C_{y-x}^n + C_{y-x-1}^n).$$

Exercice 53 *Soient X et Y 2 V.A. admettant des variances $V(X)$ et $V(Y)$. On pose $Z = X + Y$ et $T = X - Y$.*

1. *Montrer que si Z et T sont indépendantes alors $V(X) = V(Y)$.*
2. *Soient X et Y 2 V.A. indépendantes de même loi et prenant les valeurs 1,2,3 avec la probabilité 1/3.*
   (a) *Montrer que $V(X) = V(Y)$.*
   (b) *Déterminer les lois de Z et T. Z et T sont-elles indépendantes ?*
   (c) *Que peut-on conclure ?*

Solution -

1. On a
$$\left\{\begin{array}{lcl} Z & = & X+Y \\ T & = & X-Y \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} X & = & \frac{1}{2}(Z+T) \\ Y & = & \frac{1}{2}(Z-T) \end{array}\right.$$
   Z et T étant indépendants, $V(Z+T) = V(Z) + V(T) = V(Z-T)$et donc $V(X) = V(Y)$.
2. (a) X et Y étant deux variables aléatoires discrètes de mm̂e loi admettant une variance, $V(X) = V(Y)$.
   (b) Z prend les valeurs 2,3,4,5,6. Pour tout $k \in [1, 6]$,
$$P(Z = k) = \sum_{k_1+k_2=k} P((X = k_1)\cap(Y = k_2)) = P(X = k_1)P(Y = k_2).$$
   On en déduit la loi de Z

k	2	3	4	5	6
$P(Z=k)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

   T prend les valeurs -2,-1,0,1,2. Pour tout $k \in [-2, 2]$,
$$P(T = k) = \sum_{k_1-k_2=k} P((X = k_1)\cap(Y = k_2)) = P(X = k_1)P(Y = k_2).$$
   On en déduit la loi de Z

k	-2	-1	0	1	2
$P(Z=k)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

$$P((Z = 2)\cap(T = 0)) = P((X = 1)\cap(Y = 1)) = \frac{1}{9} \neq P(Z = 2)P(T = 0).$$
   Donc Z et T ne sont pas indépendantes.

(c) Ce contre-exemple prouve que $V(X) = V(Y)$ n'implique pas que Z et T sont indépendantes.

Exercice 54 *1. Montrer que* $C_{n-1}^{n-1} + C_n^{n-1} + \ldots + C_{2n-1}^{n-1} = C_{2n}^n$.

2. Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On tire les boules une à une sans remise. Soit X le rang de sortie de la dernière boule noire. Déterminer la loi de X et $E(X)$.

Solution -

1. $\displaystyle\sum_{k=n-1}^{2n-1} C_k^{n-1}$ est le coefficient de X^{n-1} dans le polynôme

$$P(X) = \sum_{k=n-1}^{2n-1} (1+x)^k.$$

D'un autre côté

$$P(X) = (1+X)^{n-1}\frac{(1+X)^{n+1}-1}{(1+X)-1} = \frac{(1+X)^{2n}-(1+X)^{n-1}}{X}.$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=n-1}^{2n-1} C_k^{n-1}$ est le coefficient de X^n dans le polynôme $(1+X)^{2n} - (1+X)^{n-1}$ qui est égal à C_{2n}^n.

2. X prend les valeurs $n, n+1, \ldots, 2n$.

Un tirage de $2n$ boules est représenté par une $2n$-liste d'éléments de $\{B, N\}$ contenant nB et nN. Toutes ces $2n$-listes sont équiprobables. Donc, pour tout $k \in [n, 2n]$, on a

$$P(X = k) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Il y a C_{2n}^n façons de choisir les n places des B parmi les $2n$ places possibles et pour chacune d'elles 1 façon de placer les nN. Il y a donc C_{2n}^n cas possibles.

Un tirage réalisant $(X = k)$ est représenté par une $2n$-liste d'éléments de $\{B, N\}$ constitué d'un N à la k-ème place, de $(n-1)N$ et $(k-n)B$

aux $(k-1)$ premières places et B aux places restantes. Il y a donc C_{k-1}^{n-1} cas favorables pour l'événement $(X=k)$ et donc

$$P(X=k)=\frac{C_{k-1}^{n-1}}{C_{2n}^{n}}, \quad k\in[n,2n].$$

On vérifie aisément à l'aide de 1) que

$$\sum_{k=n}^{2n}P(X=k)=1.$$

On a

$$E(X)=\sum_{k=n}^{2n}kP(X=k)=\sum_{k=n}^{2n}k\frac{C_{k-1}^{n-1}}{C_{2n}^{n}}=\frac{1}{C_{2n}^{n}}\sum_{k=n}^{2n}nC_k^n$$

car $C_k^n=\frac{k}{n}C_{k-1}^{n-1}$.
La formule de 1) donne

$$\sum_{k=n}^{2n+1}C_k^n=C_{2n+2}^{n+1}.$$

Donc

$$E(X)=\frac{n}{C_{2n}^{n}}(C_{2n+2}^{n+1}-C_{2n+1}^{n})=\frac{n(2n+1)}{(n+1)}.$$

Exercice 55 *Les vaches laitières sont atteintes par une maladie M avec la probabilité p=0.15. Pour dépister la maladie M dans une étable de n vaches laitières, on fait une analyse de lait ; on peut procéder de deux manières différentes :*

- 1^{re} *méthode : On effectue une analyse sur un échantillon de lait de chaque vache.*
- 2^{e} *méthode : On effectue une analyse sur un échantillon du mélange des laits des n vaches et si le résultat est positif, on effectue une analyse pour chaque vache. Soit X_n le nombre d'analyses réalisés dans la deuxième méthode ; on pose $Y_n=X_n/n$.*

1. *Déterminer la loi de Y_n et puis l'espérance mathématique de cette variable en fonction de n.*
2. *On voudrait connaître la méthode la plus économique en fonction du nombre d'animaux.*

(a) *Etudier la fonction* $f : x \mapsto ax + Lnx$ *où* a *est un réel strictement négatif.*
Montrer qu'il admet un maximum positif lorsque l'on choisit $a = Ln(0.85)$.

(b) *Trouver dans ce cas la plus grande valeurs entière de* x *pour laquelle* $f(x) > 0$.

(c) *Montrer que* $f(n) > 0$ *équivaut à* $E(Y_n) < 1$.
En déduire suivant les valeurs de n *la méthode que l'on a intérêt à adopter.*

Solution - On analyse un échantillon du mélange des laits des n vaches. Si le résultat est positif on analyse le lait de chaque vache.
X_n = nombre d'analyse effectuées et $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

1. X_n prend les valeurs 1 et $n+1$ et donc Y_n prend les valeurs $\frac{1}{n}$ et $\frac{n+1}{n}$.

$$(Y = \frac{1}{n}) \iff (X_n = 1) \iff \text{aucune des } n \text{ vaches n'est malade.}$$

Donc
$$P(Y_n = \frac{1}{n}) = (1 - 0.15)^n$$
(si l'on suppose que les vaches sont indépendantes vis-à-vis de la maladie). On a
$$P(Y_n = \frac{n+1}{n}) = 1 - P(Y_n = \frac{1}{n}) = 1 - (0.85)^n.$$
$$E(Y_n) = \frac{1}{n}(0.85)^n + \frac{n+1}{n}(1 - (0.85)^n) = 1 + \frac{1}{n} - (0.85)^n.$$

2. (a) $a < 0$, $f(x) = ax + ln(x)$. $D_f = \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x > 0$, on a
$$f'(x) = \frac{1 + ax}{x}.$$

x	0		$\frac{-1}{a}$		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	-	
$f(x)$	$\|\|$	$\nearrow$		$\searrow$	

f admet un maximum pour $x = -\frac{1}{a}$.

$$f(-\frac{1}{a}) = -1 + ln(-\frac{1}{a}) = -1 - ln(-a).$$

Soit $a = ln(0.85)$ (on a bien $a < 0$). Le maximum de f est alors $-1 - ln(-ln(0.85)) > 0.81$. Donc f admet un maximum positif si $a = ln(0.85)$.

(b) $-\frac{1}{a} = -\frac{1}{ln(0.85)} > 6$. En calculant les valeurs successives $f(n) = nln(0.85) + ln(n)$ pour $n \geq 7$, on obtient $f(17) > 0.07$ et $f(18) < -0.03$. Donc la plus grande valeur entière pour laquelle $f(x) > 0$ est 17.

(c) On a

$$E(Y_n) < 1 \Longleftrightarrow f(n) > 0.$$

Par suite $2 \leq n \leq 17$, $f(n) > 0$ et $E(Y_n) < 1$. Dans ce cas la 2-ème méthode est préférable à la première car, en moyenne, la 2-ème méthode nécessite moins de n analyses alors que la première méthode nécessite toujours n.

Si $n \geq 18$, la première méthode est préférable.

Exercice 56 *Soient X et Y deux V.A indépendantes vérifiant :*

$$P(X = n) = P(Y = n) = \frac{1}{4}\left(\frac{1 + a^n}{n!}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. *Déterminer a et calculer $E(X)$ et $V(X)$.*
2. *Déterminer la loi de $S = X + Y$.*

Solution -

1. On doit avoir $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = 1$, c'est à dire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{1 + a^n}{n!}\right) = 1$. Or $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4}\left(\frac{1 + a^n}{n!}\right) = \frac{1}{4}(e + e^a)$ et par conséquent $a = ln(4 - e)$.

   ◇ Sous réserve d'existence, on a

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{4}\left(\frac{1 + a^n}{n!}\right) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1 + a^n}{(n-1)!}\right) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1 + a^{k+1}}{k!} \\ &= \frac{1}{4}(e + ae^a). \end{aligned}$$

Donc $E(X)$ existe et

$$E(X) = \frac{1}{4}[e + (4-e)ln(4-e)].$$

$\diamond$ Sous réserve d'existence, on a

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{4}\left(\frac{1+a^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{4}\left(\frac{1+a^n}{n!}\right) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{4}\left(\frac{1+a^n}{n!}\right) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1+a^n}{(n-2)!}\right) + E(X) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1+a^{k+2}}{k!} + E(X) \\
&= \frac{1}{4}(2e + (4-e)[ln(4-e)]^2 + (4-e)ln(4-e)).
\end{aligned}$$

Par conséquent $V(X)$ existe et

$$V(X) = \frac{1}{16}[(8e-e^2) + 2(4-e)(2-e)ln(4-e) + e(4-e)[ln(4-e)]^2].$$

2. $S = X + Y$ prend toutes les valeurs de $\mathbb{N}$ avec les probabilités

$$P(S=n) = \sum_{i+j=n} P((X=i)\cap(Y=j)) = \sum_{i+j=n} P(X=i)P(Y=j)$$

car X et Y sont indépendantes. Donc

$$\begin{aligned}
P(S=n) &= \sum_{i+j=n} \frac{1}{4}\left(\frac{1+a^i}{i!}\right) \times \frac{1}{4}\left(\frac{1+a^j}{j!}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{16}\left(\frac{1+a^i}{i!}\right)\left(\frac{1+a^{n-i}}{(n-i)!}\right) \\
&= \frac{1}{16n!}\sum_{i=0}^{n} C_n^i(1+a^i)(1+a^{n-i}) \\
&= \frac{1}{16n!}\left[\sum_{i=0}^{n} C_n^i + \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i + \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} + \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^n\right] \\
&= \frac{1}{16n!}\left[2^n + 2(1+a)^n + 2^n a^n\right].
\end{aligned}$$

La loi de S est donc définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(S = n) = \frac{1}{16n!}\left[2^n(1 + a^n) + 2(1 + a)^n\right].$$

Exercice 57 *1. Un dé A parfaitement équilibré porte les nombres 1 sur 4 faces et (-2) sur les autres faces. Soit X la variable qui à un lancer du dé A associe le nombre obtenu. Un dé B porte les nombres $(-2), (-1), 0, 1, 2, 3$. Ce dé n'est pas équilibré. Les probabilités d'apparition de chaque face forment dans l'ordre indiqué ci-dessus une suite géométrique de raison 1/2. Quelles sont ces probabilités ?*

2. *On lance une fois, simultanément, les deux dés A et B et on désigne par S la valeur absolue de la somme des nombres obtenus.*
   (a) *Déterminer la loi conjointe de X et S.*
   (b) *Déterminer la loi marginale de S.*
   (c) *X et S sont-elles indépendantes ?*

Solution -

1. Soit Y la variable aléatoire qui à un lancé du dé B associe le nombre obtenu. Posons $p = P(Y = 2)$. On a par hypothèse : $P(Y = -1) = \frac{1}{2}p$, $P(Y = 0) = \frac{1}{2^2}p$, $P(Y = 1) = \frac{1}{2^3}p$, $P(Y = 2) = \frac{1}{2^4}p$ et $P(Y = 3) = \frac{1}{2^5}p$.
   De $\sum_{k=-2}^{3} P(Y = k) = 1$, on déduit $p = \frac{32}{63}$. D'où la loi de Y :

k	-2	-1	0	1	2	3
$P(Y = k)$	$\frac{32}{63}$	$\frac{16}{63}$	$\frac{8}{63}$	$\frac{4}{63}$	$\frac{2}{63}$	$\frac{1}{63}$

2. Tableau des valeurs de S suivant les valeurs de X et de Y :

X \ Y	-2	-1	0	1	2	3
-2	4	3	2	1	0	1
1	1	0	1	2	3	4

   S prend les valeurs : 0,1,2,3,4.

3. (a) La loi du couple (X, S) est donné par le tableau :

X \ S	0	1	2	3	4	Loi de X
-2	$\frac{2}{189}$	$\frac{5}{189}$	$\frac{8}{189}$	$\frac{16}{189}$	$\frac{32}{189}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{32}{189}$	$\frac{80}{189}$	$\frac{8}{189}$	$\frac{4}{189}$	$\frac{2}{189}$	$\frac{2}{3}$
Loi de S	$\frac{34}{189}$	$\frac{85}{189}$	$\frac{16}{189}$	$\frac{20}{189}$	$\frac{34}{189}$	1

Par exemple :

$$P((X=-2)\cap(S=4)) = P((X=-2)\cap(Y=-2)) = P(X=-2)P(Y=-2)$$

car X et Y sont indépendantes.

(b) X et S ne sont pas indépendantes car :

$$P((X=-2)\cap(S=0)) = \frac{2}{189} \neq P(X=-2)P(S=0).$$

Exercice 58 *On a n boites numérotées de 1 à n. La boite k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boite puis une boule dans cette boite. Soit X le numéro de la boite et Y le numéro de la boule.*

1. *Déterminer la loi conjointe de X et Y.*
2. *Calculer $P(X = Y)$.*
3. *Déterminer la loi de Y et $E(Y)$.*

Solution -

1. Pour tout $(p, q) \in [1, n]^2$, on a

$$P((X=p)\cap(Y=q)) = P(X=p)P((Y=q)|(X=p)) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p < q \\ \frac{1}{np} & \text{si} \quad p \geq q \end{cases}$$

2. On a

$$P(X=Y) = \sum_{p=1}^{n} P((X=p)\cap(Y=p)) = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{np} = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}.$$

3. Y prend les valeurs $1, 2, \ldots, n$ et pour tout $q \in [1, n]$, on a
$$P(Y = q) = \sum_{p=1}^{n} P((X = p) \cap (Y = p)) = \frac{1}{n} \sum_{p=q}^{n} \frac{1}{p}.$$
D'un autre côté
$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{q=1}^{n} qP(Y = q) = \sum_{q=1}^{n} \frac{q}{n} \sum_{p=q}^{n} \frac{1}{p} = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{p} \frac{q}{p} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \sum_{q=1}^{p} q = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \frac{p(p+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2n} \sum_{p=1}^{n} (p+1) = \frac{n+3}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 59 *Soit* (X, Y) *un couple de V.A à valeurs dans* $\mathbb{N}^2$*, tel que :*
$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2, \quad P((X = j) \cap (Y = k)) = \frac{(j+k)\lambda^{j+k}}{ej!k!} (\lambda > 0).$$

1. *Déterminer* λ.
2. *Trouver les lois de* X *et* Y. X *et* Y *sont-elles indépendantes ?*
3. *Calculer* $E(2^{X+Y})$.

Solution -

1. λ doit vérifier $\lambda \geq 0$ et
$$\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} P((X = j) \cap (Y = k)) = 1.$$
On a
$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(j+k)\lambda^{j+k}}{ej!k!} \right) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{ej!} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} j \frac{\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k\lambda^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{ej!} (je^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}) = \frac{e^{\lambda}}{e} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} j \frac{\lambda^j}{j!} + \lambda \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\lambda^j}{j!} \right) \\ &= 2\lambda e^{2\lambda - 1}. \end{aligned}$$
Il est facile de vérifier que $\lambda = \frac{1}{2}$ est l'unique solution positive de l'équation $2\lambda e^{2\lambda-1} = 1$.

2. Loi marginale de X

   Pour tout $q \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} P(X=q) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P((X=q)\cap(Y=k)) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(q+k)\lambda^{q+k}}{eq!k!} = \frac{\lambda q}{eq!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{q+k}{k!}\lambda^k \\ &= \frac{\lambda q}{eq!}(qe^{\lambda}+\lambda e^{\lambda}) = \frac{(q+\lambda)\lambda^q}{q!}e^{\lambda-1} \\ &= \frac{(2q+1)}{2^{q+1}q!\sqrt{e}}. \end{aligned}$$

   Loi marginale de Y

   q et k jouant des rôles symétriques dans $\frac{(q+k)\lambda^{q+k}}{eq!k!}$, Y suit la même loi que X.

   X et Y ne sont pas indépendantes car par exemple :

$$P((X=0)\cap(Y=0)) = 0 \neq P(X=0)P(Y=0).$$

3. On a

$$\begin{aligned} E(2^{X+Y}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k P(X+Y=k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k\left(\sum_{q=0}^{k} P((X=q)\cap(Y=k-q))\right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k\left(\sum_{q=0}^{k}\frac{(q+k-q)\lambda^{q+k-q}}{eq!(k-q)!}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^k k}{ek!}\lambda^k\left(\sum_{q=0}^{k}\frac{k!}{q!(k-q)!}\right) = 2e. \end{aligned}$$

Exercice 60 *Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ. Soit Y une V.A dont la loi conditionnelle sachant $(X=n)$ est la loi binomiale $B(n,p)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (p fixé dans $]0,1[$). Quelle est la loi de Y ?*

Solution - Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$P((Y=k)|(X=n)) = \begin{cases} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} & \text{si} \quad 0 \le k \le n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Donc Y peut prendre toutes les valeurs de $\mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} P(Y=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)P((Y=k)|(X=n)) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n p^k (1-p)^{n-k}}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{e^{-\lambda} p^k}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{i+k} (1-p)^i}{i!} \\ &= \frac{e^{-\lambda} p^k \lambda^k}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{[\lambda(1-p)]^i}{i!} \\ &= \frac{e^{-\lambda} p^k \lambda^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} \\ &= \frac{e^{-\lambda p} (p\lambda)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Y suit donc la loi de Poisson de paramètre λp.

Exercice 61 Loi multinomiale

Soit une urne contenant des boules blanches en proportion p, des boules rouges en proportion q et des boules noires en proportion r $(p+q+r=1)$. On tire n boules avec remise.

1. *Calculer la probabilité de l'événement E :" ontenir x boules blanches, y rouges et z noires " $(x+y+z=n)$.*
2. *Soient X et Y les V.A définies par : X est le nombre de boules blanches obtenues et Y le nombre de boules rouges obtenues.*
   (a) *Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y).*
   (b) *Déterminer les lois marginales de X et de Y et les lois de Y sachant X et X sachant Y.*

Solution -

1. Le résultat d'un tirage de n boules réalisant E peut être représenté par une n-liste d'éléments de l'ensemble $\{B, R, N\}$, contenant xB, yR, zN. (B, R, N signifiant que le résultat du tirage considéré est une boule blanche, rouge ou noir). Il y a C_n^x façons de placer les xB parmi les n places de la n-liste, puis pour chacune d'elles C_{n-x}^y façons de placer les yR parmi les $n - x$ restantes, puis pour chacune d'elles une façon de placer les zN parmi les z places restantes. Il y a donc $C_n^x C_{n-x}^y$ n-listes distinctes représentant la réalisation de E. Chacune de ces n-listes a pour probabilité $p^x q^y r^z$ car les tirages sont fait avec remise. D'où
$$P(E) = C_n^x C_{n-x}^y p^x q^y r^z.$$
2. (a) $(X = x) \cap (Y = y)$ est réalisé si et seulement si l'on a obtenu x boules blanches, y rouges et donc $n - x - y$ noires. Donc
$$P((X = x) \cap (Y = y)) = \begin{cases} C_n^x C_{n-x}^y p^x q^y r^{n-x-y} & \text{si} \quad (x, y) \in [0, n]^2 \quad \text{et} \quad x + y \in [0, n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   (b) X prend les valeurs de $[0, n]$, et pour tout $x \in [0, n]$,
$$\begin{aligned} P(X = x) &= \sum_{y=0}^{n} P((X = x) \cap (Y = y)) = \sum_{y=0}^{n-x} C_n^x C_{n-x}^y p^x q^y r^{n-x-y} \\ &= C_n^x p^x \sum_{y=0}^{n-x} C_{n-x}^y q^y r^{n-x-y} = C_n^x p^x (q + r)^{n-x} = C_n^x p^x (1 - p)^{n-x} \end{aligned}$$
   car $p + q + r = 1$ et donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
   X et Y jouant des rôles symétriques, Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, q)$. (X et Y ne sont pas indépendantes).

Exercice 62 Loi binomiale négative

1. *(a) Soit $u_n = C_{r+n}^n x^n, 0 < x < 1$. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.*
   (b) Montrer que
$$\left| \frac{1}{(1 - x)^r} - \sum_{k=0}^{n} C_{k+r-1}^{r-1} x^k \right| \leq r C_{r+n}^n x^n \int_0^x \frac{dt}{(1 - t)^{r+1}}.$$

(c) En déduire que $\dfrac{1}{(1-x)^r} = \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+r-1}^{r-1} x^k$.

2. *Considérons une urne contenant des boules blanches en proportion p, et des boules noires en proportion $q = 1-p$ ($p \in]0,1[$).*
   On effectue des tirages avec remise dans cette urne jusqu'à obtention de r boules blanche. Soit X le nombre des boules noires obtenuees (avant la r^e boule blanche). Déterminer la loi de X et l'espérance de X.

Solution -

1. (a) On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{r+n+1}{n+1}x$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = x < 1$. Par conséquent, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n-0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \dfrac{x+1}{2} < 1$ soit $u_{n+1} < \frac{x+1}{2}u_n$. On en déduit que, pour tout $n \geq n_0$,

$$0 < u_n < \left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}.$$

   On obtient donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

   (b) f est de classe C^∞ sur $]0,1[$ et pout tout $k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(k)}(x) = \frac{(r+k-1)!}{(r-1)!(1-x)^{r+k}}.$$

   On peut appliquer à f la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

   Donc

$$|\frac{1}{(1-x)^r} - \sum_{k=0}^{n} C_{k+r-1}^{r-1} x^k| = \frac{(r+n)!}{n!(r-1)!} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{r+n+1}} dt.$$

   Or

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{r+n+1}} dt = \int_0^x \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \frac{dt}{(1-t)^{r+1}}.$$

   Puisque $\frac{x-t}{1-t} < x$, on en déduit que

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{r+n+1}} dt \leq x^n \int_0^x \frac{dt}{(1-t)^{r+1}}.$$

On en déduit que

$$|\frac{1}{(1-x)^r} - \sum_{k=0}^{n} C_{k+r-1}^{r-1} x^k| \leq r C_{r+n}^{n} x^n \int_0^x \frac{dt}{(1-t)^{r+1}}.$$

(c) D'après a), $\lim_{\to +\infty} C_{n+r}^{n} x^n = 0$ et donc d'après b), $\frac{1}{(1-x)^r} = \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+r-1}^{r-1} x^k$.

2. X peut prendre toutes les valeurs dans $\mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. $(X = k)$ est réalisé si et seulement si l'on a effectué $k+r$ tirages, le $k+r$-ème tirage a donné une boule blanche, au cours des $k+r-1$ premiers tirages, on a obtenu k boules noires et $r-1$ boules blanches. Le résultat des $(k+r)$ tirages réalisant $(X = r)$ peut être représenté par une $(k+r)$-liste d'éléments de l'ensemble $\{B, N\}$, se terminant par B et comportant kN. Il y a C_{k+r-1}^{k} listes de ce type, chacune ayant pour probabilité $p^r q^k$ car les tirages se font avec remise. Donc

$$P(X = k) = C_{k+r-1}^{k} p^r q^k.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{+\infty} k C_{k+r-1}^{k} p^r q^k &= p^r \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+r-1)!}{(k-1)!(r-1)!} q^k \\
&= p^r \sum_{k=0}^{+\infty} r C_{k+r-1}^{k-1} q^k = r p^r q \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+r}^{r} q^k \\
&= r p^r \frac{q}{(1-q)^{r+1}} = r \frac{p}{q}.
\end{aligned}$$

Donc $E(X)$ existe et

$$E(X) = r \frac{p}{q}.$$

Exercice 63 *Soit X une V.A qui suit la loi binomiale $B(2n, p)$. Soit Y la partie entière de $\frac{X}{2}$. Déterminer la loi de Y, $E(Y)$ et $V(Y)$.*

Solution - $\diamond$ Y prend les valeurs $E(\frac{k}{2})$ pour $0 \leq k \leq 2n$, c'est à dire les valeurs $0, 1, \ldots, n$.

$P(Y=n)=P(X=2n)=p^{2n}$ et pour tout $q\in[0,n-1]$, on a

$$\begin{aligned} P(Y=q) &= P((X=2q)\cup(X=2q+1)) \\ &= C_{2n}^{2q}p^{2q}(1-p)^{2n-2q}+C_{2n}^{2q+1}p^{2q+1}(1-p)^{2n-2q-1} \\ &= p^{2q}(1-p)^{2n-2q-1}[C_{2n}^{2q}(1-p)+C_{2n}^{2q+1}p]. \end{aligned}$$

⋄ On a

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{q=0}^{n-1} qP(Y=q)+nP(Y=n) \\ &= \sum_{q=0}^{n-1}[qP(X=2q)+qP(X=2q+1)]+nP(X=2n) \\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{q=0}^{n-1}[2qP(X=2q)+(2q+1)P(X=2q+1)]+2nP(X=2n)\right] \\ &- \frac{1}{2}\sum_{q=0}^{n-1}P(X=2q+1) \\ &= \frac{1}{2}E(X)-\frac{1}{2}\sum_{q=0}^{n-1}P(X=2q+1) \end{aligned}$$

Or

$$\left\{\begin{array}{lcl} \displaystyle\sum_{q=0}^{n-1}P(X=2q+1)+\sum_{q=0}^{n}P(X=2q) & = & \displaystyle\sum_{q=0}^{2n}P(X=q)=1 \\ \displaystyle-\sum_{q=0}^{n-1}P(X=2q+1)+\sum_{q=0}^{n}P(X=2q) & = & \displaystyle\sum_{q=0}^{2n}C_{2n}^{q}(-1)^q p^q(1-p)^{2n-q}=(1-2p)^{2n} \end{array}\right.$$

Donc

$$E(Y)=np-\frac{1}{4}[1-(1-2p)^{2n}].$$

⋄ On a

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{q=0}^{n-1}[q^2P(X=2q)+q^2P(X=2q+1)]+n^2P(X=2n) \\ &= \frac{1}{4}\left[\sum_{q=0}^{n-1}[(2q)^2P(X=2q)+(2q+1)^2P(X=2q+1)]+(2n)^2P(X=2n)\right] \\ &- \sum_{q=0}^{n-1}(q+\frac{1}{4})P(X=2q+1) \end{aligned}$$

Notons $A = \sum_{q=0}^{n}(2q)P(X = 2q)$ et $B = \sum_{q=0}^{n-1}(2q+1)P(X = 2q+1)$. Alors

$$\sum_{q=0}^{n-1}(q+\frac{1}{4})P(X = 2q+1) = \frac{1}{2}B - \frac{1}{4}\sum_{q=0}^{n-1}P(X = 2q+1)$$

et

$$\begin{aligned} A + B &= \sum_{q=0}^{2n} qP(X = q) = E(X) = 2np \\ A - B &= \sum_{q=0}^{2n} qC_{2n}^{q}(-1)^q p^q (1-p)^{2n-q} = \sum_{q=1}^{2n} qC_{2n}^{q}(-1)^q p^q (1-p)^{2n-q} \\ &= \sum_{q=1}^{2n} 2nC_{2n}^{q}(-1)^q p^q (1-p)^{2n-q} = -2np(1-2p)^{2n-1}. \end{aligned}$$

On en déduit que $B = np[1 + (1-2p)^{2n}]$ et par suite puisque $\sum_{q=0}^{n-1}P(X = 2q+1) = \frac{1}{2}[1-(1-2p)^{2n}]$,

$$E(Y^2) = \frac{1}{4}E(X^2) - \frac{1}{2}np[1 + (1-2p)^{2n}] + \frac{1}{8}[1-(1-2p)^{2n}].$$

◇ Donc

$$\begin{aligned} V(Y) &= \frac{1}{4}E(X^2) - \frac{1}{2}np[1 + (1-2p)^{2n}] + \frac{1}{8}[1-(1-2p)^{2n}] \\ &- \frac{1}{4}E(X)^2 - \frac{1}{16}[1-(1-2p)^{2n}]^2 + \frac{1}{4}E(X)[1-(1-2p)^{2n}]^2 \\ &= np(1-p)\left[\frac{1}{2} - (1-2p)^{2n-1}\right] + \frac{1}{16}[1-(1-2p)^{4n}]. \end{aligned}$$

Exercice 64 *Soient X_1 et X_2 deux V.A indépendantes qui suivent la loi géométrique sur de paramètre $p \in]0,1[$. Soit*

$$A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}.$$

Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable ?

Solution - Les valeurs propres de A sont X_1 et X_2. A est diagonalisable si et seulement si $X_1 \neq X_2$. Par conséquent la probabilité que A soit diagonalisable est

$$P(X_1 \neq X_2) = 1 - P(X_1 = X_2).$$

Or

$$P(X_1 = X_2) = \sum_{k=0}^{+\infty} P((X_1 = k) \cap (X_2 = k)) = \sum_{k=0}^{+\infty} p^2 q^{2k} = \frac{p}{1+q}$$

car X_1 et X_2 sont indépendantes et en posant $q = 1 - p$.

Chapitre 4

Variables aléatoires à densité

Les modèles probabilistes à variables aléatoires continues apparaissent naturellement et sont très utiles dans la pratique. Mesurer la taille d'un individu pris au hasard dans une population donnée, mesurer la vitesse d'une voiture prise au hasard sur l'autoroute, sont des exemples où il est nécessaire de faire appel aux variables aléatoires continues. Ces variables aléatoires, en plus de leur précision, font appel à des outils de calcul puissants pour permettre une analyse que les modèles discrets ne permettent pas. Dans ce chapitre, nous allons introduire ces variables aléatoires, leurs lois de probabilités, leur espérance mathématique, leur variances etc.... Nous allons aussi donner quelques exemples de lois de probabilités continues dont la plus utile et la plus commune est la loi normale.

4.1 Variables aléatoires continues et densités de probabilité

Une variable aléatoire X est dite **continue** si sa loi de probabilité peut être décrite à l'aide d'une fonction positive f_X appelée **densité de probabilité** de X, c'est-à-dire, pour tout $A \subset \mathbb{R}$, [1]

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x)dx. \tag{4.1}$$

1. Pour les besoins de ce cours A est un intervalle (a, b) et $\int_A f_X(x)dx = \int_a^b f_X(x)dx$ est l'intégrale (au besoin impropre) de Riemann.

Dans ce cas, la fonction de répartition F_X de X (voir chapitre 3) est donnée par

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X < t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx. \tag{4.2}$$

Les propriétés suivantes sont immédiates. Si f_X est la densité de probabilité de X alors

- Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X = a) = \int_{a}^{a} f_X(x)dx = 0. \tag{4.3}$$

- Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(a \leq X \leq b) &= \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a < X < b) \\ &= \int_{a}^{b} f_X(x)dx. \end{aligned} \tag{4.4}$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_X(x) \geq 0$ et on a la condition de normalisation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \mathbb{P}(-\infty < X < +\infty) = 1. \tag{4.5}$$

Exemples -

1. **On considère la variable aléatoire dont la densité de probabilité est donnée par**

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \textbf{si} \quad 0 < x < 1 \\ 0 & \textbf{si} \quad x \notin]0,1[\end{cases}$$

   Bien que f_X tend vers l'infini quand x tend vers 0, cette fonction est une densité de probabilité car $f_X \geq 0$ et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = \int_{0}^{1} \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \left[\sqrt{x}\right]_0^1 = 1.$$

   Par exemple

$$\mathbb{P}(-1 \leq X \leq \frac{1}{2}) = \left[\sqrt{x}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. **Pour aller à son travail, Ahmed met entre 15 et 20 minutes quand il fait beau et entre 20 et 25 minutes quand il pleut. On assume qu'un jour est sans pluie avec une probabilité de $\frac{2}{3}$. Nous allons calculer la densité de probabilité de la variable**

aléatoire X mesurant le temps d'Ahmed met pour aller au travail. La probabilité pour que X prend une valeur dans l'intervalle $[15, 20]$ dans les beaux jours étant la même et de même pour les jours pluvieux, on déduit que

$$f_X(x) = \begin{cases} c_1 & \textbf{si} \quad 15 \leq x < 20 \\ c_2 & \textbf{si} \quad 20 \leq x \leq 25 \\ 0 & \textbf{sinon} \end{cases}$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes. On a

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} &= \mathbb{P}(\textbf{il fait beau}) = \mathbb{P}(15 \leq X \leq 20) = \int_{15}^{20} c_1 dx = 5c_1, \\ \frac{1}{3} &= \mathbb{P}(\textbf{il pleut}) = \mathbb{P}(20 \leq X \leq 25) = \int_{20}^{25} c_2 dx = 5c_2, \end{aligned}$$

soit

$$c_1 = \frac{2}{15} \quad \textbf{et} \quad c_2 = \frac{1}{15}.$$

4.2 Espérance, variance et écart-type d'une variable aléatoire continues

Soit X une variable aléatoire continue de densité de probabilité f_X. Nous allons associer à la distribution de X les mêmes paramètres descriptifs que nous avons associé aux variables aléatoires discrètes. Ces paramètres ont la même dénomination que dans le cas d'une distribution discrète parce qu'ils recouvrent les mêmes concepts. Ils sont définis en remplaçant les lois de probabilités par les densités de probabilité et la somme par l'intégrale.
On appelle **espérance** de la variable aléatoire X, et on note $E(X)$ le nombre réel, s'il existe

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx. \tag{4.6}$$

L'existence de $E(X)$ est liée à la convergence de l'intégrale.
Comme dans le cas discrète, si $g(X)$ est une fonction de X, on a

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx. \tag{4.7}$$

On appelle **variance** de la variable aléatoire X, et on note $V(X)$, le nombre réel s'il existe, défini par

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f_X(x) dx. \tag{4.8}$$

On note que $V(X)$ est strictement positive.
On appelle **écart-type** de X la racine carrée de sa variance. On le note σ_X.
On a

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)}. \tag{4.9}$$

- On a

$$0 \leq V(X) = E(X^2) - (E(X))^2. \tag{4.10}$$

4.3 Variables aléatoires continues usuelles

4.3.1 Loi uniforme

On dit qu'une variable aléatoire X continue suit la **loi uniforme** sur $[a, b]$ avec $a < b$ si sa densité de probabilité f_X est définie par

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin [a, b] \\ \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b]. \end{cases}$$

Il est clair que la fonction f_X définie dans la définition vérifie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1.$$

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a, b]$. Sa fonction de répartition est donnée par

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq a \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{si } t \in [a, b] \\ 1 & \text{si } t \geq b \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{(a-b)^2}{12}. \tag{4.11}$$

Exemples -

1. **Le temps mesuré en minutes qu'un homme met pour aller de sa maison à la gare est une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[20, 25]$. Si l'homme quitte sa maison à $7h05$, nous allons calculer la probabilité que l'homme prend le train qui part de la gare à $7h28$.**
   L'homme prend le train si $X \leq 23$ et donc

$$\mathbb{P}(X \leq 23) = \int_{20}^{23} \frac{1}{5}dx = \frac{3}{5}.$$

2. **On considère une variable aléatoire continue X qui suit la loi uniforme sur $[0,1]$ et soit g la fonction sur $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = 1$ si $x \leq \frac{1}{3}$ et $g(x) = 2$ si $x > \frac{1}{3}$. La variable aléatoire $Y = g(X)$ est discrète et prend deux valeurs 1 et 2. On a**

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X \leq \frac{1}{3}) = \frac{1}{3} \quad \textbf{et} \quad \mathbb{P}(Y = 2) = 1 - \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{2}{3}.$$

Ainsi

$$E(Y) = \frac{1}{3}.1 + \frac{2}{3}.2 = \frac{5}{3}.$$

Le même résultat peut être obtenue en utilisant (4.7) :

$$E(Y) = \int_0^1 g(x) f_X(x) dx = \int_0^{\frac{1}{3}} dx + \int_{\frac{1}{3}}^1 2dx = \frac{5}{3}.$$

4.3.2 Loi exponentielle

On dit qu'une variable aléatoire X continue suit la **loi exponentielle** de paramètre $\lambda > 0$ si sa densité de probabilité f_X est définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle. Sa fonction de répartition est donnée par

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

On a aussi

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{4.12}$$

Notons que la probabilité que X dépasse une certaine valeur tend vers zéro exponentially :

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \int_a^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda a}. \tag{4.13}$$

Une variable aléatoire exponentielle peut être un bon modèle pour estimer le **temps de vie** d'un équipement, le temps avant qu'un accident survient. Le coefficient λ mesure le **taux d'échec** exprimé comme le nombre d'échecs par unité de temps.

Exemple - Le temps avant qu'un petit météorite tombe quelque part dans le Sahara est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle d'espérance 10 jours. Il est minuit, quelle est la probability qu'un météorite tombe le premier jour entre $6h$ et $18h$?
Soit X la variable aléatoire mesurant le temps en jours à partir de minuit avant que le météorite tombe. Cette variable aléatoire suit la loi exponentielle de coefficient λ avec $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 10$ et donc $\lambda = \frac{1}{10}$. La probabilité souhaitée est

$$\mathbb{P}(\frac{1}{4} \leq X \leq 34) = \mathbb{P}(X \geq 14) - \mathbb{P}(X > \frac{3}{4}) \stackrel{(4.13)}{=} e^{-1/40} - e^{-3/40} = 0.0476.$$

4.3.3 Loi normale

On dit qu'une variable aléatoire X continue suit la loi **normale** ou Gaussienne de paramètres $\sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}$ si sa densité de probabilité f_X est définie par

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$
La fonction f_X vérifie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$$

car

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x)^2} dx = 1.$$

La droite d'équation $x = \mu$ est un axe de symétrie pour le graphe de f_X ; cette droite sépare donc l'air de la surface comprise entre la courbe et l'axe des abscisses en deux parts égales d'où

$$\mathbb{P}(X < \mu) = \mathbb{P}(X > \mu) = \frac{1}{2}.$$

D'un autre côté,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx.$$

On effectue le changement de variable $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$et on obtient que

$$E(X) = \mu. \tag{4.14}$$

La variance de la variable aléatoire normale X est égale à σ^2, en effet

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}(x-\mu)^2 e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx.$$

On effectue le changement de variable $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$, on obtient

$$V(X) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \sigma^2. \tag{4.15}$$

Une loi normale est complètement définie par ces deux paramètres, la variance intervient plus souvent que l'écart-type dans les modèles probabilistes, on utilisera la notation : X suit une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
La normalité est préservée par transformation linéaire.

Proposition 9 *Si X suit la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $Y = aX + b$ suit la loi $\mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.*

Une variable aléatoire Y qui suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ est dite **variable aléatoire normale réduite**. . Sa fonction de répartition noté Φ est donnée par

$$\Phi(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(Y < y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-t^2/2} dt.$$

Les valeurs de Φ sont donnée dans une table (Voir) et il est très utile pour calculer divers probabilités impliquant les variables aléatoires normale. Noter que cette table ne donne que les valeurs de $\Phi(y)$ pour $y \geq 0$, parce que les autres valeurs peuvent être calculées en utilisant les symétries de Φ. Par exemple,

$$\Phi(-0.5) = \mathbb{P}(Y \leq -0.5) = \mathbb{P}(Y \geq 0.5) = 1 - \mathbb{P}(Y < 0.5) = 0.3085.$$

Soit X une variable aléatoire normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On réduit X en posant

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

Puisque Y est une transformation linéaire de X, Y est normale est on a

$$E(Y) = \frac{E(X) - \mu}{\sigma} = 0 \quad \text{et} \quad V(Y) = \frac{V(X)}{\sigma^2} = 1.$$

Ainsi Y est une variable aléatoire normale réduite. On peut alors calculer la probabilité de n'importe quel événement défini par X : on rédefinit cet événement en terme de Y et on utilise la table. Par exemple,

$$\mathbb{P}(x \leq X) = \mathbb{P}\left(Y \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right). \tag{4.16}$$

Plus généralement, pour tout $a < b$, on a

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right). \tag{4.17}$$

Exemple - La quantité de pluie annuelle dans une région donnée est une variable aléatoire normale X d'espérance $\mu = 60mm$ et d'écart-type $\sigma = 20$. Quelle est la probabilité que cette année il y a au moins $80mm$ de pluie ?
La variable aléatoire $Y = \frac{X-60}{20}$ est réduite normale et on a

$$\mathbb{P}(X \geq 80) = \mathbb{P}(Y \geq \frac{80-60}{20}) = \mathbb{P}(Y \geq 1) = 1 - \Phi(1).$$

Dans la table, on a

$$\Phi(1) = 0.8413,$$

et donc

$$\mathbb{P}(X \geq 80) = 1 - \Phi(1) = 0.1587.$$

Chapitre 5

Lois des grands nombres

5.1 Quelques inégalités utiles

5.1.1 Inégalité de Markov

Proposition 10 *Soit X une variable aléatoire à valeurs positives discrète ou à densité admettant une espérance. Alors, pour tout $a > 0$,*

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

Cette inégalité affirme que si X est une variable aléatoire positive qui possède une espérance faible alors la probabilité qu'elle prenne des grandes valeurs est aussi faible.

Exemple - Soit X une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[0, 4]$. On a $E(X) = 2$. L'inégalité de Markov entraîne que

$$\mathbb{P}(X \geq 2) \leq 1, \ \mathbb{P}(X \geq 3) \leq 0.67, \ \mathbb{P}(X \geq 4) \leq 0.5.$$

Or un calcul direct donne

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 0.5, \ \mathbb{P}(X \geq 3) = 0.25, \ \mathbb{P}(X \geq 4) = 0.$$

On voit donc que l'inégalité de Markov ne donne pas des encadrement très précis.

5.1.2 Inégalité de Tchebychev

Théorème 6 *Soit X une variable aléatoire discrète ou à densité admettant une espérance et une variance. Alors*

$$\forall \epsilon > 0, \qquad \mathbb{P}(|X - E(X)| \geq \epsilon) \geq \frac{V(X)}{\epsilon^2}.$$

$\mathbb{P}(|X-E(X)| \geq \epsilon)$ est la probabilité pour que X prenne des valeurs éloignées de $E(X)$ d'au moins ϵ. Cette probabilité est d'autant plus faible que $V(X)$ est plus petite ($V(X)$ mesure la tendance qu'a X à s'écarter de $E(X)$) et que ϵ est plus grand.
En général, l'inégalité de Tchebychev est plus performante que l'inégalité de Markov (la majoration qu'elle donne est plus précise.)

5.2 La loi faible des grands nombres

Théorème 7 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et admettant une même espérance m et une même variance σ^2. Soit $M_n = \frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$. Alors*

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n\to+\infty} P(|M_n - m| \geq \epsilon) = 0, et \lim_{n\to+\infty} P(|M_n - m| < \epsilon) = 1.$$

La loi faible des grands nombres affirme que, pour n assez grand, le gros de la distribution M_n est concentré autour de l'espérance m. C'est à dire, si on considère un intervalle $[m-\epsilon, m+\epsilon]$, il y a une forte probabilité que M_n prenne ses valeurs dans cet intervalle.
La loi faible des grands nombres démontre l'idée intuitive sur laquelle reposent les statistiques. Par exemple si l'on cherche la taille moyenne m des marocains, il faut mesurer la taille de tous les marocaines ce qui est pratiquement impossible. Alors que grâce à la loi faible des grands nombres, il suffit d'étudier seulement un échantillon de n marocains, la moyenne M_n de leurs tailles donnera une valeur approchée de m ; et plus n est grand et plus cette valeur approchée a de chances d'être satisfaisante.
La loi faible des grands nombre justifie le fait d'approcher la probabilité d'un événement par son fréquence expérimentale. En effet, soit A un événement associé à un modèle probabiliste $(\mathcal{E}, \Omega, P)$ et soit $p = P(A)$. On considère n répitition de $\mathcal{E}$ d'une manière indépendante et soit $F_n(A)$ la fréquence expérimentale de A. On a

$$F_n(A) = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

où X_i est la variable aléatoire qui vaut 1 si A se réalise à la i^e expérience et 0 sinon. On a $E(X_i) = p$. La loi faible des grands nombres affirme que

$$\lim_{n\to+\infty} P(|F_n(A) - p| < \epsilon) = 1, \forall \epsilon > 0.$$

Exemple - Soit p la fraction d'électeurs qui supportent un candidat aux élections. On voudrait avoir une estimation correcte de p. On

sélectionne au hasard n électeurs et on enregistre M_n le nombre d'électeurs qui supportent le candidat. M_n est une estimation de p. Nous allons étudier ses propriétés.
Chaque personne choisie peut être assimilée à une variable aléatoire X_i qui prend 1 s'il supporte le candidat et 0 sinon. $E(X_i) = p$ et $V(X_i) = p(1-p)$. L'inégalité de Tchebychev s'écrit

$$P(|M_n - p| \geq \epsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2}.$$

Or, $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ et donc

$$P(|M_n - p| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{4n\epsilon^2}.$$

Par exemple si $\epsilon = 0.1$ et $n = 100$, on obtient

$$P(|M_{100} - p| \geq 0.1) \leq 0.25.$$

En d'autre terme, avec la taille de l'échantillon $n = 100$, la probabilité que notre estimation diffère de p d'au moins 0.1 est inférieure à 0.25.
Maintenant, si on veut acquérir une grande confiance (probabilité supérieure à 0.95) que notre estimation est très précise (diffère de 0.01 de p), combien d'électeurs nous devrions sélectionner ?
On aura

$$P(|M_n - p| \geq 0.01) \leq \frac{1}{4n(0.01)^2}$$

et on doit donc avoir

$$\frac{1}{4n(0.01)^2} \leq 1 - 0.95 = 0.05.$$

On trouvera que $n \geq 50000$.

5.3 Théorème de la limite centrée

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, qui suivent la même loi de probabilité et admettant une même espérance m et une même variance σ^2. On pose

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}.$$

On a

$$E(Z_n) = 0 \qquad \text{et} \qquad V(Z_n) = 1.$$

Théorème 8 *Sous les hypothèses ci-dessus, on a*

$$\lim_{n \to +\infty} P(Z_n \leq z) = \frac{1}{\sqrt{1\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

ie que (Z_n) *converge en probabilité vers la loi normale centrée* $\mathcal{N}(0,1)$.

a. L'approximation de la loi binomiale par la loi de normale
La loi binomiale $B(n,p)$ peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}(np, np(1-p))$ si $n \geq 30$, $np \geq 15$ et $np(1-p) > 5$. Pour cela, on doit faire une correction de la continuité. En effet, remplacer la loi $B(n,p)$ par $\mathcal{N}(np, np(1-p))$ revient à considèrer X comme variable continue et remplacer $P(X = k)$ par $P(k - 0.5 \leq X \leq k + 0.5)$ pour $1 \leq k \leq n-1$. On remplace $P(X = 0)$ par $P(X < 0.5)$ et $P(X = n)$ par $P(n - 0.5 \leq X)$.
b. L'approximation de la loi de Poisson par la loi de normale
La loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$ si $\lambda > 15$ et avec la même correction de continuité.

Index