Bien débuter en Mathématiques.
Algèbre bilinéaire

Mohamed Boucetta

4 mars 2009

Table des matières

Chapitre 1

Formes linéaires et dualité

1.1 Rappels de cours

Ce chapitre est consacré à l'étude des formes linéaires sur un espace vectoriel réel ou complexe. On désigne par V un espace vectoriel sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, de dimension finie ou non.

1.1.1 Formes linéaires

Définition 1 *Une forme linéaire sur V est une application linéaire $\ell : V \longrightarrow K$, c'est-à-dire que, pour tous $u, v \in V$ et tout $a \in K$, on a*

$$\ell(u + av) = \ell(u) + a\ell(v).$$

La somme de deux formes linéaires est une forme linéaire et la multiplication d'une forme linéaire par un scalaire est encore une forme linéaire. Ainsi l'ensemble des formes linéaires sur V est un espace vectoriel noté V^* et appelé *dual* de V.

Exemples -

1. Si $V = C([0,1], K)$ est l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$, l'application *intégrale* qui à tout $f \in V$ associe son intégrale $\int_0^1 f(t)dt$ est une forme linéaire sur V.
2. L'application *trace* est l'application $\mathrm{T}r : \mathcal{M}_n(K) \longrightarrow K$ qui à une matrice $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ associe $\mathrm{T}r(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}$. C'est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(K)$ qui vérifie, pour tous $M, N \in \mathcal{M}_n(K)$,
$$\mathrm{T}r(MN) = \mathrm{T}r(NM). \tag{1.1}$$
3. Si V est de dimension finie, la trace d'un endomorphisme f de V est la trace de sa matrice dans n'importe quelle base de V. Ceci a un sens puique, si M_1 et M_2 sont deux matrices de f dans deux bases différentes, alors il existe une

matrice inversible P telle que $M_1 = P^{-1}M_2P$ et l'égalité 1.1 entraîne que $\mathrm{T}r(M_1) = \mathrm{T}r(M_2)$. L'application

$$\mathrm{T}r : End(V) \longrightarrow K$$

ainsi définie est une forme linéaire.

Proposition 1 *Soit ℓ une forme linéaire non nulle sur un espace vectoriel V de dimension n. Alors* $\dim \ker \ell = n - 1$.

Définition 2 *Un* hyperplan *de V est un sous-espace vectoriel $H \subset V$ tel qu'il existe une forme linéaire non nulle $\ell : V \longrightarrow K$ tel que $H = \ker \ell$.*

Exemples -

1. L'ensemble $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x - y + z = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, car si $\ell : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'application définie par $\ell(x, y, z) = x - y + z$ alors ℓ est une forme linéaire non nulle et $\ker \ell = H$.
2. L'ensemble $H = \{f \in C([0, 1], \mathbb{R});\ f(0) = 0\}$ est un hyperplan de $C([0, 1], \mathbb{R})$, car si $\ell : C([0, 1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'application définie par $\ell(f) = f(0)$ alors ℓ est une forme linéaire non nulle et $\ker \ell = H$.

Théorème 1 *Soit H un sous-espace vectoriel de V. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *H est un hyperplan.*
2. *Pour toute droite vectorielle D de V non contenue dans H, on a*

$$V = H \oplus D.$$

Nous désignons par droite vectorielle tout espace vectoriel de dimension 1.
Remarques - En vertu de ce théorème, une forme linéaire ℓ est entièrement déterminée par la donnée d'un hyperplan H qui est son noyau, par $\ell(u)$ pour un $u \notin H$ et on a $V = (\mathbb{K}u) \oplus H$.

Soit $\ell : V \longrightarrow K$ une forme linéaire où V est de dimension finie n et soit $\mathbb{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de V. Pour tout vecteur $u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$ dans V, on a

$$\ell(u) = \ell(\sum_{i=1}^{n} u_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} u_i \ell(e_i).$$

Ainsi ℓ est entièrement déterminée par la donnée de $(\ell(e_1), \ldots, \ell(e_n))$ qui n'est rien d'autre que la matrice de ℓ dans $\mathbb{B}$ et la base canonique de $\mathbb{R}$.

1.1.2 Dualité

Supposons que V est de dimension finie et considérons une base quelconque $\mathbb{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de V. Définissons la famille du dual V^* notée $\mathbb{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ par les formules

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j, \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j, \end{cases} \tag{1.2}$$

pour $i, j = 1, \ldots, n$. Notons que, pour tout $1 \leq i \leq n$, la forme e_i^* est la forme linéaire dont le noyau est l'hyperplan engendré par $(e_1, \ldots, \hat{e}_i, \ldots, e_n)$ (le terme en chapeau est enlevé) et telle que $e_i^*(e_i) = 1$.

Théorème 2 *Soit V est un espace vectoriel de dimension finie n. Alors son dual V^* est un espace vectoriel de dimension n et, pour toute base $\mathbb{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de V, $\mathbb{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de V^* appelée* base duale *de $\mathbb{B}$.*

L'expression d'une forme linéaire ℓ dans $\mathbb{B}^*$ est donnée par

$$\ell = \sum_{i=1}^{n} \ell(e_i) e_i^*. \tag{1.3}$$

Nous allons maintenant présenter un autre aspect de la dualité. Soit A une partie de V. *L'annulateur* de A est la partie de V^* notée A^o et définie par $A^o = \{\ell \in V^*;\ \ell(u) = 0 \quad \forall u \in A\}$. D'une manière évidente, on a $\{0\}^o = V^*$ et $V^o = \{0\}$. Les propriétés remarquables de l'annulateur sont résumées dans la proposition suivante.

Proposition 2 *Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *Pour toute partie A de V, A^o est un sous-espace vectoriel de V^*.*
2. *Si V est de dimension finie et si A est un sous-espace vectoriel de V alors*
$$\dim_K A + \dim_K A^o = \dim_K V.$$

La dualité s'étend aux applications linéaires. En effet, si $f : V_1 \longrightarrow V_2$ est une application linéaire, son *application linéaire duale* (ou sa *transposée*) est l'application $f^t : V_2^* \longrightarrow V_1^*$ définie par

$$f^t(\ell)(u) = \ell(f(u)), \quad \ell \in V_2^*, u \in V_1. \tag{1.4}$$

Proposition 3 *Soient $f : V_1 \longrightarrow V_2$ et $g : V_2 \longrightarrow V_3$ deux applications linéaires. Alors les assertions suivantes sont vérifiées :*

1. $(g \circ f)^t = f^t \circ g^t$.

2. *Supposons que* V_1 *et* V_2 *soient de dimensions finies et soient* $\mathbb{B}_1 = (e_1, \dots, e_n)$ *une base de* V_1 *et* $\mathbb{B}_2 = (f_1, \dots, f_m)$ *une base de* V_2*. Alors la matrice* $M(f^t)$ *de* f^t *dans les bases* $\mathbb{B}_2^*$ *et* $\mathbb{B}_1^*$ *est donnée par*

$$M(f^t) = {}^tM(f), \tag{1.5}$$

où $M(f)$ *désigne la matrice de* f *dans les bases* $\mathbb{B}_1$ *et* $\mathbb{B}_2$ *et* ${}^tM(f)$ *sa transposée.*

Nous allons, maintenant, donner une identification naturelle d'un espace vectoriel de dimension finie et de son *bidual* (le dual de son dual). En effet, le bidual de V noté V^{**} est l'espace vectoriel dual de V^*. Définissons $\phi : V \longrightarrow V^{**}$ par

$$\phi(u)(\ell) = \ell(u), \quad u \in V, \ell \in V^*. \tag{1.6}$$

Le résultat suivant n'est pas valable en dimension infinie.

Théorème 3 *Si* V *est de dimension finie alors* ϕ *est un isomorphisme.*

Remarques - Notons que si V est de dimension finie alors V et V^* ont la même dimension mais, en général, il n'y a pas d'identification naturelle entre V et V^*.

Nous finirons ce chapitre par une proposition qui sera très utile dans les chapitres suivants.

Proposition 4 *Si* V *est de dimension finie et si* $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ *est une base de* V^* *alors il existe une unique base* $\mathbb{B}$ *de* V *telle que* $\mathbb{B}^* = (\ell_1, \dots, \ell_n)$*.*

Nous allons maintenant donner une formule qui permet le calcul de la base $\mathbb{B}$ de la proposition ci-dessus. Choisissons une base $\mathbb{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ de V et posons $\mathbb{B} = (f_1, \dots, f_n)$. Notons $P = (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de passage de $\mathbb{B}_0$ à $\mathbb{B}$ et $Q = (q_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de passage de $\mathbb{B}_0^*$ à $\mathbb{B}^*$. On a, pour tous $i, j = 1, \dots, n$,

$$f_i = \sum_{k=1}^n p_{ki} e_k \quad \text{et} \quad \ell_i = \sum_{k=1}^n q_{ki} e_k^*,$$

et donc

$$\ell_j(f_i) = \sum_{k=1}^n p_{ki} \ell_j(e_k) = \sum_{k,h=1}^n p_{ki} q_{hj} e_h^*(e_k) = \sum_{k=1}^n p_{ki} q_{kj},$$

car $e_h^*(e_k) = 1$ si $h = k$ et 0 sinon. On déduit alors que $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ est duale de $(f_1, \dots, f_n)$ si et seulement si, pour tous $i, j = 1, \dots, n$,

$$\sum_{k=1}^n p_{ki} q_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j, \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Ces relations s'écrivent matriciellement ${}^tQP = I_n$, où I_n est la matrice identité d'ordre n, et donc

$$P = {}^tQ^{-1}. \tag{1.7}$$

Notons qu'en vertu de 1.3, on a, pour tout $i = 1, \ldots, n$, $\ell_i = \sum_{j=1}^{n} \ell_i(e_j)e_j^*$, ce qui permet le calcul de Q.

Exemples - On considère sur $\mathbb{R}^2$ les deux formes linéaires ℓ_1, ℓ_2 définies par

$$\ell_1(x, y) = x + y, \quad \text{et} \quad \ell_2(x, y) = x + 2y.$$

Nous allons montrer que (ℓ_1, ℓ_2) est une base de $(\mathbb{R}^2)^*$ et trouver la base $\mathbb{B} = (f_1, f_2)$ telle que $B^* = (\ell_1, \ell_2)$.

Notons $\mathbb{B}_0 = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On a, d'après l'égalité 1.3,

$$\ell_1 = \ell_1(e_1)e_1^* + \ell_1(e_2)e_2^* = e_1^* + e_2^*, \quad \text{et} \quad \ell_2 = \ell_2(e_1)e_1^* + \ell_2(e_2)e_2^* = e_1^* + 2e_2^*.$$

Soit $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de $\mathbb{B}_0^*$ à (ℓ_1, ℓ_2). On a $\det Q = 1$ et donc (ℓ_1, ℓ_2) est une base de $(\mathbb{R}^2)^*$ et Q est la matrice de passage de B_0^* à $\mathbb{B}^*$. D'après 1.7, la matrice de passage P de $\mathbb{B}_0$ à $\mathbb{B}$ est donnée par $P = {}^tQ^{-1}$. Or, $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Finalement, $\mathbb{B} = (2e_1 - e_2, -e_1 + e_2)$.

1.2 Exercices

Exercice 1 *Pour chacune des applications suivantes, montrer que c'est une forme linéaire, déterminer une base de son noyau et un supplémentaire de ce noyau :*

1. $\ell_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\ell_1(x,y) = x - y$.
2. $\ell_2 : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, $\ell_2(x,y,z,t) = x - y + 2z - t$.
3. $\ell_3 : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}$, $\ell_3(z_1,z_2,z_3,z_4) = z_1 + z_2 - 3z_3 + z_4$.

Solution -

1. (a) Pour tous $u_1 = (x_1,y_1), u_2 = (x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\ell_1(u_1 + au_2) &= \ell_1(x_1 + ax_2, y_1 + ay_2) = x_1 + ax_2 - (y_1 + ay_2)\\ &= x_1 - y_1 + a(x_2 - y_2) = \ell_1(u_1) + a\ell_1(u_2).\end{aligned}$$

Donc ℓ_1 est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$.

(b) On a $\ker \ell_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x - y = 0\}$. Or, d'après la Proposition 1, $\dim \ker \ell_1 = 1$ et donc pour donner une base de $\ker \ell_1$, il suffit d'y choisir un vecteur non nul. Le vecteur $(1,1)$ est donc une base de $\ker \ell_1$. D'après le Théorème 1, toute droite vectorielle non contenue dans $\ker \ell_1$ est supplémentaire à celui-ci. La droite vectorielle engendrée par $(0,1)$ répond à la question.

2. (a) Pour tous $u = (x_1,y_1,z_1,t_1), v = (x_2,y_2,z_2,t_2) \in \mathbb{R}^4$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\ell_2(u + av) &= \ell_2(x_1 + ax_2, y_1 + ay_2, z_1 + az_2, t_1 + at_2)\\ &= x_1 + ax_2 - (y_1 + ay_2) + 2(z_1 + az_2)\\ &\quad -(t_1 + at_2)\\ &= x_1 - y_1 + 2z_1 - t_1 + a(x_2 - y_2 + 2z_2 - t_2)\\ &= \ell_2(u) + a\ell_2(v).\end{aligned}$$

Donc ℓ_2 est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^4$.

(b) On a $\ker \ell_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; x - y + 2z - t = 0\}$. Or, d'après la Proposition 1, $\dim \ker \ell_2 = 3$ et donc pour donner une base de $\ker \ell_2$, il suffit d'y choisir une famille de 3 vecteurs linéairement indépendants. Les vecteurs $e_1 = (1,1,0,0)$, $e_2 = (2,0,-1,0)$ et $e_3 = (1,0,0,1)$ sont dans $\ker \ell_2$. Vérifions qu'ils sont linéairement indépendants. Pour $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$ae_1 + be_2 + ce_3 = (0,0,0,0) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a + 2b + c = 0\\ a = 0\\ -b = 0\\ c = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

Finalement, $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de $\ker \ell_2$.
D'après le Théorème 1, toute droite vectorielle non contenue dans $\ker \ell_2$ est supplémentaire à celui-ci. La droite vectorielle engendrée par $(1,0,0,0)$ répond à la question.

3. (a) Pour tous $u = (z_1, z_2, z_3, z_4), v = (z'_1, z'_2, z'_3, z'_4) \in \mathbb{C}^4$ et pour tout $a \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}\ell_3(u+av) &= \ell_3(z_1 + az'_1, z_2 + az'_2, z_3 + az'_3, z_4 + az'_4) \\ &= (z_1 + az'_1) + (z_2 + az'_2) - 3(z_3 + az'_3) \\ &\quad +(z_4 + az'_4) \\ &= z_1 + z_2 - 3z_3 + z_4 + a(z'_1 + z'_2 - 3z'_3 + z'_4) \\ &= \ell_3(u) + a\ell_3(v).\end{aligned}$$

Donc ℓ_3 est une forme linéaire sur $\mathbb{C}^4$.

(b) On a $\ker \ell_3 = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 ; z_1 + z_2 - 3z_3 + z_4 = 0\}$. Or, d'après la Proposition 1, $\dim_{\mathbb{C}} \ker \ell_3 = 3$ et donc pour donner une base de $\ker \ell_3$, il suffit d'y choisir une famille de 3 vecteurs linéairement indépendants. Les vecteurs $e_1 = (1,-1,0,0)$, $e_2 = (3,0,1,0)$ et $e_3 = (1,0,0,-1)$ sont dans $\ker \ell_3$. Vérifions qu'ils sont linéairement indépendants. Pour $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$, on a

$$ae_1+be_2+ce_3 = (0,0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} a+3b+c=0 \\ -a=0 \\ b=0 \\ -c=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=0.$$

Finalement, $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base de $\ker \ell_3$. D'après le Théorème 1, toute droite vectorielle non contenue dans $\ker \ell_3$ est supplémentaire à celui-ci. La droite vectorielle engendrée par $(1,0,0,0)$ répond à la question.

Exercice 2 *On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathbb{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soient $\ell_1, \ell_2, \ell_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définies, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, par :*

$$\ell_1(x,y,z) = x - y + 2z, \quad \ell_2(x,y,z) = 2x - y + 3z, \quad \ell_3(x,y,z) = x - z,$$

et $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $F(x,y,z) = (\ell_1(x,y,z), \ell_2(x,y,z), \ell_3(x,y,z))$.

1. *Montrer que ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$.*
2. *Exprimer les coordonnées de ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 dans la base duale $\mathbb{B}^*$ de $\mathbb{B}$.*
3. *Montrer que $\mathbb{B}_1^* = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$ et déterminer la base $\mathbb{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$ dont elle est la base duale.*

4. *Montrer que F est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de F^t (transposé de F) dans $\mathbb{B}_1^*$.*

Solution -

1. Pour tous $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\ell_1((x_1, y_1, z_1) + a(x_2, y_2, z_2)) &= \ell_1(x_1 + ax_2, y_1 + ay_2, z_1 + az_2)\\ &= x_1 + ax_2 - (y_1 + ay_2) + 2(z_1 + z_2)\\ &= x_1 - y_1 + 2z_1 + a(x_2 - y_2 + 2z_2)\\ &= \ell_1(x_1, y_1, z_1) + a\ell_1(x_2, y_2, z_2).\end{aligned}$$

Donc ℓ_1 est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$. D'une manière analogue, on vérifie aisément que ℓ_2 et ℓ_3 sont des formes linéaires.

2. D'après 1.3, on a

$$\begin{aligned}\ell_1 &= \ell_1(e_1)e_1^* + \ell_1(e_2)e_2^* + \ell_1(e_3)e_3^* = e_1^* - e_2^* + 2e_3^*,\\ \ell_2 &= \ell_2(e_1)e_1^* + \ell_2(e_2)e_2^* + \ell_2(e_3)e_3^* = 2e_1^* - e_2^* + 3e_3^*,\\ \ell_3 &= \ell_3(e_1)e_1^* + \ell_3(e_2)e_2^* + \ell_3(e_3)e_3^* = e_1^* - e_3^*.\end{aligned}$$

3. Soit $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de $\mathbb{B}^*$ à (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3). Puisque la famille (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) contient autant d'éléments que la dimension de $(\mathbb{R}^3)^*$, cette famille est une base si et seulement si $\det Q \neq 0$. Or,

$$\begin{aligned}\det Q &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{(On développe suivant la dernière colonne).}\\ &= \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0.\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{B}_1^* = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$. D'après 1.7, la matrice de passage P de $\mathbb{B}$ à $\mathbb{B}_1$ est donnée par $P = {}^tQ^{-1}$. Pour calculer Q^{-1}, nous allons résoudre le système linéaire $Q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$. Ce système s'écrit

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + 2y + z &=& X \\ -x - y &=& Y \\ 2x + 3y - z &=& Z \end{array}\right.$$

En ajoutant la troisième équation à la première le système devient

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+5y & = & X+Z \\ -x-y & = & Y \\ 2x+3y-z & = & Z \end{array}\right.$$

La résolution des deux premières équations par les formules de Cramer nous donne

$$\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{\begin{vmatrix} X+Z & 5 \\ Y & -1 \end{vmatrix}}{2} = -\dfrac{1}{2}(X+5Y+Z), \\ y & = & \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & X+Z \\ -1 & Y \end{vmatrix}}{2} = \dfrac{1}{2}(X+3Y+Z). \end{array}$$

De la dernière équation, on déduit que $z = 2x+3y-Z = \frac{1}{2}(X-Y-Z)$. On obtient alors que $Q^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -5 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, et donc $\mathbb{B}_1 = (-\frac{1}{2}(e_1+5e_2+e_3), \frac{1}{2}(e_1+3e_2+e_3), -\frac{1}{2}(-e_1+e_2+e_3))$.

4. Puisque $F = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$, les trois composantes de F sont linéaires et donc F est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
   Pour calculer la matrice de F^t dans $\mathbb{B}_1^*$, nous allons calculer les coordonnées de $F^t(\ell_1)$, $F^t(\ell_2)$ et $F^t(\ell_3)$ dans $\mathbb{B}_1^*$. Pour $j = 1, \ldots, 3$, on a

$$\begin{array}{rcl} F^t(\ell_j) & \overset{1.3}{=} & F^t(\ell_j)(f_1)\ell_1 + F^t(\ell_j)(f_2)\ell_2 + F^t(\ell_j)(f_3)\ell_3 \\ & \overset{1.4}{=} & \ell_j(F(f_1))\ell_1 + \ell_j(F(f_2))\ell_2 + \ell_j(F(f_3))\ell_3 \\ & = & \ell_j\left((\ell_1(f_1), \ell_2(f_1), \ell_3(f_1))\right)\ell_1 + \ell_j\left((\ell_1(f_2), \ell_2(f_2), \ell_3(f_2))\right)\ell_2 \\ & & +\ell_j\left((\ell_1(f_3), \ell_2(f_3), \ell_3(f_3))\right)\ell_3 \\ & = & \ell_j(e_1)\ell_1 + \ell_j(e_2)\ell_2 + \ell_j(e_3)\ell_3 \quad \text{(dualité de } \mathbb{B}_1 \text{ et } \mathbb{B}_1^*\text{)}. \end{array}$$

   On déduit donc

$$M_{\mathbb{B}_1^*}(F^t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 *On considère l'espace vectoriel $C^\infty(\mathbb{R})$ des fonctions C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour n un entier non nul et pour tout $0 \le k \le n$, on définit d_k : $C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ par*

$$d_k(f) = f^{(k)}(0),$$

où $f^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de f.

1. *Montrer que la famille $(d_0, \ldots, d_n)$ est une famille libre de $(C^\infty(\mathbb{R}))^*$.*
2. *En déduire que $C^\infty(\mathbb{R})$ est de dimension infinie.*

Solution -

1. Pour tous $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$d_k(f + ag) = (f + ag)^{(k)}(0) = f^{(k)}(0) + ag^{(k)}(0) = d_k(f) + ad_k(g),$$

et donc $d_k \in (C^\infty(\mathbb{R}))^*$. Montrons maintenant que $(d_0, \ldots, d_n)$ est une famille libre. Soient $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ une famille de nombres réels telle que

$$a_0 d_0 + a_1 d_1 + \ldots + a_n d_n = 0.$$

Ainsi, pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, on a

$$a_0 d_0(f) + a_1 d_1(f) + \ldots + a_n d_n(f) = 0,$$

soit

$$a_0 f(0) + a_1 f^{(1)}(0) + \ldots + a_n f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall f \in C^\infty(\mathbb{R}). \tag{1.8}$$

Par un choix judicieux de fonctions particulières, nous allons montrer que $a_0 = \ldots = a_n = 0$. Nous allons procéder par récurrence sur n. En effet, si on prend $f = 1$ dans 1.8, on obtient $a_0 = 0$. Supposons que $a_0 = 0 = \ldots = a_k = 0$. Prenons $f(x) = x^{k+1}$ dans 1.8. Puisque $f^{(k+1)}(0) = (k+1)!$ et $f^{(p)}(0) = 0$ pour tout $p \ge k+1$ et en vertu de l'hypothèse de récurrence, on obtient $(k+1)! a_{k+1} = 0$, soit $a_{k+1} = 0$, ce qui achève le raisonnement par récurrence et montre que $a_0 = \ldots = a_n = 0$. La famille $(d_0, \ldots, d_n)$ est donc une famille libre $(C^\infty(\mathbb{R}))^*$.

2. Nous allons raisonner par absurde. Supposons que $C^\infty(\mathbb{R})$ est de dimension finie n. D'après le Théorème 2, $(C^\infty(\mathbb{R}))^*$ est aussi de dimension finie n et donc toute famille à $n+1$ éléments dans $(C^\infty(\mathbb{R}))^*$ est liée. Or, la famille construite dans à la question précédente contient $n+1$ éléments et elle est libre ; ceci est une contradiction.

Exercice 4 *Dans cet exercice $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier non nul. On considère $\mathbb{K}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degré inférieur ou égal à n. Soit $(a_0, \ldots, a_n)$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Pour $0 \leq k \leq n$, on définit $\ell_k : \mathbb{K}_n[X] \longrightarrow \mathbb{K}$ par*

$$\ell_k(P) = P(a_k).$$

1. *Montrer que $(\ell_0, \ldots, \ell_n)$ est une base de $(\mathbb{K}_n[X])^*$ et trouver la base de $\mathbb{K}_n[X]$ dont c'est la base duale.*
2. *Soient $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue. Montrer l'existence d'une famille unique $(b_0, \ldots, b_n)$ de scalaires telle que*

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \quad \int_0^1 f(t)P(t)dt = \sum_{k=0}^{n} b_k P(a_k).$$

Solution -

1. Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ et pour tout $a \in \mathbb{K}$, on a

$$\ell_k(P + aQ) = (P + aQ)(a_k) = P(a_k) + aQ(a_k) = \ell_k(P) + a\ell_k(Q),$$

et donc $\ell_k \in (\mathbb{K}_n[X])^*$. Montrons maintenant que la famille $(\ell_0, \ldots, \ell_n)$ est libre. Soient $a_0, \ldots, a_n$ des scalaires tels que $a_0\ell_0 + \ldots + a_n\ell_n = 0$. Pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, on a $a_0\ell_0(P) + \ldots + a_n\ell_n(P) = 0$, soit

$$a_0P(a_0) + \ldots + a_nP(a_n) = 0 \quad \forall P \in \mathbb{K}_n[X]. \tag{1.9}$$

Par un choix judicieux de polynômes particuliers, nous allons montrer que $a_0 = \ldots = a_n = 0$. Pour tout $0 \leq k \leq n$, on considère le polynôme $P_k = \prod_{j \neq k}(X - a_j)$. On a, $P_k(a_j) = 0$ pour tout $j \neq k$ et donc, en remplaçant dans 1.9 le polynôme P par P_k, on obtient

$$a_k \prod_{j \neq k}(a_k - a_j) = 0,$$

ce qui entraîne $a_k = 0$, puisque $a_0, \ldots, a_n$ sont deux à deux distincts. Ceci prouve que $(\ell_0, \ldots, \ell_n)$ est libre et donc c'est une base puisque $\dim(\mathbb{K}_n[X])^* = n + 1$.

Notons $(L_0, \ldots, L_n)$ la base de $\mathbb{K}_n[X]$ dont la base duale est $(\ell_0, \ldots, \ell_n)$. La dualité est équivalente à $\ell_j(L_i) = \delta_{ij}$, pour tous $i, j = 1, \ldots, n$ (δ_{ij} est le symbole de Chroneker valant 1 si $i = j$ et 0 sinon). Ces relations sont équivalentes à $L_i(a_j) = \delta_{ij}$ pour tous $i, j = 1, \ldots, n$. Ainsi, pour chaque $i = 1, \ldots, n$, le polynôme L_i est un polynôme de degré inférieur ou égal à n admettant pour racines tous les a_j sauf

a_i et donc $L_i = c\prod_{j\neq i}(X-a_j)$, où c est une constante. La relation $L_i(a_i)=1$ entraîne que $c = \left(\prod_{j\neq i}(a_i-a_j)\right)^{-1}$ et finalement

$$L_i = \left(\prod_{j\neq i}(a_i-a_j)\right)^{-1}\prod_{j\neq i}(X-a_j).$$

Les polynômes $(L_0,\ldots,L_n)$ sont appelés **polynômes interpolateurs de Lagrange** aux points $a_0,\ldots,a_n$.

2. Considérons l'application $\phi_f : \mathbb{K}_n[X] \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$\phi_f(P) = \int_0^1 f(t)P(t)dt.$$

Pour tous $P,Q \in \mathbb{K}_n[X]$ et tout $a\in\mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned}\phi_f(P+aQ) &= \int_0^1 f(t)(P(t)+aQ(t))dt\\ &= \int_0^1 f(t)P(t)dt + a\int_0^1 f(t)Q(t)dt\\ &= \phi_f(P)+a\phi_f(Q),\end{aligned}$$

et donc $\phi_f \in (\mathbb{K}_n[X])^*$. Or, d'après 1., $(\ell_0,\ldots,\ell_n)$ est une base de $(\mathbb{K}_n[X])^*$ et donc ϕ_f s'écrit de manière unique $\phi_f = b_0\ell_0+\ldots+b_n\ell_n$, où $b_0,\ldots,b_n$ sont des scalaires. Cette relation est équivalente à

$$\phi_f(P) = b_0\ell_0(P)+\ldots+b_n\ell_n(P),$$

pour tout $P\in\mathbb{K}_n[X]$, soit

$$\int_0^1 f(t)P(t)dt = b_0P(a_0)+\ldots+b_nP(a_n),$$

pour tout $P\in\mathbb{K}_n[X]$. Ceci aboutit au résultat.

Exercice 5 *Soit H un hyperplan dans un espace vectoriel V. Montrer que $H^0 = \{\ell\in V^*; H\subset\ker\ell\}$ est une droite vectorielle de V^*.*

Solution -

Par définition d'un hyperplan, il existe $\ell_0\in V^*\setminus\{0\}$ tel que $H=\ker\ell_0$. Nous allons montrer que H^0 est la droite vectorielle engendrée par ℓ_0. Choisissons $v_0\in V$ tel que $\ell_0(v_0)=1$. On a, d'après le Théorème 1, $V=(\mathbb{K}v_0)\oplus H$.

Soit $\ell \in H^0$ et soit $v \in V$. Il existe donc $k \in \mathbb{K}$ et $h \in H$ tel que $v = kv_0 + h$. Donc, comme H est inclus dans $\ker \ell$,

$$\ell(v) \quad = \quad \ell(kv_0 + h) = k\ell(v_0) + \ell(h) = k\ell(v_0) \quad (H \subset \ker \ell).$$

De la même manière, on a $\ell_0(v) = k$ et donc, pour tout $v \in V$, $\ell(v) = \ell(v_0)\ell_0(v)$. Cette relation montre que $\ell = \ell(v_0)\ell_0$ et permet de conclure.

Exercice 6 *Soient ℓ_1 et ℓ_2 deux formes linéaires sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel V, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que l'application $\phi : V \longrightarrow \mathbb{K}$ définie en posant pour tout $u \in V$, $\phi(u) = \ell_1(u)\ell_2(v)$ est une forme linéaire si et seulement si l'une de ces deux formes est nulle.*

Solution -

L'application ϕ est une forme linéaire si et seulement si, pour tous $u, v \in V$ et $a \in \mathbb{K}$, on a

$$Q = \ell_1(u + av)\ell_2(u + av) - \ell_1(u)\ell_2(u) - a\ell_1(v)\ell_2(v) = 0. \tag{1.10}$$

Explicitons la quantité Q. On a

$$\begin{aligned} Q &= \ell_1(u + av)\ell_2(u + av) - \ell_1(u)\ell_2(u) - a\ell_1(v)\ell_2(v) \\ &= (\ell_1(u) + a\ell_1(v))(\ell_2(u) + a\ell_2(v)) - \ell_1(u)\ell_2(u) - a\ell_1(v)\ell_2(v) \\ &= a\left[\ell_1(u)\ell_2(v) + \ell_1(v)\ell_2(u) + (a-1)\ell_1(v)\ell_2(v)\right]. \end{aligned}$$

La relation 1.10 est équivalente à

$$a\left[\ell_1(u)\ell_2(v) + \ell_1(v)\ell_2(u) + (a-1)\ell_1(v)\ell_2(v)\right] = 0, \tag{1.11}$$

pour tous $u, v \in V$ et tout $a \in \mathbb{K}$.

Supposons que $\ell_1 \neq 0$ et choisissons $v_0 \in V$ tel que $\ell_1(v_0) = 1$. Prenons dans 1.11, $u = v_0$, $v = v_0$ et $a = 1$. On obtient alors $2\ell_2(v_0) = 0$, soit $\ell_2(v_0) = 0$. Dans un deuxième temps, prenons dans 1.11, $u = v_0$, $v = h \in \ker \ell_1$ et $a = 1$. On obtient alors $\ell_2(h) = 0$. Or, d'après le Théorème 1, $V = (\mathbb{K}v_0) \oplus \ker \ell_1$, et donc $\ell_2 = 0$, ce qui permet de conclure.

Exercice 7 *Dans cet exercice $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

1. *Soit $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire vérifiant $\phi(I_n) = 1$ et pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*
$$\phi(M) = 0 \Rightarrow \det M = 0. \tag{1.12}$$
   (a) *Montrer que, pour tout $M \in M_n(\mathbb{K})$, $\phi(M)$ est une valeur propre de M.*

(b) *Montrer que, pour tout* $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, $\phi(M) \in \{m_{11}, \ldots, m_{nn}\}$.

2. (a) *Montrer que la matrice* $M_0 = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ *vérifiant* $m_{ii} = 0$ *pour tout* $i = 1, \ldots, n$ *et* $m_{ij} = 1$ *pour tous* $i \neq j$ *est inversible pour tout* $n \geq 2$. (**On pourra montrer que** 1 **n'est pas valeur propre de** $M_0 + I_n$.)

   (b) *Déduire de tout ce qui précéde que, pour* $n \geq 2$, *tout hyperplan de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *rencontre* $GL_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \det M \neq 0\}$.

Solution -

1. (a) On a
$$\phi(M - \phi(M)I_n) = \phi(M) - \phi(M)\phi(I_n) = 0.$$
Donc, d'après 1.12, $\det(M - \phi(M)I_n) = 0$ et donc $\phi(M)$ est une valeur propre de M.

   (b) Ecrivons $M = S + N$ où S est une matrice diagonale supérieure dont les termes diagonaux sont ceux de M, et N une matrice diagonale inférieure dont tous les termes diagonaux sont nuls.
Le polynôme caractéristique de N est $(-1)^n X^n$ et donc 0 est la seule valeur propre de N, d'après (a), $\phi(N) = 0$. Les valeurs propres de S sont $\{m_{11}, \ldots, m_{nn}\}$ et donc, d'après (a), $\phi(S) \in \{m_{11}, \ldots, m_{nn}\}$. Or, $\phi(M) = \phi(S) + \phi(N) = \phi(S)$, ce qui permet de conclure.

2. (a) Les vecteurs colonnes de la matrice $M = M_0 + I_n$ sont tous égaux à $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc M est de rang 1. D'après le théorème du rang, $\dim \ker M = n - 1$ et, par suite, 0 est valeur propre de M de multiplicité $n - 1$. Si 1 est valeur propre de M alors M serait diagonalisable et il existerait une matrice inversible P telle que $M = P^{-1}DP$ où D est la matrice diagonale dont un seul terme diagonal est non nul et vaut 1. On déduit que $\mathrm{T}r(M) = \mathrm{T}r(D) = 1$. Or, $\mathrm{T}r(M) = \mathrm{T}r(I_n) = n$ ce qui constitut une contradiction si $n \geq 2$. On déduit que 1 n'est pas valeur propre de M, c'est-à-dire, $\det(M - I_n) = \det(M_0) \neq 0$ et donc M_0 est inversible.

   (b) Raisonnons par absurde et supposons qu'il existe un hyperplan H de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $H \cap GL_n(\mathbb{K}) = \emptyset$. Soit ϕ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $\ker \phi = H$. On a $\phi(I_n) \neq 0$ et, quite à multiplier par $\phi(I_n)^{-1}$, on peut supposer $\phi(I_n) = 1$. La condition $H \cap GL_n(\mathbb{K}) = \emptyset$ est équivalente à 1.12. Or, d'après 1. (b), $\phi(M_0) = 0$, ce qui contredit 1. (a) et le fait que M_0 est inversible.

Chapitre 2

Formes quadratiques réelles

2.1 Rappels de cours

Ce chapitre est entièrement consacré à l'étude des formes bilinéaires symétriques sur un espace vectoriel réel et des formes quadratiques associées. Dans tout ce chapitre, V désigne un espace vectoriel réel, de dimension finie ou non.

2.1.1 Généralités

Définition 3 1. *Une* forme bilinéaire *sur V est une application $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant, pour tous $u, v_1, v_2 \in V$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} B(u, v_1 + av_2) &= B(u, v_1) + aB(u, v_2), \\ B(v_1 + av_2, u) &= B(v_1, u) + aB(v_2, u). \end{aligned}$$

2. *Une forme bilinéaire B sur V est dite* symétrique *si pour tous $u, v \in V$, $B(u, v) = B(v, u)$.*
3. *Une forme bilinéaire B sur V est dite* antisymétrique *ou* alternée *si pour tous $u, v \in V$, $B(u, v) = -B(v, u)$.*

On désignera par $\mathcal{B}\rangle\updownarrow(V)$, $\mathbb{S}(V)$ et $\mathcal{A}(V)$, respectivement, l'espace des formes bilinéaires sur V, l'espace des formes bilinéaires symétriques sur V et l'espace des formes bilinéaires alternées sur V.

Notons que $\mathcal{B}(V)$, $\mathbb{S}(V)$ et $\mathcal{A}(V)$ sont des espaces vectoriels réels.

Exemples -

1. Si $(\ell_1, \ldots, \ell_p)$ est une famille de formes linéaires sur V et $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq p}$ une matrice carrée réelle d'ordre p, alors l'application $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $B(u, v) = \displaystyle\sum_{i,j} a_{i,j}\ell_i(u)\ell_j(v)$ est une forme bilinéaire sur V. En général, B n'est ni symétrique ni antisymétrique.

2. L'application $C([0,1],\mathbb{R})\times C([0,1],\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R}$ qui à $(f,g)\mapsto\int_0^1 f(t)g(t)dt$ est une forme bilinéaire symétrique sur $C([0,1],\mathbb{R})$.
3. L'application $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\longrightarrow\mathbb{R}$ qui à un couple de matrices (A,B) associe $\mathrm{T}r(AB)$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (voir 1.1).

Si V est de dimension finie et si $\mathbb{B}=(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de V, une forme bilinéaire B a pour expression

$$B(\sum_{i=1}^n x_ie_i,\sum_{i=1}^n y_ie_i)=\sum_{1\leq i,j\leq n} x_iy_jB(e_i,e_j).$$

Cette expression s'écrit matriciellement

$$B(\sum_{i=1}^n x_ie_i,\sum_{i=1}^n y_ie_i)={}^tXMY, \tag{2.1}$$

où $M=(B(e_i,e_j))_{1\leq i,j\leq n}$, $X=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$.
La matrice M est appelée *matrice de la forme bilinéaire* B dans la base $\mathbb{B}$.

La proposition suivante décrit l'effet d'un changement de base sur la matrice d'une forme bilinéaire.

Proposition 5 *Soient $\mathbb{B}_1$ et $\mathbb{B}_2$ deux bases de V. Notons P la matrice de passage de $\mathbb{B}_1$ à $\mathbb{B}_2$, M_1 et M_2, respectivement, la matrice d'une forme bilinéaire B dans $\mathbb{B}_1$ et la matrice de B dans $\mathbb{B}_2$. Alors*

$$M_2={}^tPM_1P. \tag{2.2}$$

Exemples -

1. Soit B la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathbb{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est donnée par $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ -1 & 4 & 3\end{pmatrix}$. Nous allons calculer $B(x,y)$ et la matrice de B dans $\mathbb{B}'=((1,1,1),(-1,1,1),(1,1,-1))$ (après avoir vérifié que $\mathbb{B}'$ est une base). D'après 2.1, si $x=(x_1,x_2,x_3)$ et $y=(y_1,y_2,y_3)$,

$$\begin{aligned} B(x,y) &= (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ -1 & 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}\\ &= (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} y_1+y_2+y_3\\ 2y_3\\ -y_1+4y_2+3y_3\end{pmatrix}\\ &= x_1(y_1+y_2+y_3)+2x_2y_3+x_3(-y_1+4y_2+3y_3). \end{aligned}$$

D'un autre côté, on a

$$\det_{\mathbb{B}}(\mathbb{B}')=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix} \overset{(L_2-L_1,L_3-L_1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 2 & -2\end{vmatrix}=-4\neq 0.$$

Donc $\mathbb{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Notons P la matrice de passage de $\mathbb{B}$ à $\mathbb{B}'$. La matrice M' de B dans $\mathbb{B}'$ est donnée par la formule 2.2,

$$\begin{aligned} M' = {}^tPMP &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 6 & 8 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 & 11 & -1 \\ 5 & 9 & -3 \\ -1 & -5 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.1.2 Formes bilinéaires symétriques

Formes quadratiques

Grâce à leur symétrie, les formes bilinéaires symétriques peuvent être identifiées à des objets mathématiques plus simples à manipuler. Ces objets sont les formes quadratiques.

Définition 4 *Une* forme quadratique *sur V est une application $q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $u \in V$, $q(u) = B(u,u)$, où B est une forme bilinéaire sur V.*

Remarques - Une forme quadratique peut être définie par plusieurs formes bilinéaires. Par exemple, les formes bilinéaires $B_1, B_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définies, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^2$, par $B_1(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2$ et $B_2(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_2$ définissent la même forme quadratique

$$q(x) = B_1(x,x) = x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_1x_2 - x_2x_1 + x_2^2 = B_2(x,x).$$

L'unicité de B est assurée par le résultat suivant.

Proposition 6 *Si q est une forme quadratique sur V alors il existe une unique forme bilinéaire symétrique S telle que, pour tout $u \in V$, $q(u) = S(u,u)$. De plus, S est donnée par les formules de* polarisation *:*

$$S(u,v) = \frac{1}{4}\left(q(u+v) - q(u-v)\right) = \frac{1}{2}\left(q(u+v) - q(u) - q(v)\right). \tag{2.3}$$

Définition 5 *La forme bilinéaire symétrique donnée par 2.3 est appelée* forme polaire *de la forme quadratique q.*

La matrice d'une forme quadratique q dans une base $\mathbb{B}$ est la matrice de sa forme polaire dans B. Si $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est une telle matrice, d'après

2.1,

$$\begin{aligned} q(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) &= \sum_{1\le i,j\le n} m_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}x_i^2 + \sum_{1\le i\neq j\le n} m_{ij}x_ix_j & (2.4)\\ &= \sum_{i=1}^{n} m_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} m_{ij}x_ix_j. & (2.5)\end{aligned}$$

Inversement, toute application $q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ qui s'écrit dans une base de la forme 2.4 est une forme quadratique.

Proposition 7 *Soit $q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ où V est de dimension finie. Alors q est une forme quadratique sur V si et seulement s'il existe une base $\mathbb{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de V telle que*

$$q(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{1\le i,j\le n} m_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} m_{ij}x_ix_j.$$

En plus, si une telle base $\mathbb{B}$ existe, alors la matrice de q dans M est donnée par $M = (m_{ij})_{1\le i,j\le n}$.

Exemples - L'application $q : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, par $q(A) = \det(A)$ est une forme quadratique. En effet, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors (a, b, c, d) sont les coordonnées de A dans la base canonique $\mathbb{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $q(A) = ad - bc$. Donc q est une forme quadratique, en vertu de la Proposition 7. De plus, la matrice de q dans $\mathbb{B}$ est donnée par

$$M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Définition 6
1. *Le* noyau d'une forme quadratique q *dont la forme polaire est S est donné par* $\ker q = \{u \in V ; S(u, v) = 0\ \forall v \in V\}$.
2. *Une forme quadratique est* non-dégénérée *si* $\ker q = \{0\}$.
3. *Un vecteur non nul $v \in V$ est dit* isotrope *si* $q(v) = 0$.
4. *On appelle* cône isotrope *de q l'ensemble noté $C(q)$ des vecteurs isotopes.*

Si $\mathbb{B}_1$ et $\mathbb{B}_2$ sont deux bases de V et si M_1 et M_2 sont, respectivement, les matrices d'une forme quadratique q dans les bases $\mathbb{B}_1$ et $\mathbb{B}_2$, on a, d'après 2.2, $M_2 = {}^tPM_1P$. Il en résulte que les matrices M_1 et M_2 sont équivalentes et donc sont de même rang. Ceci nous amène à poser la définition suivante.

Définition 7 *Le* rang d'une forme quadratique *q sur V noté rg$q$ est le rang de sa matrice dans n'importe quelle base de V.*

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de V alors

$$u = \sum_i x_i e_i \in \ker q \quad \Leftrightarrow \quad M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

où M est la matrice de q. On déduit donc d'après le théorème du rang que

$$\dim V = \dim \ker q + \mathrm{rg} q. \tag{2.7}$$

Théorème de réduction de Gauss

Nous allons maintenant énoncer un des résultats centraux de ce chapitre : le théorème de réduction de Gauss d'une forme quadratique réelle sur un espace vectoriel de dimension finie.

Théorème 4 *Soit $q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension finie n. Alors il existe une famille $(\ell_1, \dots, \ell_p)$ $(p \leq n)$ de formes linéaires* **indépendantes** *et une famille de nombres réels $(a_1, \dots, a_p)$* tous non nuls *tels que pour tout $u \in V$,*

$$q(u) = \sum_{i=1}^{p} a_i \ell_i(u)^2. \tag{2.8}$$

Remarques -

1. La décomposition 2.8 n'est pas unique. En effet, la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ donnée par $q(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$ peut s'écrire $q(x, y) = (x + y)^2 - 2y^2 = -(x - y)^2 + 2x^2$.
2. Toute expression de la forme 2.8 n'est pas forcément une réduction de Gauss. Pour que ce soit le cas, **il faut que** $(\ell_1, \dots, \ell_p)$ **soit une famille libre**. Par exemple, l'expression $x^2 + y^2 + \frac{1}{2}(x + y)^2 - \frac{1}{2}(x - y)^2$ n'est pas une réduction de Gauss de la forme quadratique $q(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$.

La preuve de ce théorème est basée sur une récurrence et présente l'avantage d'être algorithmique, c'est-à-dire qu'elle fournit une méthode pratique pour écrire une forme quadratique sous l'expression 2.8. Cette méthode est connue sous le nom de *méthode de Gauss pour la réduction d'une forme quadratique.* Nous allons maintenant décrire cette méthode et l'appliquer ensuite sur quelques exemples pour permettre au lecteur de se familiariser avec elle.

Soit V un espace vectoriel de dimension finie et $q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique sur V. On commence par choisir une base $\mathbb{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de V. Dans cette base, d'après 2.4, q s'écrit

$$q(u) = \sum_{i=1}^{n} m_{ii} x_i^2 + \sum_{i \neq j} m_{ij} x_i x_j,$$

avec $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Deux situations peuvent se présenter :

1. Le terme $\sum_{i=1}^{n} m_{ii} x_i^2$ est non nul, c'est-à-dire qu'il existe $1 \leq i \leq n$ tel que $m_{ii} \neq 0$. Sans perdre de généralité, on peut supposer que $m_{11} \neq 0$. On écrit alors
$$q(u) = m_{11} x_1^2 + 2 \sum_{i=2}^{n} m_{1i} x_1 x_i + R(x_2, \ldots, x_n).$$
Maintenant, on a
$$\begin{aligned} m_{11} x_1^2 + 2 \sum_{i=2}^{n} m_{1i} x_1 x_i & \overset{(m_{11} \neq 0)}{=} & m_{11} \left(x_1^2 + 2 \sum_{i=2}^{n} \frac{m_{1i}}{m_{11}} x_1 x_i \right) \\ & = & m_{11} \left(x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{m_{1i}}{m_{11}} x_i \right)^2 - \sum_{i=2}^{n} \frac{m_{1i}^2}{m_{11}^2} x_i^2. \end{aligned}$$
On obtient donc que
$$q(u) \quad = \quad m_{11} \ell_1(u)^2 + q'(x_2, \ldots, x_n), \tag{2.9}$$
où ℓ_1 est la forme linéaire sur V définie par $\ell_1(u) = x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{m_{1i}}{m_{11}} x_i$. Notons que "le reste" $q'(x_2, \ldots, x_n)$ ne dépend que de $(x_2, \ldots, x_n)$ et peut être considéré comme une forme quadratique sur l'espace vectoriel de dimension $n-1$ engendré par $(e_2, \ldots, e_n)$.

2. Le terme $\sum_{i=1}^{n} m_{ii} x_i^2$ est nul, c'est-à-dire que $q(u) = \sum_{i \neq j} m_{ij} x_i x_j$. On peut supposer $q \neq 0$ et supposer $m_{12} \neq 0$. On écrit alors
$$\begin{aligned} q(u) & = & 2(m_{12} x_1 x_2 + x_1 \sum_{i=3}^{n} m_{1i} x_i + x_2 \sum_{i=3}^{n} m_{2i} x_i) + R(x_3, \ldots, x_n) \\ & = & 2 q_0(u) + R(x_3, \ldots, x_n), \end{aligned}$$
avec $q_0(u) = m_{12} x_1 x_2 + x_1 \sum_{i=3}^{n} m_{1i} x_i + x_2 \sum_{i=3}^{n} m_{2i} x_i$. Maintenant
$$\begin{aligned} q_0(u) &= m_{12} \left(x_1 x_2 + x_1 \sum_{i=3}^{n} \frac{m_{1i}}{m_{12}} x_i + x_2 \sum_{i=3}^{n} \frac{m_{2i}}{m_{12}} x_i \right) \\ &= m_{12} \left(x_1 + \sum_{i=3}^{n} \frac{m_{2i}}{m_{12}} x_i \right) \left(x_2 + \sum_{i=3}^{n} \frac{m_{1i}}{m_{12}} x_i \right) \\ &\quad - \left(\sum_{i=3}^{n} \frac{m_{1i}}{m_{12}} x_i \right) \left(\sum_{i=3}^{n} \frac{m_{2i}}{m_{12}} x_i \right). \end{aligned}$$

On obtient donc que

$$q(u) = 2m_{12}L_1(u)L_2(u) + q'(x_3, \ldots, x_n),$$

où

$$L_1(u) = x_1 + \sum_{i=3}^{n} \frac{m_{2i}}{m_{12}} x_i \quad \text{et} \quad L_2(u) = x_2 + \sum_{i=3}^{n} \frac{m_{1i}}{m_{12}} x_i.$$

En posant $\ell_1 = L_1 + L_2$ et $\ell_2 = L_1 - L_2$, on obtient

$$q(u) = \frac{1}{2} m_{12}\ell_1(u)^2 - \frac{1}{2} m_{12}\ell_2(u)^2 + q'(x_3, \ldots, x_n). \tag{2.10}$$

On itére ce qui vient d'être fait à la forme quadratique q' qui apparaît dans 2.9 et 2.10 et qui ne dépend que de $x_2, \ldots, x_n$ pour arriver de proche en proche à la formule souhaitée.

Exemples -

1. On considère la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par

$$q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz - z^2.$$

Nous allons effectuer une réduction de Gauss de q. On a

$$\begin{aligned} q(x, y, z) &= x^2 + 2xy + 2xz - z^2 \\ &= x^2 + 2x(y + z) - z^2 \\ &= (x + y + z)^2 - (y + z)^2 - z^2. \end{aligned}$$

On obtient alors une réduction de Gauss de q.

2. On considère la forme quadratique q sur $\mathbb{R}^4$ définie par

$$q(x, y, z, t) = xy + 2xz - yz + 3zt - 4yt.$$

Nous allons effectuer une réduction de Gauss de q. On a

$$\begin{aligned} q(u) &= xy + 2xz - y(z + 4t) + 3zt \\ &= (x - z - 4t)(y + 2z) + 2z(z + 4t) + 3zt \\ &= \frac{1}{4}\left((x - z - 4t) + (y + 2z)\right)^2 - \frac{1}{4}\left((x - z - 4t) - (y + 2z)\right)^2 + 2z^2 + 11zt \\ &= \frac{1}{4}\left(x + y + z - 4t\right)^2 - \frac{1}{4}\left(x - y - 3z - 4t\right)^2 + 2(z + \frac{11}{4}t)^2 - \frac{121}{8}t^2. \end{aligned}$$

Ainsi une réduction de Gauss de q est

$$q(x, y, z, t) = \frac{1}{4}\left(x + y + z - 4t\right)^2 - \frac{1}{4}\left(x - y - 3z - 4t\right)^2 + 2(z + \frac{11}{4}t)^2 - \frac{121}{8}t^2.$$

Bases orthogonales, bases orthonormales et signature d'une forme quadratique

Soit $q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ et une forme quadratique sur un espace vectoriel V de dimension finie n. D'après le Théorème 4, il existe une famille de formes linéaires indépendantes $(\ell_1, \ldots, \ell_p)$ $(p \leq n)$ et une famille de nombres réels $(a_1, \ldots, a_p)$ tous non nuls tels que pour tout $u \in V$, $q(u) = \sum_{i=1}^{p} a_i \ell_i(u)^2$. La famille $(\ell_1, \ldots, \ell_p)$ étant libre, on peut la compléter par une famille $(c_1, \ldots, c_{n-p})$ pour avoir une base $(\ell_1, \ldots, \ell_p, c_1, \ldots, c_{n-p})$ de V^*. En vertu de la Proposition 4, il existe une base $\mathbb{B} = (f_1, \ldots, f_n)$ telle que la base duale $\mathbb{B}^*$ est égale à $(\ell_1, \ldots, \ell_p, c_1, \ldots, c_{n-p})$. Nous allons écrire la matrice de q dans la base $\mathbb{B}$. La forme polaire S de q est donnée par

$$S(u, v) = \sum_{i=1}^{p} a_i \ell_i(u) \ell_i(v),$$

et donc, pour $i, j = 1, \ldots, n$, on a

$$S(f_i, f_j) = \sum_{k=1}^{p} a_k \ell_k(f_i) \ell_k(f_j) = \begin{cases} a_i & \text{si} \quad i \leq p \text{ et } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.11}$$

Il en résulte que la matrice de q dans $\mathbb{B}$ est la matrice diagonale

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_p & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

De l'expression de M et du fait que les réels $(a_1, \ldots, a_p)$ sont tous non nuls, on déduit que $\mathrm{rg} q = p$ et

$$\ker q = \{u \in V; \ell_1(u) = \ldots = \ell_p(u) = 0\} = Vect\{f_{p+1}, \ldots, f_n\}. \tag{2.13}$$

En vertu de ce qui précéde, on constate qu'une réduction de Gauss de q permet la construction d'une base $\mathbb{B}$ vérifiant 2.11, 2.12 et 2.13. Ceci nous amène à poser la définition suivante.

Définition 8 *Une base* $(e_1, \ldots, e_n)$ *de* V *est dite* orthogonale *pour* q *ou* q-**orthogonale** *si* $S(e_i, e_j) = 0$ *pour tout* $i \neq j$, *où* S *désigne la forme polaire de* q.

La construction ci-dessus nous permet d'énoncer la proposition suivante.

Proposition 8 *Soit* $q(u) = \sum_{i=1}^{p} a_i \ell_i(u)^2$ *une réduction de Gauss de* q *et* $(c_1, \dots, c_{n-p})$ *une famille de* V^* *telles que* $(\ell_1, \dots, \ell_p, c_1, \dots, c_{n-p})$ *soit une base de* V^*. *Alors la base* $\mathbb{B} = (f_1, \dots, f_n)$ *de* V *dont la base duale est* $(\ell_1, \dots, \ell_p, c_1, \dots, c_{n-p})$ *est une base* q*-orthogonale et on a*

$$\ker q = \bigcap_{i=1}^{p} \ker \ell_i = Vect\{f_{p+1}, \dots, f_n\}.$$

D'un autre côté, les nombres réels $(a_1, \dots, a_p)$ sont tous non nuls et peuvent être distingués selon leurs signes. On pose alors

$$\mathbf{s} = card\{a_i, a_i > 0\} \quad \text{et} \quad \mathbf{t} = card\{a_i, a_i < 0\}, \tag{2.14}$$

où $card\{a_i, a_i > 0\}$ désigne le nombre d'éléments de l'ensemble $\{a_i, a_i > 0\}$. Noter qu'on a aussi

$$\mathbf{s} = card\{f_i, q(f_i) > 0\} \quad \text{et} \quad \mathbf{t} = card\{f_i, q(f_i) < 0\}, \tag{2.15}$$

Le couple d'entier $(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ défini par 2.14 est en fait un invariant de q, c'est-à-dire que, ne dépend pas de la réduction de Gauss qui a servi à le définir. Plus précisement, on a le théorème important suivant.

Théorème 5 (Loi d'inertie de Sylvester) *Soit* q *une forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension finie* n. *Alors il existe un couple d'entiers* $(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ *vérifiant :*

1. *pour toute réduction de Gauss de* q *donnée par 2.8, on a*

$$\mathbf{s} = card\{a_i, a_i > 0\} \quad et \quad \mathbf{t} = card\{a_i, a_i) < 0\},$$

2. *pour toute base* q*-orthogonale* $(e_1, \dots, e_n)$, *on a*

$$\mathbf{s} = card\{e_i, q(e_i) > 0\} \quad et \quad \mathbf{t} = card\{e_i, q(e_i) < 0\},$$

3. $rgq = \mathbf{s} + \mathbf{t}$ *et* $\dim \ker q = n - \mathbf{s} - \mathbf{t}$.

Définition 9 *Le couple d'entier* $(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ *défini dans le Théorème 5 est appelé* signature *de* q .

Exemples -

1. Nous avons vu que l'application det : $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme quadratique. Nous allons calculer sa signature. On a, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors

$$\det(A) = ad - bc = \frac{1}{4}(a+d)^2 - \frac{1}{4}(a-d)^2 - \frac{1}{4}(b+c)^2 + \frac{1}{4}(b-c)^2.$$

On obtient ainsi une réduction de Gauss de la forme quadratique det et on déduit que sa signature est $(2,2)$ et qu'elle est non-dégénérée.
Nous allons maintenant construire une base q-orthogonale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Pour cela, considérons les formes linéaires qui apparaîssent dans la réduction de Gauss ci-dessus, soit

$$\ell_1(A) = a + d,\ \ell_2(A) = a - d,\ \ell_3(A) = b + c \text{ et } \ell_4(A) = b - c.$$

$(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ est une base de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^*$. La base $\mathbb{B}_1 = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont $B_1^* = (\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$ est une base q-orthogonale, d'après la Proposition 8. Notons $\mathbb{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et soit $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de $\mathbb{B}^*$ à $(\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4)$. D'après 1.7, la matrice de passage P de $\mathbb{B}$ à $\mathbb{B}_1$ est donnée par $P = {}^tQ^{-1}$. Pour calculer Q^{-1}, nous allons résoudre le système

$$Q \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix}.$$

Ce système est équivalent à

$$\begin{cases} a + b &= a' \\ c + d &= b' \\ c - d &= c' \\ a - b &= d' \end{cases}$$

La résolution de ce système est aisée et donne

$$a = \frac{1}{2}(a' + d'),\ b = \frac{1}{2}(a' - d'),\ c = \frac{1}{2}(b' + c') \text{ et } d = \frac{1}{2}(b' - c').$$

Soit $Q^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Finalement

$$\mathbb{B}_1 = \left\{ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

est une base q-orthogonale.

Nous allons conclure cette section par un résultat qui exploite tout ce qu'on a vu pour donner une expression, la plus fine possible, d'une forme quadratique. En effet, soit q une forme quadratique sur V qu'on suppose de dimension n. Soit $(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ la signature de q et

$$(\widetilde{e}_1^+, \ldots, \widetilde{e}_{\mathbf{s}}^+, \widetilde{e}_1^-, \ldots, \widetilde{e}_{\mathbf{t}}^-, e_1^0, \ldots, e_r^0)$$

une base q-orthogonale telle que $a_i^+ = q(\widetilde{e}_i^+) > 0$ pour $i = 1, \ldots, \mathbf{s}$, $a_i^- = q(\widetilde{e}_i^-) < 0$ pour $i = 1, \ldots, \mathbf{t}$ et $q(e_i^0) = 0$ pour $i = 1, \ldots, r$. Une telle base existe d'après la Proposition 8. Posons pour tout $i = 1, \dots, \mathbf{s}$ et tout $j = 1, \dots, \mathbf{t}$,

$$e_i^+ = \frac{1}{\sqrt{a_i^+}} \widetilde{e}_i^+ \quad \text{et} \quad e_j^- = \frac{1}{\sqrt{-a_j^-}} \widetilde{e}_j^-.$$

Alors $\mathbb{B} = (e_1^+, \dots, e_{\mathbf{s}}^+, e_1^-, \dots, e_{\mathbf{t}}^-, e_1^0, \dots, e_r^0)$ est une base q-orthogonale de V vérifiant en outre

$$q(e_i^+) = 1, \ i = 1, \dots, \mathbf{s}, \quad q(e_i^-) = -1, \ i = 1, \dots, \mathbf{t} \quad \text{et} \quad q(e_i^0) = 0, \ i = 1, \dots, r.$$

Si $(x_1^+, \dots, x_{\mathbf{s}}^+, x_1^-, \dots, x_{\mathbf{t}}^-, x_1^0, \dots, x_r^0)$ sont les coordonnées d'un vecteur u dans la base $\mathbb{B}$ alors

$$q(u) = \sum_{i=1}^{\mathbf{s}} (x_i^+)^2 - \sum_{i=1}^{\mathbf{t}} (x_i^-)^2. \tag{2.16}$$

En vertu de ce qui précède, on déduit le théorème suivant.

Théorème 6 *Soit q une forme quadratique sur V de dimension n et soit $(\mathbf{s}, \mathbf{t})$ la signature de q. Alors q admet une base q-orthogonale*

$$\mathbb{B} = (e_1^+, \dots, e_{\mathbf{s}}^+, e_1^-, \dots, e_{\mathbf{t}}^-, e_1^0, \dots, e_r^0)$$

vérifiant

$$q(e_i^+) = 1, \ i = 1, \dots, \mathbf{s}, \quad q(e_i^-) = -1, \ i = 1, \dots, \mathbf{t} \quad \textit{et} \quad q(e_i^0) = 0, \ i = 1, \dots, r.$$

De plus, si $(x_1^+, \dots, x_{\mathbf{s}}^+, x_1^-, \dots, x_{\mathbf{t}}^-, x_1^0, \dots, x_r^0)$ sont les coordonnées d'un vecteur u dans la base $\mathbb{B}$ alors

$$q(u) = \sum_{i=1}^{\mathbf{s}} (x_i^+)^2 - \sum_{i=1}^{\mathbf{t}} (x_i^-)^2$$

et

$$\ker q = vect\{e_1^0, \dots, e_r^0\}.$$

Définition 10 *Soit q une forme quadratique non-dégénérée. Une base $\mathbb{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est dite q-*orthonormale *si elle est q-orthogonale et si en plus, pour tout $i = 1, \dots, n$, $q(e_i) = \epsilon$ où ϵ vaut -1 ou 1.*

Corollaire 1 *Une forme quadratique q sur V de dimension finie n est non-dégénérée si et seulement s'il existe une base q-orthonormale*

$$\mathbb{B} = (e_1^+, \dots, e_{\mathbf{s}}^+, e_1^-, \dots, e_{n-\mathbf{s}}^-)$$

telle que

$$q\Big(\sum_{i=1}^{\mathbf{s}} x_i^+ e_i^+ + \sum_{i=1}^{n-\mathbf{s}} x_i^- e_i^-\Big) = \sum_{i=1}^{\mathbf{s}} (x_i^+)^2 - \sum_{i=1}^{n-\mathbf{s}} (x_i^-)^2.$$

Définition 11 1. *Une forme quadratique q sur V est* positive *(resp.* négative*) si pour tout $u \in V$ $q(u) \geq 0$ (resp. $q(u) \leq 0$).*

2. *Une forme quadratique q sur V est* définie *si pour tout $u \in V \setminus \{0\}$ $q(u) \neq 0$.*

Proposition 9 *Soit V un espace vectoriel de dimension finie n. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *Une forme quadratique q sur V est positive (resp. négative) si et seulement si la signature de q est $(\mathbf{s}, 0)$ (resp. $(0, \mathbf{t})$).*
2. *Une forme quadratique q sur V est définie-positive (resp. définie-négative) si et seulement si la signature de q est $(n, 0)$ (resp. $(0, n)$).*
3. *Une forme quadratique q sur V est non-dégénérée si et seulement si la signature de q est de la forme $(\mathbf{s}, n - \mathbf{s})$.*

2.1.3 Orthogonalité, espaces isotropes

Soit q une forme quadratique sur V de forme polaire S.

Définition 12 1. *Deux vecteurs $u, v \in V$ sont dits* q-orthogonaux *si $S(u, v) = 0$.*

2. *Soit $A \subset V$ non vide. Le* q-orthogonal *de A est l'ensemble $A^\perp$ défini par $A^\perp = \{u \in V; S(u, v) = 0 \quad \forall v \in A\}$.*
3. *Une partie A de V est dite* isotrope *si $A \cap A^\perp \neq \{0\}$.*
4. *Une partie A de V est dite* totalement isotrope *si $A \subset A^\perp$.*

Les propriétés suivantes sont faciles à vérifier :

1. $\{0\}^\perp = V$ et $V^\perp = \ker q$.
2. Pour toute partie A de V, $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de V et $A^\perp = (Vect(A))^\perp$.
3. Si $A_1 \subset A_2 \subset V$ alors $A_2^\perp \subset A_1^\perp$.
4. Pour $A \subset V$, $A \cap A^\perp$ est totalement isotrope.

Proposition 10 *Supposons que V est de dimension finie et que q est non-dégénérée. Soit U un sous-espace vectoriel de V. Alors les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. $(U^\perp)^\perp = U$.
2. $\dim U + \dim U^\perp = \dim V$.
3. *Si $U \cap U^\perp = \{0\}$ alors $V = U \oplus U^\perp$.*

2.2 Exercices

Exercice 8 *Soit B une forme bilinéaire sur un espace vectoriel V et soit q sa forme quadratique associée.*

1. *Montrer* **l'identité de Cauchy**

$$q\left(q(u)v - B(u,v)u\right) = q(u)\left[q(u)q(v) - B(u,v)B(v,u)\right]. \tag{2.17}$$

2. *En déduire, si q est positive,* **l'inégalité de Cauchy-Schwarz**

$$B(u,v)B(v,u) \leq q(u)q(v). \tag{2.18}$$

Solution -

1. La formule s'obtient par un calcul direct utilisant la bilinéarité de B. En effet, on a, pour tous $u, v \in V$,

$$\begin{array}{rcl} q\left(q(u)v - B(u,v)u\right) & = & B(q(u)v - B(u,v)u, q(u)v - B(u,v)u) \\ & = & q(u)^2 B(v,v) - q(u)B(u,v)B(v,u) \\ & & -B(u,v)q(u)B(u,v) + B(u,v)^2 B(u,u) \\ & = & q(u)^2 q(v) - q(u)B(u,v)B(v,u) \\ & & -B(u,v)^2 q(u) + B(u,v)^2 q(u) \\ & = & q(u)^2 q(v) - q(u)B(u,v)B(v,u) \\ & = & q(u)\left[q(u)q(v) - B(u,v)B(v,u)\right]. \end{array}$$

2. Si q est positive alors le membre de gauche de l'identité de Cauchy est positif ou nul et donc, pour tout $u, v \in V$, $q(u)\left[q(u)q(v) - B(u,v)B(v,u)\right] \geq 0$. Puisque $q(u) \geq 0$, on déduit l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 9 *Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n ($n \geq 1$). Pour tout $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose*

$$B(P,Q) = \int_0^1 tP(t)Q'(t)dt \quad et \quad q(P) = B(P,P).$$

1. *Montrer que B est une forme bilinéaire. B est-elle symétrique, antisymétrique ?*
2. *Montrer que q est une forme quadratique. La frome q est-elle définie ? Sinon exhiber un vecteur isotrope non nul.*
3. *Calculer la matrice de q dans la base $\mathbb{B}_n = (1, X, \ldots, X^n)$.*

4. *Pour $n = 2$, déterminer la signature de q. La forme q est-elle positive, négative ?*
5. *Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ qui est q-orthogonale.*

Solution -

1. Pour tous $P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} B(P_1 + aP_2, Q) &= \int_0^1 t(P_1(t) + aP_2(t))Q'(t)dt \\ &= \int_0^1 tP_1(t)Q'(t)dt + a\int_0^1 tP_2(t)Q'(t)dt \\ &= B(P_1, Q) + aB(P_2, Q), \end{aligned}$$

et donc B est linéaire à gauche.
D'un autre côté, pour tous $Q_1, Q_2, P \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} B(P, Q_1 + aQ_2) &= \int_0^1 tP(t)(Q_1 + aQ_2)'(t)dt \\ &= \int_0^1 tP(t)Q_1'(t)dt + a\int_0^1 tP(t)Q_2'(t)dt \\ &= B(P, Q_1) + aB(P, Q_2), \end{aligned}$$

et donc B est linéaire à droite, ce qui achève de montrer que c'est une forme bilinéaire.
Remarquons que $B(1, X) = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}$, et $B(X, 1) = \int_0^1 t^2 \times 0dt = 0$ et donc B n'est ni symétrique ni antisymétrique.

2. Par construction q est une forme quadratique et $q(1) = B(1, 1) = \int_0^1 t \times 0dt = 0$, et donc 1 est un vecteur isotrope et q n'est pas définie.

3. Notons que la forme polaire S de q n'est pas B mais sa symétrisée

$$S(P, Q) = \frac{1}{2}\left(B(P, Q) + B(Q, P)\right).$$

Donc la matrice de q dans $\mathbb{B}_n$ est la matrice $M_n = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n+1}$ avec

$$m_{ij} = \frac{1}{2}\left(B(X^{i-1}, X^{j-1}) + B(X^{j-1}, X^{i-1})\right).$$

Donc

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \frac{1}{2}\left((j-1)\int_0^1 t^{i+j-2}dt + (i-1)\int_0^1 t^{i+j-2}dt\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{j-1}{i+j-1} + \frac{i-1}{i+j-1}\right) = \frac{i+j-2}{2(i+j-1)}. \end{aligned}$$

Finalement

$$M_n = \left(\frac{i+j-2}{2(i+j-1)}\right)_{1\leq i,j\leq n+1}. \tag{2.19}$$

4. D'après 2.19, la matrice de q dans $\mathbb{B}_2$ est $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{8} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$ et donc, d'après 2.5,

$$q(a+bX+cX^2) = \frac{1}{3}b^2 + \frac{2}{5}c^2 + \frac{1}{2}ab + \frac{2}{3}ac + \frac{3}{4}bc.$$

Nous allons effectuer une réduction de Gauss de q (cf. Théorème 4). On a

$$\begin{aligned} q(a+bX+cX^2) &= \frac{1}{3}\left(b^2 + \frac{3}{2}b(a+\frac{3}{2}c)\right) + \frac{2}{3}ac + \frac{2}{5}c^2 \\ &= \frac{1}{3}(b+\frac{3}{4}a+\frac{9}{8}c)^2 - \frac{1}{3}(\frac{3}{4}a+\frac{9}{8}c)^2 + \frac{2}{3}ac + \frac{2}{5}c^2 \\ &= \frac{1}{3}(b+\frac{3}{4}a+\frac{9}{8}c)^2 - \frac{3}{16}a^2 - \frac{27}{64}c^2 - \frac{9}{16}ac + \frac{2}{3}ac + \frac{2}{5}c^2 \\ &= \frac{1}{3}(b+\frac{3}{4}a+\frac{9}{8}c)^2 - \frac{7}{320}c^2 + \frac{5}{48}ac - \frac{3}{16}a^2 \\ &= \frac{1}{3}(b+\frac{3}{4}a+\frac{9}{8}c)^2 - \frac{3}{16}(a^2 - \frac{5}{9}ac) - \frac{7}{320}c^2 \\ &= \frac{1}{3}(b+\frac{3}{4}a+\frac{9}{8}c)^2 - \frac{3}{16}(a-\frac{5}{18}c)^2 + \frac{25}{1728}c^2 - \frac{7}{320}c^2 \\ &= \frac{1}{3}(b+\frac{3}{4}a+\frac{9}{8}c)^2 - \frac{3}{16}(a-\frac{5}{18}c)^2 - \frac{1}{135}c^2. \end{aligned}$$

De cette expression, et d'après le Théorème 5, q est de signature $(1,2)$ et elle est non-dégénérée. De plus, d'après la Proposition 9, elle n'est ni positive ni négative.

5. On considère les formes linéaires ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 figurant dans la réduction de Gauss de q obtenue ci-dessus, c'est-à-dire que pour $P = a+bX+cX^2$,

$$\ell_1(P) = b + \frac{3}{4}a + \frac{9}{8}c, \quad \ell_2(P) = a - \frac{5}{18}c \quad \text{et} \quad \ell_3(P) = c.$$

(ℓ_1,ℓ_2,ℓ_3) est une base de $(\mathbb{R}_2[X])^*$ et, d'après la Proposition 8, la base (P_1,P_2,P_3) dont la base duale est (ℓ_1,ℓ_2,ℓ_3) est une base q-orthogonale. Soit $Q = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{9}{8} & -\frac{5}{18} & 1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de $\mathbb{B}_2^*$ à (ℓ_1,ℓ_2,ℓ_3). D'après 1.7, la matrice de passage de $\mathbb{B}_2$ à (P_1,P_2,P_3) est donnée par $P = {}^tQ^{-1}$. Pour calculer Q^{-1}, nous allons résoudre le système linéaire

$Q\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$. Ce système s'écrit

$$\left\{\begin{array}{ccc} \frac{3}{4}a+b & = & A \\ a & = & B \\ \frac{9}{8}a-\frac{5}{18}b+c & = & C \end{array}\right.$$

Un calcul aisé donne $a = B$, $b = A - \frac{3}{4}B$ et $c = \frac{5}{18}B + C$, soit $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{3}{4} & 0 \\ \frac{5}{18} & -\frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$. De la relation $P = {}^tQ^{-1}$, on déduit que $(X, 1-\frac{3}{4}X, \frac{5}{18}-\frac{4}{3}X+X^2)$ est une base q-orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 10 *Soit* $V = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); a-d=0\right\}$ *et soit* $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. *On définit l'application* $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ *en posant, pour tous* $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $B(M,N) = \mathrm{Tr}(MJN)$.

1. *Montrer que* B *est une forme bilinéaire.* B *est-elle symétrique, antisymétrique ?*
2. *Montrer que* $\mathbb{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ *est une base de* V.
3. *Déterminer la matrice dans la base* $\mathbb{B}$ *de la forme quadratique* q *définie en posant, pour tous* $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $q(M) = B(M,M)$.
4. *Déterminer la signature de q, son rang et son noyau. La forme q est-elle définie, positive, négative ?*
5. *Déterminer* $F^{\perp}$ *(q-orthogonal de* F*) où* $F = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); a-d=0\right\}$.

Solution -

1. Pour tous $M_1, M_2, N \in V$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{array}{rcl} B(M_1+aM_2, N) & = & \mathrm{Tr}((M_1+aM_2)JN) \\ & = & \mathrm{Tr}(M_1JN + aM_2JN) = \mathrm{Tr}(M_1JN) + a\mathrm{Tr}(M_2JN) \\ & = & B(M_1,N) + aB(M_2,N), \end{array}$$

et donc B est linéaire à gauche.

D'un autre côté, pour tous $N_1, N_2, M \in V$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} B(M, N_1 + aN_2) &= \mathrm{T}r(MJ(N_1 + aN_2)) \\ &= \mathrm{T}r(MJN_1 + aMJN_2) = \mathrm{T}r(MJN_1) + a\mathrm{T}r(MJN_2) \\ &= B(M, N_1) + aB(M, N_2), \end{aligned}$$

et donc B est linéaire à droite ; ceci achève de montrer que B est une forme bilinéaire.

2. Pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in V$, on a

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc $\mathbb{B}$ engendre V. D'un autre côté,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

équivaut à $a = b = c = 0$ et donc $\mathbb{B}$ est libre. Ainsi $\mathbb{B}$ est une base de V.

3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in V$. On a

$$\begin{aligned} q(M) &= \mathrm{T}r\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \right) \\ &= \mathrm{T}r\left(\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ c+a & c-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \right) \\ &= \mathrm{T}r\left(\begin{pmatrix} a(a+b)+c(a-b) & b(a+b)+a(a-b) \\ a(c+a)+c(c-a) & b(c+a)+a(c-a) \end{pmatrix} \right) \\ &= a(a+b)+c(a-b)+b(c+a)+a(c-a) = 2(ab+ca). \end{aligned}$$

Soit

$$q(M) = 2(ab + ca). \tag{2.20}$$

En vertu de la Proposition 7, la matrice de q dans $\mathbb{B}$ est $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Effectuons une réduction de Gauss de q (cf. Théorème 4). Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in V$. On a, d'après 2.20,

$$q(M) = 2a(b+c) = \frac{1}{2}(a+b+c)^2 - \frac{1}{2}(a-b-c)^2.$$

D'après cette expression et d'après le Théorème 5, q est de signature $(1,1)$, elle est dégénérée et $\mathrm{rg} q = 2$. De plus, d'après la Proposition 9, elle n'est ni positive ni négative et donc non définie.

De cette expression, on déduit aussi, en vertu de la Proposition 8, que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in \ker q$ si et seulement si $a+b+c = a-b-c = 0$, soit $a = 0$ et $b = -c$. Ainsi $\ker q = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R} \right\}$.

5. F est une droite vectorielle engendrée par la matrice identité I_3. Ainsi $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in F^\perp$ si et seulement si $S(M, I_3) = 0$ où S est la forme polaire de q. La forme polaire S de q est la symétrisée de B, c'est-à-dire,

$$S(M,N) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{T}r(MJN) + \mathrm{T}r(NJM)\right).$$

Donc

$$\begin{aligned} S(M, I_3) &= \frac{1}{2}\mathrm{T}r\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{T}r\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}\right) \\ &= \mathrm{T}r\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{T}r\left(\begin{pmatrix} a+b & a-b \\ c+a & c-a \end{pmatrix}\right) \\ &= b + c. \end{aligned}$$

Ainsi $F^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 11 *Effectuer une réduction de Gauss et déterminer le noyau, le rang et la signature des formes quadratiques suivantes :*

1. $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $q(x,y,z) = 2x^2 + y^2 - z^2 + 3xy - 4xz$.
2. $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $q(x,y,z) = x^2 + y^2 - az^2 + 3xy - bxz + yz$. *(Discuter suivant les valeurs de* $a, b \in \mathbb{R}$*).*
3. $q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} q(x,y,z,t) &= x^2 + (1+2\lambda-\mu)y^2 + (1+\lambda)z^2 + (1+2\lambda+\mu)t^2 \\ &\quad +2xy + 2xz - 2xt + 2(1-\lambda)yz - 2(1+\lambda)yt + 2(\lambda-1)zt. \end{aligned}$$

(Discuter suivant les valeurs de $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*).*

4. $q : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}$, $q(x,y,z,t,s) = xy - xt + yz - yt + ys + zt - zs + 2st$.

Solution -

1. On a

$$\begin{aligned}
q(x,y,z) &= 2x^2+y^2-z^2+3xy-4xz \\
&= 2(x^2+\frac{1}{2}x(3y-4z))+y^2-z^2 \\
&= 2(x+\frac{3}{4}y-z)^2-2(\frac{3}{4}y-z)^2+y^2-z^2 \\
&= 2(x+\frac{3}{4}y-z)^2-\frac{1}{8}y^2+3yz-3z^2 \\
&= 2(x+\frac{3}{4}y-z)^2-\frac{1}{8}(y^2-24yz)-3z^2 \\
&= 2(x+\frac{3}{4}y-z)^2-\frac{1}{8}(y-12z)^2+15z^2.
\end{aligned}$$

En vertu du Théorème 5, la signature de q est $(2,1)$, $\mathrm{rg}q=3$ et donc $\ker q=\{0\}$.

2. On a

$$\begin{aligned}
q(x,y,z) &= x^2+y^2-az^2+3xy-bxz+yz \\
&= x^2+x(3y-bz)+y^2-az^2+yz \\
&= (x+\frac{3}{2}y-\frac{b}{2}z)^2-\frac{9}{4}y^2-\frac{b^2}{4}z^2+\frac{3b}{2}yz+y^2-az^2+yz \\
&= \\
&= (x+\frac{3}{2}y-\frac{b}{2}z)^2-\frac{5}{4}(y^2-\frac{2(2+3b)}{5}yz)-(a+\frac{b^2}{4})z^2 \\
&= (x+\frac{3}{2}y-\frac{b}{2}z)^2-\frac{5}{4}(y-\frac{2+3b}{5}z)^2-(a+\frac{b^2}{4}-\frac{(2+3b)^2}{20})z^2 \\
&= (x+\frac{3}{2}y-\frac{b}{2}z)^2-\frac{5}{4}(y-\frac{2+3b}{5}z)^2+\frac{1}{5}(b^2+3b-5a+1)z^2.
\end{aligned}$$

D'abord, en vertu du Théorème 5, q dégénére si et seulement si $(b^2+3b-5a+1)=0$. Si c'est le cas, d'après la Proposition 8, $(x,y,z)\in\ker q$ si et seulement si

$$x+\frac{3}{2}y-\frac{b}{2}z=y-\frac{2+3b}{5}z=0.$$

En conclusion, si q dégénére alors $\ker q=\mathbb{R}(-\frac{3+2b}{5},\frac{2+3b}{5},1)$.
D'un autre côté, la signature de q dépend du signe de $b^2+3b-5a+1$. Considérons cette quantité comme un polynôme en b de degré 2. Son discriminant est $\Delta=9-4(-5a+1)=20a+5=5(4a+1)$ et ses racines, quand $\Delta\geq 0$, sont $-\frac{3+\sqrt{20a+5}}{2}$ et $-\frac{3-\sqrt{20a+5}}{2}$.
En résumé, on a :

(a) si $a<-\frac{1}{4}$ et $b\in\mathbb{R}$, la signature est égale à $(2,1)$, le rang est égal à 3 et $\ker q=\{0\}$;

(b) si $a > -\frac{1}{4}$, $b \notin]-\frac{3+\sqrt{20a+5}}{2}, -\frac{3-\sqrt{20a+5}}{2}[$, la signature est égale à $(2,1)$, le rang est égal à 3 et $\ker q = \{0\}$;

(c) si $a > -\frac{1}{4}$, $bin] - \frac{3+\sqrt{20a+5}}{2}, -\frac{3-\sqrt{20a+5}}{2}[$, la signature est égale à $(1,2)$, le rang est égal à 3 et $\ker q = \{0\}$;

(d) si $a > -\frac{1}{4}$ et $b = -\frac{3+\sqrt{20a+5}}{2}$ ou $b = -\frac{3-\sqrt{20a+5}}{2}$, la signature est égale à $(1,1)$, le rang est égal à 2 et $\ker q = \mathbb{R}(-\frac{3+2b}{5}, \frac{2+3b}{5}, 1)$;

(e) si $a = -\frac{1}{4}$ et $b \neq -\frac{3}{2}$, la signature est égale à $(2,1)$, le rang est égal à 3 et $\ker q = \{0\}$;

(f) si $a = -\frac{1}{4}$ et $b = -\frac{3}{2}$, la signature est égale à $(1,1)$, le rang est égal à 2 et $\ker q = \mathbb{R}(-\frac{3+2b}{5}, \frac{2+3b}{5}, 1)$.

3. On a, si $u = (x,y,z,t)$,

$$\begin{aligned}
q(u) &= x^2 + (1+2\lambda-\mu)y^2 + (1+\lambda)z^2 + (1+2\lambda+\mu)t^2 \\
&\quad +2xy + 2xz - 2xt + 2(1-\lambda)yz - 2(1+\lambda)yt + 2(\lambda-1)zt \\
&= x^2 + 2x(y+z-t) + (1+2\lambda-\mu)y^2 + (1+\lambda)z^2 \\
&\quad +(1+2\lambda+\mu)t^2 + 2(1-\lambda)yz - 2(1+\lambda)yt + 2(\lambda-1)zt \\
&= (x+y+z-t)^2 - (y+z-t)^2 + (1+2\lambda-\mu)y^2 + (1+\lambda)z^2 \\
&\quad +(1+2\lambda+\mu)t^2 + 2(1-\lambda)yz - 2(1+\lambda)yt + 2(\lambda-1)zt \\
&= (x+y+z-t)^2 + (2\lambda-\mu)y^2 + \lambda z^2 + (2\lambda+\mu)t^2 \\
&\quad -2\lambda yz - 2\lambda yt + 2\lambda zt \\
&= (x+y+z-t)^2 + \lambda(z^2 + 2z(t-y)) + (2\lambda-\mu)y^2 \\
&\quad +(2\lambda+\mu)t^2 - 2\lambda yt \\
&= (x+y+z-t)^2 + \lambda(z+t-y)^2 - \lambda(y-t)^2 + (2\lambda-\mu)y^2 \\
&\quad +(2\lambda+\mu)t^2 - 2\lambda yt \\
&= (x+y+z-t)^2 + \lambda(z+t-y)^2 + (\lambda-\mu)y^2 + (\lambda+\mu)t^2.
\end{aligned}$$

En vertu de tous ces calculs et en utilisant le Théorème 5, la signature de q, son noyau et son rang sont par :

(a) si $\lambda = \mu = 0$, la signature de q est égale à $(1,0)$, le rang est égale à 1 et $\ker q = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x+y+z-t = 0\}$;

(b) si $\lambda = 0$ et $\mu \neq 0$, la signature de q est égale à $(2,1)$, le rang est égale à 3 et $\ker q = \mathbb{R}(1,0,-1,0)$;

(c) si $\lambda > 0$ et $\mu = 0$, la signature de q est égale à $(4,0)$, le rang est égale à 4 et $\ker q = \{0\}$;

(d) si $\lambda < 0$ et $\mu = 0$, la signature de q est égale à $(0,4)$, le rang est égale à 4 et $\ker q = \{0\}$;

(e) si $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$, la signature de q est égale à $(1+p^+, p-)$, le rang est égale à 4 et $\ker q = \{0\}$, où $p^\pm = \sigma^\pm(\lambda) + \sigma^\pm(\lambda-\mu) + \sigma^\pm(\lambda+\mu)$ avec $\sigma^\pm : \mathbb{R}^* \longrightarrow \{0,1\}$ qui vaut 1 sur $\mathbb{R}^{*\pm}$ et 0 sur $\mathbb{R}^{*\mp}$.

4. On a, si $u = (x, y, z, t, s)$,

$$\begin{aligned}
q(u) &= xy - xt + y(z - t + s) + zt - zs + 2st \\
&= (x + z - t + s)(y - t) + t(z - t + s) + zt - zs + 2st \\
&= (x + z - t + s)(y - t) - t^2 + 2zt + 3st - zs \\
&= (x + z - t + s)(y - t) - (t^2 - 2t(z + \frac{3}{2}s)) - zs \\
&= (x + z - t + s)(y - t) - (t - z - \frac{3}{2}s)^2 + (z + \frac{3}{2}s)^2 - zs \\
&= (x + z - t + s)(y - t) - (t - z - \frac{3}{2}s)^2 + z^2 + 2zs + \frac{9}{4}s^2 \\
&= \frac{1}{4}(x + y + z - 2t + s)^2 - \frac{1}{4}(x - y + z + s)^2 - (t - z - \frac{3}{2}s)^2 \\
&\quad +(z + s)^2 + \frac{5}{4}s^2.
\end{aligned}$$

En vertu du Théorème 5, la signature de q est $(3, 2)$, $\mathrm{rg} q = 5$ et donc q est non dégénérée.

Exercice 12 *Soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n ($n \geq 1$) et soit d un entier tel que $1 \leq d \leq n$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose*

$$q(P) = (P^2)^{(d)}(0)$$

où $P^{(d)}$ est le polynôme dérivée à l'ordre d de P.

1. *Montrer que q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer sa matrice dans la base $\mathbb{B} = \{1, X, \dots, X^n\}$.*
2. *Déterminer la signature de q, son rang et son noyau.*
Indication : On pourra utiliser les formules de Leibniz et Taylor

$$(PQ)^{(d)} = \sum_{k=0}^{d} C_d^k P^{(k)} Q^{(d-k)} \quad \textbf{et} \quad P = \sum_{k=0}^{degP} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k.$$

3. *On suppose dans cette question que $n = d = 2m + 1$ et on note $\mathcal{P} = Vect\{X, X^3, \dots, X^{2m+1}\}$.*

   (a) *Montrer que q est non dégénérée et donner une base q-orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.*

   (b) *Déterminer le q-orthogonal de $\mathcal{P}$ et montrer que $\mathcal{P}$ est un sous-espace vectoriel totalement isotrope.*

Solution -

1. On considère l'application $S : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$S(P,Q) = (PQ)^{(d)}(0).$$

Nous allons montrer que S est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$. En effet, pour tous $P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} S(P_1 + aP_2, Q) &= ((P_1 + aP_2)Q)^{(d)}(0) = (P_1Q + aP_2Q)^{(d)}(0) \\ &= (P_1Q)^{(d)}(0) + a(P_2Q)^{(d)}(0) = S(P_1, Q) + aS(P_2, Q), \end{aligned}$$

et donc S est linéaire à gauche et, puisque $S(P,Q) = S(Q,P)$, elle est linéaire à droite. En conclusion, S est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}_n[X]$. Maintenant, puisque $q(P) = S(P,P)$, q est une forme quadratique et S est sa forme polaire.

La matrice $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n+1}$ de q est donnée par

$$m_{ij} = S(X^{i-1}, X^{j-1}) = \left(X^{i+j-2}\right)^{(d)}(0).$$

La formule suivante est facile à vérifier : pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, on a

$$(X^p)^{(q)}(0) = \begin{cases} p! & \text{si} \quad p = q, \\ 0 & \text{si} \quad p \neq q. \end{cases} \tag{2.21}$$

On en déduit l'expression de m_{ij} :

$$m_{ij} = \begin{cases} (i+j-2)! & \text{si} \quad i+j-2 = d, \\ 0 & \text{si} \quad i+j-2 \neq d. \end{cases}$$

2. En utilisant la formule de Leibniz, on obtient pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$q(P) = \sum_{k=0}^{d} C_d^k P^{(k)}(0) P^{(d-k)}(0). \tag{2.22}$$

On distingue deux cas :

(a) l'entier d est paire, posons $d = 2m$. Nous allons effectuer une réduction de Gauss de q (cf. Théorème 4). On a

$$\begin{aligned} q(P) &= \sum_{k=0}^{2m} C_{2m}^k P^{(k)}(0) P^{(2m-k)}(0) \\ &= C_{2m}^m (P^{(m)}(0))^2 + \sum_{k=0, k\neq m}^{2m} C_{2m}^k P^{(k)}(0) P^{(2m-k)}(0) \\ &\overset{(a)}{=} C_{2m}^m (P^{(m)}(0))^2 + 2\sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k P^{(k)}(0) P^{(2m-k)}(0) \\ &= C_{2m}^m (P^{(m)}(0))^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k \left(P^{(k)}(0) + P^{(2m-k)}(0)\right)^2 \\ &\quad -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k \left(P^{(k)}(0) - P^{(2m-k)}(0)\right)^2 . \end{aligned}$$

Noter que dans (a) nous avons utilisé la relation

$$\sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k P^{(k)}(0) P^{(2m-k)}(0) = \sum_{k=m+1}^{2m} C_{2m}^k P^{(k)}(0) P^{(2m-k)}(0)$$

qui est une conséquence de la formule $C_{2m}^k = C_{2m}^{2m-k}$.
On considère les formes linéaires $\ell_0, \ldots, \ell_m, \widehat{\ell}_0, \ldots, \widehat{\ell}_{m-1}$ définies sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\begin{aligned} \ell_k(P) &= P^{(k)}(0) + P^{(2m-k)}(0),\ k = 0, \ldots, m, \\ \widehat{\ell}_k(P) &= P^{(k)}(0) - P^{(2m-k)}(0),\ k = 0, \ldots, m-1. \end{aligned}$$

On a alors

$$q(P) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m} C_{2m}^k \ell_k(P)^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k \widehat{\ell}_k(P)^2. \tag{2.23}$$

Pour que 2.23 soit une réduction de Gauss de q, il suffit que $\ell_0, \ldots, \ell_m, \widehat{\ell}_0, \ldots, \widehat{\ell}_{m-1}$ soient linéairement indépendantes (cf. Théorème 4). Vérifions qu'elles le sont. Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_m, \widehat{\lambda}_0, \ldots, \widehat{\lambda}_{m-1}$ des réels tels que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\lambda_0 \ell_0(P) + \ldots + \lambda_m \ell_m(P) + \widehat{\lambda}_0 \widehat{\ell}_0(P) + \ldots + \widehat{\lambda}_{m-1} \widehat{\ell}_{m-1}(P) = 0. \tag{2.24}$$

Nous allons montrer, par récurrence, que pour tout $0 \leq k \leq m-1$, $\lambda_k = \widehat{\lambda}_k = 0$.

Prenons dans 2.24, respectivement, $P = 1$ et $P = X^{2m}$. On obtient alors, en utilisant 2.21,

$$\lambda_0 + \widehat{\lambda}_0 = 0 \quad \text{et} \quad (2m!)\left(\lambda_0 - \widehat{\lambda}_0\right) = 0,$$

ce qui entraîne que $\lambda_0 = \widehat{\lambda_0} = 0.$. Supposons que $\lambda_r = \widehat{\lambda}_r = 0$, pour tout $0 \leq r \leq k-1$. En prenant dans 2.24, respectivement, $P = X^k$ et $P = X^{2m-k}$ et en utilisant l'hypothèse de récurrence et 2.21, on obtient

$$k!\left(\lambda_k + \widehat{\lambda}_k\right) = 0 \quad \text{et} \quad (2m-k)!\left(\lambda_k - \widehat{\lambda}_k\right) = 0,$$

ce qui entraîne que $\lambda_k = \widehat{\lambda_k} = 0$ et achève la preuve par récurrence. Ainsi 2.24 s'écrit $\lambda_m \ell_m(P) = 0$ ce qui entraîne que $\lambda_m = 0$. Nous avons montré que la famille $(\ell_0, \ldots, \ell_m, \widehat{\ell}_0, \ldots, \widehat{\ell}_{m-1})$ est libre et donc, en vertu du Théorème 4, 2.23 est une réduction de Gauss de q. En utilisant Théorème 5, on déduit que la signature de q est $(m+1, m)$, $\mathrm{rg} q = 2m+1 = d+1$ et que le noyau de q est donné par (*cf.* 2.13)

$$\ker q = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ \ell_0(P) = \ldots = \ell_m(P) = \widehat{\ell}_0(P) = \ldots = \widehat{\ell}_{m-1}(P) = 0\}.$$

Or, le système $\ell_0(P) = \ldots = \ell_m(P) = \widehat{\ell}_0(P) = \ldots = \widehat{\ell}_{m-1}(P) = 0$ est équivalent à $P(0) = P^{(1)}(0) = \ldots = P^{(2m)}(0) = 0$. En utilisant la formule de Taylor

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k, \tag{2.25}$$

on déduit que $\ker q$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n-d$ et que $(X^{d+1}, \ldots, X^n)$ est une base de $\ker q$.

(b) l'entier d est impaire, posons $d = 2m+1$. On procéde comme dans le cas paire. On a

$$\begin{aligned} q(P) &= \sum_{k=0}^{2m+1} C_{2m+1}^k P^{(k)}(0) P^{(2m+1-k)}(0) \\ &= 2\sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k P^{(k)}(0) P^{(2m+1-k)}(0) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k \left(P^{(k)}(0) + P^{(2m-k)}(0)\right)^2 \\ &\quad -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k \left(P^{(k)}(0) - P^{(2m-k)}(0)\right)^2. \end{aligned}$$

On considère les formes linéaires $\ell_0, \ldots, \ell_m, \widehat{\ell}_0, \ldots, \widehat{\ell}_m$ définies sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\begin{aligned} \ell_k(P) &= P^{(k)}(0) + P^{(2m+1-k)}(0), \ k = 0, \ldots, m, \\ \widehat{\ell}_k(P) &= P^{(k)}(0) - P^{(2m+1-k)}(0), \ k = 0, \ldots, m. \end{aligned} \tag{2.26}$$

On a alors

$$q(P) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m} C_k^{2m+1}\ell_k(P)^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{m} C_k^{2m+1}\widehat{\ell}_k(P)^2. \tag{2.27}$$

Comme dans le cas paire, on montre que cette expression est une réduction de Gauss de q et on déduit que la signature de q est $(m+1, m+1)$, $\mathrm{rg} q = 2m+2 = d+1$, $\ker q$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n-d$ et $(X^{d+1}, \ldots, X^n)$ est une base de $\ker q$.

Le tableau suivant résume tout ce qui précède.

Conditions sur d et n	Signature de q	Rang de q	$\ker q$
$d = 2m$ et $1 \leq d \leq n$	$(m+1, m)$	$d+1$	$Vect\{X^{d+1}, \ldots, X^n\}$
$d = 2m+1$ et $1 \leq d \leq n$	$(m+1, m+1)$	$d+1$	$Vect\{X^{d+1}, \ldots, X^n\}$

3. (a) D'après le tableau ci-dessus, $\mathrm{rg} q = d+1 = 2m+2 = \dim \mathbb{R}_{2m+1}[X]$ et donc q est non dégénérée. On considère la réduction de Gauss de q donnée par 2.27. D'après la Proposition 8, la base $\mathbb{B}_1 = (P_0, \ldots, P_m, \widehat{P}_0, \ldots, \widehat{P}_m)$ de $\mathbb{R}_{2m+1}[X]$ dont la base duale est

$$(\ell_0, \ldots, \ell_m, \widehat{\ell}_0, \ldots, \widehat{\ell}_m)$$

est une base q-orthogonale (ℓ_i et $\widehat{\ell}_i$ sont définies dans 2.26). Nous allons déterminer $\mathbb{B}_1$.

Pour tout $0 \leq i \leq m$, le polynôme P_i vérifie, en vertu de la dualité,

$$\ell_j(P_i) = \delta_{ij} \quad \text{et} \quad \widehat{\ell}_j(P_i) = 0 \quad \text{pour tout } j = 0, \ldots, m,$$

où δ_{ij} est le symbole de Chroneker valant 1 si $i = j$ et 0 sinon. On a donc, en vertu de 2.26, pour tout $j = 0, \ldots, m$,

$$\begin{cases} P_i^{(j)}(0) + P_i^{(2m+1-j)}(0) &= \delta_{ij} \\ P_i^{(j)}(0) - P_i^{(2m+1-j)}(0) &= 0 \end{cases}$$

On obtient donc, pour $j \neq i$, $P_i^{(j)}(0) = P_i^{(2m+1-j)}(0) = 0$ et $P_i^{(i)}(0) = P_i^{(2m+1-i)}(0) = \frac{1}{2}$. En utilisant la formule de Taylor 2.25, on obtient

$$P_i = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{i!}X^i + \frac{1}{(2m+1-i)!}X^{2m+1-i}\right).$$

Un calcul analogue donne

$$\widehat{P}_i = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{i!}X^i - \frac{1}{(2m+1-i)!}X^{2m+1-i}\right).$$

Maintenant, pour obtenir une base q-orthonormale, nous allons normaliser les P_i et les $\widehat{P}_i$. En vertu de 2.27, on a $q(P_i) = -q(\widehat{P}_i) = \frac{1}{2}C_{2m+1}^i$. On pose alors

$$\begin{aligned} P_i^+ &= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{C_{2m+1}^i}}\left(\frac{1}{i!}X^i + \frac{1}{(2m+1-i)!}X^{2m+1-i}\right), \\ \widehat{P}_i^- &= \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{C_{2m+1}^i}}\left(\frac{1}{i!}X^i - \frac{1}{(2m+1-i)!}X^{2m+1-i}\right). \end{aligned}$$

Finalement, $(P_0^+, \ldots, P_m^+, \widehat{P}_0^-, \ldots, \widehat{P}_m^-)$ est une base q-orthonormale de $\mathbb{R}_{2m+1}[X]$.

(b) Rappelons que la forme polaire de q est donnée par $S(P,Q) = (PQ)^{(2m+1)}(0)$. $P \in \mathcal{P}^\perp$ si et seulement si, pour tout $0 \leq j \leq m$, $S(X^{2j+1}, P) = 0$. Or,

$$\begin{aligned} S(X^{2j+1}, P) &= \left(X^{2j+1}P\right)^{(2m+1)}(0) \\ &= \sum_{k=0}^{2m+1} C_{2m+1}^k (X^{2j+1})^{(k)}(0) P^{(2m+1-k)}(0) \\ &\overset{2.21}{=} C_{2m+1}^{2j+1}(2j+1)! P^{(2(m-j))}(0). \end{aligned}$$

On déduit donc que $\mathcal{P}^\perp = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P^{(0)}(0) = P^{(2)}(0) = \ldots = P^{(2m)}(0) = 0\}$. En utilisant 2.25, on déduit que

$$\mathcal{P}^\perp = Vect\{X, X^3, \ldots, X^{2m+1}\} = \mathcal{P}$$

et donc $\mathcal{P}$ est totalement isotrope.

Exercice 13 *On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé de matrices symétriques (resp. antisymétriques). Soient*

$$q_1, q_2 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

définies en posant, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$q_1(M) = \mathrm{Tr}(M^2) \quad et \quad q_2(M) = \mathrm{Tr}(M^2) + (\mathrm{Tr}(M))^2.$$

1. *Montrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.*
2. *Montrer que q_1 et q_2 sont deux formes quadratiques sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*
3. *Pour $i = 1, 2$, montrer que la restriction de q_i à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) est définie-positive (resp. définie-négative).*
4. *Pour $i = 1, 2$, montrer que si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ alors M et N sont q_i-orthogonales.*
5. *Déduire de ce qui précéde la signature, le rang et le noyau de q_i pour $i = 1, 2$.*

Solution -

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a $M = M^+ + M^-$ où $M^+ = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $M^- = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$. Or ${}^tM^+ = \frac{1}{2}({}^tM + {}^t({}^tM)) = M^+$ et donc M^+ est symétrique et de la même manière on vérifie que M^- est antisymétrique. Ainsi $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Cette somme est directe car une matrice qui est à la fois symétrique et antisymétrique est nulle.
2. On considère S_1 et S_2 définies sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par
$$S_1(M, N) = \mathrm{Tr}(MN) \quad \text{et} \quad S_2(M, N) = \mathrm{Tr}(MN) + \mathrm{Tr}(M)\mathrm{Tr}(N).$$
On définit ainsi deux formes bilinéaires symétriques sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on a $q_i(M) = S_i(M, M)$ pour $i = 1, 2$; ceci montre que q_i est une forme quadratique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Soient $M = (M_{ij})_{1\le i,j\le n}$ et $N = (N_{ij})_{1\le i,j\le n}$. Les coefficients diagonaux de MN sont donnés par $a_{ii} = \sum_{j=1}^{n} M_{ij}N_{ji}$. On déduit que
$$\begin{aligned} S_1(M, N) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}N_{ji}, \\ S_2(M, N) &= \sum_{1\le i,j\le n} M_{ij}N_{ji} \\ &\quad +(M_{11} + \ldots + M_{nn})(N_{11} + \ldots + N_{nn}). \end{aligned} \tag{2.28}$$
Si M est symétrique alors $M_{ij} = M_{ji}$ pour tous i, j et donc
$$q_1(M) = 2 \sum_{1\le i<j\le n} M_{ij}^2 \quad \text{e} \quad q_2(M) = 2 \sum_{1\le i<j\le n} M_{ij}^2 + (M_{11} + \ldots + M_{nn})^2.$$

De ces expressions, on déduit que, pour toute matrice symétrique non nulle M, $q_i(M) > 0$. Ainsi la restriction de q_i à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est définie-positive.
Si M est antisymétrique alors $M_{ij} = -M_{ji}$ pour tous i, j et, en particulier, $M_{ii} = 0$. Donc

$$q_1(M) = q_2(M) = -2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} M_{ij}^2.$$

On déduit que, pour toute matrice antisymétrique non nulle M, $q_i(M) < 0$. Ainsi la restriction de q_i à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est définie-négative.

4. Pour tout $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et tout $N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{T}r(MN) &= \mathrm{T}r({}^t(MN)) = \mathrm{T}r({}^tN{}^tM) \\ &= -\mathrm{T}r(NM) = -\mathrm{T}r(MN), \end{aligned}$$

ce qui implique que $\mathrm{T}r(MN) = 0$. D'un autre côté, on a $\mathrm{T}r(N) = 0$, donc $S_1(M, N) = S_2(M, N) = 0$ et M et N sont q_i-orthogonales.

5. Noter que $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$.
D'après 3., la restriction de q_1 à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est définie-positive et, en vertu du Théorème 6, il existe une base q_1-orthogonale $(e_1, \ldots, e_{\frac{n(n+1)}{2}})$ de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $q_1(e_i) = 1$, pour tout $i = 1, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}$. Pour les mêmes raisons, il existe une base q_1-orthogonale $(f_1, \ldots, f_{\frac{n(n-1)}{2}})$ de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $q_1(f_i) = -1$, pour tout $i = 1, \ldots, \frac{n(n-1)}{2}$. Puisque

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}),$$

$(e_1, \ldots, e_{\frac{n(n+1)}{2}}, f_1, \ldots, f_{\frac{n(n-1)}{2}})$ est une base de $M_n(\mathbb{R})$ et elle est q_1-orthogonale puisque $(e_1, \ldots, e_{\frac{n(n+1)}{2}})$ et $(f_1, \ldots, f_{\frac{n(n-1)}{2}})$ le sont et, en vertu de 4., pour tout i, j, $S_1(e_i, f_j) = 0$. D'après le Théorème 5, q_1 est une forme quadratique non dégénérée de signature $(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2})$.
De la même manière, on montre que q_2 est une forme quadratique non dégénérée de signature $(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2})$.

Chapitre 3

Espaces préhilbertiens réels

3.1 Rappels de cours

Dans tout ce chapitre, V désigne un espace vectoriel réel.

3.1.1 Produit scalaire, norme préhilbertienne et inégalité de Cauchy-Schwarz

Rappelons (*cf.* Définition 11) qu'une forme bilinéaire symétrique B sur V est dite :

1. *positive* si sa forme quadratique est positive, c'est-à-dire que, $B(u,u) \geq 0$ pour tout $u \in V$,
2. *définie* si sa forme quadratique n'admet pas de vecteur isotrope, c'est-à-dire que $B(u,u) \neq 0$ pour tout $u \neq 0$.

Définition 13 *1. Un* produit scalaire *sur V est une forme bilinéaire symétrique définie positive.*

2. Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien réel.

3. Un espace préhilbertien réel de dimension finie est dit euclidien.

Remarques - Un espace euclidien est un espace vectoriel de dimension finie n muni d'une forme quadratique de signature $(n, 0)$.

Notations. On note en général $(u, v) \mapsto \langle u, v\rangle$ un produit scalaire et on pose $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$. L'application $u \mapsto \|u\|^2 = \langle u, u\rangle$ est la forme quadratique associée à $\langle\ ,\ \rangle$.

Si $\mathbb{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base d'un espace euclidien V alors la matrice de $\langle\ ,\ \rangle$ dans $\mathbb{B}$ est la matrice $M = (\langle e_i, e_j\rangle)_{1\leq i,j\leq n}$ et, pour tous $u, v \in V$, on a (*cf.* 2.1)

$$\langle u, v\rangle = (u_1, \ldots, u_n) M \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

où $(u_1, \ldots, u_n)$ et $(v_1, \ldots, v_n)$ sont les coordonnées respectives de u et v dans $\mathbb{B}$.

Exemples -

1. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de $\langle x, y\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ est un espace euclidien. Le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ ainsi défini est appelé *produit scalaire euclidien canonique* de $\mathbb{R}^n$. La matrice de ce produit scalaire dans la base canonique est la matrice identité I_n.
2. L'application $\langle\ ,\ \rangle : C([a, b], \mathbb{R}) \times C([a, b], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$
est un produit scalaire sur $C([a, b], \mathbb{R})$.
3. L'ensemble $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels telles que la série $\sum_n u_n^2$ converge est un espace vectoriel réel. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans cet espace, la série $\sum_n u_n v_n$ converge absolument, donc converge. Posons
$$\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n v_n.$$
On définit ainsi un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Il y a un produit scalaire canonique sur l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n.

Proposition 11 *L'application $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$\langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}({}^t M N)$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Notons que si $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $N = (n_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ alors

$$\langle M, N\rangle = \sum_{1\leq i,j\leq n} m_{ij} n_{ij}. \tag{3.2}$$

Proposition 12 *Soit V un espace préhilbertien réel. Alors l'application $u \mapsto \|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ est une* norme *sur V, c'est-à-dire que, elle vérifie les propriétés suivantes :*

1. *$\|u\| = 0$ si et seulement si $u = 0$,*

2. *pour tout* $u \in V$ *et tout* $a \in \mathbb{R}$, $\|au\| = |a|\|u\|$,
3. *pour tous* $u, v \in V$,

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|. \quad \textbf{(Inégalité de Minkowski).}$$

Cette norme est appelée norme préhilbertienne ou euclidienne.

On associe naturellement à une norme une distance.

Proposition 13 *Soit* V *un espace préhilbertien réel. Alors l'application* $u \mapsto d(u, v) = \|u - v\|$ *est une* distance *sur* V*, c'est-à-dire que, elle vérifie les propriétés suivantes :*

1. $d(u, v) = 0$ *si et seulement si* $u = v$,
2. *pour tous* $u, v \in V$, $d(u, v) = d(v, u)$,
3. *pour tous* $u, v, w \in V$,

$$d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v). \quad \textbf{(Inégalité triangulaire).}$$

Cette distance est appelée distance préhilbertienne ou euclidienne.

Les identités remarquables suivantes sont valables dans un espace préhilbertien et elles sont faciles à vérifier :

1. Pour tous $u, v \in V$,

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2.$$

2. *Identités de polarisation* (*cf.* 2.3) : Pour tous $u, v \in V$,

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right).$$

3. *Identité du parallélogramme* : Pour tous $u, v \in V$,

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right).$$

Remarques - L'identité du parallélogramme affirme que la somme des carrés des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs de ses diagonales.

Théorème 7 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Soit* V *un espace préhilbertien réel. Alors pour tous* $u, v \in V$ *on a*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|,$$

l'égalité étant réalisée si et seulement si u *et* v *sont liés.*

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous dit que pour tous vecteurs u, v non nuls dans V, on a

$$-1 \leq \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|} \leq 1,$$

ce qui implique qu'il existe un unique θ dans $[0, \pi]$ tel que

$$\langle u, v\rangle = \cos(\theta)\|u\|\|v\|. \tag{3.3}$$

Le réel θ est la mesure dans $[0, \pi]$ de l'angle géométrique que font les vecteurs u et v dans $V \setminus \{0\}$.

Pour $\theta = 0$ ou π, on a $\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\|$, ce qui équivaut à dire que les vecteurs u et v sont liés. Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a $\langle u, v\rangle = 0$, c'est-à-dire que, que les vecteurs u et v sont *orthogonaux*.

Théorème 8 (Pythagore) *Les vecteurs u et v sont orthogonaux dans V si et seulement si*

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

3.1.2 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Définition 14
1. *Un vecteur u dans un espace préhilibertien réel est dit* unitaire *si* $\|u\| = 1$.
2. *Une famille $(v_i)_{i\in I}$ de vecteurs dans un espace préhilbertien réel V est dite* orthogonale *si, pour tous $i, j \in I$ avec $i \neq j$, on a $\langle v_i, v_j\rangle = 0$. Si, en plus, pour tout $i \in I$, v_i est unitaire, on dira que la famille est* orthonormale.

Proposition 14
1. *Dans un espace préhilbertien réel, toute famille orthogonale de vecteurs tous non nuls est libre.*
2. *Si $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille orthogonale dans un espace préhilbertien réel V alors*

$$\|u_1 + \ldots + u_p\|^2 = \|u_1\|^2 + \ldots + \|u_p\|^2.$$

Proposition 15 *Soit V un espace euclidien de dimension n et $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs dans V. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de V.*
2. *$(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille orthonormale de V.*

Les bases orthonormales dans un espace vectoriel euclidien V jouent un rôle central. Elles facilitent énormément les calculs.

Proposition 16 *Soit V un espace euclidien de dimension n, et soit $\mathbb{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de V. Alors, pour tous $u, v \in V$,*

$$u = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, u\rangle e_k, \quad \|u\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\langle e_k, u\rangle|^2 \quad et \quad \langle u, v\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, u\rangle\langle e_k, v\rangle.$$

Nous allons maintenant décrire deux moyens de construire des bases orthonormales dans un espace euclidien.

Soit V un espace euclidien de dimension n. Du fait que la signature de la forme quadratique associée à $\langle\ ,\ \rangle$ est $(n, 0)$ et, en vertu du Théorème 5, on a une réduction de Gauss de la forme

$$\langle u, u\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \ell_i(u)^2,$$

où $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ est une base de V^* et $(a_1, \ldots, a_n)$ une famille de réels tous strictement positifs. La proposition suivante est une reformulation de la Proposition 8.

Proposition 17 *Avec les hypothèses et les notations ci-dessus, la base* $(e_1, \ldots, e_n)$ *de* V *vérifiant* $\ell_i(e_j) = 0$ *si* $i \neq j$ *et* $\ell_i(e_i) = \frac{1}{\sqrt{a_i}}$, *pour tous* $i, j = 1, \ldots, n$, *est une base orthonormale de* V.

Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt est un autre moyen de construire des bases orthonormales que nous allons décrire maintenant.

Théorème 9 (Orthonormalisation de Gram-Schmidt) *Soit* V *un espace préhilbertien réel. Pour toute famille libre* $(v_1, \ldots, v_p)$ *de* V, *il existe une unique famille orthonormale* $(e_1, \ldots, e_p)$ *telle que, pour tout* $k = 1, \ldots, p$,

$$Vect\{e_1, \ldots, e_k\} = Vect\{v_1, \ldots, v_k\} \quad et \quad \langle e_k, v_k\rangle > 0.$$

La construction de la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ peut se faire en utilisant l'algorithme suivant. Tout d'abord, on construit la famille orthogonale $(f_1, \ldots, f_p)$ de la manière suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_1 &=& v_1 \\ f_k &=& v_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle f_j, v_k\rangle}{\|f_j\|^2} f_j,\ (k = 2, \ldots, p), \end{array}\right. \tag{3.4}$$

puis on pose $e_k = \frac{1}{\|f_k\|} f_k$, pour tout $1 \leq k \leq p$.

Le résultat suivant est une conséquence du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt et du théorème de la base incomplète.

Proposition 18 *Soit* $(e_1, \ldots, e_p)$ *une famille orthonormale dans un espace eucldien* V *de dimension* n. *Alors il existe* $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ *tels que* $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ *soit une base orthonormale de* V.

Exemples -

1. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$. Nous allons construire la base orthonormalisée selon le procédé de Gram-Schmidt de la base canonique $(1, X, X^2)$. On considère la famille orthogonale (P_1, P_2, P_3) donnée par 3.4 :

$$\begin{aligned}
P_1 &= 1; \qquad \|P_1\|^2 = \int_0^1 dt = 1,\\
P_2 &= X - \frac{\langle X, P_1\rangle}{\|P_1\|^2}P_1 = X - \left(\int_0^1 tdt\right)P_1 = X - \frac{1}{2},\\
\|P_2\|^2 &= \int_0^1 (t-\frac{1}{2})^2 dt = \frac{1}{12},\\
P_3 &= X^2 - \frac{\langle X^2, P_1\rangle}{\|P_1\|^2}P_1 - \frac{\langle X^2, P_2\rangle}{\|P_2\|^2}P_2\\
&= X^2 - \int_0^1 t^2 dt - 12\left(\int_0^1 (t^3 - \frac{1}{2}t^2)dt\right)(X - \frac{1}{2})\\
&= X^2 - X + \frac{1}{6},\\
\|P_3\|^2 &= \int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{6})^2 dt = \frac{1}{180}.
\end{aligned}$$

Finalement, $\left(1, 2\sqrt{3}(X-\frac{1}{2}), 6\sqrt{5}(X^2 - X + \frac{1}{6})\right)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Soient $a < b$ deux réels, éventuellement a ou b infini, et $\rho :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue, $\rho^{-1}(0)$ est d'intérieur vide et l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \rho(t)dt$ converge. Le produit

$$\langle P, Q\rangle_\rho = \int_a^b \rho(t)P(t)Q(t)dt$$

est une produit scalaire sur l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels $\mathbb{R}[X]$. La famille $\left(X^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ étant libre dans $\mathbb{R}[X]$, d'après le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt décrit dans 3.4, il existe une famille de polynômes $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tels que

$$\deg(Q_k) = k \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall i \neq j, \quad \langle Q_i, Q_j\rangle_\rho = 0.$$

Ces polynômes sont connus sous le nom de *polynômes orthogonaux* associés à l'intervalle $I =]a, b[$ et à la fonction ρ. Voici quelques exemples classiques de polynômes orthogonaux :

   (a) Les *polynômes de Legendre* $(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$ associés à $I =]-1, 1[$ et $\rho = 1$ et normalisés par la condition $L_k(1) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

   (b) Les *polynômes de Tchebychev* associés à $I =]-1, 1[$ et $\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. .

   (c) Les *polynômes d'Hermite* associés à $I =]-\infty, +\infty[$ et $\rho(t) = e^{-t^2}$. .

   (d) Les *polynômes de Laguerre* associés à $I = [0, +\infty[$ et $\rho(t) = t^\alpha e^{-t}$ $(\alpha \in \mathbb{N})$. .

Soit V un espace préhilbertien. *L'orthogonal* d'un sous-espace vectoriel F de V est l'ensemble $F^\perp = \{u \in V; \langle u, v\rangle = 0 \quad \forall v \in F\}$. $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de V et on a, d'une manière simple,

$$F \subset F^{\perp\perp} \quad \text{et} \quad F \cap F^\perp = \{0\}.$$

Remarques - Dans un espace préhilbertien quelconque V, il n'est pas vrai en général que $V = F \oplus F^\perp$. De même, on n'a pas forcément $F = F^{\perp\perp}$. Cependant ses résultats sont vrais si V est euclidien.

Proposition 19 *Soit V un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de V. Alors*

$$V = F \oplus F^\perp \quad \textit{et} \quad F = F^{\perp\perp}.$$

3.1.3 Meilleure approximation et projection orthogonale dans un espace préhilbertien réel

Définition 15 *Soient V un espace préhilbertien, $\mathcal{A}$ une partie non vide de V et u un vecteur de V. On appelle* distance de u à $\mathcal{A}$*, notée $d(u, \mathcal{A})$, le réel $d(u, \mathcal{A}) = \inf\limits_{u \in \mathcal{A}} d(u, v)$ où $d(u, v) = \|u - v\|$.*

Remarques - Le réel $d(u, \mathcal{A})$ existe comme borne inférieure d'une partie non vide minorée. En général, cette borne inférieure n'est pas atteinte, c'est-à-dire que, qu'il n'existe pas toujours un $v \in \mathcal{A}$ tel que $d(u, \mathcal{A}) = d(u, v)$.

Théorème 10 *Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace préhilbertien V. Alors, pour tout $u \in V$, il existe un unique vecteur $v_0 \in F$ tel que $d(u, F) = d(u, v_0)$. Ce vecteur est l'unique vecteur appartenant à F tel que $u - v_0 \in F^\perp$ et si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormale de F alors*

$$v_0 = \sum_{i=1}^{p} \langle e_i, u\rangle e_i.$$

Définition 16 *Si $u \in V$, alors le vecteur v_0 défini dans le théorème précédent est la* meilleurs approximation *de u dans F. En considérant la caractérisation géométrique $u - v_0 \in F^\perp$, on dit aussi que v_0 est la* projection orthogonale *de u sur F. On note $v_0 = \mathbf{p}_F(u)$.*

Proposition 20 *Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace préhilbertien V. La projection orthogonale $\mathbf{p}_F : V \longrightarrow F$ est une application linéaire et, pour tout $u \in F$ et tout $v \in F^\perp$, $\mathbf{p}_F(u) = u$ et $\mathbf{p}_F(v) = 0$.*

Théorème 11 *Soit V un espace préhilbertien réel et soit $(e_k)_{k\in I}$ une famille orthonormale de V. Alors, pour tout $u \in V$ et pour toute famille finie J de I, on a*

$$\sum_{j\in J} |\langle e_j, u\rangle|^2 \leq \|u\|^2 \quad \textbf{(Inégalité de Bessel)},$$

et la projection orthogonale de u sur $Vect(e_j)_{j\in J}$ est $\displaystyle\sum_{j\in J} \langle e_j, u\rangle e_j$.

3.2 Exercices

Exercice 14 1. *Montrer que* $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ *défini par*

$$\langle (x_1, \ldots, x_4), (y_1, \ldots, y_4) \rangle = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (x_i y_j + x_j y_i)$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^4$.

2. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Montrer que* $\langle\ ,\ \rangle_n : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ *défini par*

$$\langle P, Q \rangle_n = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0) Q^{(k)}(0) + \int_{-1}^{1} P^{(n+1)}(t) Q^{(n+1)}(t) dt$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ ($\mathbb{R}[X]$ *est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et* $P^{(k)}$ *désigne la dérivée d'ordre* k *de* P).

Solution -

1. Pour tous $x, x', y \in \mathbb{R}^4$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\langle x + ax', y \rangle &= \sum_{i=1}^{4} (x_i + ax'_i) y_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq 4} ((x_i + ax'_i) y_j + (x_j + ax'_j) y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{4} x_i y_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (x_i y_j + x_j y_i) \\
&\quad + a \left(\sum_{i=1}^{4} x'_i y_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (x'_i y_j + x'_j y_i) \right) \\
&= \langle x, y \rangle + a \langle x', y \rangle,
\end{aligned}$$

et donc $\langle\ ,\ \rangle$ est linéaire à gauche. En plus, $\langle\ ,\ \rangle$ est symétrique et donc $\langle\ ,\ \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^4$. Nous allons montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est définie-positive. Pour cela, effectuons une réduction de Gauss (cf. Théorème 4) de la forme quadratique q associé à $\langle\ ,\ \rangle$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^4$,

$$
\begin{aligned}
q(x) &= \sum_{i=1}^{4} x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le 4} x_i x_j \\
&= x_1^2 + x_1(x_2+x_3+x_4) + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\
&= (x_1 + \frac{1}{2}(x_2+x_3+x_4))^2 - \frac{1}{4}(x_2+x_3+x_4)^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_2x_3 \\
&\quad + x_2x_4 + x_3x_4 \\
&= (x_1 + \frac{1}{2}(x_2+x_3+x_4))^2 + \frac{3}{4}(x_2^2+x_3^2+x_4^2) + \frac{1}{2}(x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4) \\
&= (x_1 + \frac{1}{2}(x_2+x_3+x_4))^2 + \frac{3}{4}(x_2^2 + \frac{2}{3}x_2(x_3+x_4)) + \frac{3}{4}(x_3^2+x_4^2) + \frac{1}{2}x_3x_4 \\
&= (x_1 + \frac{1}{2}(x_2+x_3+x_4))^2 + \frac{3}{4}(x_2 + \frac{1}{3}(x_3+x_4))^2 - \frac{1}{12}(x_3+x_4)^2 \\
&\quad + \frac{3}{4}(x_3^2+x_4^2) + \frac{1}{2}x_3x_4 \\
&= (x_1 + \frac{1}{2}(x_2+x_3+x_4))^2 + \frac{3}{4}(x_2 + \frac{1}{3}(x_3+x_4))^2 + \frac{2}{3}(x_3^2+x_4^2) + \frac{1}{3}x_3x_4 \\
&= (x_1 + \frac{1}{2}(x_2+x_3+x_4))^2 + \frac{3}{4}(x_2 + \frac{1}{3}(x_3+x_4))^2 + \frac{2}{3}(x_3^2 + \frac{1}{2}x_3x_4) + \frac{2}{3}x_4^2 \\
&= (x_1 + \frac{1}{2}(x_2+x_3+x_4))^2 + \frac{3}{4}(x_2 + \frac{1}{3}(x_3+x_4))^2 + \frac{2}{3}(x_3 + \frac{1}{4}x_4)^2 + \frac{2}{3}x_4^2 \\
&\quad - \frac{1}{24}x_4^2 \\
&= (x_1 + \frac{1}{2}(x_2+x_3+x_4))^2 + \frac{3}{4}(x_2 + \frac{1}{3}(x_3+x_4))^2 + \frac{2}{3}(x_3 + \frac{1}{4}x_4)^2 + \frac{5}{8}x_4^2.
\end{aligned}
$$

De cette expression, on déduit que $q(x) \geq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^4$, et

$$
q(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccc} x_1 + \frac{1}{2}(x_2+x_3+x_4) & = & 0 \\ x_2 + \frac{1}{3}(x_3+x_4) & = & 0 \\ x_3 + \frac{1}{4}x_4 & = & 0 \\ x_4 & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0,
$$

ce qui montre que q est définie-positive, et achève de montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^4$.

2. Pour tous $P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}[X]$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\langle P_1 + aP_2, Q\rangle_n &= \sum_{k=0}^{n}(P_1 + aP_2)^{(k)}(0)Q^{(k)}(0) + \int_{-1}^{1}(P_1 + aP_2)^{(n+1)}(t)Q^{(n+1)}(t)dt \\
&= \sum_{k=0}^{n}(P_1^{(k)}(0) + aP_2^{(k)}(0))Q^{(k)}(0) \\
&\quad + \int_{-1}^{1}(P_1^{(n+1)}(t) + aP_2^{(n+1)}(t))Q^{(n+1)}(t)dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} P_1^{(k)}(0)Q^{(k)}(0) + \int_{-1}^{1} P_1^{(n+1)}(t)Q^{(n+1)}(t)dt \\
&\quad + a\left(\sum_{k=0}^{n} P_2^{(k)}(0)Q^{(k)}(0) + \int_{-1}^{1} P_2^{(n+1)}(t)Q^{(n+1)}(t)dt\right) \\
&= \langle P_1, Q\rangle_n + a\langle P_2, Q\rangle_n
\end{aligned}$$

et donc $\langle\ ,\ \rangle_n$ est linéaire à gauche. En plus, il est symétrique et donc c'est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}[X]$. D'un autre côté, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a

$$\langle P, P\rangle_n = \sum_{k=0}^{n}\left(P^{(k)}(0)\right)^2 + \int_{-1}^{1}\left(P^{(n+1)}(t)\right)^2 dt.$$

Puisque $\int_{-1}^{1}\left(P^{(n+1)}(t)\right)^2 dt \geq 0$ et tous les autres termes de la somme sont des carrées de nombres réels, $\langle P, P\rangle_n \geq 0$ et $\langle\ ,\ \rangle_n$ est positif. En outre

$$\langle P, P\rangle_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(0) = P'(0) = \ldots = P^{(n)}(0) = 0 \text{ et } \int_{-1}^{1}\left(P^{(n+1)}(t)\right)^2 dt = 0.$$

L'intégrale d'une fonction continue et positive est nulle si et seulement si cette fonction est nulle, il résulte que

$$\langle P, P\rangle_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(0) = P'(0) = \ldots = P^{(n)}(0) = 0 \text{ et } \ \forall t \in \mathbb{R},\ P^{(n+1)}(t) = 0.$$

En particulier, $\langle P, P\rangle_n = 0$ entraîne $P^{(k)}(0) = 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Maintenant, grâce à la formule de Taylor, P s'écrit

$$P = \sum_{j=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(j)}(0)}{j!}X^j,$$

et donc $\langle P, P\rangle_n = 0$ équivaut à $P = 0$, ceci montre que $\langle\ ,\ \rangle_n$ est défini. Finalement, $\langle\ ,\ \rangle_n$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 15 *En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer les inégalités suivantes et discuter quand l'égalité a lieu :*

1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \leq n\sqrt{\frac{n+1}{2}}$.
2. *Pour tout* $q \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1-q^{\frac{n}{2}}}{1-\sqrt{q}} \leq \sqrt{n}\sqrt{\dfrac{1-q^n}{1-q}}$.
3. *Pour* $(a_1, \ldots, a_n)$ *et* $(b_1, \ldots, b_n)$ *des réels strictement positifs tels que* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i = 1$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i} \geq 1$.
4. *Pour tout* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{Tr}(M)^2 \leq n\mathrm{Tr}({}^tMM)$.

Solution -

Dans 1.,2., et 3., $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ défini par $\langle x, y\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

1. On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \langle u, v\rangle$, avec $u = (1, \ldots, 1)$ et $v = (1, \sqrt{2}, \ldots, \sqrt{n})$.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (cf. Théorème 7), on a
$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = |\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|. \tag{3.5}$$
Or,
$$\begin{aligned} \|u\| &= \sqrt{1+\ldots+1} = \sqrt{n}, \\ \|v\| &= \sqrt{1+(\sqrt{2})^2+\ldots+(\sqrt{n})^2} = \sqrt{1+2+\ldots+n} = \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}. \end{aligned}$$
En remplaçant dans 3.5, on déduit l'inégalité souhaitée.
En vertu du Théorème 7, l'égalité dans 3.5 a lieu si et seulement si les vecteurs u et v sont liés, c'est-à-dire, il existe un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que
$$(1, \sqrt{2}, \ldots, \sqrt{n}) = a(1, \ldots, 1) = (a, \ldots, a).$$
Ceci équivaut à $n = 1$.
2. On a $\dfrac{1-q^{\frac{n}{2}}}{1-\sqrt{q}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (\sqrt{q})^k = \langle u, v\rangle$ avec $u = (1, \ldots, 1)$ et $v = (1, \sqrt{q}, \ldots, (\sqrt{q})^{n-1})$.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (cf. Théorème 7), on a
$$\frac{1-q^{\frac{n}{2}}}{1-\sqrt{q}} = |\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|. \tag{3.6}$$

Or,

$$\begin{aligned}\|u\| &= \sqrt{1+\ldots+1} = \sqrt{n},\\ \|v\| &= \sqrt{1+(\sqrt{q})^2+\ldots+(\sqrt{q})^{2(n-1)}} = \sqrt{1+q+\ldots+q^{n-1}} = \sqrt{\frac{1-q^n}{1-q}}.\end{aligned}$$

En remplaçant dans 3.6, on déduit l'inégalité souhaitée.
En vertu du Théorème 7, l'égalité dans 3.6 a lieu si et seulement si les vecteurs u et v sont liés, c'est-à-dire, il existe un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$(1, \sqrt{q}, \ldots, (\sqrt{q})^{n-1}) = a(1, \ldots, 1) = (a, \ldots, a).$$

Ceci équivaut à $q = 1$. Ainsi l'inégalité dans 3.6 est stricte.

3. On a
$$1 = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{b_i}}\sqrt{b_i} = \langle u, v\rangle,$$
avec $u = (\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}, \ldots, \frac{a_n}{\sqrt{b_n}})$ et $v = (\sqrt{b_1}, \ldots, \sqrt{b_n})$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (cf. Théorème 7), on a
$$1 = |\langle u, v\rangle|^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2. \tag{3.7}$$
Or,
$$\begin{aligned}\|u\|^2 &= \left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{a_n}{\sqrt{b_n}}\right)^2 = \sum_{i=1} \frac{a_i^2}{b_i},\\ \|v\|^2 &= \left(\sqrt{b_1}\right)^2 + \ldots + \left(\sqrt{b_n}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i = 1.\end{aligned}$$
En remplaçant dans 3.7, on déduit l'inégalité souhaitée.
En vertu du Théorème 7, l'égalité dans 3.7 a lieu si et seulement si les vecteurs u et v sont liés, c'est-à-dire, il existe un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que
$$(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}, \ldots, \frac{a_n}{\sqrt{b_n}}) = a(\sqrt{b_1}, \ldots, \sqrt{b_n}).$$
Ceci équivaut à $\frac{a_i}{b_i} = a$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Les conditions $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i = 1$ entraînent que $a = 1$. Ainsi, l'égalité a lieu si et seulement si $a_i = b_i$ pour $i = 1, \ldots, n$.

4. Notons $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}({}^tMN)$. On a $\mathrm{Tr}(M)^2 = \mathrm{Tr}(I_nM)^2 = \langle I_n, M\rangle^2$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (cf. Théorème 7), on a
$$\mathrm{Tr}(M)^2 = |\langle I_n, M\rangle|^2 \leq \|I_n\|^2\|M\|^2. \tag{3.8}$$

Or, $\|I_n\|^2 = \mathrm{T}r({}^tI_nI_n) = \mathrm{T}r(I_n) = n$ et $\|M\|^2 = \mathrm{T}r({}^tMM)$. En remplaçant dans 3.7, on déduit l'inégalité souhaitée.

En vertu de Théorème 7, l'égalité dans 3.8 a lieu si et seulement si il existe un réel $a \in \mathbb{R}$ tel que $M = aI_n$.

Exercice 16 *Soient $f, g \in C([a,b],\mathbb{R})$ deux fonctions strictement positives.*

1. *Montrer que, pour tous $p, q \in \mathbb{N}^*$,*

$$\left(\int_a^b g(t)dt\right)^2 \leq \int_a^b (f(t))^{\frac{p}{q}} g(t)dt \times \int_a^b (f(t))^{-\frac{p}{q}} g(t)dt,$$

et déterminer dans quels cas l'égalité a lieu.

2. *En déduire que*

$$\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2 \leq \int_a^b (f(t))^{\frac{p+q}{q}} dt \times \int_a^b (f(t))^{\frac{q-p}{q}} dt.$$

Solution -

1. Montrons, d'abord, que le produit $\langle\ ,\ \rangle_g$ défini par $\langle h_1, h_2\rangle_g = \displaystyle\int_a^b h_1(t)h_2(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur $C([a,b],\mathbb{R})$. En effet, pour tous $h_1, h_2, h \in C([a,b],\mathbb{R})$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\langle h_1 + ah_2, h\rangle_g &= \int_a^b (h_1(t) + ah_2(t))h(t)g(t)dt \\
&= \int_a^b h_1(t)h(t)g(t)dt + a\int_a^b h_2(t)h(t)g(t)dt \\
&= \langle h_1, h\rangle_g + a\langle h_2, h\rangle_g,
\end{aligned}$$

et donc $\langle\ ,\ \rangle_g$ est linéaire à gauche. Puisque il est symétrique, $\langle\ ,\ \rangle_s$ est une forme bilinéaire symétrique sur $C([a,b],\mathbb{R})$. D'un autre côté, pour tout $h \in C([a,b],\mathbb{R})$, $\langle h, h\rangle_g = \displaystyle\int_a^b h^2(t)g(t)dt \geq 0$ et $\langle\ ,\ \rangle_g$ est positive. Maintenant, $\langle h, h\rangle_g = 0$ équivaut à $\displaystyle\int_a^b h^2(t)g(t)dt = 0$. Or, l'intégrale d'une fonction continue et positive est nulle si et seulement si cette fonction est nulle, et puisque $g > 0$, on déduit que $\langle h, h\rangle_g = 0$ équivaut à $h = 0$ et donc $\langle\ ,\ \rangle_g$ est définie, ce qui achève de montrer que c'est un produit scalaire.

On peut maintenant montrer l'inégalité ci-dessus. On a

$$\int_a^b g(t)dt = \int_a^b (f(t))^{\frac{p}{2q}} (f(t))^{-\frac{p}{2q}} g(t)dt = \langle f^{\frac{p}{2q}}, f^{-\frac{p}{2q}} \rangle_g.$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (cf. Théorème 7), on a

$$\left(\int_a^b g(t)dt\right)^2 = \langle f^{\frac{p}{2q}}, f^{-\frac{p}{2q}} \rangle_g^2 \leq \|f^{\frac{p}{2q}}\|_g^2 \|f^{-\frac{p}{2q}}\|_g^2. \tag{3.9}$$

Or, $\|f^{\frac{p}{2q}}\|_g^2 = \int_a^b (f(t))^{\frac{p}{q}} g(t)dt$ et $\|f^{-\frac{p}{2q}}\|_g^2 = \int_a^b (f(t))^{-\frac{p}{q}} g(t)dt$, et en remplaçant dans 3.9, on obtient l'inégalité désirée.
En vertu du Théorème 7, l'égalité a lieu si et seulement si $f^{\frac{p}{2q}}$ et $f^{-\frac{p}{2q}}$ son liés, c'est-à-dire, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f^{\frac{p}{2q}} = af^{-\frac{p}{2q}}$, soit $f^{\frac{p}{q}} = a$, ce qui équivaut à f constante.

2. On prend $f = g$ dans l'inégalité précédente.

Exercice 17 *Soit V un espace préhilbertien réel. Une famille $(u_1, \ldots, u_p)$ est dite* **obtuangle** *si, pour tout $i \neq j$, $\langle u_i, u_j \rangle < 0$.*

1. *Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille obtuangle. Montrer que, pour toute famille $(a_1, \ldots, a_p)$ de réels, on a*

$$\left\|\sum_{i=1}^p |a_i| u_i\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^p a_i u_i\right\|. \tag{3.10}$$

2. *Montrer que, dans un espace euclidien de dimension n, toute famille obtuangle contient au plus $n+1$ vecteurs.*

Solution -

1. On a

$$\begin{aligned}
\left\|\sum_{i=1}^p |a_i| u_i\right\|^2 &= \left\langle \sum_{i=1}^p |a_i| u_i, \sum_{i=1}^p |a_i| u_i \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^p |a_i|^2 \|u_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} |a_i||a_j| \langle u_i, u_j \rangle, \\
\left\|\sum_{i=1}^p a_i u_i\right\|^2 &= \sum_{i=1}^p a_i^2 \|u_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq p} a_i a_j \langle u_i, u_j \rangle.
\end{aligned}$$

On déduit alors que

$$\left\|\sum_{i=1}^{p}|a_i|u_i\right\|^2-\left\|\sum_{i=1}^{p}a_iu_i\right\|^2=2\sum_{1\leq i<j\leq p}(|a_i||a_j|-a_ia_j)\langle u_i,u_j\rangle.$$

Or, pour tout $1\leq i<j\leq p$, $|a_i||a_j|-a_ia_j\geq 0$ et $\langle u_i,u_j\rangle\leq 0$, on déduit donc

$$\left\|\sum_{i=1}^{p}|a_i|u_i\right\|^2-\left\|\sum_{i=1}^{p}a_iu_i\right\|^2\leq 0,$$

ce qui établit 3.10.

2. Nous allons raisonner par absurde. Supposons que, dans un espace euclidien V de dimension n, il existe une famille obtuangle $(u_1,\ldots,u_{n+2})$. Nous allons montrer que la famille $(u_1,\ldots,u_{n+1})$ est libre ce qui contredit le fait que, dans un espace vectoriel de dimension n, toute famille contenant plus de n vecteurs est liée.

   Soient $a_1,\ldots,a_{n+1}$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1}a_iu_i=0$. En vertu de 3.10, on déduit que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1}|a_i|u_i=0$. En multipliant cette relation par u_{n+2}, on obtient $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1}|a_i|\langle u_i,u_{n+2}\rangle=0$. Or, pour tout $i=1,\ldots,n+1$, $\langle u_i,u_{n+2}\rangle<0$. On déduit donc que, pour tout $i=1,\ldots,n+1$, $|a_i|=0$. Ainsi la famille $(u_1,\ldots,u_{n+1})$ est libre. Ceci achève la preuve par absurde et établit la propriété souhaitée.

Exercice 18 *On se place dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire (cf. Exercice 14)*

$$\langle(x_1,\ldots,x_4),(y_1,\ldots,y_4)\rangle=\sum_{i=1}^{4}x_iy_i+\frac{1}{2}\sum_{1\leq i<j\leq 4}(x_iy_j+x_jy_i).$$

On note $\mathbb{B}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On considère le plan vectoriel $P=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4,\ x_1+x_2=x_3+x_4=0\}$ et on note **p** *la projection orthogonale sur P.*

1. *Ecrire la matrice de $\langle\ ,\ \rangle$ dans la base $\mathbb{B}$.*
2. *Par le procédé de Gram-Schmidt donner la base $\mathbb{B}_1=(e_1',e_2',e_3',e_4')$ de $\mathbb{R}^4$ orthonormalisée de la base $\mathbb{B}$.*
3. *Déterminer l'orthogonale de P.*
4. *Donner la matrice de* **p** *dans $\mathbb{B}$.*

5. *Montrer que* $\mathbf{p}$ *est diagonalisable et donner une base orthonormée de* $\mathbb{R}^4$ *formée de vecteurs propres de* $\mathbf{p}$.
6. *Calculer la distance d'un vecteur* $u \in \mathbb{R}^4$ *à* P.

Solution -

1. La matrice de $\langle\ ,\ \rangle$ dans la base $\mathbb{B}$ est la matrice $M = (\langle e_i, e_j\rangle)_{1\leq i,j\leq 4}$. Ainsi $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. En vertu de 3.1, on a
$$\langle x, y\rangle = (x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}. \qquad (3.11)$$

2. On commence par construire une base orthogonale en utilisant la formule 3.4. Notons (f_1, f_2, f_3, f_4) cette base. On a
$$\begin{aligned}
f_1 &= e_1 = (1,0,0,0), \quad \|f_1\|^2 = 1, \\
f_2 &= e_2 - \frac{\langle e_2, f_1\rangle}{\|f_1\|^2} f_1 = e_2 - \frac{1}{2}e_1, \\
\|f_2\|^2 &= \| -\frac{1}{2}e_1 + e_2\|^2 = \frac{1}{4}\|e_1\|^2 - \langle e_1, e_2\rangle + \|e_2\|^2 = \frac{3}{4}, \\
\langle e_3, f_2\rangle &= \langle e_3, e_2\rangle - \frac{1}{2}\langle e_3, e_1\rangle = \frac{1}{4}, \\
f_3 &= e_3 - \frac{\langle e_3, f_1\rangle}{\|f_1\|^2} f_1 - \frac{\langle e_3, f_2\rangle}{\|f_2\|^2} f_2 = e_3 - \frac{1}{2}f_1 - \frac{1}{3}f_2 = -\frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 + e_3, \\
\|f_3\|^2 &= \frac{2}{3},\ \langle e_4, f_1\rangle = \frac{1}{2},\ \langle e_4, f_2\rangle = \frac{1}{4},\ \langle e_4, f_1\rangle = \frac{1}{6}, \\
f_4 &= e_4 - \frac{\langle e_4, f_1\rangle}{\|f_1\|^2} f_1 - \frac{\langle e_4, f_2\rangle}{\|f_2\|^2} f_2 - \frac{\langle e_4, f_3\rangle}{\|f_3\|^2} f_3 \\
&= e_4 - \frac{1}{2}f_1 - \frac{1}{3}f_2 - \frac{1}{4}f_3 = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, 1), \\
\|f_4\|^2 &= \tfrac{5}{8}.
\end{aligned}$$

Finalement, la base orthonoormalisée de la base $\mathbb{B}$ est donnée par
$$\mathbb{B}_1 = \Big((1,0,0,0), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, 0), (-\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 0), (-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}})\Big).$$

3. Remarquons que P est le plan vectoriel engendré par les deux vecteurs $(1,-1,0,0)$ et $(0,0,1,-1)$, et donc $(x,y,z,t) \in P^{\perp}$ si et seulement si

$$\langle (x,y,z,t),(1,-1,0,0)\rangle = \langle (x,y,z,t),(0,0,1,-1)\rangle = 0.$$

Or, en vertu de 3.11, on a

$$\begin{aligned}
\langle (x,y,z,t),(1,-1,0,0)\rangle &= (x,y,z,t)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= (x,y,z,t)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}(x-y), \\
\langle (x,y,z,t),(0,0,1,-1)\rangle &= (x,y,z,t)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= (x,y,z,t)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}(z-t).
\end{aligned}$$

Finalement, $P^{\perp} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x = y \quad \text{et} \quad z = t\}$.

4. En vertu du Théorème 10, la projection orthogonale sur P d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^4$ est donnée par

$$\mathbf{p}(x) = \langle x, g_1\rangle g_1 + \langle x, g_2\rangle g_2 \tag{3.12}$$

où (g_1, g_2) est une base orthonormale de P. Pour obtenir l'expression de $\mathbf{p}$, nous allons commencer par orthonormaliser la base $((1,-1,0,0),(0,0,1,-1))$

grâce au procédé de Gram-Schmidt. Remarquons que

$$\begin{aligned}
\langle (1,-1,0,0),(0,0,1,-1)\rangle &= (1,-1,0,0)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= (1,-1,0,0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0, \\
\langle (1,-1,0,0),(1,-1,0,0)\rangle &= (1,-1,0,0)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= (1,-1,0,0)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \\
\langle (0,0,1,-1),(0,0,1,-1)\rangle &= (0,0,1,-1)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= (0,0,1,-1)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1.
\end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $g_1 = (1,-1,0,0)$ et $g_2 = (0,0,1,-1)$. Maintenant, en vertu de 3.12, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}(e_1) &= \langle e_1, g_1\rangle g_1 + \langle e_1, g_2\rangle g_2 = \frac{1}{2}g_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0), \\
\mathbf{p}(e_2) &= \langle e_2, g_1\rangle g_1 + \langle e_2, g_2\rangle g_2 = -\frac{1}{2}g_1 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0), \\
\mathbf{p}(e_3) &= \langle e_3, g_1\rangle g_1 + \langle e_3, g_2\rangle g_2 = \frac{1}{2}g_2 = (0, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), \\
\mathbf{p}(e_4) &= \langle e_4, g_1\rangle g_1 + \langle e_4, g_2\rangle g_2 = -\frac{1}{2}g_2 = (0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}).
\end{aligned}$$

Donc la matrice de $\mathbf{p}$ dans la base canonique est donnée par

$$M_{\mathbb{B}}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. En vertu de la Proposition 20, pour tout $u \in P$ et pour tout $v \in P^\perp$, $\mathbf{p}(u) = u$ et $\mathbf{p}(v) = 0$, et donc P et $P^\perp$ sont des sous-espaces propres de $\mathbf{p}$ pour les valeurs propres respectives 1 et 0. Puisque, en vertu de la Proposition 19, $\mathbb{R}^4 = P \oplus P^\perp$, $\mathbf{p}$ est diagonalisable. Pour avoir une base orthonormale de vecteurs propres de $\mathbf{p}$, il suffit de prendre une base orthonormale de P et une base orthonormale de $P^\perp$. Nous avons (g_1, g_2) comme base orthonormale de P. Nous allons maintenant construire une base orthonormale de $P^\perp$. Notons que $((1,1,0,0),(0,0,1,1))$ est une base de $P^\perp$. Nous allons l'orthonormaliser selon le procédé de Gram-Schmidt. On a

$$\begin{aligned} f_1 &= e_1 + e_2, \quad \|f_1\|^2 = 3, \\ f_2 &= e_3 + e_4 - \frac{\langle f_1, e_3 + e_4\rangle}{\|f_1\|^2} f_1 = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 1, 1), \quad \|f_2\|^2 = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi $((\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0), (-\frac{2}{\sqrt{15}}, -\frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}))$ est une base orthonormale de $P^\perp$. Finalement

$$\left((1,-1,0,0),(0,0,1,-1),(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0),(-\frac{2}{\sqrt{15}}, -\frac{2}{\sqrt{15}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}})\right)$$

est une base orthonormale de vecteurs propres de $\mathbf{p}$.

6. D'après le Théorème 10, la distance d'un vecteur $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^n$ à P est donnée par $d(u, P) = \|u - \mathbf{p}(u)\|$. Or, d'après 5., on a

$$u - \mathbf{p}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x+y \\ x+y \\ z+t \\ z+t \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} d(u,P)^2 &= \left\| \left(\frac{1}{2}(x+y), \frac{1}{2}(x+y), \frac{1}{2}(z+t), \frac{1}{2}(z+t) \right) \right\|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(3(x+y)^2 + 3(z+t)^2 + 4(x+y)(z+t)\right). \end{aligned}$$

Finalement,

$$d(u,P) = \frac{1}{2}\sqrt{3(x+y)^2 + 3(z+t)^2 + 4(x+y)(z+t)}.$$

Exercice 19 *On se place dans $\mathbb{R}_4[X]$ muni du produit scalaire (cf. Exercice 14)*

$$\langle P, Q\rangle = P(0)Q(0) + \int_{-1}^{1} P'(t)Q'(t)dt.$$

On notera $\mathbb{B} = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$. On considère le plan vectoriel $E = Vect\{1, X^2\}$ et on note $\mathbf{p}$ la projection orthogonale sur E.

1. *Ecrire la matrice de $\langle\ ,\ \rangle$ dans $\mathbb{B}$.*
2. *Par le procédé de Gram-Schmidt donner la base $\mathbb{B}_1 = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$ de $\mathbb{R}_4[X]$ orthonormalisée de la base $\mathbb{B}$.*
3. *Déterminer l'orthogonale de E.*
4. *Donner la matrice de $\mathbf{p}$ dans $\mathbb{B}$ et dans $\mathbb{B}_1$.*
5. *Déduire de ce qui précéde $\inf\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \left(a^2 + \int_{-1}^{1}(bt-1)^2dt\right)$.*

Solution -

1. On a

$$\begin{aligned}
\langle 1, 1\rangle &= 1,\ \langle 1, X\rangle = \langle 1, X^2\rangle = \langle 1, X^3\rangle = \langle 1, X^4\rangle = 0,\\
\langle X, X\rangle &= \int_{-1}^{1} dt = 2,\ \langle X, X^2\rangle = \int_{-1}^{1} 2tdt = 0,\ \langle X, X^3\rangle = \int_{-1}^{1} 3t^2dt = 2,\\
\langle X, X^4\rangle &= \int_{-1}^{1} 4t^3dt = 0,\ \langle X^2, X^2\rangle = \int_{-1}^{1} 4t^2dt = \frac{8}{3},\ \langle X^2, X^3\rangle = \int_{-1}^{1} 6t^3dt = 0,\\
\langle X^2, X^4\rangle &= \int_{-1}^{1} 8t^4dt = \frac{16}{5},\ \langle X^3, X^3\rangle = \int_{-1}^{1} 9t^4dt = \frac{18}{5},\ \langle X^3, X^4\rangle = \int_{-1}^{1} 12t^5dt = 0,\\
\langle X^4, X^4\rangle &= \int_{-1}^{1} 16t^6dt = \frac{32}{7}. \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

   Donc la matrice de $\langle\ ,\ \rangle$ dans $\mathbb{B}$ est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & \frac{8}{3} & 0 & \frac{16}{5}\\ 0 & 2 & 0 & \frac{18}{5} & 0\\ 0 & 0 & \frac{16}{5} & 0 & \frac{32}{7} \end{pmatrix}.$$

2. On commence par construire une base orthogonale en utilisant la for-

mule 3.4. Notons $(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5)$ cette base. On a

$$\begin{aligned}
Q_1 &= 1,\ \|Q_1\|^2 = 1,\ Q_2 = X - \frac{\langle X, Q_1\rangle}{\|Q_1\|^2}Q_1 = X,\ \|Q_2\|^2 = 2,\\
Q_3 &= X^2 - \frac{\langle X^2, Q_1\rangle}{\|Q_1\|^2}Q_1 - \frac{\langle X^2, Q_2\rangle}{\|Q_2\|^2}Q_2 = X^2,\ \|Q_3\|^2 = \frac{8}{3},\\
Q_4 &= X^3 - \frac{\langle X^3, Q_1\rangle}{\|Q_1\|^2}Q_1 - \frac{\langle X^3, Q_2\rangle}{\|Q_2\|^2}Q_2 - \frac{\langle X^3, Q_3\rangle}{\|Q_3\|^2}Q_3 = X^3 - X,\\
\|Q_4\|^2 &= \frac{8}{5},\\
Q_5 &= X^4 - \frac{\langle X^4, Q_1\rangle}{\|Q_1\|^2}Q_1 - \frac{\langle X^4, Q_2\rangle}{\|Q_2\|^2}Q_2 - \frac{\langle X^4, Q_3\rangle}{\|Q_3\|^2}Q_3 - \frac{\langle X^4, Q_4\rangle}{\|Q_4\|^2}Q_4\\
&= X^4 - \frac{6}{5}X^2, \quad \|Q_5\|^2 = \frac{128}{175}.
\end{aligned}$$

Ainsi la base orthonormalisée de $\mathbb{B}$ est

$$\mathbb{B}_1 = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}X, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}X^2, \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(X^3 - X), \frac{5\sqrt{7}}{8\sqrt{2}}(X^4 - \frac{6}{5}X^2)).$$

3. $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4 \in E^\perp$ si, et seulement si $\langle P, 1\rangle = \langle P, X^2\rangle = 0$. En utilisant 3.13, on a $\langle P, 1\rangle = a_0$ et $\langle P, X^2\rangle = \frac{8}{3}a_2 + \frac{16}{5}a_4$. On déduit que $E^\perp$ est le sous-espace vectoriel de dimension 3 donné par

$$E^\perp = \{aX + b(X^4 - \frac{6}{5}X^2) + cX^3, a, b, c \in \mathbb{R}\} = Vect\{X, X^4 - \frac{6}{5}X^2, X^3\}.$$

4. On pourrait utiliser le Théorème 10 pour déterminer l'expression de $\mathbf{p}$, mais la situation ici est simple. En effet, 1 et X^2 sont dans E et, d'après la Proposition 20, $\mathbf{p}(1) = 1$ et $\mathbf{p}(X^2) = X^2$. D'un autre côté, X, X^3 et $X^4 - \frac{6}{5}X^2$ sont dans $E^\perp$ et, d'après la Proposition 20, $\mathbf{p}(X) = \mathbf{p}(X^3) = \mathbf{p}(X^4 - \frac{6}{5}X^2) = 0$. De la dernière relation, on déduit que $\mathbf{p}(X^4) = \frac{6}{5}\mathbf{p}(X^2) = \frac{6}{5}X^2$. On obtient alors que la matrice de $\mathbf{p}$ dans $\mathbb{B}$ est donnée par

$$M_{\mathbb{B}}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{6}{5}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notons $\mathbb{B}_1 = (P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$. Les polynômes P_1 et P_3 sont dans E et les polynômes P_2, P_4 et P_5 sont dans $E^\perp$. Il résulte alors que

$$\mathbf{p}(P_1) = P_1,\ \mathbf{p}(P_3) = P_3 \quad \text{et} \quad \mathbf{p}(P_2) = \mathbf{p}(P_4) = \mathbf{p}(P_5) = 0.$$

Ainsi la matrice de $\mathbf{p}$ dans $\mathbb{B}_1$ est donnée par

$$M_{\mathbb{B}_1}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Remarquons d'abord que $\displaystyle\int_{-1}^{1}(bt-1)^2dt = \int_{-1}^{1}((P(t)-t)')^2dt$ où $P(X) = \frac{b}{2}X^2 + a$. Ainsi $a^2 + \displaystyle\int_{-1}^{1}(bt-1)^2dt = \|P - X\|^2$ et donc

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \left(a^2 + \int_{-1}^{1}(bt-1)^2dt \right) = d(X,E)^2.$$

Or, d'après le Théorème 10, $d(X,E) = \|X - \mathbf{p}(X)\|$. On a vu que $\mathbf{p}(X) = 0$ et donc $d(X,E) = \|X\| = \sqrt{2}$. Finalement,

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \left(a^2 + \int_{-1}^{1}(bt-1)^2dt \right) = 2.$$

Exercice 20 *Montrer que, pour tout $n \geq 2$,*

$$\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \sum_{p=1}^{n}(p^2 - ap - b)^2 = \frac{1}{180}(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2). \tag{3.14}$$

On pourra utiliser les formules :

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{n} p &= \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \\ \sum_{p=1}^{n} p^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2, \quad \sum_{p=1}^{n} p^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1). \end{aligned}$$

Solution -

Considérons le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ défini par $\langle x,y\rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k y_k$ et notons $\|\ \|$ et d, respectivement, la norme euclidienne et la distance associées. Posons $u = (1, 2^2, \ldots, n^2)$, $u_0 = (1, \ldots, 1)$ et $v_0 = (1, 2, \ldots, n)$. Avec ces notations, on a

$$\sum_{p=1}^{n}(p^2 - ap - b)^2 = \|u - av_0 - bu_0\|^2 = d(u, av_0 + bu_0)^2.$$

Il en résulte alors que $\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \sum_{p=1}^{n}(p^2-ap-b)^2 = d(u,P)^2$, où P est le plan vectoriel engendré par u_0 et v_0. D'après le Théorème 10, $d(u,P)=d(u,\mathbf{p}(u))$, où $\mathbf{p}(u)$ désigne la projection orthogonale de u sur P, et cette projection est donnée par

$$\mathbf{p}(u) = \langle u, g_1\rangle g_1 + \langle u, g_2\rangle g_2, \tag{3.15}$$

où (g_1, g_2) est une base orthonormale de P. Nous allons, maintenant, orthonormaliser, selon le procédé de Gram-Schmidt (cf. Théorème 9), la base (u_0, v_0). On a

$$\begin{aligned}
e_1 &= u_0, \quad \|e_1\|^2 = n, \\
e_2 &= v_0 - \frac{\langle v_0, e_1\rangle}{\|e_1\|^2}e_1 = v_0 - \frac{\sum_{p=1}^{n} p}{n}e_1 = v_0 - \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n}e_1 = v_0 - \frac{1}{2}(n+1)u_0 \\
\|e_2\|^2 &= \|v_0\|^2 - (n+1)\langle u_0, v_0\rangle + \frac{1}{4}(n+1)^2\|u_0\|^2 \\
&= \sum_{p=1}^{n} p^2 - (n+1)\sum_{p=1}^{n} p + \frac{1}{4}n(n+1)^2 \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{2}n(n+1)^2 + \frac{1}{4}n(n+1)^2 \\
&= \frac{1}{12}n(n-1)(n+1).
\end{aligned}$$

Ainsi $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}e_1, \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{n(n-1)(n+1)}}e_2\right)$ est une base orthonormale de P. En vertu de 3.15, on déduit que

$$\mathbf{p}(u) = \frac{1}{n}\langle u, e_1\rangle e_1 + \frac{12}{n(n-1)(n+1)}\langle u, e_2\rangle e_2.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\langle u, e_1\rangle &= \sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \\
\langle u, e_2\rangle &= \langle v_0, u\rangle - \frac{1}{2}(n+1)\langle u_0, u\rangle = \sum_{p=1}^{n} p^3 - \frac{1}{2}(n+1)\sum_{p=1}^{n} p^2 \\
&= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{12}n(n+1)^2(2n+1) = \frac{1}{12}n(n+1)^2(n-1).
\end{aligned}$$

En remplaçant dans l'expression de $\mathbf{p}(u)$ ci-dessus, on obtient

$$\mathbf{p}(u) = \frac{1}{6}(n+1)(2n+1)e_1 + (n+1)e_2.$$

Par suite,

$$
\begin{aligned}
d(u,\mathbf{p}(u))^2 &= \left\|\frac{1}{6}(n+1)(2n+1)e_1+(n+1)e_2-u\right\|^2\\
&= \frac{1}{36}(n+1)^2(2n+1)^2\|e_1\|^2+(n+1)^2\|e_2\|^2+\|u\|^2\\
&\quad -\frac{1}{3}(n+1)(2n+1)\langle e_1,u\rangle-2(n+1)\langle e_2,u\rangle \qquad (\langle e_1,e_2\rangle=0)\\
&= \frac{1}{36}n(n+1)^2(2n+1)^2+\frac{1}{12}n(n-1)(n+1)^3\\
&\quad +\frac{1}{30}n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)-\frac{1}{18}n(n+1)^2(2n+1)^2\\
&\quad -\frac{1}{6}n(n+1)^3(n-1)\\
&= -\frac{1}{36}n(n+1)^2(2n+1)^2-\frac{1}{12}n(n-1)(n+1)^3\\
&\quad +\frac{1}{30}n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)\\
&= \frac{1}{180}n(n+1)\left[-5(n+1)(4n^2+4n+1)-15(n^2-1)(n+1)\right.\\
&\quad \left.+36n^3+54n^2+6n-6\right]\\
&= \frac{1}{180}n(n+1)(n^3-n^2-4n+4)=\frac{1}{180}(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2).
\end{aligned}
$$

Ceci établit 3.14.

Exercice 21 *Calculer* $\displaystyle\inf_{a,b,c\in\mathbb{R}}\int_{-\pi}^{\pi}(t-a\cos t-b\sin t-c)^2dt.$

Solution - Munissons l'espace vectoriel $C([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ des fonctions continues et définies sur $[-\pi,\pi]$ du produit scalaire

$$\langle f,g\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)g(t)dt,$$

et notons $\|\ \|$ et d, respectivement, la norme et la distance associées. Posons $f(t)=t$, $f_1(t)=1$, $f_2(t)=\sin t$ et $f_3(t)=\cos t$. Avec ces notations, on a

$$\inf_{a,b,c\in\mathbb{R}}\int_{-\pi}^{\pi}(t-a\cos t-b\sin t-c)^2dt=\inf_{a,b,c\in\mathbb{R}}d(f,cf_1+bf_2+af_3)^2=d(f,E)^2,$$

où $E=Vect\{f_1,f_2,f_3\}$. Vérifions que (f_1,f_2,f_3) est une famille libre. En effet, soient $a,b,c\in\mathbb{R}$ tel que $af_1+bf_2+cf_3=0$. En dérivant cette relation, on obtient $bf_3-cf_2=0$. En prenant $t=0$, on obtient $b=0$ et en prenant

$t = \frac{\pi}{2}$, on obtient $c = 0$. En revenant à la relation du départ, on déduit que $a = 0$. Ainsi (f_1, f_2, f_3) est une base de E.

Maintenant, d'après le Théorème 10, $d(f, E) = d(f, \mathbf{p}(f))$, où $\mathbf{p}(f)$ désigne la projection orthogonale de f sur E, et cette projection est donnée par

$$\mathbf{p}(f) = \langle f, g_1\rangle g_1 + \langle f, g_2\rangle g_2 + \langle f, g_3\rangle g_3, \tag{3.16}$$

où (g_1, g_2, g_3) est une base orthonormale de E. Nous allons, maintenant, orthonormaliser, selon le procédé de Gram-Schmidt (cf. Théorème 9), la base (f_1, f_2, f_3). On a

$$\begin{aligned}
e_1 &= f_1, \quad \|e_1\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi, \\
e_2 &= f_2 - \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \sin t dt}{2\pi} e_1 = \sin t, \\
\|e_2\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos(2t) dt = \pi, \\
e_3 &= f_3 - \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \cos t dt}{2\pi} e_1 - \frac{\int_{-\pi}^{\pi} \sin t \cos t dt}{\pi} e_2 = \cos t, \\
\|e_3\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(2t) dt = \pi.
\end{aligned}$$

En normalisant f_i, $i = 1, 2, 3$, on obtient que $(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t)$ est une base orthonormale de E et, en vertu de 3.16,

$$\mathbf{p}(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t dt + \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} t \sin t dt\right) \sin t + \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} t \cos t dt\right) \cos t.$$

Or, $\int_{-\pi}^{\pi} t dt = \int_{-\pi}^{\pi} t \cos t dt = 0$, puisque les fonctions dans l'intégrale sont impaires. D'un autre côté, grâce à une intégration par parties, on déduit que

$$\int_{-\pi}^{\pi} t \sin t dt = [-t \cos t]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos t dt = 2\pi.$$

Ainsi $\mathbf{p}(f) = 2 \sin t$, et donc

$$\inf_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_{-\pi}^{\pi} (t - a \cos t - b \sin t - c)^2 dt = d(f, \mathbf{p}(f))^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (t - 2 \sin t)^2 dt.$$

Or,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} (t - 2 \sin t)^2 dt &= \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt - 4\int_{-\pi}^{\pi} t \sin t dt + 4\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t dt \\
&= \frac{2\pi^3}{3} - 8\pi + 4\pi = \frac{2\pi^3}{3} - 4\pi.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\inf_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_{-\pi}^{\pi} (t - a\cos t - b\sin t - c)^2 dt = \frac{2\pi^3}{3} - 4\pi.$$

Exercice 22 *Soient V un espace eucldien et $\mathbb{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale. Soient F un sous-espace vectoriel de V et $(f_1, \dots, f_p)$ une base orthonormale de F. Pour tout $i = 1, \dots, p$, on note X_i le vecteur colonne formé par les coordonnées de f_i dans $\mathbb{B}$. On note $\mathbf{p}$ la projection orthogonale sur F. Montrer que*

$$M_{\mathbb{B}}(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{p} X_i {}^t X_i. \tag{3.17}$$

Solution -

Pour tout $i = 1, \dots, p$, en vertu de la Proposition 16, $f_i = \sum_{k=1}^{n} \langle f_i, e_k \rangle e_k$.

Donc $X_i = \begin{pmatrix} \langle f_i, e_1 \rangle \\ \vdots \\ \vdots \\ \langle f_i, e_n \rangle \end{pmatrix}$ et

$$X_i {}^t X_i = \begin{pmatrix} \langle f_i, e_1 \rangle \\ \vdots \\ \vdots \\ \langle f_i, e_n \rangle \end{pmatrix} (\langle f_i, e_1 \rangle, \dots, \langle f_i, e_n \rangle) = \begin{pmatrix} \langle f_i, e_1 \rangle \langle f_i, e_1 \rangle & \dots\dots & \langle f_i, e_1 \rangle \langle f_i, e_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \langle f_i, e_n \rangle \langle f_i, e_1 \rangle & \dots\dots & \langle f_i, e_n \rangle \langle f_i, e_n \rangle \end{pmatrix}.$$

On déduit que

$$\sum_{i=1}^{p} X_i {}^t X_i = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{p} \langle f_i, e_1 \rangle \langle f_i, e_1 \rangle & \dots\dots & \sum_{i=1}^{p} \langle f_i, e_1 \rangle \langle f_i, e_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{p} \langle f_i, e_n \rangle \langle f_i, e_1 \rangle & \dots\dots & \sum_{i=1}^{p} \langle f_i, e_n \rangle \langle f_i, e_n \rangle \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

D'un autre côté, en vertu de la Proposition 16, pour tout $i = 1, \dots, n$, $\mathbf{p}(e_i) = \sum_{k=1}^{n} \langle \mathbf{p}(e_i), e_k \rangle e_k$. Ainsi $M_{\mathbb{B}}(\mathbf{p}) = (m_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ avec $m_{ij} = \langle \mathbf{p}(e_j), e_i \rangle$.

Or, en vertu du Théorème 10, $\mathbf{p}(e_j) = \sum_{k=1}^{n} \langle e_j, f_k \rangle f_k$ et donc

$$m_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \langle e_j, f_k \rangle \langle f_k, e_i \rangle. \tag{3.19}$$

En comparant 3.18 à 3.19, on déduit 3.17.

Chapitre 4

Endomorphismes des espaces euclidiens

4.1 Rappels de cours

Dans tout ce chapitre, V désigne un espace eucldien dont le produit scalaire est noté $\langle\ ,\ \rangle$ et la norme associée $||\ ||$.

4.1.1 Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien

Nous avons vu (*cf.* Théorème 3 Chapitre 1) qu'il existe un isomorphisme canonique entre un espace vectoriel de dimension finie et son bidual. Cependant, il n'y a pas, en général, d'isomorphisme canonique entre un espace vectoriel de dimension finie et son dual. Pour un espace euclidien un tel isomorphisme existe, il dépend du produit scalaire et nous allons le décrire maintenant.

Pour tout $u \in V$ définissons $\ell_u : V \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\ell_u(v) = \langle u, v\rangle \quad \text{pour tout } v \in V.$$

De la linéarité du produit scalaire on déduit aisément que ℓ_u est une forme linéaire sur V. Notons $\flat : V \longrightarrow V^*$ l'application qui à u associe $\flat(u) = \ell_u$.

Proposition 21 *1. $\flat : V \longrightarrow V^*$ est un isomorphisme d'espace vectoriel. En particulier, pour toute forme linéaire $\ell \in V^*$, il existe un unique vecteur $u \in V$ tel que $\flat(u) = \ell$, c'est-à-dire que, $\ell(v) = \langle u, v\rangle$ pour tout $v \in V$.*

2. Soient $\mathbb{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de V et $\mathbb{B}^*$ sa base duale. Alors la matrice de $\flat$ dans les bases $\mathbb{B}$ et $\mathbb{B}^*$ est donnée par

$$M(\flat, \mathbb{B}, \mathbb{B}^*) = (\langle e_i, e_j\rangle)_{1\leq i,j\leq n}\,.$$

En particulier, si $\mathbb{B}$ est orthonormale alors $M(\flat, \mathbb{B}, \mathbb{B}^*) = I_n$. On notera $\# : V^* \longrightarrow V$ l'isomorphisme inverse de $\flat$.

Soient $\mathbb{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de V et $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale. Notons S la matrice $(\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}$. Si $\ell = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i^*$ alors, d'après la deuxième assertion de la proposition ci-dessus, $\#(\ell) = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$ avec

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Proposition 22 *Soit f un endomorphisme de V. Il existe un unique endomorphisme $f^* : V \longrightarrow V$ tel que*

$$\forall (u, v) \in V \times V, \quad \langle f(u), v \rangle = \langle u, f^*(v) \rangle. \tag{4.2}$$

Définition 17 *L'unique endomorphisme f^* vérfiant l'égalité 4.2 s'appelle* endomorphisme adjoint *de f.*

Il y a une relation entre l'adjoint de f et la transposé de f. En effet, on a la relation

$$f^* = \# \circ f^t \circ \flat, \tag{4.3}$$

où $f^t : V^* \longrightarrow V^*$ est la transposé de f (*cf.* 1.4). De cette formule, des Propositions 21 et 3, on déduit la proposition suivante :

Proposition 23 *Soit $\mathbb{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de V. Notons $S = (\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}$. Alors*

$$M_{\mathbb{B}}(f^*) = S^{-1}\, {}^t M_{\mathbb{B}}(f) S.$$

En particulier, si $\mathbb{B}$ est orthonormale

$$M_{\mathbb{B}}(f^*) = {}^t M_{\mathbb{B}}(f).$$

Les propriétés élémentaires de l'adjonction sont rassemblées dans la proposition suivante.

Proposition 24 *Soient f et g deux endomorphismes de V. Alors on a :*

1. $f^* = \# \circ f^t \circ \flat$ *et* $(f^*)^* = f$,
2. $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$,
3. $Id_V^* = Id_V$ *et si f est inversible, f^* est inversible et* $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.
4. *Les polynômes caractéristiques et minimaux de f et f^* sont identiques. En particulier,* $\det(f) = \det(f^*)$ *et* $\mathrm{Tr}(f^*) = \mathrm{Tr}(f)$.
5. *f est diagonalisable si et seulement si f^* est diagonalisable.*

Définition 18 *Soit f un endomorphisme de V.*

1. *f est dit* autoadjoint *(ou* symétrique*) si $f^* = f$;*
2. *f est dit* antisymétrique *si $f^* = -f$;*
3. *f est dit* normal *si $f \circ f^* = f^* \circ f$.*

Notons qu'en vertu de la définition de l'adjoint et de celle d'un endomorphisme symétrique, on a la caractérisation suivante :

$$f \quad \text{est symétrique} \quad \Leftrightarrow \quad \forall (u,v) \in V \times V, \langle f(u), v\rangle = \langle u, f(v)\rangle. \qquad (4.4)$$

De la même manière, on a aussi

$$f \quad \text{est antisymétrique} \quad \Leftrightarrow \quad \forall (u,v) \in V \times V, \langle f(u), v\rangle + \langle u, f(v)\rangle = 0. \qquad (4.5)$$

Exemples - Sur $M_n(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique (*cf.* Proposition 11), l'endomorphisme $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto {}^tM$ est un endomophisme symétrique. En effet, pour tous $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \langle {}^tM, N\rangle &= \mathrm{T}r({}^t\left({}^tM\right)N) = \mathrm{T}r(MN) = \mathrm{T}r(NM) \\ &= \mathrm{T}r({}^t({}^tN)M) = \langle {}^tN, M\rangle. \end{aligned}$$

4.1.2 Diagonalisation des endomorphismes symétriques et réduction des formes quadratiques dans un espace euclidien

Dans cette section, nous allons voir que, dans un espace euclidien V, à toute forme bilinéaire B sur V est associé un endomorphisme J_B défini sur V ; si B est symétrique alors J_B est autoadjoint, J_B est diagonalisable et on peut à partir de ses valeurs propres déduire le rang et la signature de la forme quadratique associée à B.

Soit B une forme bilinéaire sur V. Pour tout $u \in V$, l'application qui à $v \mapsto B(u,v)$ est une forme linéaire sur V et on obtient donc un endomorphisme $B^\flat : V \longrightarrow V^*$ (comparer à la construction de $\flat$ dans Section 1.1). On considère l'endomorphisme $J_B : V \longrightarrow V$ défini par

$$J_B = \# \circ B^\flat. \qquad (4.6)$$

On a, pour tous $u, v \in V$,

$$B(u,v) = \langle J_B u, v\rangle. \qquad (4.7)$$

Inversement, pour tout endomorphisme $J : V \longrightarrow V$, l'application $B_J : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$B_J(u,v) = \langle Ju, v\rangle$$

est une forme bilinéaire sur V. Nous avons donc :

Proposition 25 *L'application qui à toute forme bilinéaire B sur V associe l'endormophisme J_B est un isomorphisme entre $\mathcal{B}(V)$ et $End(V)$.*

De 4.4 (resp. 4.5) et 4.7, on déduit que B est symétrique (resp. antisymétrique) si, et seulement si, J_B est symétrique (resp. antisymétrique).

Pour toute forme quadaratique sur V, on notera J_q l'endomorphisme symétrique associé à sa forme polaire. En particulier, on a pour tout $u \in V$,

$$q(u) = \langle J_q u, u \rangle. \tag{4.8}$$

Pour tout endomorphisme symétrique J de V, on note q_J la forme quadratique sur V définie par

$$q_J(u) = \langle Ju, u \rangle. \tag{4.9}$$

En particulier, pour toute matrice symétrique M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on noter q_M la forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ définie par

$$q_M(x_1, \ldots, x_n) = {}^tXMX, \tag{4.10}$$

où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

La proposition suivante est une conséquence immédiate de 4.6 et de la Proposition 21.

Proposition 26 *Soit q une forme quadratique sur V et $\mathbb{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de V. Notons M_q la matrice de q dans $\mathbb{B}$. Alors :*

1. *$M_{\mathbb{B}}(J_q) = S^{-1}M_q$, où $S = (\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}$. En particulier, si $\mathbb{B}$ est orthonormale, on a $M_{\mathbb{B}}(J_q) = M_q$;*
2. *le rang de q est égal au rang de J_q et $\ker q = \ker J_q$.*

Définition 19
1. *Un endomorphisme symétrique J est dit* positif *si la forme quadratique associée q_J est positive, c'est-à-dire si, pour tout $u \in V$, $\langle Ju, u \rangle \geq 0$.*
2. *Un endomorphisme symétrique J est dit* défini *si la forme quadratique associée q_J est définie, c'est-à-dire que, pour tout $u \in V \setminus \{0\}$, $\langle Ju, u \rangle \neq 0$.*

Un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique est entièrement déterminé par sa matrice dans la base canonique. Cette matrice est symétrique. Ceci justifie la définition suivante.

Définition 20
1. *Une matrice symétrique M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite* positive *si pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, ${}^tXMX \geq 0$.*

2. *Une matrice symétrique M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite* définie *si pour tout* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0$, ${}^tXMX \neq 0$.

Exemples - Nous allons montrer que la matrice symétrique $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ est définie-positive. La forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ associée à M est donnée par

$$\begin{aligned} q_M(x,y,z) &= (x,y,z)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= x^2+2y^2+3z^2+2xy+2xz+4yz. \end{aligned}$$

Nous allons maintenant effectuer une réduction de Gauss de q_M (*cf.* Théorème 4). On a

$$\begin{aligned} q_M(x,y,z) &= x^2+2y^2+3z^2+2xy+2xz+4yz \\ &= x^2+2x(y+z)+2y^2+3z^2+4yz \\ &= (x+y+z)^2+y^2+2z^2+2yz \\ &= (x+y+z)^2+(y+z)^2+z^2. \end{aligned}$$

On déduit alors que $q(x,y,z) \geq 0$ pour tout x,y,z et donc q_M est positive. On voit aussi que $q(x,y,z) = 0$ si, et seulement si $x = y = z = 0$ et donc q_M est définie. Ainsi M est une matrice symétrique définie-positive.

Le théorème suivant est parmi les théorèmes les plus importants de l'algèbre linéaire. Il est appelé *théorème spectral* pour un endomorphisme symétrique.

Théorème 12 *Soit J un endomorphisme symétrique de V. Alors les assertions suivantes sont vérifiées :*

1. *Si F est un sous-espace vectoriel de V tel que $J(F) \subset F$ alors $J(F^{\perp}) \subset F^{\perp}$. En particulier, les sous-espaces propres de J sont orthogonaux deux à deux.*
2. *Le polynôme caractéristique de J est scindé dans $\mathbb{R}$.*
3. *Il existe une base orthonormale de J formée de vecteurs propres de J, c'est-à-dire que, la matrice de J dans cette base est diagonale.*

Remarques - On pourra reformuler le théorème ci-dessus en disant que tout endomorphisme symétrique dans un espace euclidien a toutes ses valeurs propres dans $\mathbb{R}$ et est diagonalisable dans une base orthonormale.

Soit J un endomorphisme symétrique de V. D'après Théorème 12, il existe une base orthonormale de V formée de vecteurs propres de J. Réorganisons les vecteurs de cette base de la forme

$$\mathbb{B} = (e_1^+, \ldots, e_s^+, e_1^-, \ldots, e_t^-, e_1^0, \ldots, e_{n-s-t}^0),$$

où $(e_1^+,\dots,e_s^+)$ sont associés aux valeurs propres strictement positives $(\lambda_1,\dots,\lambda_s)$, $(e_1^-,\dots,e_t^-)$ sont associés à des valeurs propres strictement négatives $(\mu_1,\dots,\mu_t)$ et $\ker J = Vect\{e_1^0,\dots,e_{n-s-t}^0\}$. L'expression de la forme quadratique q_J dans cette base est donnée par

$$q_J(u)=\sum_{i=1}^{s}\lambda_i(x_i^+)^2+\sum_{i=1}^{t}\mu_i(x_i^-)^2, \tag{4.11}$$

où $(x_1^+,\dots,x_s^+,x_1^-,\dots,x_t^-,x_1^0,\dots,x_{n-s-t}^0)$ sont les coordonnes de u dans $\mathbb{B}$. De cette expression nous déduisons que (s,t) est la signature de q_J. Nous déduisons alors les corollaires suivants.

Corollaire 2 *Soit J un endomorphisme symétrique et notons Spect(J) l'ensemble des valeurs propres de J. Alors les assertions suivantes sont vérifiées.*

1. *La signature de q_J est (s,t) avec s est le nombre de valeurs propres strictement positives de J comptées avec leur multiplicité et t est le nombre de valeurs propres strictement négative de M comptées avec leur multiplicité.*
2. *J est positif si tous les éléments de Spect(J) sont positifs.*
3. *J est défini si tous les éléments de Spect(J) sont non nuls et de même signe.*
4. *J est défini-positif si tous les éléments de Spect(J) sont strictement positifs.*

Corollaire 3 *Soit M une matrice symétrique dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et notons Spect(M) l'ensemble des valeurs propres de M. Alors les assertions suivantes sont vérifiées.*

1. *La signature de q_M est (s,t) avec s est le nombre de valeurs propres strictement positives de M comptées avec leur multiplicité et t est le nombre de valeurs propres strictement négatives de M comptées avec leur multiplicité.*
2. *M est positive si tous les éléments de Spect(M) sont positifs.*
3. *M est définie si tous les éléments de Spect(M) sont non nuls et de même signe.*
4. *M est définie-positive si tous les éléments de Spect(M) sont strictement positifs.*

Exemples - Nous allons déterminer la signature de q_M où $M=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&-1\\2&-1&0\end{pmatrix}$.
Nous allons aussi voir si M est positive (définie-positive). Pour cela nous allons

calculer le polynôme caractéristique de M et déduire les valeurs propres de M. On a

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda^2-1)-(2-\lambda)+2(-1+2\lambda) \\ &= -\lambda^3+6\lambda-4 = -(\lambda-2)(\lambda^2+2\lambda-2). \end{aligned}$$

Les valeurs propres de M sont $(2, -1+\sqrt{3}, -1-\sqrt{3})$ et, en vertu du Corollaire 3, la signature de q_M est $(2,1)$ et M n'est ni définie ni positive.

4.1.3 Groupe orthogonal, Matrices orthogonales

Définition 21 *Un endomorphisme f de V est dit* orthogonal *s'il conserve le produit scalaire, c'est-à-dire que, pour tous $u, v \in V$,*

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle.$$

Exemples - L'endomophisme T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $T(M) = {}^tM$ est un endomorphisme orthogonal pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (*cf.* Proposition 11). En effet, pour tous $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned} \langle {}^tM, {}^tN\rangle &= \mathrm{T}r({}^t({}^tM){}^tN) = \mathrm{T}r(M{}^tN) \\ &= \mathrm{T}r({}^tNM) = \langle N, M\rangle. \end{aligned}$$

Il y a plusieurs manières de vérifier qu'un endomorphisme est orthogonal. Les propriétés caractéristiques des endomorphismes orthogonaux sont regroupées dans le théorème suivant.

Théorème 13 *Soit f un endomorphisme de V. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est un endomorphisme orthogonal.*
2. *Pour tout $u \in V$, $\|f(u)\| = \|u\|$ (conservation de la norme).*
3. *f est inversible et $f^{-1} = f^*$ (l'inverse égale l'adjoint).*
4. *$f \circ f^* = f^* \circ f = Id_V$.*
5. *Il existe une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ de V telle que $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ soit aussi une base orthonormale.*
6. *Pour toute base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$ de V, $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est aussi une base orthonormale (conservation des bases orthonormales).*

Remarques - Un endomorphisme orthogonal f est nécessairement inversible et de la relation $f \circ f^* = f^* \circ f = Id_V$ et du fait que $\det(f^*) = \det(f)$ on déduit que $(\det(f))^2 = 1$, c'est-à-dire que, $\det(f) \in \{-1, 1\}$.

On notera $\mathbb{O}(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux de V et $\mathbb{SO}(V) = \{f \in \mathbb{O}(V);\ \det(f) = 1\}$.

Théorème 14 $\mathbb{O}(V)$ *est un groupe et* $\mathbb{SO}(V)$ *est un sous-groupe* distingué d'indice 2 *de* $\mathbb{O}(V)$.

Exemples - Un exemple important d'endomorphisme orthogonal est la *réflexion* (ou *symétrie orthogonale*) s_F par rapport à un sous-espace vectoriel F et qui est donnée par

$$s_F(x) = 2p_F(x) - x,$$

où p_F est la projection orthogonale sur F (*cf.* Définition 16).

Définition 22 *Une matrice* M *de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *est dite* orthogonale *(resp.* orthogonale directe*) si* ${}^tMM = I_n$ *(resp.* ${}^tMM = I_n$ *et* $\det M = 1$*).*

Proposition 27 *Soit* M *une matrice de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *M est orthogonale.*
2. *${}^tM$ est orthogonale.*
3. *Les vecteurs colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.*
4. *Les vecteurs lignes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.*

Proposition 28
1. *La matrice d'un endomorphisme orthogonal de V dans une base orthonormale est une matrice orthogonale.*
2. *La matrice de passage d'une base orthonormale à une base orthonormale est une matrice orthogonale.*

On notera $\mathbb{O}(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n et $\mathbb{SO}(n) = \{M \in \mathbb{O}(n);\ \det(M) = 1\}$.

Théorème 15 $\mathbb{O}(n)$ *est un groupe et* $\mathbb{SO}(n)$ *est un sous-groupe* distingué d'indice 2 *de* $\mathbb{O}(n)$.

Exemples - Nous allons déterminer les réels a, b, c pour que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & b \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & c \end{pmatrix}$$

soit dans $\mathbb{SO}(3)$.

Notons (u_1, u_2, u_3) les vecteurs colonnes de M. D'après la Proposition 27, $M \in \mathbb{SO}(3)$ si et seulement si $\det(M) = 1$ et (u_1, u_2, u_3) est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$. Puisque $||u_1|| = ||u_2|| = 1$ et $\langle u_1, u_2\rangle = 0$, $M \in \mathbb{SO}(3)$ si et seulement si

$$\det(M) = 1,\ ||u_3||^2 = 1, \quad \text{et} \quad \langle u_1, u_3\rangle = \langle u_2, u_3\rangle = 0.$$

Après calcul on obtient donc

$$M \in \mathbb{SO}(3) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{6}}(-a-b+2c) = 1, \\ a^2+b^2+c^2 = 1, \\ a+b+c = 0, \\ a-b = 0. \end{cases}$$

La résolution du système linéaire formé des equations 1, 3 et 4 donne $a = -\frac{\sqrt{6}}{6}$, $b = -\frac{\sqrt{6}}{6}$ et $c = 2\frac{\sqrt{6}}{6}$ et on vérifie aisément que ces réels vérifient la deuxième équation. Finalement,

$$M \in \mathbb{SO}(3) \quad \Leftrightarrow \quad (a,b,c) = (-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, 2\frac{\sqrt{6}}{6}).$$

Les groupes $\mathbb{O}(2)$ et $\mathbb{SO}(2)$ sont faciles à décrire.

Proposition 29 *1.* $\mathbb{O}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\epsilon b \\ b & \epsilon a \end{pmatrix}; \; a^2+b^2 = 1, \; \epsilon \in \{-1,1\} \right\}$.

2. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, *notons* $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. *Alors* R *est un morphisme surjective de* $(\mathbb{R},+)$ *vers* $(\mathbb{SO}(2),\times)$ *et son noyau est* $2\pi\mathbb{Z}$. *En plus,* $\mathbb{SO}(2) = \{R(\theta); \; \theta \in \mathbb{R}\}$ *est un groupe multiplicatif commutatif.*

Nous allons finir ce chapitre par la description des automorphismes orthogonaux dans le plan et dans l'espace.

Proposition 30 *Soit* P *un espace euclidien orienté de dimension 2. Alors :*

1. $\{f \in \mathbb{O}(P); \; \det(f) = -1\}$ *est constitué de réflexions (symétries orthogonales par rapport à une droite),*
2. $\mathbb{SO}(P)$ *est un groupe commutatif et si* $f \in \mathbb{SO}(P)$ *alors il existe un unique* $\theta \in [0,2\pi[$ *tel que pour toute base orthonormale directe* $\mathbb{B}$ *de* P, *on a* $M_{\mathbb{B}}(f) = R(\theta)$, θ *est la* mesure principale *de* f.

Notons que $\mathrm{T}r(f) = 2\cos\theta$ ne dépend pas de l'orientation choisie, cela détermine $\sin\theta$ au signe près. (Si l'on change l'orientation de P cela change d'ailleurs le signe de $\sin\theta$, ce qui revient à remplacer θ par $2\pi-\theta$).

Théorème 16 *Soit* E *un espace eucldien orienté de dimension 3 et soit* $f \in \mathbb{O}(E)$. *Alors :*

1. *si* $f \in \mathbb{SO}(E)$ *et* $f \neq id_E$ *alors 1 est valeur propre de* f, $\Delta = \ker(f - id_E)$ *est une droite et* f *est une rotation d'axe* Δ, *c'est-à-dire que, il existe* $\theta \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z})$ *et une base orthonormale directe* $\mathbb{B}$ *tels que*

$$M_{\mathbb{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

2. *si* $\det(f) = -1$, $-f \in \mathbb{SO}(E)$, *f est la composée commutative d'une rotation R et d'une réflexion par rapport à un plan orthogonal à l'axe de R.*

4.2 Exercices

Exercice 23 *On considère $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit $\langle\ ,\ \rangle$ défini en posant, pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$,*

$$\langle P, Q\rangle = P(0)Q(0) + \int_0^1 P'(t)Q'(t)dt.$$

1. *Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire.*
2. *Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_0 \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que*

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \langle P, P_0\rangle = P(1).$$

3. *Calculer P_0.*

Solution -

1. On remarque d'abord que, pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$, on a $\langle P, Q\rangle = \langle Q, P\rangle$ et donc $\langle\ ,\ \rangle$ est symétrique. D'un autre côté, pour tous $P_1, P_2, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
\langle P_1 + aP_2, Q\rangle &= (P_1(0) + aP_2(0))Q(0) + \int_0^1 (P_1 + aP_2)'(t)Q'(t)dt \\
&= P_1(0)Q(0) + aP_2(0)Q(0) + \int_0^1 (P_1'(t) + aP_2'(t))Q'(t)dt \\
&= P_1(0)Q(0) + \int_0^1 P_1'(t)Q'(t)dt \\
&\quad + a\left(P_2(0)Q(0) + \int_0^1 P_2'(t)Q'(t)dt\right) \\
&= \langle P_1, Q\rangle + a\langle P_2, Q\rangle
\end{aligned}$$

et donc $\langle\ ,\ \rangle$ est linéaire à gauche. Puisque il est symétrique, $\langle\ ,\ \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}_2[X]$. Nous allons montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est définie-positive. En effet, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a $P(0)^2 \geq 0$ et $\int_0^1 \left(P'(t)\right)^2 dt \geq 0$ et donc $\langle, P, P\rangle \geq 0$ et par suite $\langle\ ,\ \rangle$ est positif. En outre,

$$\langle P, P\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(0) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \left(P'(t)\right)^2 dt = 0.$$

Or, l'intégrale d'une fonction continue positive est nulle si et seulement si cette fonction est nulle. On déduit donc que

$$\langle P, P\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R},\ P'(t) = 0.$$

Ceci montre clairement que $\langle P, P\rangle = 0$ si et seulement si $P = 0$ et donc $\langle\ ,\ \rangle$ est défini. Finalement, $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

2. On considère l'application $\ell : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\ell(P) = P(1)$. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\ell(P + aQ) = (P + aQ)(1) = P(1) + aQ(1) = \ell(P) + a\ell(Q),$$

et donc ℓ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_2[X]$. D'après la Proposition 21, il existe un unique polynôme P_0 tel que, pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$,

$$\ell(P) = P(1) = \langle P, P_0 \rangle.$$

Ceci permet de conclure.

3. Notons $\mathbb{B} = (1, X, X^2) = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{B}^* = (e_1^*, e_2^*, e_3^*)$ sa base duale. On a, d'après 1.3,

$$\ell = \ell(e_1)e_1^* + \ell(e_2)e_2^* + \ell(e_3)e_3^* = e_1^* + e_2^* + e_3^*.$$

Si $S = (\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq 3}$, d'après 4.1, $P_0 = a + bX + cX^2$ avec

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.12}$$

Calculons S et S^{-1}. On a

$$\begin{aligned} \langle 1, 1 \rangle &= 1,\ \langle 1, X \rangle = \langle 1, X^2 \rangle = 0,\ \langle X, X \rangle = \int_0^1 dt = 1, \\ \langle X, X^2 \rangle &= 2\int_0^1 tdt = 1,\ \langle X^2, X^2 \rangle = 4\int_0^1 t^2 dt = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$. Pour calculer S^{-1}, nous allons résoudre le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} x = X \\ y + z = Y \\ y + \frac{4}{3}z = Z. \end{cases}$$

La résolution de ce système linéaire est aisée et donne $(x, y, z) = (X, 4Y - 3Z, -3Y + 3Z)$. On déduit que

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

On remplace dans 4.12 et on obtient finalement $P_0 = 1 + X$.

Exercice 24 *On se place dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique défini en posant, pour tous $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}({}^tMN)$ et on note*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. On définit $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ en posant, pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $F(M) = PMP$.

1. *Montrer que F est un endomorphisme symétrique.*
2. *Calculer la matrice de F dans la base $\mathbb{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, calculer les valeurs propres de F et montrer que F est diagonalisable.*
3. *Montrer que $(\ker F)^\perp = Vect\{P\}$ et en déduire la distance d'une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à $\ker F$.*
4. *Déterminer la signature et le rang de la forme quadratique q sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $q(M) = \langle F(M), M\rangle$.*

Solution -

1. On remarque d'abord que P est une matrice symétrique. Pour tous $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$F(M + aN) = P(M + aN)P = PMP + aPNP = F(M) + aF(N),$$

et donc F est une application linéaire. D'un autre côté, pour tous $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\langle F(M), N\rangle &= \langle PMP, N\rangle = \mathrm{Tr}({}^t(PMP)N) \\ &= \mathrm{Tr}({}^tP^tM^tPN) = \mathrm{Tr}(P^tMPN) \qquad ({}^tP = P) \\ &\overset{1.1}{=} \mathrm{Tr}({}^tMPNP) = \langle M, F(N)\rangle,\end{aligned}$$

et donc F est symétrique.

2. On a

$$\begin{aligned}
F(e_1) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \\
F(e_2) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \\
F(e_3) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \\
F(e_4) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On déduit que la matrice de F dans $\mathbb{B}$ est donnée par

$$M_{\mathbb{B}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons maintenant le polynôme caractéristique P_F de F. On a

$$\begin{aligned}
P_F(X) &= \det(F - XId)\\
&= \begin{vmatrix} 1-X & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1-X & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1-X & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-X \end{vmatrix}\\
&\overset{\substack{L_2+L_1\\ L_3+L_1\\ L_4-L_1}}{=} \begin{vmatrix} 1-X & -1 & -1 & 1 \\ -X & -X & 0 & 0 \\ -X & 0 & -X & 0 \\ X & 0 & 0 & -X \end{vmatrix}\\
&= X^3 \begin{vmatrix} 1-X & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad \left(\text{On développe suivant } C_4\right)\\
&= X^3 \left(- \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1-X & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right)\\
&\overset{(a)}{=} X^3 \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1-X & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right)\\
&= X^3(-1-1+X-1-1) = X^3(X-4).
\end{aligned}$$

Dans (a), nous avons développé les deux déterminants suivant la dernière colonne.
Ainsi $P_F(X) = X^3(X-4)$. Les valeurs propres de F sont 0 avec la multiplicité 3 et 4 comme valeur propre simple.
Nous avons montré que F est symétrique et donc, en vertu du Théorème 12, F est diagonalisable dans une base orthonormale.

3. Notons E_4 le sous-espace propre associé à la valeur propre 4. De la question précédente, on sait que E_4 est une droite vectorielle et que $(\ker F)^\perp = E_4$. Pour répondre à cette question, il suffit donc de montrer que $P \in E_4$. Or

$$\begin{aligned}
F(P) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = 4P
\end{aligned}$$

ce qui montre que $P \in E_4$.
On déduit alors que pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $M = \mathbf{p}(M) + aP$ où $a \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{p}$ désigne la projection orthogonale sur $\ker F$. En faisant le produit avec P, on obtient $a\|P\|^2 = \langle P, M\rangle$. Or $\|P\|^2 = 4$ et donc $M = \mathbf{p}(M) + \frac{1}{4}\langle M, P\rangle P$. Maintenant, en vertu du Théorème

10, $d(M, \ker F) = \|M - \mathbf{p}(M)\|$ et donc $d(M, \ker F) = \frac{1}{2}|\langle M, P\rangle|$. Si, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\langle P, M\rangle \overset{3.2}{=} a - b - c + d$ et finalement

$$d(M, \ker F) = \frac{1}{2}|a - b - c + d|.$$

4. On applique le Corollaire 2 : puisque F admet une seule propre strictement positive simple, q est de signature $(1, 0)$ et $\mathrm{rg} q = 1$.

Exercice 25 *On se place dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique défini en posant, pour tous $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}({}^tMN)$ et on note*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On définit $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini en posant, pour tous $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $F(M) = {}^tPMP$.

1. *Montrer que F est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer son adjoint F^*.*
2. *Montrer que F est normal.*
3. *Calculer les matrices de F et F^* dans la base $\mathbb{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.*
4. *Montrer que F est inversible et calculer son inverse.*
5. *Déterminer la signature et le rang de la forme quadratique q sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $q(M) = \frac{1}{2}\langle F(M) + F^*(M), M\rangle$.*

Solution -

1. Pour tous $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$F(M + aN) = {}^tP(M + aN)P = {}^tPMP + a{}^tPNP = F(M) + aF(N),$$

et donc F est une application linéaire. D'un autre côté, pour tous $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\langle F(M), N\rangle &= \langle {}^tPMP, N\rangle = \mathrm{Tr}({}^t({}^tPMP)N) \\ &= \mathrm{Tr}({}^tP{}^tMPN) \overset{1.1}{=} \mathrm{Tr}({}^tMPN{}^tP) = \langle M, PN{}^tP\rangle.\end{aligned}$$

On déduit alors que $F^*(M) = PM{}^tP$, pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a

$$F^* \circ F(M) \quad = \quad P^tPMP^tP \quad \text{et} \quad F \circ F^*(M) = {}^tPPM^tPP.$$

Or,

$$\begin{aligned} P^tP &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2, \\ {}^tPP &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2. \end{aligned}$$

Il en résulte que, pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$F^* \circ F(M) = F \circ F^*(M) = 4M; \tag{4.13}$$

F et F^* commutent et, par suite, F est un endomorphisme normal.

3. On a

$$\begin{aligned} F(e_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \\ F(e_2) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \\ F(e_3) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \\ F(e_4) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On déduit que la matrice de F dans $\mathbb{B}$ est donnée par

$$M_{\mathbb{B}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La base $\mathbb{B}$ étant orthonormale et donc, en vertu de la Proposition 23, la matrice de F^* dans $\mathbb{B}$ est la transposée de la matrice de F dans $\mathbb{B}$, soit

$$M_{\mathbb{B}}(F^*) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. En vertu de 4.13, on a $F \circ F^* = 4Id$. On déduit alors que F est inversible et que $F^{-1} = \frac{1}{4}F^*$.
5. On a

$$M_{\mathbb{B}}(\frac{1}{2}(F+F^*)) = \frac{1}{2}\left(M_{\mathbb{B}}(F) + M_{\mathbb{B}}(F^*)\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous allons calculer les valeurs propres de $\frac{1}{2}(F+F^*)$. Notons χ son polynôme caractéristique. On a

$$\begin{aligned}
\chi(X) &= \det\left(\frac{1}{2}(F+F^*) - XId\right) \\
&= \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-X & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-X & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} \qquad \big(\text{On développe suivant } L_1\big) \\
&= (1-X)\begin{vmatrix} 1-X & -1 & 0 \\ -1 & 1-X & 0 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1-X & -1 \\ 0 & -1 & 1-X \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&\overset{(a)}{=} (1-X)^2\left((1-X)^2 - 1\right) - \left((1-X)^2 - 1\right) \\
&= \left((1-X)^2 - 1\right)^2 = X^2(X-2)^2.
\end{aligned}$$

Dans (a), nous avons développé le premier déterminant suivant la dernière colonne et le deuxième suivant la première.
Les valeurs propres de $\frac{1}{2}(F+F^*)$ sont 0 et 2, toutes de multiplicité 2 et, en vertu du Corollaire 2, q est de signature $(2,0)$ et $\mathrm{rg} q = 2$.

Exercice 26 *Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques.*

1. *Montrer que si M est définie-positive alors MN est diagonalisable.*
2. *Montrer que si M et N sont positives et $MN = NM$ alors MN est symétrique positive.*

Solution -

On considère le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ donné par $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ et on notera J_M et J_N les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$ dont les matrices dans la base canonique sont, respectivement, M et N. Puisque M et N sont symétriques alors J_M et J_N sont symétriques pour $\langle\ ,\ \rangle$. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres réelles de J_M et $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ les sous-espaces propres correspondants. D'après le Théorème 12, on a

$$\mathbb{R}^N = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_p} \tag{4.14}$$

et les sous-espaces $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ sont deux-à-deux orthogonaux.

1. Le fait que M est définie-positive entraîne que $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont strictement positives, en vertu des Corollaires 2 et 3. En particulier, J_M est inversible et les valeurs propres de son inverse J_M^{-1}, qui sont $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_p^{-1}$, sont strictement positives. D'après le Corollaire 2, le produit $\langle\ ,\ \rangle_M$ défini par
$$\langle x, y\rangle_M = \langle J_M^{-1}(x), y\rangle$$
est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. Nous allons montrer que $J_M \circ J_N$ est symétrique par rapport à $\langle\ ,\ \rangle_M$. En effet, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$, on a
$$\begin{aligned}
\langle (J_M \circ J_N)(x), y\rangle_M &= \langle J_M^{-1}\left((J_M \circ J_N)(x)\right), y\rangle \\
&= \langle J_N(x), y\rangle \\
&= \langle x, J_N(y)\rangle \qquad (J_N \text{ est symétrique par rapport à } \langle\ ,\ \rangle) \\
&= \langle x, J_M^{-1}\left((J_M \circ J_N)(y)\right)\rangle \\
&= \langle x, (J_M \circ J_N)(y)\rangle_M.
\end{aligned}$$
On déduit alors, en vertu du Théorème 12, que $J_M \circ J_N$ est diagonalisable et donc sa matrice MN dans la base canonique est diagonalisable.
2. On a
$${}^t(MN) = {}^tN\,{}^tM = NM = MN$$
et donc MN est symétrique. Puisque $MN = NM$, on a $J_M \circ J_N = J_N \circ J_M$. On déduit alors que, pour tout $i = 1, \ldots, p$, E_{λ_i} est invariant par J_N, c'est-à-dire, $J_N(E_{\lambda_i}) \subset E_{\lambda_i}$. En effet, pour tout $x \in E_{\lambda_i}$, on a
$$J_M(J_N(x)) = J_N(J_M(x)) = J_N(\lambda_i x) = \lambda_i J_N(x)$$
et donc $J_N(x) \in E_{\lambda_i}$.
Maintenant, soit $x \in E$. D'après 4.14, il existe $x_1 \in E_{\lambda_1}, \ldots, x_p \in E_{\lambda_p}$ tels que $x = x_1 + \ldots + x_p$. On a alors
$$\begin{aligned}
\langle J_N \circ J_M(x), x\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} \langle J_N \circ J_M(x_i), x_j\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \langle J_N(x_i), x_j\rangle.
\end{aligned}$$

Or, pour tout $i \neq j$, $J_N(x_i) \in E_{\lambda_i}$, $x_j \in E_{\lambda_j}$ et puisque E_{λ_i} et E_{λ_i} sont orthogonaux, $\langle J_N(x_i), x_j\rangle = 0$. Ainsi

$$\langle J_N \circ J_M(x), x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle J_N(x_i), x_i\rangle.$$

Or, puisque J_N et J_M sont positifs, on a, pour tout $i = 1, \ldots, p$, $\langle J_N(x_i), x_i\rangle \geq 0$ et $\lambda_i \geq 0$. On déduit alors que $\langle J_N \circ J_M(x), x\rangle \geq 0$. Ceci montre que $J_N \circ J_M$ est positif et ainsi $MN = NM$ est positive.

Exercice 27 *Soit F un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien V de dimension n de valeurs propres $a_1 \leq \ldots \leq a_n$. Montrer que, pour tout $u \in V$,*

$$a_1\|u\|^2 \leq \langle F(u), u\rangle \leq a_n\|u\|^2. \tag{4.15}$$

Solution -

Choisissons une base orthonormale $\mathbb{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ telle que, pour tout $i = 1, \ldots, n$, $F(e_i) = a_i e_i$. Une telle base existe, en vertu du Théorème 12. Soit $u = u_1 e_1 + \ldots + u_n e_n$ un vecteur quelconque de V. On a

$$\begin{aligned}\langle F(u), u\rangle &= \sum_{i,j=1}^{n} u_i u_j \langle F(e_i), e_j\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} u_i u_j a_i \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 a_i. \quad (\mathbb{B} \text{ est une base orthonormale})\end{aligned}$$

Or, pour tout $i = 1, \ldots, n$, $a_1 \leq a_i \leq a_n$ et donc $u_i^2 a_1 \leq u_i^2 a_i \leq u_i^2 a_n$. En sommant ces doubles inégalités, on déduit 4.15.

Exercice 28 *Soient V un espace euclidien et F et G deux sous-espaces de V. On notera s_F et s_G les symétries orthogonales, respectivement, par rapport à F et G.*

1. *Montrer que si F et G sont orthogonaux alors $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{(F\oplus G)^\perp}$.*
2. *Montrer que si $F \subset G$ alors $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{F\oplus G^\perp}$.*

Solution -

Notons $\mathbf{p}_F$ et $\mathbf{p}_G$ les projections orthogonales, respectivement, sur F et G. On a, pour tout $u \in V$, $s_F(u) = 2\mathbf{p}_F(u) - u$ et $s_G(u) = 2\mathbf{p}_G(u) - u$. Ainsi

$$\begin{aligned} s_F \circ s_G(u) &= s_F(2\mathbf{p}_G(u) - u) = 2s_F(\mathbf{p}_G(u)) - s_F(u) \\ &= 4\mathbf{p}_F \circ \mathbf{p}_G(u) - 2\mathbf{p}_G(u) - 2\mathbf{p}_F(u) + u. \end{aligned} \tag{4.16}$$

D'un manière analogue, on obtient

$$s_G \circ s_F(u) = 4\mathbf{p}_G \circ \mathbf{p}_F(u) - 2\mathbf{p}_F(u) - 2\mathbf{p}_G(u) + u. \tag{4.17}$$

1. Si F et G sont orthogonaux, c'est-à-dire, $F \subset G^\perp$ et $G \subset F^\perp$, alors $\mathbf{p}_F \circ \mathbf{p}_G = \mathbf{p}_G \circ \mathbf{p}_F = 0$ et donc, en comparant 4.16 et 4.17, on déduit que $s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = -2(\mathbf{p}_F + \mathbf{p}_G) + Id_V$. Pour conclure, nous allons montrer que
$$\mathbf{p}_F + \mathbf{p}_G = Id_V - \mathbf{p}_{(F \oplus G)^\perp}.$$
Puisque $V = (F \oplus G) \oplus (F \oplus G)^\perp$, nous allons vérifier cette égalité pour tout $u \in (F \oplus G)$ et tout $v \in (F \oplus G)^\perp$. En effet, pour tout $u \in (F \oplus G)$, $u = u_1 + u_2$ avec $u_1 \in F$ et $u_2 \in G$. Ainsi
$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{(F \oplus G)^\perp}(u) &= 0, \\ \mathbf{p}_F(u) + \mathbf{p}_G(u) &= \mathbf{p}_F(u_1) + \mathbf{p}_G(u_1) + \mathbf{p}_F(u_2) + \mathbf{p}_G(u_2) \\ &= u_1 + u_2 = u. \end{aligned}$$
On déduit alors que $\mathbf{p}_F(u) + \mathbf{p}_G(u) = Id_V(u) - \mathbf{p}_{(F \oplus G)^\perp}(u)$. D'un autre côté, pour tout $v \in (F \oplus G)^\perp$, $\mathbf{p}_{(F \oplus G)^\perp}(v) = v$. Or, $(F \oplus G)^\perp \subset F^\perp$ et $(F \oplus G)^\perp \subset G^\perp$ et donc $\mathbf{p}_F(v) = \mathbf{p}_G(v) = 0$. Ainsi
$$\mathbf{p}_F(v) + \mathbf{p}_G(v) = Id_V(v) - \mathbf{p}_{(F \oplus G)^\perp}(v).$$
Ceci permet de conclure.
2. Si $F \subset G$ alors $V = (F \oplus G^\perp) \oplus G \cap F^\perp$ $((F \oplus G^\perp)^\perp = G \cap F^\perp)$. En vertu de cette décomposition, il suffit de vérifier que $s_F \circ s_G(u) = s_G \circ s_F(u) = s_{F \oplus G^\perp}(u)$, pour tout u, respectivement, dans F, dans $G^\perp$ et dans $G \cap F^\perp$.
Soit $u \in F$, on a
$$\begin{aligned} s_F \circ s_G(u) &\overset{4.16}{=} 4\mathbf{p}_F \circ \mathbf{p}_G(u) - 2\mathbf{p}_G(u) - 2\mathbf{p}_F(u) + u && (u \in F \subset G) \\ &= 4u - 2u - 2u + u = u. \\ s_G \circ s_F(u) &\overset{4.17}{=} 4\mathbf{p}_G \circ \mathbf{p}_F(u) - 2\mathbf{p}_G(u) - 2\mathbf{p}_F(u) + u && (u \in F \subset G) \\ &= 4u - 2u - 2u + u = u. \\ s_{F \oplus G^\perp}(u) &= 2\mathbf{p}_{F \oplus G^\perp}(u) - u = 2u - u = u. \end{aligned}$$

Soit $u \in G^\perp$, on a

$$\begin{array}{rcll} s_F \circ s_G(u) & \stackrel{4.16}{=} & 4\mathbf{p}_F \circ \mathbf{p}_G(u) - 2\mathbf{p}_G(u) - 2\mathbf{p}_F(u) + u & (u \in G^\perp \subset F^\perp) \\ & = & u. & \\ s_G \circ s_F(u) & \stackrel{4.17}{=} & 4\mathbf{p}_G \circ \mathbf{p}_F(u) - 2\mathbf{p}_G(u) - 2\mathbf{p}_F(u) + u & (u \in G^\perp \subset F^\perp) \\ & = & u. & \\ s_{F\oplus G^\perp}(u) & = & 2\mathbf{p}_{F\oplus G^\perp}(u) - u = 2u - u = u. & \end{array}$$

Soit $u \in G \cap F^\perp$, on a

$$\begin{array}{rcl} s_F \circ s_G(u) & \stackrel{4.16}{=} & 4\mathbf{p}_F \circ \mathbf{p}_G(u) - 2\mathbf{p}_G(u) - 2\mathbf{p}_F(u) + u \\ & = & -2u + u = -u. \\ s_G \circ s_F(u) & \stackrel{4.17}{=} & 4\mathbf{p}_G \circ \mathbf{p}_F(u) - 2\mathbf{p}_G(u) - 2\mathbf{p}_F(u) + u \\ & = & -2u + u = -u. \\ s_{F\oplus G^\perp}(u) & = & 2\mathbf{p}_{F\oplus G^\perp}(u) - u \qquad (u \in G \cap F^\perp = (F \oplus G^\perp)^\perp) \\ & = & -u. \end{array}$$

Dans les trois cas, on a l'égalité souhaitée et on déduit alors que

$$s_F \circ s_G = s_G \circ s_F = s_{F\oplus G^\perp}.$$

Exercice 29 *Soient V un espace euclidien et $F \in \mathbb{O}(V)$. On pose $G = Id_V - F$.*

1. *Montrer que* $\ker G = (ImG)^\perp$.
2. *Soit* $\mathbf{p}$ *la projection orthogonale sur* $\ker G$. *Montrer que, pour tout $u \in V$,*

$$\lim_{m \longrightarrow +\infty} \left\| \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} F^k(u) - \mathbf{p}(u) \right\|^2 = 0. \tag{4.18}$$

Solution -

1. Soit $u \in \ker G$. Pour tout $G(v) \in \mathrm{Im}G$, on a

$$\begin{array}{rcl} \langle u, G(v)\rangle & = & \langle u, v - F(v)\rangle \\ & = & \langle u, v\rangle - \langle u, F(v)\rangle \\ & = & \langle u, v\rangle - \langle F(u), F(v)\rangle \qquad (G(u) = u - F(u) = 0) \\ & = & \langle u, v\rangle - \langle u, v\rangle \qquad (F \in \mathbb{O}(V)) \\ & = & 0, \end{array}$$

et donc $u \in (\mathrm{Im}G)^{\perp}$. Ceci montre que $\ker G \subset (\mathrm{Im}G)^{\perp}$.
Inversement, soit $u \in (\mathrm{Im}G)^{\perp}$. On a

$$\begin{aligned}
\|G(u)\|^2 &= \langle u - F(u), u - F(u)\rangle \\
&= \langle u, u\rangle + \langle F(u), F(u)\rangle - 2\langle u, F(u)\rangle \qquad (F \in \mathbb{O}(V)) \\
&= 2\left(\langle u, u\rangle - \langle u, F(u)\rangle\right) \\
&= 2\langle u, G(u)\rangle \qquad (u \in (ImG)^{\perp}) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

et donc $G(u) = 0$, soit $u \in \ker G$. On a alors $(\mathrm{Im}G)^{\perp} \subset \ker G$.
Finalement, $\ker G = (\mathrm{Im}G)^{\perp}$.

2. D'après la question 1 et en vertu de la Proposition 19, $V = \ker G \oplus ImG$. Ainsi, pour tout $u \in V$, il existe $v \in V$ tel que $u = \mathbf{p}(u) + G(v) = \mathbf{p}(u) + v - F(v)$. Or, puisque $\mathbf{p}(u) \in \ker G$, $F(\mathbf{p}(u)) = \mathbf{p}(u)$. On déduit alors que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$F^k(u) = \mathbf{p}(u) + F^k(v) - F^{k+1}(v).$$

Ainsi, si $Q(u) = \left\|\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} F^k(u) - \mathbf{p}(u)\right\|^2$, on a

$$\begin{aligned}
Q(u) &= \left\|\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\Big(\mathbf{p}(u) + F^k(v) - F^{k+1}(v)\Big) - \mathbf{p}(u)\right\|^2 \\
&= \left\|\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\mathbf{p}(u) + \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}(F^k(v) - F^{k+1}(v)) - \mathbf{p}(u)\right\|^2 \\
&= \left\|\frac{1}{m}(v - F^m(v))\right\|^2 \\
&= \frac{1}{m^2}\left(\|v\|^2 + \|F^m(v)\|^2 - 2\langle v, F^m(v)\rangle\right) \qquad (F \in \mathbb{O}(V)) \\
&= \frac{2}{m^2}\left(\|v\|^2 - \langle v, F^m(v)\rangle\right) \\
&\overset{(a)}{\leq} \frac{2}{m^2}\left(\|v\|^2 + \|v\|\|F^m(v)\|\right) \quad (\|F^m(v)\| = \|v\|, F \in \mathbb{O}(V)) \\
&= \frac{4}{m^2}\left(\|v\|^2\right).
\end{aligned}$$

Dans (a), nous avons utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz (cf. Théorème 7). On déduit alors 4.18.

Exercice 30 *On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit euclidien canonique et on considère l'endomorphisme F de $\mathbb{R}^3$ dont la matrices dans la base canonique est*

$$M(F) = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & -1 & -4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Montrer que F est une isométrie de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa nature.

Solution - Notons f_1, f_2, f_3 les vecteurs colonnes de $M(F)$. En vertu des Propositions 27 et 28, F est une isométrie si et seulement si (f_1, f_2, f_3) est une base orthonormale. Or,

$$\begin{array}{rcl} \langle f_1, f_1\rangle & = & \frac{1}{81}(64+16+1) = 1, \quad \langle f_2, f_2\rangle = \frac{1}{81}(1+16+64) = 1, \\ \langle f_3, f_3\rangle & = & \frac{1}{81}(16+49+16) = 1, \quad \langle f_1, f_2\rangle = \frac{1}{81}(-8+16-8) = 0, \\ \langle f_1, f_3\rangle & = & \frac{1}{81}(-32+28+4) = 0, \quad \langle f_2, f_3\rangle = \frac{1}{81}(4+28-32) = 0. \end{array}$$

Ainsi $F \in \mathbb{O}(\mathbb{R}^3)$. D'un autre côté,

$$\begin{array}{rcl} \det(F) & = & \frac{1}{729}\begin{vmatrix} 8 & -1 & -4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{vmatrix} \\ & = & \frac{1}{729}\left(8\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -8 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & -8 \end{vmatrix}\right) \\ & = & \frac{1}{729}(8(16+56) + (16-7) - 4(-32-4)) = 1. \end{array}$$

On déduit que $F \in \mathbb{SO}(\mathbb{R}^3)$. En vertu du Théorème 16, F est une rotation d'axe $\Delta = \ker(F - Id)$. Nous allons déterminer Δ et l'angle θ de la rotation. Commençons par déterminer Δ. On a

$$(x,y,z) \in \Delta \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 8x - y - 4z & = & 9x \\ 4x + 4y + 7z & = & 9y \\ x - 8y + 4z & = & 9z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x + y + 4z & = & 0 \\ 4x - 5y + 7z & = & 0 \\ x - 8y - 5z & = & 0 \end{array}\right.$$

En retranchant quatre fois la première équation à la deuxième et une fois la première à la troisième, on obtient

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + y + 4z & = & 0 \\ -9y - 9z & = & 0 \\ -9y - 9z & = & 0 \end{array}\right.$$

On obtient donc que $y = -z$ et $x = -5z$. Ainsi Δ est la droite vectorielle engendrée par $(-3, -1, 1)$.

D'un autre côté, toujours en vertu du Théorème 16, $2\cos\theta+1 = \mathrm{T}r(F) = \frac{16}{9}$. On déduit que $\cos\theta = \frac{7}{18}$.

Exercice 31 *Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit euclidien canonique et on considère l'endomorphisme F de $\mathbb{R}^3$ dont la matrices dans la base canonique est*

$$M(F) = \begin{pmatrix} a^2 & ab-c & ac+b \\ ab+c & b^2 & bc-a \\ ac-b & bc+a & c^2 \end{pmatrix}.$$

Donner les conditions nécessaires et suffisantes pour que F soit une isométrie de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa nature.

Solution - Notons f_1, f_2, f_3 les vecteurs colonnes de $M(F)$. En vertu des Propositions 27 et 28, F est une isométrie si et seulement si (f_1, f_2, f_3) est une base orthonormale. Or,

$$\begin{aligned}
\langle f_1, f_1\rangle &= a^4 + (ab+c)^2 + (ac-b)^2 = a^2(a^2+b^2+c^2) + b^2 + c^2, \\
\langle f_2, f_2\rangle &= (ab-c)^2 + b^4 + (bc+a)^2 = b^2(a^2+b^2+c^2) + a^2 + c^2, \\
\langle f_3, f_3\rangle &= (ac+b)^2 + (bc-a)^2 + c^4 = c^2(a^2+b^2+c^2) + a^2 + b^2, \\
\langle f_1, f_2\rangle &= a^2(ab-c) + (ab+c)b^2 + (ac-b)(bc+a) = ab(a^2+b^2+c^2-1), \\
\langle f_1, f_3\rangle &= a^2(ac+b) + (ab+c)(bc-a) + (ac-b)c^2 = ac(a^2+b^2+c^2-1), \\
\langle f_2, f_3\rangle &= (ab-c)(ac+b) + b^2(bc-a) + (bc+a)c^2 = bc(a^2+b^2+c^2-1).
\end{aligned}$$

Il en résulte que (f_1, f_2, f_3) est une base orthonormale si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{l} a^2(a^2+b^2+c^2) + b^2 + c^2 = 1 \\ b^2(a^2+b^2+c^2) + a^2 + c^2 = 1 \\ c^2(a^2+b^2+c^2) + a^2 + b^2 = 1 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} ab(a^2+b^2+c^2-1) = 0 \\ ac(a^2+b^2+c^2-1) = 0 \\ bc(a^2+b^2+c^2-1) = 0 \end{array}\right.$$

Or

$$\left\{\begin{array}{l} ab(a^2+b^2+c^2-1) = 0 \\ ac(a^2+b^2+c^2-1) = 0 \\ bc(a^2+b^2+c^2-1) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow (ab = ac = bc = 0) \quad \text{ou} \quad (a^2+b^2+c^2 = 1).$$

La condition $ab = ac = bc = 0$ est équivalente à $(a, b) = (0, 0)$ ou $(a, c) = (0, 0)$ ou $(b, c) = (0, 0)$. Or, si par exemple $(a, b) = (0, 0)$, le premier système est équivalent à $c^2 = 1$ et donc $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Ainsi, (f_1, f_2, f_3) est une base orthonormale si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Finalement, F est une isométrie si et seulement si $a^2+b^2+c^2=1$. Nous allons maintenant étudier les caractéristiques de F dans ce cas. On a

$$\begin{aligned}
\det(F) &= \begin{vmatrix} a^2 & ab-c & ac+b \\ ab+c & b^2 & bc-a \\ ac-b & bc+a & c^2 \end{vmatrix} \\
&= a^2 \begin{vmatrix} b^2 & bc-a \\ bc+a & c^2 \end{vmatrix} - (ab-c) \begin{vmatrix} ab+c & bc-a \\ ac-b & c^2 \end{vmatrix} \\
&\quad + (ac+b) \begin{vmatrix} ab+c & b^2 \\ ac-b & bc+a \end{vmatrix} \\
&= a^2(b^2c^2-(bc-a)(bc+a)) - (ab-c)(c^2(ab+c)-(ac-b)(bc-a)) \\
&\quad +(ac+b)((bc+a)(ab+c)-b^2(ac-b)) \\
&= a^2(b^2c^2-b^2c^2+a^2) - (ab-c)(abc^2+c^3-abc^2+a^2c+b^2c-ab) \\
&\quad +(ac+b)(ab^2c+bc^2+a^2b+ac-ab^2c+b^3) \\
&= a^4-(ab-c)(c(c^2+a^2+b^2)-ab) \\
&\quad +(ac+b)(b(c^2+a^2+b^2)+ac) \qquad (a^2+b^2+c^2=1) \\
&= a^4+(ab-c)^2+(ac+b)^2 = a^4+a^2b^2+c^2+a^2c^2+b^2 \\
&= a^2(a^2+b^2+c^2)+c^2+b^2 = 1.
\end{aligned}$$

Ainsi $F \in \mathbb{SO}(\mathbb{R}^3)$ et, en vertu du Théorème 16, F est une rotation d'axe $\Delta = \ker(F - Id)$. Nous allons déterminer Δ et l'angle θ de la rotation. Commençons par déterminer Δ. On a

$$(x,y,z) \in \Delta \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} (a^2-1)x+(ab-c)y+(ac+b)z &=& 0 \\ (ab+c)x+(b^2-1)y+(bc-a)z &=& 0 \\ (ac-b)x+(bc+a)y+(c^2-1)z &=& 0 \end{array} \right.$$

On a deux cas :

1. $a^2-1=b^2+c^2=0$, c'est-à-dire, $b=c=0$ et $a^2=1$. Le système s'écrit alors
$$\left\{ \begin{array}{rcl} y+az &=& 0 \\ ay-z &=& 0 \end{array} \right.$$
soit $y=z=0$. Dans ce cas Δ est la droite vectorielle engendrée par $(1,0,0)$.
2. $a^2-1 \neq 0$. En retranchant de la deuxième et la troisième équation, respectivement, $\frac{ab+c}{a^2-1}$ fois la première équation et $\frac{ac-b}{a^2-1}$ fois la première équation, et en utilisant la relation $a^2+b^2+c^2=1$, le système devient
$$\left\{ \begin{array}{ccl} (a^2-1)x+(ab-c)y+(ac+b)z &=& 0 \\ c(cy-bz) &=& 0 \\ b(-cy+bz) &=& 0 \end{array} \right.$$

Comme $(b,c) \neq (0,0)$, ce système est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (a^2-1)x+(ab-c)y+(ac+b)z & = & 0 \\ cy-bz & = & 0 \end{array} \right.$$

Ainsi Δ est la droite vectorielle engendrée par (a,b,c).

D'un autre côté, toujours en vertu du Théorème 16,

$$2\cos\theta + 1 = \mathrm{T}r(F) = a^2+b^2+c^2 = 1.$$

On déduit que $\cos\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Pour résumer, nous pouvons dire que F est une isométrie si et seulement si $a^2+b^2+c^2=1$. Dans ce cas, F est une rotation d'axe $\Delta = \mathbb{R}(a,b,c)$ et d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Chapitre 5

Espaces préhilbertiens complexes

5.1 Rappels de cours

Dans tout ce chapitre, V désigne un espace vectoriel complexe.

5.1.1 Produit scalaire hermitien, norme hermitienne et inégalité de Cauchy-Schwarz

Définition 23 *Un* produit scalaire hermitien *sur V est une application $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. *$\langle\ ,\ \rangle$ est* linéaire à droite*, c'est-à-dire que, pour tous $u, v, w \in V$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$,*
$$\langle u, v + \lambda w\rangle = \langle u, v\rangle + \lambda\langle u, w\rangle;$$
2. *$\langle\ ,\ \rangle$ est*semi-linéaire à gauche*, c'est-à-dire que, pour tous $u, v, w \in V$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$,*
$$\langle v + \lambda w, u\rangle = \langle v, u\rangle + \bar{\lambda}\langle w, u\rangle;$$
3. *$\langle\ ,\ \rangle$ est* symétrique hermitienne*, c'est-à-dire que, pour tous $u, v \in V$,*
$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle};$$
4. *$\langle\ ,\ \rangle$ est* définie positive*, c'est-à-dire que, pour tout $u \in V\setminus\{0\}$, $\langle u, u\rangle > 0$.*

Un espace vectoriel complexe muni d'un produit scalaire hermitien est appelé *espace préhilbertien complexe.*

Un espace vectoriel complexe de dimension finie muni d'un produit scalaire hermitien est appelé *espace hermitien.*

Remarques - Le lecteur attentif remarquera les analogies entre les espaces préhilbertiens réels et les espaces préhilbertiens complexes. Il notera aussi les différences remarquables.

Si $\mathbb{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base d'un espace hermitien $(V, \langle\ ,\ \rangle)$, alors la matrice de $\langle\ ,\ \rangle$ dans $\mathbb{B}$ est la matrice $M = (\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leq i,j \leq n}$ et pour tous $u, v \in V$, on a

$$\langle u, v \rangle = (\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_n) M \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

où $(u_1, \ldots, u_n)$ et $(v_1, \ldots, v_n)$ sont les coordonnées respectives de u et v dans $\mathbb{B}$.

Exemples -

1. L'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ muni de $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i$est un espace hermitien. Le produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^n$ ainsi défini est appelé *produit scalaire hermitien canonique* de $\mathbb{C}^n$.
2. L'application $\langle\ ,\ \rangle : C([a,b], \mathbb{C}) \times C([a,b], \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par
$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(t)} g(t) dt$$
est un produit scalaire hermitien sur $C([a,b], \mathbb{C})$.
3. Sur l'espace $C_{2\pi}$ des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continues et 2π-périodiques, le produit
$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt$$
est un produit scalaire hermitien.
4. L'ensemble $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ des suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres complexes telles que la série $\sum_n |u_n|^2$ converge est un espace vectoriel complexe. Si u et v sont dans cet espace, la série $\sum_n \overline{u}_n v_n$ converge absolument, donc converge. Posons
$$\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{u}_n v_n.$$
On définit ainsi un produit scalaire hermitien sur $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$.

La proposition suivante montre qu'on peut définir un produit scalaire sur l'espace vectoriel des matrices carrées complexes d'ordre n.

Proposition 31 *L'application* $\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$ *définie par*

$$\langle M, N \rangle = \mathrm{Tr}({}^t\overline{M} N)$$

est un produit scalaire hermitien sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Notons que si $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $N = (n_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ alors

$$\langle M, N\rangle = \sum_{1\leq i,j\leq n} \overline{m}_{ij} n_{ij}. \tag{5.2}$$

Proposition 32 *Soit V un espace préhilbertien complexe. Alors l'application $u \mapsto \|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$ est une* norme *sur V, c'est-à-dire qu'elle vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\|u\| = 0$ *si et seulement si* $u = 0$,
2. *pour tout* $u \in V$ *et tout* $a \in \mathbb{C}$, $\|au\| = |a|\|u\|$,
3. *pour tous* $u, v \in V$,

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|. \quad \textbf{(Inégalité de Minkowski)}.$$

Cette norme est appelée norme préhilbertiennne ou hermitienne.

On associe naturellement à une norme une distance.

Proposition 33 *Soit V un espace préhilbertien. Alors l'application $u \mapsto (u, v) = \|u - v\|$ est une* distance *sur V, c'est-à-dire que cette application vérifie les propriétés suivantes :*

1. $d(u, v) = 0$ *si et seulement si* $u = v$,
2. *pour tous* $u, v \in V$, $d(u, v) = d(v, u)$,
3. *pour tous* $u, v, w \in V$,

$$d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v). \quad \textbf{(Inégalité triangulaire)}.$$

Cette distance est appelée distance préhilbertiennne ou hermitienne.

Les identités remarquables suivantes sont valables dans un espace préhilbertien complexe et elles sont faciles à vérifier :

1. pour tous $u, v \in V$,

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2.$$

2. *Identité du parallélogramme* : Pour tous $u, v \in V$,

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right).$$

Dans un espace préhilbertien complexe l'identité de polarisation est différente de celle obtenue dans le cas réel. (*cf.* Chap. 3).

Proposition 34 Identité de polarisation *Soit V un espace préhilbertien complexe. Alors, pour tous $u, v \in V$, on a*

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}\sum_{p=0}^{3} \imath^{-p}\|u + \imath^p v\|^2.$$

Théorème 17 Inégalité de Cauchy-Schwarz *Soit V un espace préhilbertien complexe. Alors pour tous $u, v \in V$ on a*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|,$$

l'égalité étant réalisée si et seulement si u et v sont liés.

5.1.2 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Définition 24
1. *Un vecteur u dans un espace préhilibertien complexe est dit* unitaire *si $\|u\| = 1$.*
2. *Une famille $(v_i)_{i\in I}$ de vecteurs dans un espace préhilbertien complexe V est dite* orthogonale *si, pour tous $i, j \in I$ avec $i \neq j$, on a $\langle v_i, v_j\rangle = 0$. Si en plus, pour tout $i \in I$, v_i est unitaire, on dira que la famille est* orthonormale .

Proposition 35
1. *Toute famille orthogonale de vecteurs tous non nuls dans un espace préhilbertien est libre.*
2. *Si $(u_1, \ldots, u_p)$ est une famille orthogonale dans un espace préhilbertien V alors*
$$\|u_1 + \ldots + u_p\|^2 = \|u_1\|^2 + \ldots + \|u_p\|^2.$$

Proposition 36 *Soit V un espace euclidien de dimension n et $e_1, \ldots, e_n \in V$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de V.*
2. *$(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille orthonormale de V.*

Les bases orthonormales dans un espace vectoriel hermitien $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ jouent un rôle central. Elles facilitent énormément les calculs.

Proposition 37 *Soit V un espace euclidien de dimension n, et soit $\mathbb{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de V. Alors, pour tous $u, v \in V$,*

$$u = \sum_{k=1}^{n}\langle e_k, u\rangle e_k, \quad \|u\|^2 = \sum_{k=1}^{n}|\langle e_k, u\rangle|^2 \quad et \quad \langle u, v\rangle = \sum_{k=1}^{n}\overline{\langle e_k, u\rangle}\langle e_k, v\rangle.$$

Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt est un moyen de construire des bases orthonormales.

Théorème 18 Orthonormalisation de Gram-Schmidt *Soit V un espace préhilbertien complexe. Pour toute famille libre $(v_1, \ldots, v_p)$ de V, il existe une unique famille orthonormale $(e_1, \ldots, e_p)$ telle que, pour tout $k = 1, \ldots, p$,*

$$Vect\{e_1, \ldots, e_k\} = Vect\{v_1, \ldots, v_k\} \quad et \quad \langle e_k, v_k\rangle > 0.$$

La construction de la famille $(e_1, \ldots, e_p)$ peut se faire en utilisant l'algorithme suivant. Tout d'abord on construit la famille orthogonale $(f_1, \ldots, f_p)$ de la manière suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f_1 & = & v_1 \\ f_k & = & v_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle f_j, v_k\rangle}{\|f_j\|^2} f_j, \ (k = 2, \ldots, p), \end{array}\right. \tag{5.3}$$

puis on pose $e_k = \frac{1}{\|f_k\|} f_k$ pour tout entier k compris entre 1 et p.

Remarques - Notons que dans les formules de la Proposition 37 et dans les formules 5.3 l'ordre du produit est important, par exemple, dans 5.3 si on prenait $\langle v_k, f_j\rangle$ au lieu de $\langle f_j, v_k\rangle$ la formule deviendrait incorrecte. Ce problème ne se posait pas dans le cas des espaces préhilbertien réels, puisque dans ce cas, le produit est symétrique.

Le résultat suivant est une conséquence du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt et du théorème de la base incomplète.

Proposition 38 *Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille orthonormale dans un espace hermitien V de dimension n.*
Alors il existe $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ tels que $(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ soit une base orthonormale.

Soit V un espace préhilbertien. *L'orthogonal* d'un sous-espace vectoriel F de V est l'ensemble $F^\perp = \{u \in V; \langle u, v\rangle = 0 \quad \forall v \in F\}$. $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de V et on a, d'une manière simple,

$$F \subset F^{\perp\perp} \quad \text{et} \quad F \cap F^\perp = \{0\}.$$

Remarques - Dans un espace préhilbertien quelconque V, il n'est pas vrai en général que $V = F \oplus F^\perp$. De même, on n'a pas focément $F = F^{\perp\perp}$. Cependant ses résultats sont vrais si V est hermitien.

Proposition 39 *Soit V un espace hermitien et F un sous-espace vectoriel de V. Alors*

$$V = F \oplus F^\perp \quad et \quad F = F^{\perp\perp}.$$

5.1.3 Meilleure approximation et projection orthogonale dans un espace préhilbertien complexe

Définition 25 *Soient V un espace préhilbertien, $\mathcal{A}$ une partie non vide de V et u un vecteur de V. On appelle* distance de u à $\mathcal{A}$, *notée $d(u,\mathcal{A})$, le réel* $d(u,\mathcal{A}) = \inf_{u\in\mathcal{A}} d(u,v)$.

Théorème 19 *Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace préhilbertien V. Alors, pour tout $u \in V$, il existe un unique vecteur $v_0 \in F$ tel que*

$$d(u,F) = d(u,v_0).$$

Ce vecteur est l'unique vecteur appartenant à F tel que $u - v_0 \in F^\perp$ et si $(e_1,\dots,e_p)$ est une base de F alors

$$v_0 = \sum_{i=1}^{p} \langle e_i, u\rangle e_i.$$

Définition 26 *Si $u \in V$, alors le vecteur v_0 défini dans le théorème précédent est la* meilleurs approximation *de u dans F. En considérant la caractérisation géométrique $u - v_0 \in F^\perp$, on dit aussi que v_0 est la* projection orthogonale *de u sur F. On note $v_0 = \mathbf{p}_F(u)$.*

Proposition 40 *Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie dans un espace préhilbertien V. La projection orthogonale $\mathbf{p}_F : V \longrightarrow F$ est une application linéaire et, pour tout $u \in F$ et tout $v \in F^\perp$, $\mathbf{p}_F(u) = u$ et $\mathbf{p}_F(v) = 0$.*

Théorème 20 *Soit V un espace préhilbertien complexe et soit $(e_k)_{k\in I}$ une famille orthonormale de V. Alors, pour tout $u \in V$ et pour toute famille finie J de I, on a*

$$\sum_{j\in J} |\langle e_j, u\rangle|^2 \le \|u\|^2 \quad \textbf{(Inégalité de Bessel)},$$

et la projection orthogonale de u sur $Vect(e_j)_{j\in J}$ est $\sum_{j\in J} \langle e_j, u\rangle e_j$.

Exemples - Soit $V = C^0_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'espace vectoriel complexe des fonctions continues 2π-périodiques. Pour tous $f, g \in V$, on pose

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t)dt.$$

$\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire hermitien sur V. On considère les fonctions $(e_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ définies par

$$\forall (m,x) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{R}, \qquad e_m(x) = e^{\imath m x},$$

et on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_n = Vect\{e_n, \dots, e_{-1}, e_0, e_1, \dots, e_n\}.$$

$\mathbb{B} = (e_n, \dots, e_{-1}, e_0, e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de F_n. En effet, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on a

$$\langle e_m, e_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\imath mt}e^{\imath nt}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\imath(n-m)t}dt = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq m, \\ 1 & \text{si} \quad n = m. \end{cases}$$

Pour toute fonction $f \in V$ et tout $m \in \mathbb{Z}$, on note $c_m = \langle e_m, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-\imath mt}f(t)dt$. En vertu du Théorème 20, on déduit l'ingalité de Bessel

$$\forall (n, f) \in \mathbb{N} \times V, \qquad \sum_{m=-n}^{n} |c_m|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt. \tag{5.4}$$

5.1.4 Endomorphismes dans un espace hermitien

Dans cette section, V est un espace hermitien de dimension complexe n, $\langle\ ,\ \rangle$ et $\|\ \|$ désignent, respectivement, le produit scalaire hermitien et la norme hermitienne associée.

1. **Adjoint d'un endomorphisme**

   Proposition 41 *Soit f un endomorphisme de V. Il existe un unique endomorphisme $g : V \longrightarrow V$ tel que*

   $$\forall (u, v) \in V \times V, \quad \langle f(u), v\rangle = \langle u, g(v)\rangle. \tag{5.5}$$

   Définition 27 *L'unique endomorphisme g vérfiant 5.5 s'appelle* endomorphisme adjoint *de f et sera noté f^*.*

   Les propriétés élémentaires de l'adjoint sont rassemblées dans la proposition suivante.

   Proposition 42 *Soient f et g deux endomorphismes de V. Alors on a :*

   (a) $(f^*)^* = f$ *et pour toute base orthonormale $\mathbb{B}$ de V,*

   $$M_{\mathbb{B}}(f^*) = {}^t\overline{M_{\mathbb{B}}(f)},$$

   (b) $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$,

   (c) $Id_V^* = Id_V$ *et si f est inversible alors f^* est inversible et* $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

   (d) Les polynômes caractéristiques et minimaux de f et f^* sont conjugués. En particulier, $\det(f^*) = \overline{\det(f^*)}$ *et* $\mathrm{Tr}(f^*) = \overline{\mathrm{Tr}(f)}$.

   (e) f est diagonalisable si et seulement si f^* est diagonalisable.

Définition 28 *Soit f un endomorphisme de V.*

(a) f est dit autoadjoint *(ou* hermitien*) si $f^* = f$;*

(b) f est dit antihermitien *si $f^* = -f$;*

(c) f est dit normal *si $f \circ f^* = f^* \circ f$.*

En considérant $V = \mathbb{C}^n$ muni de son produit scalaire canonique ; en utilisant la correspondance canonique de $\mathcal{L}(V)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il est possible de définir les notions matricielles analogues.

Définition 29 *(a) Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la matrice $M^* = {}^t\overline{M}$ s'appelle* matrice adjointe *de M.*

(b) La matrice M est dite hermitienne *si $M^* = M$.*

(c) La matrice M est dite antihermitienne *si $M^* = -M$.*

(d) La matrice M est dite normale *si $MM^* = M^*M$.*

En paraphrasant la Proposition 42, on déduit la proposition suivante.

Proposition 43 *Soient M et N deux matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors on a :*

(a) $(M^*)^* = M$ et $(MN)^* = N^*M^*$,

(b) $Id_n^* = Id_n$ et si M est inversible alors M^* est inversible et $(M^*)^{-1} = (M^{-1})^*$.

(c) Les polynômes caractéristiques et minimaux de M et M^* sont conjugués. En particulier, $\det(M^*) = \overline{\det(M^*)}$ et $\mathrm{Tr}(M^*) = \overline{\mathrm{Tr}(M)}$.

(d) M est diagonalisable si et seulement si M^* est diagonalisable.

2. **Groupe unitaire**

Définition 30 *Un endomorphisme f de V est dit* unitaire *s'il conserve le produit scalaire hermitien, c'est-à-dire que, pour tous $u, v \in V$,*

$$\langle f(u), f(v)\rangle = \langle u, v\rangle.$$

Exemples - L'endomophisme T de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $T(M) = M^*$ est un endomorphisme unitaire pour le produit scalaire hermitien canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (*cf.* Proposition 31). En effet, pour tous $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a

$$\begin{aligned}\langle M^*, N^*\rangle &= \mathrm{Tr}((M^*)^*N^*) = \mathrm{Tr}(MN^*)\\ &= \mathrm{Tr}(N^*M) = \langle N, M\rangle.\end{aligned}$$

Il y a plusieurs manières de vérifier qu'un endomorphisme est unitaire. Les propriétés caractéristiques des endomorphismes unitaires sont regroupées dans le théorème suivant.

Théorème 21 *Soit f un endomorphisme de V. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(a) f est un endomorphisme unitaire.

(b) Pour tout $u \in V$, $\|f(u)\| = \|u\|$ (conservation de la norme).

(c) f est inversible et $f^{-1} = f^*$ (l'inverse égale l'adjoint).

(d) $f \circ f^* = f^* \circ f = Id_V$.

(e) Il existe une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de V telle que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ soit aussi une base orthonormale.

(f) Pour toute base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de V, $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est aussi une base orthonormale (conservation des bases orthonormales).

Remarques - Un endomorphisme unitaire f est nécessairement inversible et de la relation $f \circ f^* = f^* \circ f = Id_V$ et du fait que $\det(f^*) = \overline{\det(f)}$ on déduit que $|\det(f)|^2 = 1$, c'est-à-dire que, $\det(f) \in \mathbb{U}(1) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$.

On notera $\mathbb{U}(E)$ l'ensemble des automorphismes unitaires de V et $\mathbb{SU}(V) = \{f \in \mathbb{U}(V);\ \det(f) = 1\}$.

Proposition 44 *(a) $\mathbb{U}(V)$ est un groupe appelé* groupe unitaire *de V.*

(b) $\mathbb{SU}(V)$ est un sous-groupe de $\mathbb{U}(V)$ appelé groupe spécial unitaire *de V.*

Définition 31 *Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite* unitaire *(resp.* spéciale unitaire*) si $M^*M = I_n$ (resp. $M^*M = I_n$ et $\det M = 1$).*

Proposition 45 *Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(a) M est unitaire.

(b) M^* est orthogonale.

(c) Les vecteurs colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{C}^n$ muni de son produit scalaire hermitien canonique.

(d) Les vecteurs lignes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{C}^n$ muni de son produit scalaire hermitien canonique.

Proposition 46 *(a) La matrice d'un endomorphisme unitaire de V dans une base orthonormale est une matrice orthogonale.*

(b) La matrice de passage d'une base orthonormale à une base orthonormale est une matrice unitaire.

On notera $\mathbb{U}(n)$ l'ensemble des matrices unitaire d'ordre n et $\mathbb{SU}(n) = \{M \in \mathbb{U}(n);\ \det(M) = 1\}$.

Proposition 47 *(a) $\mathbb{U}(n)$ est un groupe appelé* groupe unitaire *d'ordre n.*

(b) Le groupe $\mathbb{SU}(n)$ est un sous-groupe de $\mathbb{U}(n)$ appelé groupe spécial unitaire *d'ordre n.*

3. **Réduction des endomorphismes normaux**

Le théorème suivant est parmi les théorèmes les plus importants de l'algèbre linéaire (comparer au Théorème 12). Il est appelé *théorème spectral* pour un endomorphisme normal.

Théorème 22 *Soit f un endomorphisme normal d'un espace hermitien V. Alors f est diagonalisable. Plus précisement, V est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de f ; en particulier, V admet une base orthonormale de vecteurs propres de f.*

Remarque 1 *Ce théorème s'applique, en particulier, à des endomorphismes unitaires, hermitiens ou antihermitiens qui sont tous normaux. On distinguera ces endomorphismes grâce à l'étude de leurs valeurs propres.*

Théorème 23 *Soit f un endomorphisme normal de V. Alors :*

(a) f est hermitien si et seulement si toutes les valeurs propres de f sont réelles,

(b) f est antihermitien si et seulement si toutes les valeurs propres de f sont imaginaires pures,

(c) f est unitaire si et seulement si toutes les valeurs propres de f sont de module 1.

Considérons l'espace hermitien $\mathbb{C}^n$ muni de son produit scalaire hermitien canonique. On peut alors traduire immédiatement les résultats précédents.

Théorème 24 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors :*

(a) M est normale si et seulement s'il existe $P \in \mathbb{U}(n)$ telle que P^*MP soit diagonale,

(b) M est hermitienne si et seulement s'il existe $P \in \mathbb{U}(n)$ telle que P^*MP soit diagonale réelle,

(c) M est antihermitienne si et seulement s'il existe $P \in \mathbb{U}(n)$ telle que P^*MP soit diagonale à coefficients diagonaux dans $\imath\mathbb{R}$.

5.2 Exercices

Exercice 32 *1. Montrer que l'application* $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ *définie par*

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = \sum_{i=1}^{3} \overline{x}_i y_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \le i < j \le 3} (\overline{x}_i y_j + \overline{x}_j y_i)$$

est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^3$.

2. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Montrer que l'application* $\langle\ ,\ \rangle_n : \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathbb{C}$ *définie par*

$$\langle P, Q \rangle_n = \sum_{k=0}^{n} \overline{P^{(k)}(0)} Q^{(k)}(0) + \int_{-1}^{1} \overline{P^{(n+1)}(t)} Q^{(n+1)}(t) dt$$

est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}[X]$ ($\mathbb{C}[X]$ *est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexe et que* $P^{(k)}$ *désigne la dérivée d'ordre* k *de* P).

Solution -

1. Pour tous $x, x', y \in \mathbb{C}^3$ et pour tout $a \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}
\langle x + ax', y \rangle &= \sum_{i=1}^{3} \overline{(x_i + ax'_i)} y_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \le i < j \le 3} (\overline{(x_i + ax'_i)} y_j + \overline{(x_j + ax'_j)} y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{3} \overline{x}_i y_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \le i < j \le 3} (\overline{x}_i y_j + \overline{x}_j y_i) \\
&\quad + \overline{a} \left(\sum_{i=1}^{3} \overline{x'}_i y_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \le i < j \le 3} (\overline{x'}_i y_j + \overline{x'}_j y_i) \right) \\
&= \langle x, y \rangle + \overline{a} \langle x', y \rangle,
\end{aligned}$$

et donc $\langle\ ,\ \rangle$ est semi-linéaire à gauche.
D'un autre côté, pour tous $x, y, y' \in \mathbb{C}^3$ et pour tout $a \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}
\langle x, y + ay' \rangle &= \sum_{i=1}^{3} \overline{x}_i (y_i + ay'_i) + \frac{1}{2} \sum_{1 \le i < j \le 3} (\overline{x}_i (y_j + ay'_j) + \overline{x}_j (y_i + ay'_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{3} \overline{x}_i y_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \le i < j \le 3} (\overline{x}_i y_j + \overline{x}_j y_i) \\
&\quad + a \left(\sum_{i=1}^{3} \overline{x}_i y'_i + \frac{1}{2} \sum_{1 \le i < j \le 3} (\overline{x}_i y'_j + \overline{x}_j y'_i) \right) \\
&= \langle x, y \rangle + a \langle x, y' \rangle
\end{aligned}$$

et donc $\langle\ ,\ \rangle$ est linéaire à droite.

La symétrie hermitienne est évidente, puisque pour tous $x, y \in \mathbb{C}^3$, on a $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

Nous allons montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est défini positif. On a, pour tout $x \in \mathbb{C}^3$,

$$
\begin{aligned}
\langle x, x\rangle &= \sum_{i=1}^{3} |x_i|^2 + \frac{1}{2} \sum_{1\leq i<j\leq 3} (\overline{x}_i x_j + \overline{x}_j x_i) \\
&= \overline{x}_1 x_1 + \frac{1}{2}\overline{x}_1(x_2 + x_3) + \frac{1}{2}x_1(\overline{x}_2 + \overline{x}_3) + \overline{x}_2 x_2 + \overline{x}_3 x_3 \\
&\quad + \frac{1}{2}(\overline{x}_2 x_3 + \overline{x}_3 x_2) \\
&= (x_1 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3))(\overline{x}_1 + \frac{1}{2}(\overline{x}_2 + \overline{x}_3)) - \frac{1}{4}(x_2 + x_3)(\overline{x}_2 + \overline{x}_3) \\
&\quad + \overline{x}_2 x_2 + \overline{x}_3 x_3 + \frac{1}{2}(\overline{x}_2 x_3 + \overline{x}_3 x_2) \\
&= |x_1 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3)|^2 + \frac{3}{4}\overline{x}_2 x_2 + \frac{1}{4}(\overline{x}_2 x_3 + \overline{x}_3 x_2) + \frac{3}{4}\overline{x}_3 x_3 \\
&= |x_1 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3)|^2 + \frac{3}{4}(x_2 + \frac{1}{3}x_3)(\overline{x}_2 + \frac{1}{3}\overline{x}_3) - \frac{1}{12}\overline{x}_3 x_3 + \frac{3}{4}\overline{x}_3 x_3 \\
&= |x_1 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3)|^2 + \frac{3}{4}|x_2 + \frac{1}{3}x_3|^2 + \frac{2}{3}|x_3|^2.
\end{aligned}
$$

De cette expression, on déduit que $\langle x, x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{C}^3$ et

$$
\langle x, x\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ccc} x_1 + \frac{1}{2}(x_2 + x_3) & = & 0 \\ x_2 + \frac{1}{3}x_3 & = & 0 \\ x_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 = x_3 = 0.
$$

Ainsi $\langle\ ,\ \rangle$ est défini positif et on conclut alors que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^4$.

2. Pour tous $P_1, P_2, Q \in \mathbb{C}[X]$ et pour tout $a \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}
\langle P_1 + aP_2, Q\rangle_n &= \sum_{k=0}^{n} \overline{(P_1 + aP_2)^{(k)}(0)}Q^{(k)}(0) \\
&+ \int_{-1}^{1} \overline{(P_1 + aP_2)^{(n+1)}(t)}Q^{(n+1)}(t)dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} (\overline{P_1^{(k)}(0)} + \overline{a}\overline{P_2^{(k)}(0)})Q^{(k)}(0) \\
&+ \int_{-1}^{1} (\overline{P_1^{(n+1)}(t)} + \overline{a}\overline{P_2^{(n+1)}(t)})Q^{(n+1)}(t)dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} \overline{P_1^{(k)}(0)}Q^{(k)}(0) + \int_{-1}^{1} \overline{P_1^{(n+1)}(t)}Q^{(n+1)}(t)dt \\
&+ \overline{a}\left(\sum_{k=0}^{n} \overline{P_2^{(k)}(0)}Q^{(k)}(0) + \int_{-1}^{1} \overline{P_2^{(n+1)}(t)}Q^{(n+1)}(t)dt\right) \\
&= \langle P_1, Q\rangle_n + \overline{a}\langle P_2, Q\rangle_n
\end{aligned}$$

et donc $\langle\ ,\ \rangle_n$ est semi-linéaire à gauche.
En outre, pour tous $P, Q_1, Q_2 \in \mathbb{C}[X]$ et pour tout $a \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}
\langle P, Q_1 + aQ_2\rangle_n &= \sum_{k=0}^{n} \overline{P^{(k)}(0)}(Q_1 + aQ_2)^{(k)}(0) \\
&\quad + \int_{-1}^{1} \overline{P^{(n+1)}(t)}(Q_1 + aQ_2)^{(n+1)}(t)dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} \overline{P^{(k)}(0)}(Q_1^{(k)}(0) + aQ_2^{(k)}(0)) \\
&\quad + \int_{-1}^{1} \overline{P^{(n+1)}(t)}(Q_1^{(n+1)}(t) + aQ_2^{(n+1)}(t))dt \\
&= \sum_{k=0}^{n} \overline{P^{(k)}(0)}Q_1^{(k)}(0) + \int_{-1}^{1} \overline{P^{(n+1)}(t)}Q_1^{(n+1)}(t)dt \\
&\quad + a\left(\sum_{k=0}^{n} \overline{P^{(k)}(0)}Q_2^{(k)}(0) + \int_{-1}^{1} \overline{P^{(n+1)}(t)}Q_2^{(n+1)}(t)dt\right) \\
&= \langle P, Q_1\rangle_n + a\langle P, Q_2\rangle_n
\end{aligned}$$

et donc $\langle\ ,\ \rangle_n$ est linéaire à droite. La symétrie hermitienne est évidente, puisque pour tous $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, on a $\langle P, Q\rangle = \overline{\langle Q, P\rangle}$.
D'un autre côté, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a

$$\langle P, P\rangle_n = \sum_{k=0}^{n} \left|P^{(k)}(0)\right|^2 + \int_{-1}^{1} \left|P^{(n+1)}(t)\right|^2 dt.$$

Puisque $\int_{-1}^{1} \left|P^{(n+1)}(t)\right|^2 dt \geq 0$ et tous les autres termes de la somme sont des carrées de modules de nombres complexes, $\langle P, P\rangle_n \geq 0$ et $\langle\ ,\ \rangle_n$ est positif. En outre

$$\langle P, P\rangle_n = 0 \Leftrightarrow P(0) = P'(0) = \ldots = P^{(n)}(0) = 0 \text{ et } \int_{-1}^{1} \left|P^{(n+1)}(t)\right|^2 dt = 0.$$

L'intégrale d'une fonction continue et positive est nulle si et seulement si cette fonction est nulle, il résulte que

$$\langle P, P\rangle_n = 0 \Leftrightarrow P(0) = P'(0) = \ldots = P^{(n)}(0) = 0 \text{ et } \ P^{(n+1)} = 0.$$

En particulier, $\langle P, P\rangle_n = 0$ entraîne $P^{(k)}(0) = 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Maintenant, grâce à la formule de Taylor, P s'écrit

$$P = \sum_{j=0}^{\deg(P)} \frac{P^{(j)}(0)}{j!} X^j,$$

et donc $\langle P, P\rangle_n = 0$ équivaut à $P = 0$, ceci montre que $\langle\ ,\ \rangle_n$ est défini. Finalement, $\langle\ ,\ \rangle_n$ est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 33 *En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer les inégalités suivantes et discuter pour quelles valeurs de n et θ l'égalité a lieu :*

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$,* $\left|\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} e^{\imath\theta k}\right| \leq n\sqrt{\frac{n+1}{2}}$.
2. *Pour tout $\rho \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$,*
$$\left|\frac{1 - \rho^{\frac{n}{2}} e^{\imath n\theta}}{1 - \sqrt{\rho} e^{\imath\theta}}\right| \leq \sqrt{n}\sqrt{\frac{1-\rho^n}{1-\rho}}.$$
3. *Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$,*
$$|\mathrm{T}r(M)| \leq \sqrt{n}\sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq n} |m_{ij}|^2}.$$

Solution -

Dans 1.,2., et 3., $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{C}^n$ défini par $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i$.

1. On a $\left|\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}e^{\imath k\theta}\right| = |\langle u,v\rangle|$, avec $u=(1,\sqrt{2},\ldots,\sqrt{n})$ et $v=(e^{\imath\theta},\ldots,e^{\imath n\theta})$.
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (*cf.* Théorème 17), on a
$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}e^{\imath k\theta}\right| = |\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\|v\|. \tag{5.6}$$
Or,
$$\begin{aligned}\|u\| &= \sqrt{1+\ldots+n} = \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}},\\ \|v\| &= \sqrt{e^{-\imath\theta}e^{\imath\theta}+\ldots+e^{-\imath n\theta}e^{\imath n\theta}} = \sqrt{n}.\end{aligned}$$
En remplaçant dans 5.6, on déduit l'inégalité souhaitée.
En vertu du Théorème 17, l'égalité a lieu dans 5.6 si et seulement si les vecteurs u et v sont liés, c'est-à-dire, il existe un réel $a\in\mathbb{C}$ tel que
$$(e^{\imath\theta},\ldots,e^{\imath n\theta}) = a(1,\sqrt{2},\ldots,\sqrt{n}) = (a,a\sqrt{2},\ldots,a\sqrt{n}).$$
Ceci se réalise si et seulement si $n=1$ et $\theta\in 2\pi\mathbb{Z}$.
2. On a
$$\frac{1-\rho^{\frac{n}{2}}e^{\imath n\theta}}{1-\sqrt{\rho}e^{\imath\theta}} = \sum_{k=0}^{n-1}(\sqrt{\rho}e^{\imath\theta})^k = \sum_{k=0}^{n-1}(\rho^{\frac{k}{2}}e^{\imath k\theta}),$$
et donc $\left|\frac{1-\rho^{\frac{n}{2}}e^{\imath n\theta}}{1-\sqrt{\rho}e^{\imath\theta}}\right| = |\langle u,v\rangle|$ avec $u=(1,\sqrt{\rho},\ldots,(\sqrt{\rho})^{n-1})$ et $v=(1,e^{\imath\theta},\ldots,e^{\imath(n-1)\theta})$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (*cf.* Théorème 17), on a
$$\left|\frac{1-\rho^{\frac{n}{2}}e^{\imath n\theta}}{1-\sqrt{\rho}e^{\imath\theta}}\right| = |\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\|v\|. \tag{5.7}$$
Or,
$$\begin{aligned}\|u\| &= \sqrt{1+(\sqrt{\rho})^2+\ldots+(\sqrt{\rho})^{2(n-1)}} = \sqrt{1+\rho+\ldots+\rho^{n-1}} = \sqrt{\frac{1-\rho^n}{1-\rho}},\\ ||v|| &= \sqrt{1+e^{-\imath\theta}e^{\imath\theta}+\ldots+e^{-\imath(n-1)\theta}e^{\imath(n-1)\theta}} = \sqrt{n}.\end{aligned}$$
En remplaçant dans 5.7, on déduit l'inégalité souhaitée.
En vertu du Théorème 17, l'égalité a lieu dans 5.7 si et seulement si les vecteurs u et v sont liés, c'est-à-dire, il existe un réel $a\in\mathbb{C}$ tel que
$$(1,e^{\imath\theta},\ldots,e^{\imath(n-1)\theta}) = a(1,\sqrt{\rho},\ldots,(\sqrt{\rho})^{n-1}) = (a,a\sqrt{\rho},\ldots,a(\sqrt{\rho})^{n-1}).$$
Ceci se réalise si et seulement si $n=1$.

3. Notons $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini en posant pour tous $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle M, N\rangle = \mathrm{T}r({}^t\overline{M}N)$. On a $|\mathrm{T}r(M)|^2 = |\mathrm{T}r(I_nM)|^2 = |\langle I_n, M\rangle|^2$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (*cf.* Théorème 17), on a
$$|\mathrm{T}r(M)|^2 = |\langle I_n, M\rangle|^2 \leq \|I_n\|^2\|M\|^2. \tag{5.8}$$
Or,
$$\begin{aligned}\|I_n\|^2 &= = \mathrm{T}r({}^t\overline{I_n}I_n) = \mathrm{T}r(I_n) = n,\\ \|M\|^2 &= \mathrm{T}r({}^t\overline{M}M) \overset{5.2}{=} \sum_{1\leq i,j\leq n} |m_{ij}|^2.\end{aligned}$$
En remplaçant dans 5.8, on déduit l'inégalité souhaitée.
En vertu du Théorème 17, l'égalité a lieu dans 5.8 si et seulement si il existe un réel $a \in \mathbb{C}$ tel que $M = aI_n$.

Exercice 34 *Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne non nulle. Montrer que*
$$rang(H) \geq \frac{\mathrm{T}r(H)^2}{\mathrm{T}r(H^2)}. \tag{5.9}$$

Solution -

La matrice H étant hermitienne non nulle, d'après le Théorème 24, il existe $P \in \mathbb{U}(n)$ telle que P^*HP soit diagonale réelle, c'est-à-dire qu'il existe des nombres réels $a_1, \dots, a_p$ tous non nuls tels que
$$P^*HP = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0\\ 0 & a_2 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & a_p & 0 & \dots & 0\\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$
Noter que $\mathrm{rg}H = p$ et que
$$P^*H^2P = (P^*HP)^2 = \begin{pmatrix} a_1^2 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0\\ 0 & a_2^2 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & a_p^2 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Or,

$$\mathrm{T}r(H) = \mathrm{T}r(PP^*H) \overset{1.1}{=} \mathrm{T}r(P^*HP) = a_1 + \ldots + a_p \qquad (PP^* = I_n),$$

et d'une manière analogue, $\mathrm{T}r(H^2) = a_1^2 + \ldots + a_p^2$. Maintenant, on se place dans $\mathbb{R}^p$ muni de son produit scalaire canonique $\langle\ ,\ \rangle$ et on remarque que $a_1 + \ldots + a_p = \langle u, v\rangle$ avec $u = (a_1, \ldots, a_p)$ et $v = (1, \ldots, 1)$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (*cf.* Théorème 7), on déduit que

$$\mathrm{T}r(H)^2 = (a_1 + \ldots + a_p)^2 = \langle u, v\rangle^2 \le \|u\|^2\|v\|^2.$$

Or, $\|u\|^2 = a_1^2 + \ldots, a_p^2 = \mathrm{T}r(H^2)$ et $\|v\|^2 = p = \mathrm{rg}H$ et 5.9 est établie.

Exercice 35 *Soient u, v, w des vecteurs unitaires dans un espace préhilbertien complexe V. Montrer que*

$$\sqrt{1 - |\langle u, v\rangle|^2} \le \sqrt{1 - |\langle u, w\rangle|^2} + \sqrt{1 - |\langle w, v\rangle|^2}. \tag{5.10}$$

Solution -

Remarquons d'abord que si u et v sont liés, l'inégalité est trivialement vérifiée. En effet, puisque $\|u\| = \|v\| = 1$, s'il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $u = av$ alors $|a| = 1$. Donc $|\langle u, v\rangle|^2 = |\langle u, au\rangle|^2 = |a|\|u\|^2 = 1$, le membre de gauche de 5.10 est nul et l'inégalité est vérifiée.

On suppose maintenant que (u, v) sont linéairement indépendants. On construit, grâce au procédé de Gram-Schmidt (*cf.* Théorème 18), $\hat{u} \in V$ tel que $(u, \hat{u})$ est une famille orthonormale et $Vect\{u, v\} = Vect\{u, \hat{u}\} = P$. Notons $\mathbf{p}$ la projection orthogonale sur P.

Puisque $v \in P$ et $\|v\| = 1$, on peut écrire $v = v_1 u + v_2 \hat{u}$ où $v_1, v_2 \in \mathbb{C}$ et $|v_1|^2 + |v_2|^2 = 1$. Il existe donc $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $v_1 = \cos\theta e^{\imath a}$ et $v_2 = \sin\theta e^{\imath b}$, soit $v = \cos\theta e^{\imath a} u + \sin\theta e^{\imath b}\hat{u}$.

D'un autre côté, $w = \mathbf{p}(w) + w^\perp$ avec $w^\perp \in P^\perp$. La relation $\|w\|^2 = 1$ s'écrit $\|\mathbf{p}(w)\|^2 + \|w^\perp\|^2 = 1$ et donc $\|\mathbf{p}(w)\|^2 \le 1$. Posons $\rho = \|\mathbf{p}(w)\|$. Le vecteur $\frac{1}{\rho}\mathbf{p}(w)$ est de norme 1 et il est dans P. Comme ci-dessus, il existe alors $c, d \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\mathbf{p}(w) = \rho\cos\alpha e^{\imath c} u + \rho \sin\alpha e^{\imath d}\hat{u}$. Notons que $0 \le \rho \le 1$. Avec ces relations, on a

$$\begin{aligned}
|\langle u, v\rangle|^2 &= |\cos\theta e^{\imath a}|^2 = \cos^2\theta,\\
|\langle u, w\rangle|^2 &= |\langle u, \mathbf{p}(w)\rangle|^2 = |\rho\cos\alpha e^{\imath c}|^2 = \rho^2\cos^2\alpha,\\
|\langle v, w\rangle|^2 &= |\langle v, \mathbf{p}(w)\rangle|^2 = |\rho\cos\theta\cos\alpha e^{-\imath a}e^{\imath c} + \rho\sin\theta\sin\alpha e^{-\imath b}e^{\imath d}|^2.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}|\rho\cos\theta\cos\alpha e^{-\imath a}e^{\imath c}+\rho\sin\theta\sin\alpha e^{-\imath b}e^{\imath d}| &\le |\rho\cos\theta\cos\alpha e^{-\imath a}e^{\imath c}| \\ &\quad +|\rho\sin\theta\sin\alpha e^{-\imath b}e^{\imath d}| \\ &= \rho\cos\theta\cos\alpha+\rho\sin\theta\sin\alpha \\ &= \rho\cos(\theta-\alpha),\end{aligned}$$

où $\alpha,\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

On déduit alors que

$$\begin{aligned}\sqrt{1-|\langle u,v\rangle|^2} &= \sqrt{1-\cos^2\theta}=|\sin\theta|, \\ \sqrt{1-|\langle u,w\rangle|^2} &= \sqrt{1-\rho^2\cos^2\alpha}\ge\sqrt{1-\cos^2\alpha}=|\sin\alpha|, \qquad (0\le\rho\le 1) \\ \sqrt{1-|\langle v,w\rangle|^2} &\ge \sqrt{1-\rho^2\cos^2(\theta-\alpha)}\ge\sqrt{1-\cos^2(\theta-\alpha)}=|\sin(\theta-\alpha)|.\end{aligned}$$

Maintenant

$$\begin{aligned}|\sin\theta| &= |\sin(\theta-\alpha+\alpha)|=|\sin(\theta-\alpha)\cos\alpha+\sin\alpha\cos(\theta-\alpha)| \\ &\le |\sin(\theta-\alpha)\cos\alpha|+|\sin\alpha\cos(\theta-\alpha)| \\ &\le |\sin(\theta-\alpha)|+|\sin\alpha|,\end{aligned}$$

et on déduit 5.10.

Exercice 36 *On considère $\mathbb{C}^4$ muni de son produit scalaire hermitien canonique et on note $\mathbb{B}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canonique de $\mathbb{C}^4$. Soit P le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^4$ défini par*

$$P=\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{C}^4,\ x_1+x_2+\imath(x_3+x_4)=x_1-x_2+\imath(x_3-x_4)=0\}.$$

1. *Déterminer une base orthonormale de P.*
2. *En déduire la matrice de la projection orthogonale $\mathbf{p}$ sur P dans la base canonique de $\mathbb{C}^4$.*
3. *En déduire la distance de tout point $x\in\mathbb{C}^4$ à P.*
4. *Déterminer l'orthogonal de P.*

Solution -

1. On a $(x_1,x_2,x_3,x_4)\in P$ si et seulement si

$$\begin{cases} x_1+x_2+\imath(x_3+x_4)=0, \\ x_1-x_2+\imath(x_3-x_4)=0.\end{cases}$$

Ce système s'écrit aussi

$$\begin{cases} x_1+\imath x_3+x_2+\imath x_4=0, \\ x_1+\imath x_3-(x_2+\imath x_4)=0.\end{cases}$$

Or, ce système est équivalent à $x_1+\imath x_3 = x_2+\imath x_4 = 0$. On conclue que P est un plan vectoriel complexe et que $((1,0,\imath,0),(0,1,0,\imath))$ est une base de P. Nous allons orthonormaliser cette base grâce au procédé de Gram-Schmidt. Notons v_1 et v_2 les vecteurs de cette base. On remarque que $\langle v_1, v_2\rangle = 0$, et $\|v_1\|^2 = \|v_2\|^2 = 2$ et donc $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,\imath,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,\imath)\right)$ est une base orthonormale de P. Dans ce qui suit, notons g_1 et g_2 les vecteurs de cette base.

2. En vertu du Théorème 19, la projection orthogonale sur P d'un vecteur $x \in \mathbb{C}^4$ est donnée par $\mathbf{p}(x) = \langle g_1, x\rangle g_1 + \langle g_2, x\rangle g_2$, et donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}(e_1) &= \langle g_1, e_1\rangle g_1 + \langle g_2, e_1\rangle g_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} g_1 = \frac{1}{2}(1,0,\imath,0),\\
\mathbf{p}(e_2) &= \langle g_1, e_2\rangle g_1 + \langle g_2, e_2\rangle g_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} g_2 = \frac{1}{2}(0,1,0,\imath),\\
\mathbf{p}(e_3) &= \langle g_1, e_3\rangle g_1 + \langle g_2, e_3\rangle g_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \imath g_1 = \frac{1}{2}(-\imath,0,1,0),\\
\mathbf{p}(e_4) &= \langle g_1, e_4\rangle g_1 + \langle g_2, e_4\rangle g_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \imath g_2 = \frac{1}{2}(0,-\imath,0,1).
\end{aligned}$$

On déduit alors que la matrice de $\mathbf{p}$ dans $\mathbb{B}$ est donnée par

$$M_{\mathbb{B}}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\imath & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\imath \\ \imath & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \imath & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. D'après le Théorème 19, la distance d'un vecteur $x \in \mathbb{C}^4$ à P est donnée par $d(x,P) = \|x - \mathbf{p}(x)\|$. D'après la question précédent, les coordonnées de $x - \mathbf{p}(x)$ sont données par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\imath & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\imath \\ \imath & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \imath & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1+\imath x_3 \\ x_2+\imath x_4 \\ x_3-\imath x_1 \\ x_4-\imath x_2 \end{pmatrix}.$$

On déduit que

$$\begin{aligned}
d(x,P) &= \left\|\left(\frac{1}{2}(x_1+\imath x_3), \frac{1}{2}(x_2+\imath x_4), \frac{1}{2}(x_3-\imath x_1), \frac{1}{2}(x_4-\imath x_2)\right)\right\|\\
&= \frac{1}{2}\sqrt{|x_1+\imath x_3|^2 + |x_2+\imath x_4|^2 + |x_3-\imath x_1|^2 + |x_4-\imath x_2|^2}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{|x_1+\imath x_3|^2 + |x_2+\imath x_4|^2}.
\end{aligned}$$

4. Puisque $((1,0,\imath,0),(0,1,0,\imath))$ est une base de P, $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in P^{\perp}$ si et seulement si

$$\langle((1,0,\imath,0),(x_1,x_2,x_3,x_4)\rangle = \langle(0,1,0,\imath),(x_1,x_2,x_3,x_4)\rangle = 0.$$

Soit $x_1 - \imath x_3 = x_2 - \imath x_4 = 0$. Ainsi $P^{\perp}$ est le plan vectoriel complexe engendré par $((-1,0,\imath,0),(0,-1,0,\imath))$.

Exercice 37 *On se place dans $\mathbb{C}^3$ muni du produit scalaire hermitien (cf. Exercice 32)*

$$\langle(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = \sum_{i=1}^{3} \overline{x}_i y_i + \frac{1}{2}\sum_{1\leq i<j\leq 3} (\overline{x}_i y_j + \overline{x}_j y_i).$$

On note $\mathbb{B} = (e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$. On considère le plan vectoriel complexe $P = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{C}^3,\ x_1+\imath x_2 = 0\}$ et on note $\mathbf{p}$ la projection orthogonale sur P.

1. *Ecrire la matrice de $\langle\ ,\ \rangle$ dans la base $\mathbb{B}$.*
2. *En utilisant le procédé de Gram-Schmidt déterminer la base $\mathbb{B}_1 = (e'_1,e'_2,e'_3)$ de $\mathbb{C}^3$ orthonormalisée de la base $\mathbb{B}$.*
3. *Déterminer l'orthogonal de P.*
4. *Déterminer la matrice de $\mathbf{p}$ dans la base $\mathbb{B}$.*
5. *Calculer la distance du vecteur $(1,1,1)$ à P.*

Solution -

1. La matrice de $\langle\ ,\ \rangle$ dans la base $\mathbb{B}$ est la matrice $M = (\langle e_i,e_j\rangle)_{1\leq i,j\leq 3}$. Ainsi $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. En vertu de 5.1, on a

$$\langle x,y\rangle = (\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \qquad (5.11)$$

2. On commence par construire une base orthogonale grâce à l'algorithme

décrit dans 5.3. Notons (f_1, f_2, f_3) cette base. On a

$$\begin{array}{rcl}
f_1 & = & e_1 = (1,0,0,0), \quad \|f_1\|^2 = 1, \\
f_2 & = & e_2 - \dfrac{\langle e_2, f_1\rangle}{\|f_1\|^2} f_1 = e_2 - \dfrac{1}{2} e_1, \\
\|f_2\|^2 & = & \| -\dfrac{1}{2} e_1 + e_2\|^2 = \dfrac{1}{4}\|e_1\|^2 - \langle e_1, e_2\rangle + \|e_2\|^2 = \dfrac{3}{4}, \\
\langle e_3, f_2\rangle & = & \langle e_3, e_2\rangle - \dfrac{1}{2}\langle e_3, e_1\rangle = \dfrac{1}{4}, \\
f_3 & = & e_3 - \dfrac{\langle e_3, f_1\rangle}{\|f_1\|^2} f_1 - \dfrac{\langle e_3, f_2\rangle}{\|f_2\|^2} f_2 = e_3 - \dfrac{1}{2} f_1 - \dfrac{1}{3} f_2 \\
 & = & -\dfrac{1}{3} e_1 - \dfrac{1}{3} e_2 + e_3, \\
\|f_3\|^2 & = & \dfrac{2}{3}.
\end{array}$$

Finalement, la base orthonoormalisée de la base $\mathbb{B}$ est donnée par

$$\mathbb{B}_1 = \left((1,0,0), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, 0), (-\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}) \right).$$

3. Remarquons que P est le plan vectoriel engendré par les deux vecteurs $(1, \imath, 0)$ et $(0,0,1)$. Ainsi $(x,y,z) \in P^\perp$ si, et seulement si

$$\langle (1,\imath,0), (x,y,z)\rangle = \langle (0,0,1), (x,y,z)\rangle = 0.$$

Or, en vertu de 5.11, on a

$$\begin{array}{rcl}
\langle (1,\imath,0), (x,y,z)\rangle & = & (1,-\imath,0) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
 & = & (1,-\imath,0) \begin{pmatrix} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}x + y + \frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + z \end{pmatrix} \\
 & = & (1 - \dfrac{1}{2}\imath)x + (\dfrac{1}{2} - \imath)y + \dfrac{1}{2}(1-\imath)z, \\
\langle (0,0,1), (x,y,z)\rangle & = & \langle e_3, xe_1 + ye_2 + ze_3\rangle \\
 & & = x\langle e_3, e_1\rangle + y\langle e_3, e_2\rangle + z\langle e_3, e_3\rangle \\
 & = & \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}y + z.
\end{array}$$

Ainsi

$$P^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3,\ (2-\imath)x + (1-2\imath)y + (1-\imath)z = x + y + 2z = 0\}.$$

4. En vertu du Théorème 19, la projection orthogonale sur P d'un vecteur $x \in \mathbb{C}^3$ est donnée par

$$\mathbf{p}(x) = \langle g_1, x\rangle g_1 + \langle g_2, x\rangle g_2 \tag{5.12}$$

où (g_1, g_2) est une base orthonormale de P. Notons que $e_3 \in P$ et $v = (1, \imath, 0) \in P$ et (e_3, v) définisent une base de P. Pour obtenir l'expression de $\mathbf{p}$, nous allons orthonormaliser la base (e_3, v) grâce au procédé de Gram-Schmidt. Commençons par construire une base orthogonale en utilisant l'algorithme décrit dans 5.3. Notons (f_1, f_2) cette base. On a

$$\begin{aligned}
f_1 &= e_3, \quad \|f_1\|^2 = 1,\\
\langle f_1, v\rangle &= \langle e_3, e_1 + \imath e_2\rangle = \langle e_3, e_1\rangle + \imath\langle e_3, e_2\rangle = \frac{1}{2}(1+\imath),\\
h_2 &= v - \frac{\langle f_1, v\rangle}{\|f_1\|^2} f_1 = (1, \imath, -\frac{1}{2}(1+\imath)),\\
\|h_2\|^2 &= (1, -\imath, -\frac{1}{2}(1-\imath)) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \imath \\ -\frac{1}{2}(1+\imath) \end{pmatrix}\\
&= (1, -\imath, -\frac{1}{2}(1-\imath)) \begin{pmatrix} \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\imath \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\imath \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\imath - \frac{1}{4}\imath + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

On prend alors $g_1 = e_3$ et $g_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(1, \imath, -\frac{1}{2}(1+\imath))$. On a

$$\begin{aligned}
\langle g_2, e_1\rangle &= \left\langle \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(e_1 + \imath e_2 - \frac{1}{2}(1+\imath)e_3\right), e_1 \right\rangle\\
&= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\langle e_1, e_1\rangle - \imath\langle e_2, e_1\rangle - \frac{1}{2}(1-\imath)\langle e_3, e_1\rangle\right) = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}(3-\imath),\\
\langle g_2, e_2\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\langle e_1, e_2\rangle - \imath\langle e_2, e_2\rangle - \frac{1}{2}(1-\imath)\langle e_3, e_2\rangle\right) = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}(1-3\imath).
\end{aligned}$$

Maintenant, en vertu de 5.12, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}(e_1) &= \langle g_1, e_1\rangle g_1 + \langle g_2, e_1\rangle g_2 = \frac{1}{6}(3-\imath, 1+3\imath, 1-\imath)\\
\mathbf{p}(e_2) &= \langle g_1, e_2\rangle g_1 + \langle g_2, e_2\rangle g_2 = \frac{1}{6}(1-3\imath, 3+\imath, 1+\imath),\\
\mathbf{p}(e_3) &= e_3 \qquad (e_3 \in P).
\end{aligned}$$

Donc la matrice de $\mathbf{p}$ dans la base canonique est donnée par

$$M_{\mathbb{B}}(\mathbf{p}) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3-\imath & 1-3\imath & 0 \\ 1+3\imath & 3+\imath & 0 \\ 1-\imath & 1+\imath & 6 \end{pmatrix}.$$

5. D'après le Théorème 19, la distance d'un vecteur $x \in \mathbb{C}^3$ à P est donnée par $d(x,P) = \|x - \mathbf{p}(x)\|$. D'après la question précédent, les coordonnées de $(1,1,1) - \mathbf{p}(1,1,1)$ sont données par

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3-\imath & 1-3\imath & 0 \\ 1+3\imath & 3+\imath & 0 \\ 1-\imath & 1+\imath & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\imath \\ 1-2\imath \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On déduit, en vertu de 5.11, que

$$\begin{aligned} d((1,1,1),P)^2 &= \frac{1}{9}(1-2\imath, 1+2\imath, -1)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+2\imath \\ 1-2\imath \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9}(1-2\imath, 1+2\imath, -1)\begin{pmatrix} 1+\imath \\ 1-\imath \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Finalement $d((1,1,1),P) = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Exercice 38 *On se place dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ muni de son produit scalaire canonique défini en posant, pour tous $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $\langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}({}^t\overline{M}N)$ et on note*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & \imath \\ -\imath & 1 \end{pmatrix}$. On définit $H : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ en posant, pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $H(M) = PMP$.

1. *Montrer que H est un endomorphisme hermitien.*
2. *Calculer la matrice de H dans la base $\mathbb{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.*
3. *Calculer les valeurs propres de H et montrer que H est diagonalisable.*
4. *Déterminer une base orthonormale de vecteurs propres de H.*
5. *Soit $\mathbf{p}$ la projection orthogonale sur $\ker H$. Montrer que, pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$,*

$$\mathbf{p}(M) = M - \frac{1}{4}\langle P, M\rangle P. \tag{5.13}$$

et en déduire la distance d'une matrice M à $\ker H$.

Solution -

Noter que si $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$alors

$$\langle M_1, M_2\rangle = \mathrm{Tr}({}^t\overline{M}_1 M_2) = \overline{a}_1 a_2 + \overline{b}_1 b_2 + \overline{c}_1 c_2 + \overline{d}_1 d_2. \tag{5.14}$$

1. Pour tous $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et tout $a \in \mathbb{C}$, on a

$$H(M + aN) = P(M + aN)P = PMP + aPNP = H(M) + aH(N),$$

et donc H est une application linéaire. D'un autre côté, pour tous $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$,

$$\begin{aligned}\langle H(M), N\rangle &= \langle PMP, N\rangle = \mathrm{Tr}({}^t(\overline{PMP})N) = \mathrm{Tr}({}^t\overline{P}{}^t\overline{M}{}^t\overline{P}N) \quad ({}^t\overline{P} = P)\\ &= \mathrm{Tr}(P{}^t\overline{M}PN) \overset{1.1}{=} \mathrm{Tr}({}^t\overline{M}PNP) = \langle M, H(N)\rangle,\end{aligned}$$

et donc H est hermitien.

2. On a

$$\begin{aligned}
H(e_1) &= \begin{pmatrix} 1 & \imath \\ -\imath & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \imath \\ -\imath & 1 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 1 & \imath \\ -\imath & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \imath \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \imath \\ -\imath & 1 \end{pmatrix},\\
H(e_2) &= \begin{pmatrix} 1 & \imath \\ -\imath & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \imath \\ -\imath & 1 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 1 & \imath \\ -\imath & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\imath & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\imath & 1 \\ -1 & -\imath \end{pmatrix},\\
H(e_3) &= \begin{pmatrix} 1 & \imath \\ -\imath & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \imath \\ -\imath & 1 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 1 & \imath \\ -\imath & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \imath \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \imath & -1 \\ 1 & \imath \end{pmatrix},\\
H(e_4) &= \begin{pmatrix} 1 & \imath \\ -\imath & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \imath \\ -\imath & 1 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 1 & \imath \\ -\imath & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\imath & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \imath \\ -\imath & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On déduit que la matrice de H dans $\mathbb{B}$ est donnée par

$$M_{\mathbb{B}}(H) = \begin{pmatrix} 1 & -\imath & \imath & 1 \\ \imath & 1 & -1 & \imath \\ -\imath & -1 & 1 & -\imath \\ 1 & -\imath & \imath & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Calculons le polynôme caractéristique P_H de H. On a

$$
\begin{aligned}
P_F(X) &= \det(H - XId)\\
&= \begin{vmatrix} 1-X & -\imath & \imath & 1\\ \imath & 1-X & -1 & \imath\\ -\imath & -1 & 1-X & -\imath\\ 1 & -\imath & \imath & 1-X \end{vmatrix}\\
&\overset{\substack{L_1+(X-1)L_4\\ L_2-\imath L_4\\ L_3+\imath L_4}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -\imath X & \imath X & 2X-X^2\\ 0 & -X & 0 & \imath X\\ 0 & 0 & -X & -\imath X\\ 1 & -\imath & \imath & 1-X \end{vmatrix}\\
&\overset{(a)}{=} -X^3 \begin{vmatrix} -\imath & \imath & 2-X\\ -1 & 0 & \imath\\ 0 & -1 & -\imath \end{vmatrix}\\
&\overset{(b)}{=} -X^3\left(-\imath \begin{vmatrix} 0 & \imath\\ -1 & -\imath \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \imath & 2-X\\ -1 & -\imath \end{vmatrix}\right)\\
&= -X^3(1+(1+2-X)) = -X^3(-X+4)\\
&= X^3(X-4).
\end{aligned}
$$

Dans (a), nous avons développé la première colonne et factorisé par X dans les trois lignes et dans (b) nous avons développé suivant la première colonne.
Ainsi $P_H(X) = X^3(X-4)$. Les valeurs propres de H sont 0 avec la multiplicité 3 et 4 comme valeur propre simple.
H est un endomorphisme hermitien et donc il est normal, en vertu du Théorème 22, H est diagonalisable dans une base orthonormale.

4. Déterminons le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 qui n'est autre que $\ker H$ et le sous-espace propre associé à la valeur 4 qu'on notera E_4.
$M = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d \end{pmatrix} \in \ker H$, si et seulement si

$$
\left\{\begin{aligned}
a - \imath b + \imath c + d &= 0\\
\imath a + b - c + \imath d &= 0\\
-\imath a - b + c - \imath d &= 0\\
a - \imath b + \imath c + d &= 0
\end{aligned}\right.
$$

Ce système est clairement équivalent à $a - \imath b + \imath c + d = 0$. Ainsi

$$\ker H = Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 & -\imath\\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0\\ \imath & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Pour avoir une base orthonormale de $\ker H$, nous allons utiliser le procédé de Gram-Schmidt pour orthonormaliser la base de $\ker H$ ci-dessus.

Notons (v_1, v_2, v_3) les éléments de cette base. En utilisant 5.14, on obtient

$$\begin{aligned}
f_1 &= v_1, \quad \|f_1\|^2 = 2, \\
f_2 &= v_2 - \frac{\langle f_1, v_2\rangle}{\|f_1\|^2} f_1 = v_2 - \frac{1}{2} f_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \imath \\ 2\imath & 0 \end{pmatrix}, \quad \|f_2\|^2 = \frac{3}{2}, \\
f_3 &= v_3 - \frac{\langle f_1, v_3\rangle}{\|f_1\|^2} f_1 - \frac{\langle f_2, v_3\rangle}{\|f_2\|^2} f_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & \imath \\ -\imath & -3 \end{pmatrix}, \quad \|f_3\|^2 = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

On déduit alors que

$$\mathbb{B}_H = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -\imath \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & \imath \\ 2\imath & 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{3}}{6}\begin{pmatrix} 1 & \imath \\ -\imath & -3 \end{pmatrix} \right\} \tag{5.15}$$

est une base orthonormale de $\ker H$.

Déterminons maintenant E_4. $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E_4$, si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -3a - \imath b + \imath c + d &=& 0 \\ \imath a - 3b - c + \imath d &=& 0 \\ -\imath a - b - 3c - \imath d &=& 0 \\ a - \imath b + \imath c - 3d &=& 0 \end{array} \right.$$

Nous allons utiliser la méthode du Pivot de Gauss pour résoudre ce système linéaire. On prend la quatrième équation comme pivot. Ce système est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -4\imath b + 4\imath c - 8d &=& 0 \\ -4b + 4\imath d &=& 0 \\ -4c - 4\imath d &=& 0 \\ a - \imath b + \imath c - 3d &=& 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} b &=& \imath d \\ c &=& -\imath d \\ a &=& d \end{array} \right.$$

On déduit alors que $E_4 = Vect\left\{ \begin{pmatrix} 1 & \imath \\ -\imath & 1 \end{pmatrix} \right\} = Vect\{P\}$. En normalisant P, on déduit que

$$\mathbb{B}' = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -\imath \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & \imath \\ 2\imath & 0 \end{pmatrix}, \frac{\sqrt{3}}{6}\begin{pmatrix} 1 & \imath \\ -\imath & -3 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}P \right\}$$

est une base orthonormale de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de H.

5. L'endomorphisme H étant hermitien donc ses sous-espaces sont orthogonaux, en vertu du Théorème 22. On déduit que $(\ker H)^\perp = Vect\{P\}$. Il en résulte que pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $M = \mathbf{p}(M) + aP$ où $a \in \mathbb{C}$. En faisant le produit avec P, on obtient $a\|P\|^2 = \langle P, M\rangle$. Or, $\|P\|^2 = 4$ et 5.13 est établie. En vertu du Théorème 19, la distance de M à $\ker H$ est donnée par $d(M, \ker H) = \|M - \mathbf{p}(M)\|$. En utilisant 5.13, on déduit que $d(M, \ker H) = \frac{1}{2}|\langle P, M\rangle| = \frac{1}{2}|a - \imath b + \imath c + d|$.

Exercice 39 *On se place dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ muni de son produit scalaire canonique donné par $\langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}({}^t\overline{M}N)$ et on note*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & \imath \\ \imath & 1 \end{pmatrix}$. *On définit $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ par $F(M) = {}^t\overline{P}MP$.*

1. *Montrer que F est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et déterminer son adjoint F^*.*
2. *Montrer que F est normal.*
3. *Calculer les matrices de F et F^* dans la base $\mathbb{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.*
4. *Calculer les valeurs propres de F et montrer que F est diagonalisable.*
5. *Calculer $F(P^n)$ et $F(\overline{P}^n)$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et en déduire que*
$$P^n = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(P^{n-1})P + \frac{1}{4}\mathrm{Tr}(P^{n+1})\overline{P}. \tag{5.16}$$
6. *Calculer P^n, pour tout $n \in \mathbb{Z}$.*

Solution -

1. Pour tous $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et tout $a \in \mathbb{C}$, on a
$$F(M + aN) = {}^t\overline{P}(M + aN)P = {}^t\overline{P}MP + a{}^t\overline{P}NP = F(M) + aF(N),$$
et donc F est une application linéaire. D'un autre côté, pour tous $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$,
$$\begin{aligned} \langle F(M), N\rangle &= \langle {}^t\overline{P}MP, N\rangle = \mathrm{Tr}({}^t\overline{({}^t\overline{P}MP)}N) = \mathrm{Tr}({}^tP{}^t\overline{M}PN) \\ &\overset{1.1}{=} \mathrm{Tr}({}^t\overline{M}PN{}^t\overline{P}) = \langle M, PN{}^t\overline{P}\rangle. \end{aligned}$$
On déduit que $F^*(M) = PM{}^t\overline{P}$, pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
2. Pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on a
$$F^* \circ F(M) = P{}^t\overline{P}MP{}^t\overline{P} \quad \text{et} \quad F \circ F^*(M) = {}^t\overline{P}PM{}^t\overline{P}P.$$
D'un autre côté,
$$\begin{aligned} P{}^t\overline{P} &= \begin{pmatrix} 1 & \imath \\ \imath & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\imath \\ -\imath & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2, \\ {}^t\overline{P}P &= \begin{pmatrix} 1 & -\imath \\ -\imath & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \imath \\ \imath & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2, \end{aligned}$$

et donc, pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$,

$$F^* \circ F(M) = F \circ F^*(M) = 4M. \tag{5.17}$$

Il en résulte que F et F^* commutent et, par suite, F est un endomorphisme normal.

3. On a

$$\begin{aligned}
F(e_1) &= \begin{pmatrix} 1 & -\imath \\ -\imath & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \imath \\ \imath & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -\imath \\ -\imath & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \imath \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \imath \\ -\imath & 1 \end{pmatrix}, \\
F(e_2) &= \begin{pmatrix} 1 & -\imath \\ -\imath & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \imath \\ \imath & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -\imath \\ -\imath & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \imath & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \imath & 1 \\ 1 & -\imath \end{pmatrix}, \\
F(e_3) &= \begin{pmatrix} 1 & -\imath \\ -\imath & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \imath \\ \imath & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -\imath \\ -\imath & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \imath \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\imath & 1 \\ 1 & \imath \end{pmatrix}, \\
F(e_4) &= \begin{pmatrix} 1 & -\imath \\ -\imath & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \imath \\ \imath & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -\imath \\ -\imath & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \imath & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\imath \\ \imath & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On déduit que la matrice de F dans $\mathbb{B}$ est donnée par

$$M_{\mathbb{B}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & \imath & -\imath & 1 \\ \imath & 1 & 1 & -\imath \\ -\imath & 1 & 1 & \imath \\ 1 & -\imath & \imath & 1 \end{pmatrix}.$$

La base $\mathbb{B}$ étant orthonormale et donc, en vertu de la Proposition 42, la matrice de F^* dans $\mathbb{B}$ est la matrice adjointe de la matrice de F dans $\mathbb{B}$, soit

$$M_{\mathbb{B}}(F^*) = \begin{pmatrix} 1 & -\imath & \imath & 1 \\ -\imath & 1 & 1 & \imath \\ \imath & 1 & 1 & -\imath \\ 1 & \imath & -\imath & 1 \end{pmatrix}.$$

4. En vertu du Théorème 22, F étant un endomorphisme normal, il est donc diagonalisable dans une base orthonormale. Nous allons maintenant calculer le polynôme caractéristique de F et déterminer ses valeurs

propres. Notons P_F ce polynôme. On a

$$\begin{array}{rcl}
P_F(X) & = & \det(F - XId)\\
& = & \begin{vmatrix} 1-X & \imath & -\imath & 1\\ \imath & 1-X & 1 & -\imath\\ -\imath & 1 & 1-X & \imath\\ 1 & -\imath & \imath & 1-X \end{vmatrix}\\
& \underset{L_3+\imath L_4}{\overset{L_1+(X-1)L_4}{\overset{L_2-\imath L_4}{=}}} & \begin{vmatrix} 0 & -\imath(X-2) & \imath(X-2) & -X(X-2)\\ 0 & -X & 2 & \imath(X-2)\\ 0 & 2 & -X & -\imath(X-2)\\ 1 & -\imath & \imath & 1-X \end{vmatrix}\\
& \overset{(a)}{=} & -(X-2)\begin{vmatrix} -\imath & \imath & -X\\ -X & 2 & \imath(X-2)\\ 2 & -X & -\imath(X-2) \end{vmatrix}\\
& \overset{C_2+C_1}{\underset{C_3+\imath XC_1}{=}} & -(X-2)\begin{vmatrix} -\imath & 0 & 0\\ -X & 2-X & \imath(-X^2+X-2)\\ 2 & 2-X & \imath(X+2) \end{vmatrix}\\
& = & -(X-2)\left((X+2)(2-X)-(2-X)(-X^2+X-2)\right)\\
& = & (X-2)^2(X^2+4).
\end{array}$$

Il en résulte que les valeurs propres de F sont 2 avec la multiplicité 2, $2\imath$ et $-2\imath$ comme valeurs propres simples.

5. Nous avons vu dans ci-dessus que $P^t\overline{P} = {}^t\overline{P}P = 2I_2$ et que ${}^tP = \overline{P}$. De ces relations, on déduit que P et $\overline{P}$ sont inversibles et que $P^{-1} = \frac{1}{2}\overline{P}$. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{array}{rcl}
F(P^n) & = & {}^t\overline{P}P^nP = {}^t\overline{P}PP^n = 2P^n,\\
F(\overline{P}^n) & = & {}^t\overline{P}\,\overline{P}^nP = \overline{P}\,\overline{P}^nP = \overline{P}^n\overline{P}P = 2\overline{P}^n.
\end{array}$$

Donc, si E_2 désigne le sous-espace propre de F associé à la valeur propre 2, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, P^n et $\overline{P}^n$ appartiennent à E_2. Or, $\dim E_2 = 2$ (d'après la question précédente) et P et $\overline{P}$ sont deux vecteurs de E_2 qui sont linéairement indépendants et donc forment une base de E_2. On déduit que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $P^n = a_nP + b_n\overline{P}$ avec $a_n, b_n \in \mathbb{C}$. En multipliant cette relation, respectivement, par P et $\overline{P}$, on obtient

$$\langle P, P^n\rangle = a_n\|P\|^2 + b_n\langle P, \overline{P}\rangle \quad \text{et} \quad \langle \overline{P}, P^n\rangle = a_n\langle \overline{P}, P^n\rangle + b_n\|\overline{P}\|^2.$$

Or, en utilisant l'expression de $\langle\ ,\ \rangle$ donnée dans 5.14, on obtient

$$\begin{array}{rcl}
\|P\|^2 & = & \|\overline{P}\|^2 = 4,\\
\langle P, \overline{P}\rangle & = & \langle \overline{P}, P\rangle = 0,\\
\langle P, P^n\rangle & = & \mathrm{T}r({}^t\overline{P}P^n) = 2\mathrm{T}r(P^{n-1}) \qquad ({}^t\overline{P}P = 2I_2),\\
\langle \overline{P}, P^n\rangle & = & \mathrm{T}r({}^tPP^n) = \mathrm{T}r(P^{n+1}) \qquad ({}^tP = P).
\end{array}$$

Il en découle que $a_n = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(P^{n-1})$ et $b_n = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}(P^{n+1})$, et ceci permet d'avoir 5.16.

6. En appliquant la trace dans 5.16, on obtient

$$\mathrm{Tr}(P^n) = \mathrm{Tr}(P^{n-1}) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(P^{n+1}). \tag{5.18}$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathrm{Tr}(P^n)$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente qui vérifie, d'après 5.18, $u_{n+2} - 2u_{n+1} + 2u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = \mathrm{Tr}(I_2) = 2$ et $u_1 = \mathrm{Tr}(P) = 2$. Il est connu (voir cours d'analyse) qu'une telle suite est de la forme $u_n = a\alpha^n + b\beta^n$, où α et β sont les racines de l'équation $X^2 - 2X + 2 = 0$. Les racines de cette équation sont $1 + \imath = \sqrt{2}e^{\imath\frac{\pi}{4}}$ et $1 - \imath = \sqrt{2}e^{-\imath\frac{\pi}{4}}$. Il en résulte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Tr}(P^n) = a(1+\imath)^n + b(1-\imath)^n$. En prenant $n = 0$ et $n = 1$ dans cette relation, on déduit que $a = b = 1$. Nous avons alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{Tr}(P^n) = (1+\imath)^n + (1-\imath)^n = 2\sqrt{2^n}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

En remplaçant dans 5.16, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} P^n &= \sqrt{2^{n-1}}\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{(n-1)\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right) & \imath\left(\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right)\right) \\ \imath\left(\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right)\right) & \cos\left(\frac{(n-1)\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{(n+1)\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{2^n}\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) & \imath\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \\ \imath\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'un autre côté, on a $P^{-1} = \frac{1}{2}\overline{P}$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}^-$,

$$\begin{aligned} P^n &= (P^{-1})^{-n} = \frac{1}{2^{-n}}(\overline{P})^{-n} = \frac{1}{2^{-n}}\overline{P^{-n}} \\ &= \sqrt{2^n}\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) & \imath\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \\ \imath\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,

$$P^n = \sqrt{2^n}\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) & \imath\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \\ \imath\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) & \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \end{pmatrix}.$$

Exercice 40 *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne.*

1. *Montrer que $M - \imath I_n$ et $M + \imath I_n$ sont inversibles.*
2. *On pose $U = (M - \imath I_n)(M + \imath I_n)^{-1}$.*
   (a) *Montrer que U est une matrice unitaire.*
   (b) *Exprimer les valeurs propres de U en fonction de celles de M.*

Solution -

1. D'après le Théorème 23, les valeurs propres de M sont réelles et donc $\imath$ et $-\imath$ ne sont pas valeurs propres de M, ceci se traduit par $\det(M - \imath I_n) \neq 0$ et $\det(M + \imath I_n) \neq 0$, ce qui montre que $M - \imath I_n$ et $M + \imath I_n$ sont inversibles.
2. (a) Commençons par remarquer que $M - \imath I_n$ et $M + \imath I_n$ commutent, c'est-à-dire, $(M - \imath I_n)(M + \imath I_n) = (M + \imath I_n)(M - \imath I_n)$. D'un autre côté, en utilisant la Proposition 43, on a

$$\begin{aligned} U^* &= \left((M - \imath I_n)(M + \imath I_n)^{-1}\right)^* = ((M + \imath I_n)^{-1})^*(M - \imath I_n)^* \\ &= ((M + \imath I_n)^*)^{-1}(M^* + \imath I_n) = (M - \imath I_n)^{-1}(M + \imath I_n). \end{aligned}$$

On déduit alors que

$$\begin{aligned} U^*U &= (M - \imath I_n)^{-1}(M + \imath I_n)(M - \imath I_n)(M + \imath I_n)^{-1} \\ &= (M - \imath I_n)^{-1}(M - \imath I_n)(M + \imath I_n)(M + \imath I_n)^{-1} \\ &= I_n, \end{aligned}$$

et donc U est une matrice unitaire.

(b) Notons $specM$ et $specU$, respectivement, l'ensemble des valeurs propres de M et de U. En vertu du Théorème 23, $specM \subset \mathbb{R}$. Nous allons montrer que

$$specU = \left\{ \frac{\lambda - \imath}{\lambda + \imath},\ \lambda \in specM \right\}.$$

En effet, si $\lambda \in specM$, alors il existe $u \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $Mu = \lambda u$. Il en découle que $(M + \imath I_n)u = (\lambda + \imath)u$, soit $(M + \imath I_n)^{-1}u = \frac{1}{\lambda+\imath}u$. Ainsi

$$Uu = (M - \imath I_n)(M + \imath I_n)^{-1}u = \frac{1}{\lambda + \imath}(M - \imath I_n)u = \frac{\lambda - \imath}{\lambda + \imath}u,$$

et donc $\frac{\lambda-\imath}{\lambda+\imath} \in specU$.
Inversement, si $a \in specU$, alors il existe $u \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que

$$(M - \imath I_n)(M + \imath I_n)^{-1}u = au.$$

Posons $v = (M + \imath I_n)^{-1}u$. Noter que $v \neq 0$.
On a alors $u = (M + \imath I_n)v = M(v) + \imath v$. On déduit alors que $(M - \imath I_n)v = a(M(v) + \imath v)$, soit $(1 - a)M(v) = (a + 1)\imath v$. Puisque $v \neq 0$, $a \neq 1$ et donc $M(v) = \frac{(a+1)\imath}{(1-a)}v$. Cette relation montre que $\lambda = \frac{(a+1)\imath}{(1-a)} \in specM$. Pour finir, il suffit de remarquer que $a = \frac{\lambda-\imath}{\lambda+\imath}$.

Exercice 41 *Soit* $u = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \imath \\ \imath \\ 1 \end{pmatrix}$. *On considère la matrice* $H = I_3 - 2uu^*$.

1. *Montrer que* H *est hermitienne et unitaire.*
2. *Déterminer les valeurs propres de* H *et leurs multiplicités sans calculer le polynôme caractéristique de* H.

Solution -

1. On a

$$H^* = (I_3 - 2uu^*)^* = I_3^* - (2uu^*)^* = I_3 - 2(u^*)^*u^* = I_3 - 2uu^* = H,$$

et donc H est hermitienne. D'un autre côté, on a

$$\begin{aligned} H^*H &= HH = (I_3 - 2uu^*)(I_3 - 2uu^*) = I_3 - 4uu^* + 4uu^*uu^* \\ &= I_3 - 4uu^* + 4u|u|^2u^* = I_3 - 4uu^* + 4uu^* = I_3, \end{aligned}$$

et donc H est unitaire.

2. On a

$$\begin{aligned} H &= I_3 - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} \imath \\ \imath \\ 1 \end{pmatrix}(-\imath, -\imath, 1) = I_3 - \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \imath \\ 1 & 1 & \imath \\ -\imath & -\imath & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2\imath \\ -2 & 1 & -2\imath \\ 2\imath & 2\imath & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Notons S$pecH$ l'ensemble des valeurs propres de H. Puisque H est hermitienne et unitaire, en vertu du Théorème 23, ses valeurs propres sont à la fois réelles et de module 1. Il en résulte que S$pecH \subset \{-1, 1\}$. D'un autre côté, en vertu du Théorème 22, H est diagonalisable, c'est-à-dire, il existe une matrice P telle que $P^{-1}HP = D$ où D est une matrice diagonale dont la diagonale est composée des valeurs propres de H. On a quatre cas :

   (a) La valeur propre 1 est de multiplicité 3. Dans ce cas $D = I_3$ et de la relation $P^{-1}HP = D$, on déduit que $H = I_3$, ce qui n'est pas vrai.

   (b) La valeur propre -1 est de multiplicité 3. Dans ce cas $D = -I_3$ et de la relation $P^{-1}HP = D$, on déduit que $H = -I_3$, ce qui n'est pas vrai.

(c) La valeur propre -1 est de multiplicité 2 et 1 est une valeur propre simple. Dans ce cas $\mathrm{T}r(D) = -1$. Or, la relation $P^{-1}HP = D$ entraîne que $\mathrm{T}r(H) = \mathrm{T}r(D)$ et on sait, d'après l'expression de H ci-dessus, que $\mathrm{T}r(H) = 1$.

(d) Finalement, la valeur propre 1 est de multiplicité 2 et -1 est une valeur propre simple est le seule cas possible.

Ainsi $\mathrm{S}pecH = \{-1, 1\}$ et la valeur propre 1 est de multiplicité 2 et -1 est une valeur propre simple.

Exercice 42 *On considère la matrice*

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \imath & 0 \\ 0 & \imath & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\imath & 0 \\ 0 & -\imath & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. *Montrer que M est unitaire.*
2. *On considère les matrices $M^+ = \sqrt{2}(M+M^*)$ et $M^- = \sqrt{2}(M-M^*)$.*
   (a) *Montrer que M^+ est hermitienne et M^- est antihermitienne et qu'elles commutent.*
   (b) *Calculer les valeurs propres des matrices $M^+ = \sqrt{2}(M+M^*)$ et $M^- = \sqrt{2}(M-M^*)$ et en déduire les valeurs propres de M.*

Solution -

1. Notons e_1, e_2, e_3 et e_4 les vecteurs colonnes de M. D'après la Proposition 45, M est unitaire si et seulement si (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base orthonormale. Vérifions que c'est le cas. On a

$$\begin{aligned}
\langle e_1, e_1\rangle &= \frac{1}{2}(1+1) = 1,\ \langle e_1, e_2\rangle = 0,\ \langle e_1, e_3\rangle = \frac{1}{2}(\imath - \imath) = 0,\ \langle e_1, e_4\rangle = 0 \\
\langle e_2, e_2\rangle &= \frac{1}{2}(|\imath|^2 + |\imath|^2) = 1,\ \langle e_2, e_3\rangle = 0,\ \langle e_2, e_4\rangle = \frac{1}{2}(-\imath + \imath) = 0, \\
\langle e_3, e_3\rangle &= \frac{1}{2}(|\imath|^2 + |-\imath|^2) = 1,\ \langle e_3, e_4\rangle = 0.
\end{aligned}$$

2. (a) On a

$$\begin{aligned}
M^{+*} &= \sqrt{2}(M+M^*)^* = \sqrt{2}(M^* + (M^*)^*) = \sqrt{2}(M^* + M) = M^+, \\
M^{-*} &= \sqrt{2}(M-M^*)^* = \sqrt{2}(M^* - (M^*)^*) = \sqrt{2}(M^* - M) = -M^-,
\end{aligned}$$

et donc M^+ est hermitienne et M^- est antihermitienne. D'un autre côté, on a

$$\begin{aligned} M^+M^- &= 2(M+M^*)(M-M^*) \\ &= 2(M^2 - MM^* + M^*M - (M^*)^2) \\ &= 2(M^2 - (M^*)^2). \end{aligned}$$

Un calcul analogue donnera $M^-M^+ = 2(M^2 - (M^*)^2)$ et on déduit alors que M^+ et M^- commutent.

(b) Notons $\mathrm{S}pect M^+$ et $\mathrm{S}pect M^-$ l'ensemble des valeurs propres, respectivement, de M^+ et M^-.

On a

$$\begin{aligned} M^+ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1+\imath & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\imath \\ 1-\imath & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\imath & 0 & 2 \end{pmatrix}, \\ M^- &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1+\imath & 0 \\ 0 & 2\imath & 0 & 1-\imath \\ 1+\imath & 0 & -2\imath & 0 \\ 0 & -1-\imath & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Notons P^+ et P^-, respectivement, les polynômes caractéristiques de M^+ et de M^-. On a

$$\begin{aligned}
P^+(X) &= \det(M^+ - XI_4)\\
&= \begin{vmatrix} 2-X & 0 & 1+\imath & 0\\ 0 & -X & 0 & 1+\imath\\ 1-\imath & 0 & -X & 0\\ 0 & 1-\imath & 0 & 2-X \end{vmatrix} \quad \left(\text{On développe suivant } C_1\right)\\
&= (2-X)\begin{vmatrix} -X & 0 & 1+\imath\\ 0 & -X & 0\\ 1-\imath & 0 & 2-X \end{vmatrix}\\
&\quad +(1-\imath)\begin{vmatrix} 0 & 1+\imath & 0\\ -X & 0 & 1+\imath\\ 1-\imath & 0 & 2-X \end{vmatrix}\\
&\overset{(a)}{=} (2-X)\left[-X(X(X-2)-(1-\imath)(1+\imath))\right]\\
&\quad -(1-\imath)(1+\imath)(X(X-2)-(1-\imath)(1+\imath))\\
&= (X^2-2X-2)^2.\\
P^-(X) &= \det(M^- - XI_4)\\
&= \begin{vmatrix} -X & 0 & -1+\imath & 0\\ 0 & 2\imath-X & 0 & 1-\imath\\ 1+\imath & 0 & -2\imath-X & 0\\ 0 & -1-\imath & 0 & -X \end{vmatrix} \quad \left(\text{On développe suivant } C_1\right)\\
&\overset{(b)}{=} -X\begin{vmatrix} 2\imath-X & 0 & 1-\imath\\ 0 & -2\imath-X & 0\\ -1-\imath & 0 & -X \end{vmatrix}\\
&\quad +(1+\imath)\begin{vmatrix} 0 & -1+\imath & 0\\ 2\imath-X & 0 & 1-\imath\\ -1-\imath & 0 & -X \end{vmatrix}\\
&= -X\left[-(2\imath+X)(X(X-2\imath)+(1+\imath)(1-\imath))\right]\\
&\quad +(1+\imath)(1-\imath)(X(X-2\imath)+(1+\imath)(1-\imath))\\
&= (X^2-2\imath X+2)(X^2+2\imath X+2)
\end{aligned}$$

Noter que dans (a) et (b), nous avons développé les deux déterminants suivant la deuxième colonne. Nous avons donc

$$P^+(X) = (X^2-2X-2)^2 \quad \text{et} \quad P^-(X) = (X^2-2\imath X+2)(X^2+2\imath X+2).$$

On déduit donc que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Spect} M^+ &= \left\{1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}\right\},\\
\mathrm{Spect} M^- &= \left\{(1+\sqrt{3})\imath, -(1+\sqrt{3})\imath, \imath(1-\sqrt{3}), -\imath(1-\sqrt{3})\right\}.
\end{aligned}$$

Notons F, F^+ et F^- les endomorphismes de $\mathbb{C}^4$ dont les matrices dans la base canonique sont, respectivement, M, M^+ et M^-. Puisque la base canonique est orthonormale, F^+ est hermitien et, d'après le Théorème 22, il est diagonalisable. Ainsi si E_1 et E_2 sont les sous-espaces propres de F^+ associés, respectivement, à $1+\sqrt{3}$ et $1-\sqrt{3}$, alors $\dim E_1 = \dim E_2 = 2$ et $\mathbb{C}^4 = E_1 \oplus E_2$. D'un autre côté, puisque M^+ et M^- commutent, F^+ et F^- commutent. Il en résulte que E_1 et E_2 sont stable par F^-. Puisque F^- est antihermitien, ses restrictions à E_1 et E_2 sont diagonalisables (toujours en vertu du Théorème 22) . Pour $i = 1, 2$, notons a_i, b_i les valeurs propres de la restriction de F^- à E_i. On a

$$\{a_1, a_2, b_1, b_2\} = \left\{(1+\sqrt{3})\imath, -(1+\sqrt{3})\imath, \imath(1-\sqrt{3}), -\imath(1-\sqrt{3})\right\}. \tag{5.19}$$

Soient u, v deux vecteurs propres de la restriction de F^- à E_1 associés, respectivement, à a_1 et b_1. Or, $F = \frac{1}{2\sqrt{2}}(F^+ + F^-)$. On a alors

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(F^+(u) + F^-(u)) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{3}+a_1)u, \\ F(v) &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(F^+(u) + F^-(u)) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{3}+b_1)v, \end{aligned}$$

et donc $\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{3}+a_1)$ et $\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{3}+b_1)$ sont des valeurs propres de F. Or, F est une endomorphisme unitaire et donc, en vertu du Théorème 23, ses valeurs propres sont de module 1. Ceci entraîne, en vertu de 5.19, que $\{a_1, b_1\} = \left\{\imath(1-\sqrt{3}), -\imath(1-\sqrt{3})\right\}$. Finalement, nous avons montré que

$$\begin{aligned} \mathrm{S}pecM &= \left\{\frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{3}+\imath(1-\sqrt{3})), \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{3}-\imath(1-\sqrt{3})),\right. \\ &\qquad \left.\frac{1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{3}+\imath(1+\sqrt{3})), \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-\sqrt{3}-\imath(1+\sqrt{3}))\right\}. \end{aligned}$$