Analyse I et II pour la licence scientifique

Rappels de cours et exercices corrigés

Filières SMP, SMC et MIPC

Professeur Mohamed BOUCETTA

Préface

Alors que la réforme de l'enseignement supérieur est en marche, nos étudiants ont besoin d'outils pédagogiques adaptés aux exigences du passage au système **L-M-D** (Licence, Master, Doctorat).
Ce volume de la collection **Réussir les Mathématiques en Licence et Prépa.** couvre une partie du programme de l'analyse de la Licence scientifique. Il a été conçu en respectant les fiches techniques des modules d'analyse des filières sciences de la matière physique (SMP), sciences de la matière chimie (SMC) et les fiches techniques des modules analyse I et analyse II de la filière mathématique, informatique, physique et chimie (MIPC). Ce volume est aussi utile pour les étudiants des classes préparatoires aux écoles d'ingénieurs et les étudiants des filières sciences mathématiques (SM) et sciences mathématiques et informatique (SMI).
Chaque chapitre de ce volume comporte :

- un rappel de cours copieusement illustré par des exemples. Nous avons tenu à ce que chaque définition, chaque proposition et chaque théorème soient suivis d'exemples détaillés pour les illustrer, les rendre moins abstraits et préparer l'étudiant à aborder les exercices ;
- une collection de 133 exercices typiques recouvrant les différentes parties du cours ainsi que leurs solutions détaillées. Ces solutions se réfèrent d'une manière systématique et répétitive aux résultats du cours pour permettre à l'étudiant une assimilation profonde de ces résultats.

Nous avons aussi inclus deux sujets d'examen avec leurs solutions pour permettre aux étudiants de s'**auto-tester**.
Nous pensons que ce volume sera un outil de travail précieux pour les étudiants afin de les aider à préparer leurs examens et, surtout, à développer leurs capacités d'**auto-formation** qualité indispensable pour la poursuite de leurs études supérieures.

Table des matières

Chapitre 1

Suites de nombres réels

1.1 Le corps des nombres réels

1.1.1 Propriétés de base

Rappelons que $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs et $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels. L'étudiant s'est familiarisé durant ses études secondaires avec l'ensemble des nombres réels noté $\mathbb{R}$. Nous allons rappeler brièvement les propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$ et introduire des nouvelles propriétés.
L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ possède deux lois de compositions internes, l'addition et la multiplication vérifiant les propriétés suivantes :

1. Commutativité : $x + y = y + x$ et $xy = yx$,
2. Associativité : $(x + y) + z = x + (y + z)$ et $(xy)z = x(yz)$,
3. Eléments neutres : $0 + x = x$ et $1 \times x = x$,
4. Tout élément x admet un opposé $-x$, $x + (-x) = x - x = 0$,
5. Tout élément non nul x admet un inverse $\frac{1}{x}$, $x\frac{1}{x} = 1$,
6. La multiplication est distributive par rapport à l'addition : $x(y + z) = xy + xz$.

L'ensemble des réels possède aussi une relation d'ordre totale $\leq$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$
$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \leq 0. \tag{1.1}$$
2. Pour tous $x, y, z, t \in \mathbb{R}$, on a
$$x \leq y \text{ et } z \leq t \Longrightarrow x + z \leq y + t. \tag{1.2}$$

3. Pour tous $x, y, c \in \mathbb{R}$, on a

$$x \leq y \quad \text{et} \quad 0 \leq c \implies xc \leq yc. \tag{1.3}$$

$$x \leq y \quad \text{et} \quad c \leq 0 \implies yc \leq xc. \tag{1.4}$$

D'un autre côté, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la **partie entière** [1] de x, noté $[x]$, est l'unique élément de $\mathbb{Z}$ caractérisé entièrement par les inégalités

$$[x] \leq x < [x] + 1. \tag{1.5}$$

Exemple - On a $\left[\frac{1}{2}\right] = 0$, $\left[-\frac{1}{2}\right] = -1$, $[\pi] = 3$ **et** $[e] = 2$.

La valeur absolue est un outil essentiel de l'analyse aidant à majorer, minorer et approcher. Comme le lecteur le remarquera plus tard, la valeur absolue sera l'outil de base dans la définition des notions de limite, continuité, dérivabilité etc... On appelle valeur absolue d'un nombre réel x le réel noté $|x|$ et défini par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \leq x, \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

La proposition suivante résume les propriétés basiques de la valeur absolue.

Proposition 1 *Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont vérifiées.*
(**N1**) $|x| \geq 0$.
(**N2**) $|x| = 0 \iff x = 0$.
(**N3**) $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(inégalité triangulaire).*
(**N4**) $|xy| = |x||y|$.

Remarques -

1. **On a, pour tout $a > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$,**

$$|x| \leq a \quad \Leftrightarrow \quad -a \leq x \leq a. \tag{1.6}$$

2. **De l'inégalité triangulaire, on peut déduire les inégalités**

$$||x| - |y|| \leq |x - y|. \tag{1.7}$$

$$||x| - |y|| \leq |x + y|. \tag{1.8}$$

1. L'existence de la partie entière est une conséquence d'une propriété importante de $\mathbb{R}$ à savoir que $\mathbb{R}$ est un corps archimédien.

1.1.2 Bornes supérieure et inférieure d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

1. On dit que $m \in \mathbb{R}$ est un majorant de A si pour tout $a \in A$, $a \leq m$.
2. On dit que $m \in \mathbb{R}$ est un minorant de A si pour tout $a \in A$, $a \geq m$.
3. Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite majorée (resp. minorée) si elle admet un majorant (resp. minorant).
4. Une partie qui est à la fois majorée et minorée est dite bornée.

Il est claire que A est bornée s'il existe un réel M tel que

$$\forall a \in A, \quad |a| \leq M.$$

Définition 1 *On dit que $m \in \mathbb{R}$ est un plus grand élément de (resp. plus petit élément) A et on note $m = \max A$ (resp. $m = \min A$) si $m \in A$ et si m est un majorant de A (resp. un minorant de A).*

Exemples -

1. **Si $A = \{n \in \mathbb{N}, n \leq 10\}$, alors l'ensemble des majorants de A est l'intervalle $[10, +\infty[$ et $10 = \max A$. L'ensemble des minorants de A est l'intervalle $]-\infty, 0]$ et $0 = \min A$. Ainsi A est bornée.**
2. **Si $A =]-\infty, -1[$ alors A n'admet pas de minorant et l'ensemble des majorants de A est l'intervalle $[-1, +\infty[$. On remarque que bien que A admet une infinité de majorants, il n'a pas de plus grand élément. A est majorée mais n'est pas minorée.**

Définition 2

1. *Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$ et soit M_A l'ensemble de ses majorants. On appelle borne supérieure de A qu'on notera* $\sup A$ *le plus petit élément de $\mathcal{M}_A$ quand il existe.*
2. *Soit A une partie miniorée de $\mathbb{R}$ et soit m_A l'ensemble de ses minorants. On appelle borne inférieure de A qu'on notera* $\inf A$ *le plus grand élément de m_A quand il existe.*

Remarques -

1. **Les bornes supérieure et inférieure si elles existent sont uniques.**
2. **Si $\max A$ existe alors $\sup A = \max A$. De même si $\min A$ existe alors $\inf A = \min A$.**

Exemple - On a

$$\sup]-\infty,1]=\sup]-\infty,1[=1 \quad \textbf{et} \quad \inf]0,1]=\inf[0,1]=0.$$

Les propositions suivantes donnent une caractérisation pratique des borne supérieure et inférieure.

Proposition 2 *Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors $M = \sup A$ si et seulement si :*
(i) pour tout $a \in A$, $a \leq M$;
(ii) pour tout $\epsilon > 0$, il existe un élément a de A tel que $M - \epsilon < a$.

Proposition 3 *Soit $A \subset \mathbb{R}$. Alors $m = \inf A$ si et seulement si :*
(i) pour tout $a \in A$, $m \leq a$;
(ii) pour tout $\epsilon > 0$, il existe un élément a de A tel que $m + \epsilon > a$.

Exemples -

1. **En utilisant la proposition 3, nous allons montrer que**

$$\inf\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\} = 0.$$

Notons $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$**. On a pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$**,**

$$0 \leq \frac{1}{n}$$

et donc (i) **de la proposition 3 est vérifié. Vérifions maintenant** (ii)**. Soit** $\epsilon > 0$**. Il s'agit de trouver un** $n_0 \in \mathbb{N}^*$ **tel que**

$$\epsilon > \frac{1}{n_0}.$$

Cette inégalité est équivalente à

$$n_0 > \frac{1}{\epsilon}.$$

Or l'entier $n_0 = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$ **vérifie cette inégalité en vertu de la relation (1.5) et** (ii) **est vérifiée.**

2. **Soit** $A = \left\{\frac{n-1}{2n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$**. En utilisant la proposition 2, nous allons montrer que** $\sup A = \frac{1}{2}$**. On a, pour tout** $n \in \mathbb{N}^*$**,**

$$\frac{n-1}{2n} - \frac{1}{2} = \frac{n-1-n}{2n} = -\frac{1}{2n} \leq 0,$$

ainsi

$$\frac{n-1}{2n} \leq \frac{1}{2}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et donc (i) de la proposition 2 est vérifié. Vérifions maintenant (ii). Soit $\epsilon > 0$. Il s'agit de trouver un $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{1}{2} - \epsilon < \frac{n_0 - 1}{2n_0}.$$

Cette inégalité est équivalente à

$$\frac{1}{2n_0} < \epsilon,$$

soit $\frac{1}{2\epsilon} < n_0$. Or l'entier $n_0 = [\frac{1}{2\epsilon}] + 1$ vérifie cette inégalité en vertu de la relation (1.5) et (ii) est vérifiée.

Le théorème suivant est parmi les théorèmes les plus importants de l'analyse.

Théorème 1 (Théorème de la borne supérieure)
Toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée. La partie $(-A) = \{-a, a \in A\}$ est majorée et donc admet une borne supérieure d'après le Théorème 1. En plus, $\inf A = -\sup(-A)$ (Voir Exercice 8). On déduit alors :

Corollaire 1 *Toute partie non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.*

Dans le théorème de la borne supérieure, il y a deux hypothèses : A doit être non vide et majorée. Quelquefois, le plus difficile est de montrer que A est non vide.

Exemple - On considère l'ensemble

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}, 0 < x \leq 1 \textbf{ et } \left| \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq \frac{1}{10} \right\}.$$

Nous allons utiliser Théorème 1 pour montrer que A admet une borne supérieure et une borne inférieure. Puisque, par définition, si $x \in A$, alors $0 < x \leq 1$, on déduit que A est minoré et majoré. Montrons maintenant que A est non vide. Prenons $x = \frac{1}{4\pi}$. On a $0 < x \leq 1$ et

$$\left| \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| = |4\pi \sin(4\pi)| = 0 \leq \frac{1}{10}$$

et donc $\frac{1}{4\pi} \in A$. Maintenant Théorème 1 assure l'existence de $\inf A$ et $\sup A$. Le calcul de $\sup A$ est difficile. Pour $\inf A$, nous allons anticiper et utiliser la proposition 7 pour montrer que $\inf A = 0$. En effet, 0 est un minorant de A (par définition) et la suite $\left(\frac{1}{n\pi}\right)_{n \geq 4}$ est une suite de points de A car, si $x_n = \frac{1}{n\pi}$,

$$\left| \frac{1}{x_n} \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) \right| = |n\pi \sin(n\pi)| = 0 \leq \frac{1}{10},$$

et converge vers 0.

1.2 Suites de nombres réels

1.2.1 Définition et exemples

Définition 3 *Une suite dans $\mathbb{R}$ est une application qui associe à tout entier $n \geq n_0$ un réel qu'on notera u_n. Une telle suite sera notée $(u_n)_{n \geq n_0}$ et u_{n_0} est appelé le premier terme de la suite.*

Exemples -

1. **Une suite peut être définie par une formule explicite. Par exemple, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par**

$$u_n = \frac{1}{n}, \quad \textbf{pour tout} \quad n \geq 1.$$

   Ainsi $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{1}{2}$ etc..
   La suite $(v_n)_{n\geq 3}$ définie par

$$v_n = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}, \quad \textbf{pour tout} \quad n \geq 3.$$

   Ainsi $u_3 = \frac{1}{6}$ etc...
   La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = (-1)^n$ qui ne prend que deux valeurs 1 et -1 est utilisée souvent comme contre-exemple.

2. **Une suite peut être définie en donnant le premier terme et en définissant les autres termes par une relation de recurrence. Par exemple, la suite définie par**

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}, \quad n \geq 0. \end{cases}$$

   Ainsi, $u_1 = \sqrt{2}$ et $u_2 = \sqrt{1+\sqrt{2}}$. L'inconvéniant dans ce genre de suite c'est qu'il faut avoir calculé les termes de la suite jusqu'au rang n pour calculer le terme de rang $n+1$.

1.2.2 Convergence et divergence d'une suite

Définition 4 *On dit que $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si*

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq n_0 \textit{ tel que}: \ \forall n \geq N,\ \ell - \epsilon \leq u_n \leq \ell + \epsilon. \tag{1.9}$$

Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.

La relation (1.9) est équivalente, d'après (1.6), à

$$\forall \epsilon > 0\ \exists N \geq n_0 \text{ tel que}: \ \forall n \geq N \ \ |u_n - \ell| \leq \epsilon. \tag{1.10}$$

Une suite ne peut pas converger vers deux réels différents.

Proposition 4 *Si* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *converge vers* ℓ_1 *et* ℓ_2 *alors* $\ell_1 = \ell_2$.

Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers ℓ, on notera

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell.$$

L'équivalence suivante est évidente :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} |u_n - \ell| = 0. \tag{1.11}$$

Exemple - Montrons que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n} = 0. \tag{1.12}$$

Soit $\epsilon > 0$. **Cherchons un rang** N **tel que pour tout** $n \geq N$, $\frac{1}{n} \leq \epsilon$. **Cette inégalité est équivalente à** $\frac{1}{\epsilon} \leq n$. **Prenons** $N = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$. **D'après (1.5),** $N \geq \frac{1}{\epsilon}$ **et ainsi** $\frac{1}{N} \leq \epsilon$. **Donc, pour tout** $n \geq N$,

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \leq \epsilon.$$

Ceci montre (1.12).

Proposition 5 *Soient* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *et* $(v_n)_{n\geq n_0}$ *deux suites réelles telles que*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell_1 \quad et \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = \ell_2.$$

Soit $a \in \mathbb{R}$. *Alors, on a :*

(*i*) $\lim_{n\longrightarrow+\infty}(u_n + v_n) = \ell_1 + \ell_2$,

(*ii*) $\lim_{n\longrightarrow+\infty}(u_n v_n) = \ell_1 \ell_2$,

(*iii*) $\lim_{n\longrightarrow+\infty}(a u_n) = a\ell_1$,

(*iv*) *si en plus, pour tout* $n \geq n_0$, $v_n \neq 0$ *et* $\ell_2 \neq 0$, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ell_1}{\ell_2}$.

Cette proposition et la relation (1.12) permettent de calculer les limites de plusieurs suites.

Exemple - Calculons la limite de la suite $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$. **On a**

$$\frac{2n+1}{n+1} = \frac{n(2+\frac{1}{n})}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}.$$

Maintenant, en utilisant (1.12) et la proposition 5, on déduit que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 2.$$

Définition 5 *1. Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est majorée s'il existe un réel $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq M$.*

2. Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est minorée s'il existe un réel $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq m$.

3. Une suite qui est à la fois majorée et minorée est dite bornée et ceci équivaut à l'existence de $M > 0$ tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| \leq M$.

Exemples -

1. **La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \frac{n}{n+1}$ est bornée. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n| \leq 1$.**
2. **La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = e^n$ est minorée par 0 mais n'est pas majorée.**
3. **La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = e^{-n}$ est minorée par 0 et elle est majorée par 1. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-n \leq 0$ et puisque la fonction exponentielle est strictement croissante, on a $e^{-n} \leq e^0 = 1$.**

Proposition 6 *Toute suite convergente et bornée.*

Remarque - La réciproque de cette proposition n'est pas vraie en général. La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = (-1)^n$ est bornée ($|u_n| = 1$) mais n'est pas convergente. En effet, raisonnons par absurde et supposons que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell$. En passant à la limite dans les deux relations $u_{n+1} + u_n = 0$ et $u_n^2 = 1$, en déduit que $2\ell = 0$ et $\ell^2 = 1$ ce qui constitue une contradiction.
Une suite peut diverger tout en tendant vers $\pm\infty$.

Définition 6 *1. On dira que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ diverge vers $+\infty$ et on notera $\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty$ si*

$$\forall a > 0,\ \exists N \geq n_0 \text{ tel que } \forall n \geq N, u_n > a.$$

2. On dira que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ et on notera $\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = -\infty$ si

$$\forall a < 0,\ \exists N \geq n_0 \text{ tel que } \forall n \geq N, u_n < a.$$

Exemple - La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = n$ diverge vers $+\infty$. En effet, pour tout $a > 0$, prenons $N = [a] + 1$. On a, d'après (1.5), $N > a$ et donc pour tout $n \geq N$, $u_n > a$.

1.2.3 Suites monotones

Définition 7 *1. Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite croissante si pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq u_{n+1}$.*

2. Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite strictement croissante si pour tout $n \geq n_0$, $u_n < u_{n+1}$.

3. Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite décroissante si pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n+1}$.

4. Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite strictement décroissante si pour tout $n \geq n_0$, $u_n > u_{n+1}$.

Une suite qui est soit croissante, soit décroisante, est dite monotone.

Exemples -

1. **La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$ est une suite strictement décroissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a**
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0.$$
2. **La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = e^{n^2}$ est une suite strictement croissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 < (n+1)^2$ et puisque la fonction exponentielle est strictement croissante, on a $e^{n^2} < e^{(n+1)^2}$ et donc $u_n < u_{n+1}$.**
3. **La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ n'est ni croissante ni décroissante. En effet, $u_1 < u_2$ et $u_2 > u_3$.**

Théorème 2 (Théorème des suites monotones) *Toute suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ croissante majorée (resp. décroissante minorée) est convergente et, en plus, on a*
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \begin{cases} \sup\limits_{n\geq n_0} u_n & \text{si } (u_n)_{n\geq n_0} \text{ est croissante,} \\ \inf\limits_{n\geq n_0} u_n & \text{si } (u_n)_{n\geq n_0} \text{ est décroissante.} \end{cases}$$

Exemple - On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \sqrt{2}$ et pour tout $n \geq 1$,
$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}.$$
Nous allons montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leq u_n \leq 2.$$
Cette relation est clairement vérifiée pour $n = 1$. Supposons qu'elle est vraie pour n. On a $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \geq 0$. D'un autre côté,
$$u_{n+1}^2 - 4 = u_n + 2 - 4 = u_n - 2 \leq 0$$

et donc $|u_{n+1}| = u_{n+1} \leq 2$.
Nous allons montrer maintenant que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est croissante. Pour comparer** u_{n+1} **et** u_n **et puisque ils sont tous les deux positifs, nous allons comparer leur carrées. On a**

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 = u_n + 2 - u_n^2 = (u_n + 1)(2 - u_n) \geq 0$$

et donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est croissante. Etant croissante et majorée, d'après le théorème 2,** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est convergente vers une limite** l**. De la relation**

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2},$$

on déduit en passant à la limite que[2] $\ell = \sqrt{\ell + 2}$ **et on trouve que** $\ell = 2$.

Les suites peuvent servir à caractériser la borne supérieure et la borne inférieure. La proposition suivante est une conséquence des propositions 2 et 3

Proposition 7 *Soit* $A \subset \mathbb{R}$. *Alors :*

1. $M = \sup A$ *si et seulement si* M *est un majorant de* A *et il existe une suite* $(a_n)_{n\geq n_0}$ *telle que, pour tout* $n \geq n_0$, $a_n \in A$ *et* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n = M$.
2. $m = \inf A$ *si et seulement si* m *est un minorant de* A *et il existe une suite* $(a_n)_{n\geq n_0}$ *telle que, pour tout* $n \geq n_0$, $a_n \in A$ *et* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n = m$.
3. A *n'est pas majoré si et seulement si il existe une suite* $(a_n)_{n\geq n_0}$ *telle que, pour tout* $n \geq n_0$, $a_n \in A$ *et* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n = +\infty$.
4. A *n'est pas minoré si et seulement si il existe une suite* $(a_n)_{n\geq n_0}$ *telle que, pour tout* $n \geq n_0$, $a_n \in A$ *et* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n = -\infty$.

Exemples

1. **Soit** $A =]-1, \sqrt{2}[$. **On a** $\inf A = -1$ **car** -1 **est un minorant de** A **et la suite** $\left(-1 + \frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ **est une suite de points de** A **qui converge vers** -1. **De même** $\sup A = \sqrt{2}$ **car** $\sqrt{2}$ **est un majorant de** A **et la suite** $\left(\sqrt{2} - \frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ **est une suite de points de** A **qui converge vers** $\sqrt{2}$.
2. **La partie** $A = \left\{n + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ **n'est pas majorée car la suite** $\left(n + \frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **est une suite de points de** A **qui diverge vers** $+\infty$.

2. On utilise ici un argument de continuité qu'on verra dans le chapitre 2.

1.2.4 Limites et ordre

Proposition 8 (Principe des gendarmes) *Soient* $(u_n)_{n\geq n_0}$, $(v_n)_{n\geq n_0}$ *et* $(w_n)_{n\geq n_0}$ *trois suites réelles. On suppose que*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell, \ \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = \ell \quad \textit{et} \quad \forall n \geq n_0,\ u_n \leq w_n \leq v_n.$$

Alors $\lim_{n\longrightarrow+\infty} w_n = \ell$.

Proposition 9 *Soient* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *et* $(v_n)_{n\geq n_0}$ *telles que, pour tout* $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$. *Alors :*

1. *Si* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty$ *alors* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = +\infty$.
2. *Si* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = -\infty$ *alors* $\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = -\infty$.

Exemples -

1. **On a pour tout** $n \geq 1$ **et pour tout** $\alpha \geq 1$,

$$0 < \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n}.$$

Ceci entraîne d'après le principe des gendarmes que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha \geq 1. \tag{1.13}$$

2. **Considérons la suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ **définie par** $u_n = \frac{1}{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$. **Puisque** $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{n}\right) \leq 1$, **on déduit que**

$$-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}.$$

Maintenant, d'après (1.12), on a $\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} -\frac{1}{n} = 0$, **en appliquant le principe des gendarmes, on déduit que**

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Proposition 10 (Principe des prolongement des inégalités) *Soient* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *et* $(v_n)_{n\geq n_0}$ *deux suites réelles telles que*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell_1, \ \lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = \ell_2 \quad \textit{et} \quad \forall n \geq n_0,\ u_n \leq v_n.$$

Alors $\ell_1 \leq \ell_2$.

Remarque. On peut très bien avoir pour tout $n \geq n_0$, $u_n < v_n$ et avoir $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} v_n$. Par exemple, pour tout $n \geq 2$,

$$0 < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n} \quad \textbf{et} \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Définition 8 *Deux suites réelles $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ sont dites adjacentes si :*

1. *pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$,*
2. *la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est croissante,*
3. *la suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante,*
4. $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Proposition 11 *Deux suites adjacentes sont convergentes et convergent vers la même limite.*

Exemple - On considère les deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} \quad \textbf{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n!}.$$

Nous allons montrer que ces deux suites sont adjacentes. En effet,

$$\begin{aligned} v_n - u_n &= \frac{1}{n!} > 0, \\ u_{n+1} - u_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} > 0. \end{aligned}$$

De ces deux relations, on déduit que $u_n \leq v_n$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$. D'un autre côté,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n!} = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \\ &= \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{(1-n)}{(n+1)!} \leq 0 \qquad (n \geq 1), \end{aligned}$$

et donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, ce qui achève de montrer que les deux suites sont adjacentes. D'après la proposition 11, ces deux suites sont convergentes et on a[3] $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} v_n$.

3. La limite commune de ces deux suite est le nombre e base du logarithme Neperien.

1.2.5 Suites arithmétiques et géométriques

Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite arithmétique de raison $a \in \mathbb{R}$ si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n + a.$$

De cette relation, on déduit par récurrence que pour tout $n \geq 0$,

$$u_n = u_0 + na.$$

La somme des $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique est donnée par

$$\sum_{p=0}^{n} u_p = (n+1)u_0 + a\frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.14}$$

En particulier,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.15}$$

Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est dite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = qu_n.$$

De cette relation, on déduit par récurrence que pour tout $n \geq 0$,

$$u_n = u_0 q^n. \tag{1.16}$$

On a la formule, pour $q \neq 1$,

$$\sum_{p=0}^{n} q^p = 1 + q + \ldots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \tag{1.17}$$

On a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |q| < 1, \\ +\infty & \text{si} \quad q > 1, \\ 1 & \text{si} \quad q = 1 \\ \text{n'existe pas} & \text{si} \quad q \leq -1. \end{cases} \tag{1.18}$$

1.2.6 Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Le résultat suivant traduit une propriété importante des nombres rationnels dans $\mathbb{R}$.

Théorème 3 *Le corps des rationnels $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire, tout intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ contient une infinité de nombres rationnels.*

La densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ peut être exprimée à l'aide des suites.

Théorème 4 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_n \in \mathbb{Q}$ et*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} q_n = x.$$

Exemples -

1. **La suite** $1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414...$ **est une suite de rationnels qui converge vers** $\sqrt{2}$**.**
2. **Nous allons construire dans l'exercice 11 une suite de rationnels qui converge vers** $\sqrt{a}$ **pour tout** $a \in \mathbb{N}^*$**.**
3. **Le théorème ci-dessus assure l'existence, pour tout nombre réel, d'une suite de rationnels qui converge vers ce nombre. Construire cette suite pour certains nombres réels est difficile. Le nombre** π **est le nombre pour lequel les mathématiciens de tous les temps ont essayé et essayent toujours de construire des suites de rationnels qui convergent vers ce nombre magique.**

1.3 Exercices corrigés

Exercice 1 *Soient a, b deux réels strictement positifs. Montrer la double inégalité*

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Solution - Commençons par l'inégalité de droite. On a

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{1}{2}\left(a+b-2\sqrt{ab}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0,$$

et l'inégalité s'ensuit. Pour l'inégalité de gauche, on a

$$\begin{aligned} \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} - \sqrt{ab} &= \frac{2ab}{a+b} - \sqrt{ab} = \frac{2ab-(a+b)\sqrt{ab}}{a+b} \\ &= \frac{\sqrt{ab}(2\sqrt{ab}-a-b)}{a+b} = -\frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{a+b} \leq 0, \end{aligned}$$

et l'inégalité est vérifiée.

Exercice 2 *Montrer que*

$$\left(2+\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(2-\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{3}} = 1.$$

(Utiliser la formule du binôme : $(a+b)^3 = a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$**).**

Solution - Posons $a = \left(2+\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{3}}$ et $b = \left(2-\sqrt{5}\right)^{\frac{1}{3}}$. On a

$$\begin{aligned} a^3+b^3 &= 2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5} = 4, \\ ab &= \left[(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})\right]^{\frac{1}{3}} \\ &= [4-5]^{\frac{1}{3}} = -1. \end{aligned}$$

On déduit que

$$(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b) = 4-3(a+b).$$

Ainsi $a+b$ est solution de l'équation

$$x^3 + 3x - 4 = 0. \qquad (E)$$

On voit que $x = 1$ est solution de cette équation et que

$$x^3+3x-4 = x^3-1+3(x-1) = (x-1)(x^2+x+1)+3(x-1) = (x-1)(x^2+x+4).$$

Maintenant, l'équation $x^2+x+4 = 0$ n'a pas de solution réelle ($\Delta = -15 < 0$) et donc $x = 1$ est la seule solution réelle de (E) ce qui permet de conclure.

Exercice 3 *Montrer que*

$$\left(7+\sqrt{50}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(7-\sqrt{50}\right)^{\frac{1}{3}} = 2.$$

(Utiliser la formule du binôme : $(a+b)^3 = a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$**).**

Solution - Posons $a = \left(7+\sqrt{50}\right)^{\frac{1}{3}}$ et $b = \left(7-\sqrt{50}\right)^{\frac{1}{3}}$. On a

$$\begin{aligned} a^3+b^3 &= 7+\sqrt{50}+7-\sqrt{50} = 14, \\ ab &= \left[(7+\sqrt{50})(7-\sqrt{50})\right]^{\frac{1}{3}} \\ &= [49-50]^{\frac{1}{3}} = -1. \end{aligned}$$

On déduit que

$$(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b) = 14-3(a+b).$$

Ainsi $a+b$ est solution de l'équation

$$x^3 + 3x - 14 = 0. \qquad (E)$$

On voit que $x = 2$ est solution de cette équation et que

$$x^3+3x-14 = x^3-8+3(x-2) = (x-2)(x^2+2x+4)+3(x-2) = (x-2)(x^2+2x+7).$$

Maintenant, l'équation $x^2+2x+7 = 0$ n'a pas de solution réelle ($\Delta = -24 < 0$) et donc $x = 2$ est la seule solution réelle de (E) ce qui permet de conclure.

Exercice 4 *Trouver* $\inf A$, $\sup A$, $\max A$ *et* $\min A$ *quand ils existent dans chacun des cas suivants :*

1. $A = [-1, 2[$,
2. $A = \{n^2 + 1, n \in \mathbb{N}\}$,
3. $A = \{\frac{1}{n} + (1 + (-1)^n)n^2, n \in \mathbb{N}^*\}$,
4. $A = \{x \in \mathbb{R}, |2x + 1| < 5\}$,
5. $A = \{x \in \mathbb{R}, (x^2 + 1)^{-1} > \frac{1}{2}\}$,

Solution -

1. On a -1 est un minorant de A et $-1 \in A$ et donc $\min A = \inf A = -1$. D'un autre côté, 2 est un majorant de A et la suite $(2 - \frac{1}{n})_{n\geq 1}$ est une suite de points de A qui converge vers 2 et donc, d'après la proposition 7, $\sup A = 2$. Puisque $\sup A \notin A$, A n'admet pas de max.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq n^2 + 1$ et donc 1 est un minorant de A. En plus $1 = 0^2 + 1 \in A$ et donc $\min A = \inf A = 1$. La suite $(n^2 + 1)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de A qui diverge vers $+\infty$ et donc A n'est pas majorée, d'après la proposition 7.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} + (1 + (-1)^n)n^2 \geq 0$ et donc 0 est un minorant de A. En plus, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par
$$a_n = \frac{1}{2n+1} + (1 + (-1)^{2n+1})(2n+1)^2 = \frac{1}{2n+1}$$
est une suite de points de A qui converge vers 0. Donc, d'après la proposition 7, $\inf A = 0$ et, puisque $0 \notin A$, A n'admet pas de min. D'un autre côté, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par
$$b_n = \frac{1}{2n} + (1 + (-1)^{2n})(2n)^2 = \frac{1}{2n} + 8n^2$$
est une suite de points de A qui diverge vers $+\infty$. Donc, d'après la proposition 7, A n'est pas majorée.
4. D'après (1.6), l'inégalité $|2x + 1| < 5$ est équivalente, à
$$-5 < 2x + 1 < 5,$$
soit $-3 < x < 3$. Donc $A =]-3, 3[$. On a clairement $\inf A = -3$ et $\sup A = 3$ alors que $\min A$ et $\max A$ n'existent pas.

5. L'inégalité $(x^2+1)^{-1} > \frac{1}{2}$ est équivalente à $x^2+1<2$, soit

$$(x-1)(x+1) < 0.$$

Ainsi $A =]-1,1[$. Donc $\inf A = -1$, $\sup A = 1$ alors que $\min A$ et $\max A$ n'existent pas.

Exercice 5 *Soit*

$$A = \left\{ \frac{2p^2-3q}{p^2+q}, p,q \in \mathbb{N}, 0 < p < q \right\}.$$

1. *Montrer que A est minoré par -3 et majoré par 2.*
2. *Calculer* $\sup A$ *et* $\inf A$.

Solution -

1. Soit $\frac{2p^2-3q}{p^2+q}$ un élément de A. On a

$$\begin{aligned} \frac{2p^2-3q}{p^2+q} + 3 &= \frac{2p^2-3q+3p^2+3q}{p^2+q} = \frac{5p^2}{p^2+q} \geq 0, \\ \frac{2p^2-3q}{p^2+q} - 2 &= \frac{2p^2-3q-2p^2-2q}{p^2+q} = \frac{-5q}{p^2+q} \leq 0. \end{aligned}$$

Ces deux relations montrent que, pour tout $x \in A$,

$$-3 \leq x \leq 2$$

et donc -3 est un minorant de A et 2 est un majorant de A.

2. • Pour tout $n \geq 2$, prenons $p = 1$ et $q = n$. On a $p, q \in \mathbb{N}$ et $0 < p < q$ et donc

$$\frac{2p^2-3q}{p^2+q} = \frac{1-3n}{1+n} \in A.$$

Ainsi la suite $\left(\frac{1-3n}{1+n}\right)_{n \geq 2}$ est une suite de points de A et on a

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1-3n}{1+n} = -3.$$

Ainsi -3 est un minorant de A et il existe une suite de points de A qui converge vers -3 donc, d'après la proposition 7,

$$\inf A = -3.$$

- Pour tout $n \geq 1$, prenons $p = n$ et $q = n + 1$. On a $p, q \in \mathbb{N}$ et $0 < p < q$ et donc
$$\frac{2p^2 - 3q}{p^2 + q} = \frac{2n^2 - 3n - 3}{n^2 + n + 1} \in A.$$
Ainsi la suite $\left(\frac{2n^2-3n-3}{n^2+n+1}\right)_{n \geq 2}$ est une suite de points de A et on a
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{2n^2 - 3n - 3}{n^2 + n + 1} = 2.$$
Ainsi 2 est un majorant de A et il existe une suite de points de A qui converge vers 2 donc, d'après la proposition 7,
$$\sup A = 2.$$

Exercice 6 *1. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. Montrer que*
$$|\max(a, b) - \max(a, c)| \leq |b - c|.$$

2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :
   (a) $[x + n] = [x] + n$,
   (b) $[x] - [y] - 1 \leq [x - y] \leq [x] - [y]$.

Solution -

1. On discute selon l'ordre de a par rapport à b et c.
   (a) $a \leq b$ et $a \leq c$. Dans ce cas $\max(a, b) = b$ et $\max(a, c) = c$ et l'inégalité est clairement vérifiée.
   (b) $b \leq a \leq c$. Dans ce cas, on a $|b - c| \geq |a - c|$ et, comme $\max(a, b) = a$ et $\max(a, c) = c$, l'inégalité est clairement vérifiée.
   Le cas $c \leq a \leq b$ se fait de la même manière.
   (c) $b \leq c \leq a$. Dans ce cas $\max(a, b) = a$ et $\max(a, c) = a$ et l'inégalité est clairement vérifiée.
   Le cas $b \leq c \leq a$ se fait de la même manière.
2. (a) D'après (1.5), on a
$$[x] \leq x < [x] + 1.$$
   En ajoutant n aux membres de cette inégalité, on obtient
$$[x] + n \leq x + n < [x] + n + 1.$$
   Comme $[x] + n \in \mathbb{Z}$, on déduit, d'après (1.5), que $[x + n] = [x] + n$.

(b) D'après (1.5), on a

$$[x] \leq x < [x] + 1 \quad \text{et} \quad [y] \leq y < [y] + 1.$$

Ces deux inégalités peuvent s'écrire aussi

$$[x] \leq x < [x] + 1 \quad \text{et} \quad -[y] - 1 < -y \leq -[y]\,.$$

En faisant la somme de ces deux inégalités, on obtient

$$[x] - [y] - 1 < x - y < [x] - [y] + 1.$$

On distingue deux cas :
Premier cas : $[x] - [y] - 1 < x - y < [x] - [y]$ et dans ce cas, d'après (1.5),

$$[x - y] = [x] - [y] - 1,$$

et obtient l'inégalité souhaitée.
Deuxième cas : $[x] - [y] \leq x - y < [x] - [y] + 1$ et dans ce cas, d'après (1.5),

$$[x - y] = [x] - [y]\,,$$

et obtient l'inégalité souhaitée.

Exercice 7 *1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que*

$$\max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2} \quad \textit{et} \quad \min(a, b) = \frac{a + b - |a - b|}{2}.$$

2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

(a) $0 \leq [nx] - n\,[x] \leq n - 1$

(b) $[x] = \left[\frac{[nx]}{n}\right]$,

(c) $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1$.

Solution -

1. On distingue deux cas :
   - $a \leq b$. Dans ce cas $|a - b| = b - a$ et donc

$$\frac{a + b + |a - b|}{2} = b = \max(a, b) \quad \text{et} \quad \frac{a + b - |a - b|}{2} = a = \min(a, b).$$

$b \leq a$. Dans ce cas $|a - b| = a - b$ et donc

$$\frac{a + b + |a - b|}{2} = a = \max(a, b) \quad \text{et} \quad \frac{a + b - |a - b|}{2} = b = \min(a, b).$$

(a) D'après (1.5), on a
$$[x] \leq x < [x] + 1.$$
En multipliant par $n \geq 0$, on obtient
$$n\,[x] \leq nx < n\,[x] + n.$$
De l'inégalité $n\,[x] \leq nx$ et puisque $n\,[x] \in \mathbb{Z}$, on déduit que
$$n\,[x] \leq [nx]$$
et donc
$$[nx] - n\,[x] \geq 0. \tag{1}$$
De l'inégalité $nx < n\,[x] + n$, on déduit que
$$[nx] < n\,[x] + n$$
soit
$$[nx] - n\,[x] < n.$$
Comme les deux membres de cette inégalités sont dans $\mathbb{Z}$, on déduit que
$$[nx] - n\,[x] \leq n - 1. \tag{2}$$
Les relations (1) et (2) donnent l'inégalité souhaitée.

(b) Pour $n = 1$, la relation est évidente. Supposons que $n \geq 2$. Nous avons vu dans la question précédente que
$$0 \leq [nx] - n\,[x] \leq n - 1.$$
En multipliant par $\frac{1}{n} > 0$, on déduit que
$$0 \leq \frac{[nx]}{n} - [x] \leq 1 - \frac{1}{n} < 1.$$
Cette double inégalité s'écrit aussi
$$[x] \leq \frac{[nx]}{n} < [x] + 1,$$
ce qui montre la relation souhaitée.

(c) On a
$$[x] \leq x < [x] + 1 \quad \text{et} \quad [y] \leq y < [y] + 1.$$
En ajoutant ces deux inégalités on obtient
$$[x] + [y] \leq x + y < [x] + [y] + 2.$$
On distingue deux cas :

- $[x] + [y] \leq x + y < [x] + [y] + 1$. Dans ce cas
$$[x + y] = [x] + [y]$$
et la double inégalité est vérifiée.
- $[x] + [y] + 1 \leq x + y < [x] + [y] + 2$. Dans ce cas
$$[x + y] = [x] + [y] + 1$$
et la double inégalité est vérifiée.

Exercice 8 *Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.*

1. *Montrer que $A \cup B$ admet une borne inférieure et une borne supérieure, et que l'on a les relations suivantes*
$$\min(\inf A, \inf B) \leq \inf(A \cup B) \leq \sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B).$$
2. *On définit $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$. Montrer que $A + B$ admet une borne supérieure et une borne inférieure et que l'on a les relations*
$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B \qquad \textit{et} \qquad \sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$
3. *On définit $-A = \{-a, a \in A\}$. Montrer que $-A$ admet une borne supérieure et une borne inférieure et que*
$$\inf(-A) = -\sup(A) \quad \textit{et} \quad \sup(-A) = -\inf(A).$$

Solution -

Nous allons utiliser le théorème de la borne supérieure (*cf.* Théorème 1).

1. Puisque A et B sont non vides alors $A \cup B$ est non vide. Pour tout $a \in A \cup B$, si $a \in A$, alors $\inf A \leq a \leq \sup A$ et si $a \in B$ alors $\inf B \leq a \leq \sup B$. Dans tous les cas
$$\min(\inf A, \inf B) \leq a \leq \max(\sup A, \sup B).$$
Donc $A \cup B$ est borné et, d'après le théorème de la borne supérieure et son corollaire, $A \cup B$ admet une borne supérieure et une borne inférieure. En plus, puisque $\min(\inf A, \inf B)$ est un minorant de $A \cup B$, on a
$$\min(\inf A, \inf B) \leq \inf(A \cup B),$$

(la borne inférieure étant le plus grand des minorants). De même, $\max(\sup A, \sup B)$ est un majorant de $A \cup B$, on a

$$\max(\sup A, \sup B) \geq \sup(A \cup B),$$

(la borne supérieure étant le plus petit des majorants). Finalement,

$$\min(\inf A, \inf B) \leq \inf(A \cup B) \leq \sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B).$$

2. Puisque A et B sont non vides alors $A + B$ est non vide. Pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on a

$$\inf A \leq a \leq \sup A \quad \text{et} \quad \inf B \leq b \leq \sup B.$$

En faisant la somme de ces inégalités on obtient

$$\inf A + \inf B \leq a + b \leq \sup A + \sup B.$$

Ces inégalités montrent que $A+B$ est borné et, d'après le théorème de la borne supérieure et son corollaire, $A+B$ admet une borne supérieure et une borne inférieure. En plus, $\inf A+\inf B$ est un minorant de $A+B$ et $\sup A + \sup B$ est un majorant de $A + B$. Nous allons maintenant utiliser la proposition (7). D'après cette proposition il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A et une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de B telles que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n = \inf A \quad \text{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} b_n = \inf B.$$

La suite $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de $A + B$ et on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} (a_n + b_n) = \inf A + \inf B.$$

D'après la proposition (7),

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B.$$

Un raisonnement analogue montre que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

3. Puisque A est non vide alors $(-A)$ est non vide. Pour tout $a \in A$, on a

$$\inf A \leq a \leq \sup A.$$

Cette inégalité peut s'écrire

$$-\sup(A) \leq -a \leq -\inf(A).$$

Ces inégalités montrent que $(-A)$ est borné et, d'après le théorème de la borne supérieure et son corollaire, $(-A)$ admet une borne supérieure et une borne inférieure. En plus, $-\sup(A)$ est un minorant de $(-A)$ et $-\inf A$ est un majorant de $(-A)$. D'après la proposition (7), il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A telles que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} a_n = \inf A \quad \text{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} b_n = \sup A.$$

Les suites $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(-b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de $(-A)$ et

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}(-a_n) = -\inf A \quad \text{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty}(-b_n) = -\sup A.$$

D'après la proposition (7),

$$\inf(-A) = -\sup A \quad \text{et} \quad \sup(-A) = -\inf A.$$

Exercice 9 *Montrer en utilisant la définition de la limite que*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Solution - Soit $\epsilon > 0$. Cherchons un rang N tel que pour tout $n \geq N$, $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq \epsilon$. Cette inégalité est équivalente à $\dfrac{1}{\epsilon^2} \leq n$. Prenons $N = [\frac{1}{\epsilon^2}] + 1$. D'après (1.5), $N \geq \frac{1}{\epsilon^2}$ et ainsi $\frac{1}{\sqrt{N}} \leq \epsilon$. Donc, pour tout $n \geq N$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \leq \epsilon.$$

Ainsi $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Exercice 10 *Calculer les limites suivantes :*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \qquad \lim_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1},$$

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} n\left(\ln(n+1) - \ln n\right), \qquad \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}, \qquad \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n} \quad ,$$

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{n-\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2-1}}, \qquad \lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} (n^2)^{\frac{1}{n}}, \qquad \lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}, \qquad \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\cos n}{n}.$$

Solution -
Nous allons utiliser la proposition 5 et les limites des suites usuelles.

1. On a

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1}-\sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n(1+\frac{1}{n})}+\sqrt{n}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\times\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.\end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n}=0$, on déduit que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=0.$$

2. On a

$$\begin{aligned}\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1} &= \frac{n^2+n+1-(n^2-n+1)}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}+\sqrt{n^2(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})}}\\ &= \frac{2n}{|n|\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)}\\ &= \frac{2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)}.\end{aligned}$$

Puisque $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n^2}=0$ (voir (1.12) et (1.13)), on déduit que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1}=1.$$

3. On a

$$n\left(\ln(n+1)-\ln n\right) = n\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)=n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}.$$

Or quand $n\longrightarrow+\infty$, $\frac{1}{n}\longrightarrow 0$ et on a la formule $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$.
On déduit alors que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}n\left(\ln(n+1)-\ln n\right)=1.$$

4. On a
$$\frac{3^n-2^n}{3^n+2^n} = \frac{3^n(1-(\frac{2}{3})^n)}{3^n(1+(\frac{2}{3})^n)} = \frac{1-(\frac{2}{3})^n}{1+(\frac{2}{3})^n}.$$
Maintenant, $\left((\frac{2}{3})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $0<\frac{2}{3}<1$ et donc, d'après (1.18), $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$. Ainsi
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}=1.$$

5. On a
$$\frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n} = \frac{n(1-\frac{(-1)^n}{n})}{n(1+\frac{(-1)^n}{n})} = \frac{1-\frac{(-1)^n}{n}}{1+\frac{(-1)^n}{n}}.$$
Puisque $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n}=0$, on déduit que
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}=1.$$

6. On a
$$\begin{aligned}\frac{n-\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2-1}} &= \frac{n-\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n^2})}}{n+\sqrt{n^2(1-\frac{1}{n^2})}} = \frac{n-|n|\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{n+|n|\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} \qquad (\sqrt{n^2}=|n|)\\ &= \frac{1-\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}} \qquad (n\geq 0).\end{aligned}$$
Puisque $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n^2}=0$ (voir (1.13)), on déduit que
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{n-\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2-1}}=0.$$

7. On a
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right).$$
Or, nous avons vu dans 3. que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$, et donc
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

8. On a

$$\left(n^2\right)^{\frac{1}{n}} \;=\; \exp\left(\frac{1}{n}\ln n^2\right) = \exp\left(2\frac{\ln n}{n}\right).$$

Or, $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$ et donc

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(n^2\right)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

9. Pour tout $k = 1, \dots, n$, on a

$$0 \leq \frac{1}{n^2 + k^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

De cette relation, on déduit que pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k^2} \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ (voir (1.12)) et d'après le principe des gendarmes (*cf.* Proposition 8), on déduit que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k^2} = 0.$$

10. Puisque $-1 \leq \cos\left(\frac{1}{n}\right) \leq 1$, on déduit que

$$-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n}.$$

Maintenant, d'après (1.12), on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} -\dfrac{1}{n} = 0$ et donc, en appliquant le principe des gendarmes (*cf.* Proposition 8), on déduit

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Exercice 11 *Soit a un réel strictement positif. On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$.*

1. *Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et que pour tout $n \geq 2$, $u_n \geq \sqrt{a}$.*
2. *Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et calculer sa limite.*

Solution -

1. Commençons par montrer par récurrence que
$$\forall n \geq 2, \quad u_n \geq \sqrt{a}.$$
Pour $n = 2$, on a $u_2 = \frac{1}{2}(1+a)$ et donc
$$u_2 - \sqrt{a} = \frac{1}{2}\left(1 + a - 2\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{a}\right)^2 \geq 0$$
et donc $u_2 \geq \sqrt{a}$. Supposons maintenant que le résultat est vrai jusqu'au rang n. On a
$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{a} &= \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - \sqrt{a} = \frac{u_n^2 + a - 2\sqrt{a}}{2u_n} \\ &= \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n} \geq 0, \end{aligned}$$
car $u_n > 0$ d'après l'hypothèse de récurrence et l'inégalité est vérifiée. Vérifions maintenant que la suite est décroissante. Pour tout $n \geq 1$, on a
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) - u_n = \frac{a - u_n^2}{2u_n} \\ &= \frac{(\sqrt{a} - u_n)(\sqrt{a} + u_n)}{2u_n} \leq 0, \end{aligned}$$
car $u_n \geq \sqrt{a}$ et donc $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante.
2. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ étant minoré par $\sqrt{a}$ et décroissante, d'après le théorème de la limite monotone (*cf.* Théorème 2) elle est convergente vers une limite ℓ. En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$, on déduit que
$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right),$$
soit
$$\frac{(\sqrt{a} - \ell)(\sqrt{a} + \ell)}{2\ell} = 0.$$
Finalement,
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \sqrt{a}.$$
Si $a \in \mathbb{N}$, nous avons construit ainsi une suite de nombre rationnels qui converge vers $\sqrt{a}$ (Voir Théorème 4).

Exercice 12 *On considère la suite* $(u_n)_{n\geq 1}$ *définie par* $u_1 = \frac{1}{2}$ *et* $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_n}{2}$.

1. *Montrer que pour tout* $n \geq 1$, $0 < u_n < 1$.
2. *Montrer que* $(u_n)_{n\geq 1}$ *est décroissante.*
3. *Montrer que* $(u_n)_{n\geq 1}$ *est convergente et calculer sa limite.*

Solution -

1. Nous allons faire un raisonnement par récurrence. On a $u_1 = \frac{1}{2}$ et donc la propriété est vraie pour $n = 1$. On suppose que $0 < u_n < 1$. On a $u_{n+1} = \frac{u_n^2+u_n}{2} > 0$. D'un autre côté,
$$u_{n+1} - 1 = \frac{u_n^2 + u_n}{2} - 1 = \frac{u_n^2 + u_n - 2}{2} = \frac{(u_n - 1)(u_n + 2)}{2} < 0,$$
et la propriété est vérifiée pour tout $n \geq 1$.
2. On a
$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + u_n}{2} - u_n = \frac{u_n(u_n - 1)}{2} \leq 0,$$
d'après 1. Ainsi la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante.
3. La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ étant minorée par 0 et décroissante, d'après le théorème de la limite monotone (*cf.* Théorème 2) elle est convergente vers une limite ℓ. En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = \frac{u_n^2+u_n}{2}$, on déduit que
$$\ell = \frac{1}{2}(\ell^2 + \ell),$$
soit $\ell(\ell - 1) = 0$. Comme $(u_n)_{n\geq 1}$ ne peut pas converger vers 1, on a,
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0.$$

Exercice 13 *On pose, pour tout* $n \geq 1$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Vérifier que pour tout $n \geq 1$*,*

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

2. Calculer $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} S_n$*.*

Solution -

1. On a

$$\begin{aligned} 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) &= \frac{2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

D'un autre côté, $\sqrt{n} \leq \sqrt{n+1}$. En ajoutant, respectivement, $\sqrt{n}$ et $\sqrt{n+1}$ aux deux membres de cette inégalité, on obtient

$$2\sqrt{n} \leq \sqrt{n+1}+\sqrt{n} \quad \text{et} \quad \sqrt{n}+\sqrt{n+1} \leq 2\sqrt{n+1}.$$

Puisque tous les terms sont strictement positifs, on passe à l'inverse et on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}},$$

et on a l'inégalité souhaitée.

2. D'après l'inégalité ci-dessus, pour tout $k = 1, \ldots, n$, on a

$$2(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

En faisant la somme de $k = 1, \ldots, n$ de cette inégalité, on obtient

$$2\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \leq S_n.$$

Maintenant, on a

$$\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = \sqrt{n+1}-1.$$

Or, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt{n+1}-1 = +\infty$ et donc, en utilisant la proposition 9, on déduit que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} S_n = +\infty.$$

Exercice 14 *On considère la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq S_n \leq 1$.*
2. *Etudier la monotonie de cette suite et en déduire qu'elle est convergente.*

Solution -

1. Pour tout $k = 1, \ldots, n$,
$$0 \leq \frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n}$$
et donc
$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \leq \frac{n}{n} = 1,$$
soit $0 \leq S_n \leq 1$.
2. Pour tout $n \geq 1$, on a
$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\ &\overset{(h=k+1)}{=} \sum_{h=2}^{n+2} \frac{1}{n+h} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\ &= \sum_{k=2}^{n+2} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{2n+2+2n+1-2(2n+1)}{2(n+1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0. \end{aligned}$$
Ainsi $(S_n)_{n\geq 1}$ est une suite strictement croissante majorée donc elle est convergente, d'après le théorème des suites monotones (*cf.* Théorème 2).

Exercice 15 *On considère la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq 2$, $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.*
2. *Etudier la monotonie de $(S_n)_{n\geq 1}$.*
3. *Montrer que $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente.*

Solution -

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} &= \frac{n-1-n^2+n(n-1)}{n^2(n-1)} \\ &= \frac{-1}{n^2(n-1)} \leq 0, \end{aligned}$$

et donc

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

2. On a

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$$

et donc $(S_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante.

3. Pour tout $k = 2, \ldots, n$, on a d'après la première question

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

et donc

$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 2 - \frac{1}{n} \leq 2.$$

Ainsi $(S_n)_{n\geq 1}$ est une suite strictement croissante majorée donc elle est convergente, d'après le théorème des suites monotones (*cf.* Théorème 2).

Exercice 16 *On considère les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par*

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}, \\ v_n &= \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1}. \end{aligned}$$

Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

Solution -

1. Commençons par comparer u_n et v_n. On a

$$v_n - u_n = 2(\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) = -\frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}, \qquad (*)$$

et donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq u_n$.

2. Montrons maintenant que $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} \\ &\quad - \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2\frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n+2})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}} \\ &= \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})} \\ &= \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})} \geq 0, \end{aligned}$$

car $\sqrt{n+2} \geq \sqrt{n+1}$. Ainsi $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

3. Montrons maintenant que $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1} \\ &\quad -\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}+2(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}+2\frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}-2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})} \\ &= \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}\leq 0, \end{aligned}$$

car $\sqrt{n}\leq\sqrt{n+1}$. Ainsi $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

4. D'après $(*)$, on a

$$u_n-v_n=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}},$$

et donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n-v_n=0$.

En conclusion, ces deux suites sont adjacentes et, d'après la proposition 11, ces deux suites convergent vers une même limite.

Chapitre 2

Fonctions d'une variable réelle : limites et continuité

Les fonctions considérées dans ce chapitre sont des fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ appelée domaine de définition (en général un intervalle) à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Commençons par quelques rappels. Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction, on dira que :

1. f est paire (resp. impaire) si pour tout $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$ (resp. $f(-x) = -f(x)$).
2. f est périodique s'il existe un réel $T > 0$ tel pour tout $x \in D_f$, $x + T \in D_f$ et $f(x + T) = f(x)$.

2.1 Limites d'une fonction

2.1.1 Limite finie en un point

Dans cette section, les fonctions considérées sont définies sur $I =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\setminus \{x_0\}$ avec $\alpha > 0$.

Définition 9 *On dira que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 si :*

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \textit{tel que} \quad \forall x \in I, \ (|x - x_0| \leq \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| \leq \epsilon).$$

Le réel ℓ est appelé limite de f en x_0.

Exemple - On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Nous allons montrer que f tend vers x_0^2 quand x tend vers x_0.

Soit $\epsilon > 0$, on cherche $\delta > 0$ tel que si $|x - x_0| \leq \delta$ alors $|x^2 - x_0^2| \leq \epsilon$. Puisque x doit être proche de x_0, on suppose d'abord que $|x - x_0| \leq 1$. Ceci entraîne, en particulier, que

$$|x| \leq |x - x_0| + |x_0| \leq 1 + |x_0|.$$

D'un autre côté,

$$|x^2 - x_0^2| \quad = \quad |x - x_0||x + x_0| \leq |x - x_0| \left(|x| + |x_0|\right) \leq |x - x_0|(1 + 2|x_0|).$$

Prenons $\delta = \min\left(1, \frac{\epsilon}{1+2|x_0|}\right)$. Si $|x - x_0| \leq \delta$ alors $|x - x_0| \leq 1$ et $|x - x_0| \leq \frac{\epsilon}{1+2|x_0|}$ et donc

$$|x^2 - x_0^2| \leq \epsilon.$$

Il y a une relation étroite entre les limites des suites réelles et les limites des fonctions.

Proposition 12 *La fonction f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de points de I telle que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} x_n = x_0$, on a $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f(x_n) = \ell$.*

Cette propriété va servir à établir quelques propriétés des limites de fonctions en utilisant des propriétés des suites établies dans le chapitre 1. Elle sert surtout à montrer que certains fonctions n'ont pas de limites.

Exemple - On considère la fonction partie entière $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto [x]$. Soit $m \in \mathbb{Z}$. Nous allons montrer, en utilisant la contraposée de la proposition 12, que E n'admet pas de limite en m. Considérons les deux suites $a_n = m + \frac{1}{n}$ et $b_n = m - \frac{1}{n}$. Ces deux suites convergent vers m et on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} E(a_n) = m \quad \textbf{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} E(b_n) = m - 1$$

et donc E n'admet pas de limite en m.

Notation. Supposons que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers x_0. D'après l'unicité de la limite d'une suite (*cf.* Proposition 4), ℓ est unique et on pose

$$\ell = \lim_{x\longrightarrow x_0} f(x).$$

Cette proposition est une conséquence des propositions 5 et 12.

Proposition 13 *On suppose que $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x) = \ell_1$et $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} g(x) = \ell_2$. Alors :*

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} (f + g)(x) = \ell_1 + \ell_2$,

2. $\lim_{x \longrightarrow x_0} (fg)(x) = \ell_1 \ell_2$,

3. $\lim_{x \longrightarrow x_0} (\alpha f)(x) = \alpha \ell_1$,

4. si $\ell_2 \neq 0$ *et* $g(x) \neq 0$, $\lim_{x \longrightarrow x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\ell_1}{\ell_2}$.

Exemples -

1. **On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par**

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+x+1}}{x(x^2+1)}.$$

Nous allons calculer $\lim_{x \longrightarrow 0} f(x)$. On a

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+x+1} &= \frac{x^2+1-x^2-x-1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+x+1}} \\ &= \frac{-x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+x+1}}. \end{aligned}$$

Donc

$$f(x) = \frac{-1}{(x^2+1)(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+x+1})},$$

et ainsi

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = -\frac{1}{2}.$$

2. **On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par**

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{2x^2+1}}{x(x^2-1)}.$$

Nous allons calculer $\lim_{x \longrightarrow 1} f(x)$. On a

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+2} - \sqrt{2x^2+1} &= \frac{(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x^2+1})(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2x^2+1})}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x^2+1}} \\ &= \frac{x^2+2-2x^2-1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x^2+1}} \\ &= \frac{1-x^2}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x^2+1}}. \end{aligned}$$

Donc

$$f(x) = \frac{-1}{x(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2x^2+1})},$$

et ainsi

$$\lim_{x \longrightarrow 1} f(x) = -\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Le principe des gendarmes (*cf.* Proposition 8) est aussi valable pour les limites des fonctions.

Proposition 14 *Supposons que* $\ell = \lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x)$ *et* $\ell = \lim\limits_{x\longrightarrow x_0} g(x)$. *Alors on a l'implication*

$$(\forall x \in I,\ f(x) \leq h(x) \leq g(x)) \Rightarrow \lim_{x\longrightarrow x_0} h(x) = \ell.$$

Cette proposition est une conséquence des propositions 5 et 10.

Proposition 15 *Supposons que* $\ell_1 = \lim\limits_{x\longrightarrow x_0} f(x)$ *et* $\ell_2 = \lim\limits_{x\longrightarrow x_0} g(x)$. *Alors on a l'implication*

$$(\forall x \in I,\ f(x) \leq g(x)) \Rightarrow (\ell_1 \leq \ell_2).$$

Exemples -

1. **On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par**

$$f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Nous allons calculer $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2.$$

Puisque $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} x^2 = \lim\limits_{x\longrightarrow 0}(-x^2) = 0$, on déduit, d'après la proposition 14, que

$$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = 0.$$

2. **On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par**

$$f(x) = x^2 \left[\frac{1}{x}\right].$$

Nous allons calculer $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x)$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, d'après (1.5),

$$\frac{1}{x} - 1 \leq \left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x}.$$

En multipliant par x^2 qui est positif, on déduit que

$$x - x^2 \leq x^2 \left[\frac{1}{x}\right] \leq x.$$

Puisque $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}(x - x^2) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0} x = 0$, on déduit, d'après la proposition 14, que

$$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = 0.$$

2.1.2 Limites à droite et à gauche

Nous avons vu dans la section précédente que la notion de limite d'une fonction en un point x_0 est liée au comportement de la fonction quand on s'approche de x_0 par des suites qui convergent vers x_0. Si on ne considère que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $x_n \leq x_0$ (resp. $x_n \geq x_0$) on dira qu'on approche x_0 à gauche (resp. à droite). Ceci justifie la définition suivante.

Définition-Proposition 2.1.1 *Soit $f :]x_0, x_0+\alpha[\longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\alpha > 0$. On dira que f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 à droite et on notera $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0^+} f(x) = \ell$ si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :*

1. $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0, \ \forall x \in]x_0, x_0+\alpha[\quad (x_0 < x < x_0 + \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \epsilon)$.
2. *Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x_0 et $x_n > x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*
$$\lim_{n\longrightarrow +\infty} f(x_n) = \ell.$$

Définition-Proposition 2.1.2 *Soit $f :]x_0-\alpha, x_0[\longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\alpha > 0$. On dira que f tend vers ℓ quand x tend vers x_0 à gauche et on notera $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0^-} f(x) = \ell$ si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :*

1. $\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0, \ \forall x \in]x_0-\alpha, x_0[\quad (x_0 - \delta < x < x_0 \ \Rightarrow \ |f(x) - \ell| < \epsilon)$.
2. *Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x_0 et $x_n < x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*
$$\lim_{n\longrightarrow +\infty} f(x_n) = \ell.$$

Exemple - On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{|x|}{x}$. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1, \\
\lim_{x\longrightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1.
\end{aligned}$$

Proposition 16 *Soit $f :]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$. On a l'équivalence*

$$\lim_{x\longrightarrow x_0} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\longrightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow x_0^+} f(x) = \ell.$$

En utilisant cette proposition et le calcul ci-dessus on déduit que la fonction $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{|x|}{x}$ n'admet pas de limite en 0.

2.1.3 Limites infinies

Dans cette section, les fonctions considérées sont définies sur $I =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\setminus \{x_0\}$ avec $\alpha > 0$.

Définition-Proposition 2.1.3 *On dira que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 et on notera $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = +\infty$ si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :*

1. $\forall a > 0\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I \quad (|x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ f(x) > a)\,.$
2. *Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de I qui converge vers x_0, on a*
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = +\infty.$$

Définition 10 *On dira que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0 et on note $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = -\infty$ si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :*

1. $\forall a < 0\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in I \quad (|x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ f(x) < a)\,.$
2. *Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de I qui converge vers x_0, on a*
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = -\infty.$$

Exemple - On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{x^{2n}} = +\infty \quad \textbf{et} \quad \lim_{x \longrightarrow 0} -\frac{1}{x^{2n}} = -\infty. \tag{2.1}$$

En effet, pour tout $a > 0$,

$$|x| \leq \frac{1}{a^{\frac{1}{2n}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^{2n}} > a.$$

Pour $a < 0$, on a

$$|x| \leq \frac{1}{(-a)^{\frac{1}{2n}}} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{x^{2n}} < a.$$

Cette proposition est une conséquence des définitions ci-dessus et de la proposition 9.

Proposition 17 *On a :*

1. $\left(\forall x \in I, f(x) \leq g(x) \quad et \quad \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = +\infty\right) \Rightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = +\infty.$
2. $\left(\forall x \in I, f(x) \leq g(x) \quad et \quad \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} g(x) = -\infty\right) \Rightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = -\infty.$

Exemple - On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}.$$

Nous allons calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x)$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$1 \leq \sqrt{x^2+1}.$$

En multipliant par $\dfrac{1}{x^2}$ qui est positif, on déduit que

$$\frac{1}{x^2} \leq f(x),$$

et puisque $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$, on déduit, d'après la proposition 17, que

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

En combinant les définitions 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3 et 10 le lecteur peut trouver facilement les définitions de

$$\lim_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

Exemple - On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{1}{x^{2n+1}} = +\infty \quad \textbf{et} \quad \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2n+1}} = -\infty. \tag{2.2}$$

En effet, pour tout $a > 0$,

$$\left(0 < x < \frac{1}{a^{\frac{1}{2n+1}}}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^{2n+1}} > a,$$

et pour $a < 0$

$$\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2n+1}}} < x < 0\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^{2n+1}} < a.$$

2.1.4 Limites en $\pm\infty$

Définition-Proposition 2.1.4 *Soit $f :]a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. On dira que f tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$ si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :*

1. $\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0,\; \forall x \in]a, +\infty[\quad (x > \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| < \epsilon)$.
2. *Pour toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $]a, +\infty[$ *qui diverge vers* $+\infty$*, on a*
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f(x_n) = \ell.$$

Définition-Proposition 2.1.5 *Soit* $f :]-\infty, a[\longrightarrow \mathbb{R}$*. On dira que* f *tend vers* ℓ *quand* x *tend vers* $-\infty$ *et on note* $\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = \ell$ *si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :*

1. $\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta < 0,\; \forall x \in]-\infty, a[\quad (x < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| < \epsilon)$.
2. *Pour toute suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $]-\infty, a[$ *qui diverge vers* $-\infty$*, on a*
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f(x_n) = \ell.$$

Exemple - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$**, on a**
$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{1}{x^n} = 0. \tag{2.3}$$
En effet, pour tout $\epsilon > 0$**, on a**
$$\left(x > \frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{n}}}\right) \Rightarrow \frac{1}{|x|^n} < \epsilon, \quad \textbf{et} \quad \left(x < -\frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{n}}}\right) \Rightarrow \frac{1}{|x|^n} < \epsilon.$$

En s'inspirant de ces définitions le lecteur peut définir sans difficulté les notions $\lim_{x\longrightarrow\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

Exemple - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$**,**
$$\lim_{x\longrightarrow\pm\infty} x^{2n} = +\infty, \tag{2.4}$$
et pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} x^{2n+1} = -\infty \quad \textbf{et} \quad \lim_{x\longrightarrow+\infty} x^{2n+1} = +\infty. \tag{2.5}$$

La proposition (12) reste valable pour les limites infinies et les limites en $\pm\infty$ à condition de respecter les règles suivantes :
$$\begin{array}{ccc} \infty + \ell = \infty, & \pm\infty + \pm\infty = \pm\infty, & |\ell|\infty = \infty, (\ell \neq 0) \\ -|\ell|(+\infty) = -\infty, (\ell \neq 0), & -|\ell|(-\infty) = +\infty, (\ell \neq 0), & (+\infty)(+\infty) = +\infty, \\ (-\infty)(-\infty) = +\infty, & (-\infty)(+\infty) = -\infty, & \frac{\ell}{\infty} = 0, (\ell \neq 0). \end{array}$$

Pour finir cette section, nous allons rappeler quelques limites classiques vues au Lycée.
$$\lim_{x\longrightarrow0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\longrightarrow0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\longrightarrow0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1, \quad \lim_{x\longrightarrow0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$
$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0, \quad \lim_{x\longrightarrow0} x\ln x = 0, \quad \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\longrightarrow-\infty} xe^{-x} = 0.$$

2.2 Fonctions continues

Les fonctions considérées dans cette section sont définies sur des intervalles de la forme $I =]a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$ et $b = +\infty$, et $x_0 \in]a, b[$.

Définition 11 *On dira que f est continue en x_0 si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. On notera $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues en tout point de I.*

La proposition suivante est une conséquence immédiate de la proposition 16.

Proposition 18 *La fonction f est continue en x_0 si et seulement si*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

Exemples -

1. **Nous avons vu en Section 2.1.1 que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \longrightarrow a} x^2 = a^2$. Ceci montre que la fonction $f(x) = x^2$ est continue en a.**
2. **Nous avons vu en Section 2.1.1 que la fonction partie entière n'a pas de limite en $n \in \mathbb{Z}$. Ceci montre que cette fonction n'est pas continue sur $\mathbb{Z}$.**

Toutes les fonctions usuelles sont continues. En particulier :

Proposition 19 *Les fonctions x^n, $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$, e^x sont continues en tout point de leur domaine de définition.*

Proposition 20 *Si f et g sont continues en x_0 alors $f + g$, fg et αf sont continues en x_0 $(\alpha \in \mathbb{R})$. Si en plus, $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in]a, b[$, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en x_0.*

Proposition 21 *Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est continue en x_0.*

Ces trois propositions peuvent être combinées pour construire beaucoup de fonctions continues.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $x_0 \notin I$ tel que $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. On dira alors que f est prolongeable par continuité en x_0 et la fonction $g : I \cup \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in I, \\ \ell & \text{si} \quad x = x_0 \end{cases}$$

est appelée prolongement par continuité de f en x_0.

Exemple - On considère la fonction $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de deux fonctions continues et $\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = 1$. Ainsi f est prolongeable par continuité en 0 et la fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \textbf{si} \quad x \neq 0, \\ 1 & \textbf{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

est le prolongement par continuité de f en 0.

2.3 Les grands théorèmes sur les fonctions continues

Une fonction f définie sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$) avec $a, b \in \mathbb{R}$ est dite continue à droite en a (resp. à gauche en b) si $\lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = f(a)$ (resp. $\lim_{x \longrightarrow b^-} f(x) = f(b)$).
Un intervalle de $\mathbb{R}$ est une partie de la forme :

1. $]a, b[$, $]a, +\infty$, $]-\infty, b[$, $]-\infty, +\infty[$ (intervalle ouvert),
2. $[a, b]$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$ (intervalle fermé),
3. $]a, b]$, $[a, b[$ (semi-ouvert ou semi-fermé).
   Deux intervalles sont dits de même nature s'ils sont tous les deux ouverts, tous les deux fermés ou tous les deux semi-ouverts.

Une fonction définie sur $[a, b]$ est dite continue si elle est continue sur $]a, b[$, à droite de a et à gauche de b. La continuité sur les autres types d'intervalles se définit d'une manière analogue.
Les fonctions continues respectent les intervalles.

Théorème 5 *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Exemple - On considère la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. On a

$$f(]0, +\infty[) =]0, +\infty[, \quad f(]0, 1]) = [1, +\infty[\quad \textbf{et} \quad f([1, 2]) = [\frac{1}{2}, 1].$$

Le théorème des valeurs intermédiaires est une conséquence immédiate du théorème 5.

Théorème 6 (Théorème des valeurs intermédiaires) *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *et soit* $a, b \in I$ *tel que* $a < b$ *et* $f(a) \neq f(b)$. *Alors, pour tout* $\beta \in]\min(f(a), f(b)), \max(f(a), f(b))[$, *il existe un* $c \in [a, b]$ *tel que* $f(c) = \beta$.

Corollaire 2 *Soit* f *une fonction continue sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$. *Alors, s'il existe deux réelles* a *et* b *dans* I *tels que* $f(a) < 0$ *et* $f(b) > 0$, *alors l'équation* $f(x) = 0$ *admet au moins une solution comprise entre* a *et* b.

Exemple - Nous allons montrer que l'équation

$$\sin x - 2\cos 2x = 0$$

admet une solution sur $]0, \frac{\pi}{4}[$**. On considère la fonction**

$$f(x) = \sin x - 2\cos 2x.$$

Cette fonction est continue sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ **et** $f(0) = -2 < 0$ **et** $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$. **D'après le corollaire 2, il existe** $c \in]0, \frac{\pi}{4}[$ **tel que** $f(c) = 0$.

Les fonctions continues respectent les intervalles fermés bornés. Le théorème suivant est un théorème fondamentale en analyse.

Théorème 7 *Soient* $a, b \in \mathbb{R}$ *et soit* f *une fonction continue sur* $[a, b]$. *Alors* $f([a, b]) = [c, d]$ *avec* $c, d \in \mathbb{R}$. *En particulier, il existe* $\alpha, \beta \in [a, b]$ *tels que*

$$c = f(\alpha) = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \qquad \textit{et} \qquad d = f(\beta) = \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Ces propriétés s'expriment en disant que f *est bornée sur* $[a, b]$ *et atteint ses bornes sur* $[a, b]$.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dira que :

1. f est croissante sur I si pour tous $x_1, x_2 \in I$,

$$(x_1 \leq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \leq f(x_2)),$$

2. f est strictement croissante sur I si pour tous $x_1, x_2 \in I$,

$$(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) < f(x_2)),$$

3. f est décroissante sur I si pour tous $x_1, x_2 \in I$,

$$(x_1 \leq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \geq f(x_2)),$$

4. f est strictement décroissante sur I si pour tous $x_1, x_2 \in I$,
$$(x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) > f(x_2)).$$

Une fonction croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante) est dite monotone (resp. strictement monotone).
Exemple - La fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.
En effet, si $x_1, x_2 \in]-\infty, 0]$ avec $x_1 < x_2$. On aura $x_1^2 > x_2^2$, $\sqrt{x_1^2+1} > \sqrt{x_2^2+1}$ et donc $f(x_1) < f(x_2)$.
Si maintenant, $x_1, x_2 \in [0, +\infty[$ avec $x_1 < x_2$. On aura $x_1^2 < x_2^2$, $\sqrt{x_1^2+1} < \sqrt{x_2^2+1}$ et donc $f(x_1) > f(x_2)$.

Théorème 8 *Soit f continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors f est bijective de I sur $f(I)$ et $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ est continue strictement monotone de même type de monotonie que f.*

Exemples -

1. **Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, L'application $x \mapsto x^{2n}$ est une fonction continue strictement croissante de $[0, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$ et sa fonction réciproque est la fonction $x^{\frac{1}{2n}}$ définie de $[0, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$, continue et strictement croissante.**
2. **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, L'application $x \mapsto x^{2n+1}$ est une fonction continue strictement croissante de $]-\infty, +\infty[$ vers $]-\infty, +\infty[$ et sa fonction réciproque est la fonction $x^{\frac{1}{2n+1}}$ définie de $]-\infty, +\infty[$ vers $]-\infty, +\infty[$, continue et strictement croissante.**
3. **La fonction $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$ est une fonction continue et strictement croissante dont l'inverse est la fonction $\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ainsi la fonction $\arcsin$ est continue et strictement croissante sur $[-1, 1]$.**
4. **La fonction $\cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ est une fonction continue et strictement croissante dont l'inverse est la fonction $\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$. Ainsi la fonction $\arccos$ est continue et strictement décroissante sur $[-1, 1]$.**
5. **La fonction $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et strictement croissante dont l'inverse est la fonction $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi la fonction $\arctan$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.**

2.4 Exercices corrigés

Exercice 17 *Calculer le domaine de définition des fonctions suivantes :*

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \sqrt{x^2+3x+2}, \quad f_2(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}, \quad f_3(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}, \\ f_4(x) &= \sqrt{\ln(x^2+3x-4)}, \quad f_5(x) = \sqrt{-e^{2x}-e^x+2}. \end{aligned}$$

Solution -

1. On a
$$x \in D_{f_1} \quad \Leftrightarrow x^2+3x+2 \geq 0.$$
Le discriminant de $P(x) = x^2+3x+2$ est $\Delta = 9-8 = 1$ et donc les racines de $P(x)$ sont alors $x_1 = -1$ et $x_2 = -2$. Ainsi $P(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in]-\infty, -2] \cup [-1, +\infty[$ et donc
$$D_{f_1} =]-\infty, -2] \cup [-1, +\infty[.$$

2. On a
$$x \in D_{f_2} \quad \Leftrightarrow \quad x-1 \geq 0 \quad \text{et} \quad x+1 > 0.$$
On déduit alors que
$$D_{f_2} = [1, +\infty[.$$

3. On a
$$x \in D_{f_3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x+1} \geq 0 \quad \text{et} \quad x \neq -1.$$
Or le signe de $\dfrac{x-1}{x+1}$ est le même que le signe de $(x-1)(x+1)$ et donc
$$D_{f_3} =]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[.$$

4. On a
$$x \in D_{f_4} \quad \Leftrightarrow \quad x^2+3x-4 > 0 \quad \text{et} \quad \ln(x^2+3x-4) \geq 0,$$
soit
$$x \in D_{f_4} \quad \Leftrightarrow \quad x^2+3x-4 > 0 \quad \text{et} \quad x^2+3x-4 \geq 1,$$
et finalement
$$x \in D_{f_4} \quad \Leftrightarrow \quad x^2+3x-4 \geq 1,$$

On a $x^2 + 3x - 4 \geq 1$ est équivalent à $Q(x) = x^2 + 3x - 5 \geq 0$. Le discriminant de $Q(x)$ est $\Delta = 29$ et donc les racines de $Q(x)$ sont $y_1 = \frac{-3+\sqrt{29}}{2}$ et $y_2 = \frac{-3-\sqrt{29}}{2}$ et donc $Q(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in]-\infty, \frac{-3-\sqrt{29}}{2}] \cup [\frac{-3+\sqrt{29}}{2}, +\infty[$. Finalement,

$$D_{f_4} \quad = \quad]-\infty, \frac{-3-\sqrt{29}}{2}] \cup [\frac{-3+\sqrt{29}}{2}, +\infty[.$$

5. On a

$$x \in D_{f_5} \quad \Leftrightarrow \quad -y^2 - y + 2 \geq 0 \quad \text{et} \quad y = e^x.$$

Le discriminant de $P(y) = -y^2 - y + 2$ est $\Delta = 9$ et donc les racines de $P(y)$ sont $y_1 = 1$ et $y_2 = -2$. Ainsi $x \in D_{f_5}$ si et seulement si $e^x \in [-2, 1]$ et donc $x \in]-\infty, 0]$. Finalement,

$$D_{f_5} =]-\infty, 0].$$

Exercice 18 *Trouver les domaines de définition de $f \circ g$ et $g \circ f$:*

1. $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$, $g(x) = \sqrt{x}$,
2. $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$, $g(x) = \ln x$.

Solution -

1. On a $f \circ g(x) = \frac{1}{x-1}$ et $g \circ f(x) = \sqrt{\frac{1}{x^2-1}}$ et donc

$$D_{f\circ g} = \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad \text{et} \quad D_{g\circ f} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[.$$

2. On a $f \circ g(x) = \frac{1}{(\ln x)^2-1}$ et $g \circ f(x) = \ln \frac{1}{x^2-1}$. Ainsi $x \in D_{f\circ g}$ si et seulement si $x > 0$ et $(\ln x)^2 - 1 \neq 0$, soit $x > 0$, $x \neq e$ et $x \neq e^{-1}$. Finalement,

$$D_{f\circ g} =]0, +\infty[\setminus\{e, e^{-1}\} \quad \text{et} \quad D_{g\circ f} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[.$$

Exercice 19 *Calculer les limites suivantes :*

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1-\cos x}, \ \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x}, \ \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3},$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \sqrt{x}\sin\frac{1}{\sqrt{x}}, \ \lim_{x\longrightarrow +\infty} \sqrt{x^2+2x-1} - x, \ \lim_{x\longrightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\frac{1+x}{x^3}}}{\sin\frac{1}{x}},$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{3x+7}-\sqrt{3x^2+7}},$$

$$\lim_{x\longrightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}, \ \lim_{x\longrightarrow \pi} \frac{\sin x}{x^2-\pi^2}, \ \lim_{x\longrightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}},$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}, \ \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\ln(ax+1)}{\ln(bx+1)}, \ a>0, \ b>0.$$

Solution -

1. On a

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1-\cos x} &= \frac{2}{1-\cos^2 x} - \frac{1}{1-\cos x} = \frac{2-(1+\cos x)}{1-\cos^2 x} \\ &= \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x} = \frac{1}{1+\cos x}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1-\cos x} = \frac{1}{2}.$$

2. On a

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^2}{1-\cos x}\frac{\sin x}{x} = 2,$$

car $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

3. On a

$$\begin{aligned} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} &= \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x} \\ &= \frac{\sin x}{x}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{1}{\cos x}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

4. Pour tout $x \neq 0$, on a

$$0 \leq \left|\sqrt{x}\sin\frac{1}{\sqrt{x}}\right| \leq \sqrt{x},$$

et donc, en vertu de la proposition 14,

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \sqrt{x}\sin\frac{1}{\sqrt{x}} \quad = \quad 0.$$

5. On a, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+2x-1}-x &= \frac{(\sqrt{x^2+2x-1}-x)(\sqrt{x^2+2x-1}+x)}{\sqrt{x^2+2x-1}+x} \\
&= \frac{x^2+2x-1-x^2}{\sqrt{x^2+2x-1}+x} = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}+x} \\
&= \frac{x(2-\frac{1}{x})}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+x} = \frac{(2-\frac{1}{x})}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+1}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \sqrt{x^2+2x-1}-x = 1.$$

6. On a, pour $x < 0$,

$$\frac{\sqrt{\frac{1+x}{x^3}}}{\sin\frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{|x|}\sqrt{\frac{1+x}{x}}}{\sin\frac{1}{x}} = \frac{-\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}}{\sin\frac{1}{x}} = -\frac{\sqrt{\frac{1+x}{x}}}{x\sin\frac{1}{x}}.$$

Or

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{x\sin\frac{1}{x}} = \lim_{X \longrightarrow 0} \frac{X}{\sin X} = 1,$$

et

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \sqrt{\frac{1+x}{x}} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \sqrt{\frac{1}{x}+1} = 1.$$

Finalement,

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{\sqrt{\frac{1+x}{x^3}}}{\sin\frac{1}{x}} = -1.$$

7. On a

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1} &= \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{x-x^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+1}} \\
\sqrt{3x+7}-\sqrt{3x^2+7} &= \frac{(\sqrt{3x+7}-\sqrt{3x^2+7})(\sqrt{3x+7}+\sqrt{3x^2+7})}{\sqrt{3x+7}+\sqrt{3x^2+7}} \\
&= \frac{3(x-x^2)}{\sqrt{3x+7}+\sqrt{3x^2+7}},
\end{aligned}$$

et donc

$$\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{3x+7}-\sqrt{3x^2+7}} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3x+7}+\sqrt{3x^2+7}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2+1}}.$$

On déduit alors que

$$\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{3x+7}-\sqrt{3x^2+7}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

8. On pose $X = x-\frac{\pi}{2}$. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} &= \lim_{X\longrightarrow 0}\frac{\cos(X+\frac{\pi}{2})}{X} \qquad (\cos(X+\frac{\pi}{2}) = -\sin X) \\
&= -\lim_{X\longrightarrow 0}\frac{\sin X}{X} = -1.
\end{aligned}$$

9. On pose $X = x-\pi$. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow \pi}\frac{\sin x}{x^2-\pi^2} &= \lim_{X\longrightarrow 0}\frac{\sin(X+\pi)}{(X+\pi)^2-\pi^2} \qquad (\sin(X+\pi) = -\sin X) \\
&= -\lim_{X\longrightarrow 0}\frac{\sin X}{X^2+2\pi X} \\
&= -\lim_{X\longrightarrow 0}\frac{\sin X}{X}\frac{1}{X+2\pi} \\
&= -\frac{1}{2\pi}.
\end{aligned}$$

10. On pose $X = x - \frac{\pi}{3}$. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}} &= \lim_{X \longrightarrow 0} \frac{\sin\left(2(X + \frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{3}\right)}{X} \\
&= \lim_{X \longrightarrow 0} \frac{\sin(2X + \pi)}{X} \\
&= -\lim_{X \longrightarrow 0} \frac{\sin(2X)}{X} \\
&= -2 \lim_{X \longrightarrow 0} \frac{\sin(2X)}{2X} = -2.
\end{aligned}$$

11. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(a+x) - \ln a}{x} &= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(a(1 + \frac{x}{a})) - \ln a}{x} \\
&= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{x}{a})}{x} \\
&= \frac{1}{a} \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(1 + \frac{x}{a})}{\frac{x}{a}} = \frac{1}{a},
\end{aligned}$$

car $\lim\limits_{X \longrightarrow 0} \dfrac{\ln(X+1)}{X} = 1.$

12. On a

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(ax+1)}{\ln(bx+1)} = \frac{b}{a} \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\frac{\ln(ax+1)}{ax}}{\frac{bx}{\ln(bx+1)}} = \frac{b}{a},$$

car $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\ln(ax+1)}{ax} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{bx}{\ln(bx+1)} = 1.$

Exercice 20 *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$\begin{aligned}
f(x) &= a \sin x + \cos x, \ \textit{si } x < \frac{\pi}{2}; \\
f(x) &= \pi - x, \ \textit{si } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]; \\
f(x) &= \frac{x^2}{2} + b, \ \textit{si } x > \pi.
\end{aligned}$$

Déterminer les réels a et b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Solution -

La restriction de f à $]-\infty, \frac{\pi}{2}[$ est la somme de deux fonctions continues et donc elle est continue. La restriction de f à $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ est un polynôme de degré 1 et donc f est continue. De même pour la restriction de f à $]\pi, +\infty[$. Ainsi f sera continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est continue en $\frac{\pi}{2}$ et π. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) &= a, \quad \lim_{x \longrightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \frac{\pi}{2}, \\
\lim_{x \longrightarrow \pi^-} f(x) &= 0, \quad \lim_{x \longrightarrow \pi^+} f(x) = \frac{\pi^2}{2} + b.
\end{aligned}$$

En vertu de la proposition 18, f est continue en $\frac{\pi}{2}$ si et seulement si

$$\lim_{x \longrightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = f(\frac{\pi}{2}),$$

soit $a = \frac{\pi}{2}$. De même, f est continue en π si et seulement si

$$\lim_{x \longrightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \pi^+} f(x) = f(\pi),$$

soit $b = -\frac{\pi^2}{2}$. Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $(a, b) = (\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi^2}{2})$.

Exercice 21 *Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par*

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & si \quad x \neq 0, \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases} \qquad et \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x+|x|(1+x)}{x} & si \quad x \neq 0, \\ 2 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f et g sur $\mathbb{R}$.

Solution -

1. Les fonctions x, $\sin x$ et $\frac{1}{x}$ sont sont continues sur $\mathbb{R}^*$ et donc, en vertu des propositions 20 et 21, f est continue sur $\mathbb{R}^*$. Etudions la continuité de f en 0. On a, pour tout $x \neq 0$,

$$0 \leq \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x|,$$

et donc, en vertu de la proposition 14,

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$$

et par suite f est continue en 0. Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Les fonctions x et $|x|$ sont sont continues sur $\mathbb{R}$ et donc, en vertu de la proposition 20, g est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues. Etudions la continuité de g en 0. On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{x+|x|(1+x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{x+x(1+x)}{x} \\ &= \lim_{x\longrightarrow 0^+} (2+x) = 2.\end{aligned}$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow 0^-} g(x) &= \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{x+|x|(1+x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{x-x(1+x)}{x} \\ &= \lim_{x\longrightarrow 0^-} -x = 0.\end{aligned}$$

Ainsi $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} g(x) \neq \lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} g(x)$ et donc g n'est pas continue en 0. Finalement, g est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 22 *Etudier si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité en 0 :*

$$f(x) = x\left[\frac{1}{x}\right], \quad g(x) = \frac{x^2+|x|}{x^2-|x|}, \quad h(x) = \frac{x^2(x-[x])}{|x|}.$$

Solution - Il s'agit d'étudier les limites de ces fonctions en 0.

1. D'après la caractérisation de la partie entière (voir (1.5)), on a, pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{1}{x} - 1 \leq \left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x}.$$

On déduit alors que pour $x > 0$, $1-x \leq f(x) \leq 1$ et donc, en vertu de la proposition 14, $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = 1$. De la même manière, pour $x < 0$, on a $1 \leq f(x) \leq 1-x$ et donc $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x) = 1$. En conclusion, $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x) = 1$ et donc f est prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est la fonction

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} x\left[\frac{1}{x}\right] & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

2. On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{x^2+|x|}{x^2-|x|} = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{x^2+x}{x^2-x} = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{x+1}{x-1} = -1,\\ \lim_{x\longrightarrow 0^-} g(x) &= \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{x^2+|x|}{x^2-|x|} = \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{x^2-x}{x^2+x} = \lim_{x\longrightarrow 0^-} \frac{x-1}{x+1} = -1,\end{aligned}$$

et donc $\lim_{x\longrightarrow 0} g(x) = -1$. Ainsi g est prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est la fonction

$$\widetilde{g}(x) = \begin{cases} \frac{x^2+|x|}{x^2-|x|} & \text{si} \quad x \neq 0,\\ -1 & \text{si} \quad x = 0.\end{cases}$$

3. D'après la caractérisation de la partie entière (voir (1.5)), on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq x - [x] \leq 1.$$

D'un autre côté, $|h(x)| = |x|(x-[x])$. On déduit alors que

$$0 \leq |h(x)| \leq |x|$$

et donc, en vertu de la proposition 14, $\lim_{x\longrightarrow 0} h(x) = 0$. Ainsi h est prolongeable par continuité en 0 et son prolongement est la fonction

$$\widetilde{h}(x) = \begin{cases} \frac{x^2(x-[x])}{|x|} & \text{si} \quad x \neq 0,\\ 0 & \text{si} \quad x = 0.\end{cases}$$

Exercice 23 *Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies par*

$$f(x) = \begin{cases} x\left[\frac{1}{x}\right] & si \quad x \neq 0,\\ 1 & si \quad x = 0\end{cases} \qquad et \quad g(x) = \begin{cases} \sin x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0,\\ 0 & si \quad x = 0\end{cases}$$

Etudier la continuité de f et g sur $\mathbb{R}$.

Solution -

1. Nous avons vu dans l'exercice précédent que $\lim_{x\longrightarrow 0} f(x) = 1$ et donc f est continue en 0. D'un autre côté, la fonction partie entière est continue

sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et donc la fonction composée qui à $x \mapsto \left[\frac{1}{x}\right]$ est continue sur

$$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{p}, p \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

et par suite f est continue sur cet ensemble.

Etudions maintenant la continuité de f en un point $\frac{1}{p}$ avec $p \in \mathbb{Z}^*$. On a

$$f\left(\frac{1}{p}\right) = 1.$$

La suite $\left(\frac{1}{p-\frac{1}{n}}\right)_{n\geq 2}$ convergent vers $\frac{1}{p}$ et on a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow+\infty} f\left(\frac{1}{p-\frac{1}{n}}\right) &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{p-\frac{1}{n}}\left[p-\frac{1}{n}\right] \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{p-\frac{1}{n}}(p-1) = \frac{p-1}{p} \neq f\left(\frac{1}{p}\right),
\end{aligned}$$

et donc f n'est pas continue en $\frac{1}{p}$.
En conclusion f est continue sur

$$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{p}, p \in \mathbb{Z}\right\}.$$

2. Les fonctions x, $\sin x$ et $\frac{1}{x}$ sont sont continues sur $\mathbb{R}^*$ et donc, en vertu des propositions 20 et 21, g est continue sur $\mathbb{R}^*$. Etudions la continuité de g en 0. On a, pour tout $x \neq 0$,

$$0 \leq \left|\sin x \sin \frac{1}{x}\right| \leq |\sin x|,$$

et donc, en vertu de la proposition 14,

$$\lim_{x\longrightarrow 0} g(x) = 0 = g(0)$$

et par suite g est continue en 0. Finalement, g est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 24 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que*

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) + f(x-y) = 2\left(f(x) + f(y)\right). \tag{2.6}$$

1. *Calculer $f(0)$ et étudier la parité de f.*
2. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(nx) = n^2 f(x)$.*
3. *Montrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$, $f(r) = r^2 f(1)$.*
4. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 f(1)$.*

Solution -

1. En prenant $x = y = 0$ dans (2.6), on déduit que $2f(0) = 4f(0)$, soit $f(0) = 0$.
   En prenant, respectivement, $y = -x$ et $y = x$ dans (2.6), on déduit que
   $$f(0) + f(2x) = 2(f(x) + f(-x)) \quad \text{et} \quad f(2x) + f(0) = 4f(x).$$
   De ces deux relations, on déduit que $4f(x) = 2(f(x) + f(-x))$ soit $f(-x) = f(x)$ et donc f est paire.
2. Soit x un réel fixé. Nous allons commencer par montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$f(nx) = n^2 f(x).$$
   Pour $n = 0$, on a clairement $f(0) = 0 \times f(0)$. Supposons que la relation est vraie jusqu'au rang n. On a
   $$\begin{array}{rcl} f((n+1)x) & = & f(nx + x) \\ & \overset{(2.6)}{=} & 2(f(nx) + f(x)) - f(nx - x) \\ & = & 2n^2 f(x) + 2f(x) - (n-1)^2 f(x) \\ & = & \left(2n^2 + 2 - (n-1)^2\right) f(x) \\ & = & (n^2 + 2n + 1) f(x) = (n+1)^2 f(x), \end{array}$$
   ce qui achève la récurrence.
   D'un autre côté, pour $n \in \mathbb{Z}^-$,
   $$f(nx) = f((-n)(-x)) = (-n)^2 f(-x) = n^2 f(x),$$
   car $-n \in \mathbb{N}$ et f est paire. Finalement, nous avons montré que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$,
   $$f(nx) = n^2 f(x). \tag{2.7}$$
3. Soit $r = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$ et $q \neq 0$. On a
   $$q^2 f(r) \overset{(2.7)}{=} f(qr) = f(p) \overset{(2.7)}{=} p^2 f(1),$$
   et donc $f(r) = \dfrac{p^2}{q^2} f(1) = r^2 f(1)$.

4. Nous allons utilisé la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après le théorème 4, il existe une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n \in \mathbb{Q}$ et
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} r_n = x.$$
Puisque f est continue en x, on déduit, en vertu de la proposition 12, que $f(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} f(r_n)$. Or, d'après la question précédente, $f(r_n) = r_n^2 f(1)$. Il en découle alors que
$$f(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} f(r_n) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} r_n^2 f(1) = x^2 f(1).$$

Exercice 25 *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $f(a) = f(b)$. Montrer que la fonction $h(x) = f(x + \frac{b-a}{2}) - f(x)$ s'annule au moins en un point de $[a, \frac{a+b}{2}]$.*

Solution -
Pour tout $x \in [a, \frac{a+b}{2}]$, on a
$$a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} \leq x + \frac{b-a}{2} \leq \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} = b,$$
et donc h est bien définie sur $[a, \frac{a+b}{2}]$. Elle est continue sur $[a, \frac{a+b}{2}]$ car f est continue et $x \mapsto x + \frac{b-a}{2}$ est continue. D'un autre coté, on a
$$h(a) = f(\frac{a+b}{2}) - f(a) \quad \text{et} \quad h(\frac{a+b}{2}) = f(b) - f(\frac{a+b}{2}) = f(a) - f(\frac{a+b}{2}).$$
Si $h(a) = 0$ le problème est résolue, sinon $h(a)h(\frac{a+b}{2}) = -(h(a))^2 < 0$ et donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires (*cf.* Corollaire 2) il existe un $x_0 \in [a, \frac{a+b}{2}]$ tel que $h(x_0) = 0$.

Exercice 26 *1. Montrer que l'équation*
$$x^2 \cos x + x \sin x + 1 = 0$$
admet au moins une solution réelle.

2. Montrer que l'équation $x^{29} - 14x^{17} - 5x^5 + 2 = 0$ admet au moins une solution dans $]-1, 1[$.

3. Montrer que tout polynôme réel de degré impaire admet une racine réelle.

Solution -

1. La fonction $f(x) = x^2 \cos x + x \sin x + 1$ est continue sur $[0, \pi]$ et
$$f(0) = 1 > 0, \quad f(\pi) = 1 - \pi^2 < 0.$$
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (*cf.* Corollaire 2), il existe un $x_0 \in]0, \pi[$ tel que $f(x_0) = 0$.
2. La fonction $h(x) = x^{29} - 14x^{17} - 5x^5 + 2$ est continue sur $[-1, 1]$ et
$$h(-1) = 20 > 0, \quad h(1) = -16 < 0.$$
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (*cf.* Corollaire 2), il existe un $x_0 \in]-1, 1[$ tel que $h(x_0) = 0$.
3. Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ un polynôme de degré impaire avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. On suppose que $a_n > 0$. On a, puisque n est impaire,
$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \longrightarrow +\infty} a_n x^n &= +\infty, \\ \lim_{x \longrightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} a_n x^n &= -\infty. \end{aligned}$$
Il existe donc $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $P(a) > 0$ et $P(b) < 0$. Puisque P est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe x_0 compris entre a et b tel que $P(x_0) = 0$.
Si $a_n < 0$, on peut faire un raisonnement analogue pour obtenir le résultat.

Exercice 27 *Soit* $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ *une fonction continue.*

1. *Montrer qu'il existe* $c \in [0, 1]$ *tel que* $f(c) = c$.
2. *Montrer qu'il existe* $c \in [0, 1]$ *tel que* $f(c) = \sqrt{c}$.
3. *On suppose que* $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. *Montrer qu'il existe* $c \in [0, \frac{1}{2}]$ *tel que* $f(c + \frac{1}{2}) - f(c) = \frac{1}{2}$.

Solution -

1. On considère la fonction $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$g(x) = f(x) - x.$$
Cette fonction est continue sur $[0,1]$ et $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ car $f(0), f(1) \in [0,1]$. Si $f(0) = 0$ ou $f(1) = 1$ le problème est résolu. Sinon $g(0)g(1) < 0$ et donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (*cf.* Corollaire 2), il existe un $c \in]0,1[$ tel que $g(c) = 0$, soit $f(c) = c$.
2. On considère la fonction $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$h(x) = f(x) - \sqrt{x}.$$
Cette fonction est continue sur $[0,1]$ et $h(0) = f(0) \geq 0$ et $h(1) = f(1) - 1 \leq 0$ car $f(0), f(1) \in [0,1]$. Si $f(0) = 0$ ou $f(1) = 1$ le problème est résolu. Sinon $h(0)h(1) < 0$ et donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (*cf.* Corollaire 2), il existe un $c \in]0,1[$ tel que $h(c) = 0$, soit $f(c) = \sqrt{c}$.
3. On considère la fonction $u : [0, \frac{1}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$u(x) = f(x + \frac{1}{2}) - f(x) - \frac{1}{2}.$$
Cette fonction est continue sur $[0, \frac{1}{2}]$ et
$$u(0) = f(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u(\frac{1}{2}) = f(1) - f(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - f(\frac{1}{2}).$$
Si $u(0) = 0$ le problème est résolu. Sinon $u(0)u(\frac{1}{2}) < 0$ et donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (*cf.* Corollaire 2), il existe un $c \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que $u(c) = 0$, soit $f(c + \frac{1}{2}) - f(c) = \frac{1}{2}$.

Exercice 28 *Montrer que* $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ *réalise une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur un intervalle qu'on calculera. Expliciter* f^{-1}.

Solution -

On commence par remarquer que $f(-x) = -f(x)$ et donc f est impaire et donc il suffit d'étudier f sur $[0, +\infty[$. La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$ et pour tout $x_1, x_2 \in [0, +\infty[$ tels que $x_1 < x_2$, on a
$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2}{1+x_2} - \frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2 - x_1}{(1+x_2)(1+x_1)} > 0,$$

et donc f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$. D'après le théorème 8, f réalise une bijection entre $[0,+\infty[$ sur $f([0,+\infty[)$. Or

$$f(0)=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=1,$$

et donc f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,1[$. De la même manière, on montre que f réalise une bijection de $]-\infty,0]$ sur $]-1,0]$. Finalement, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.
Calculons f^{-1}. Soit $y\in[0,1[$, $f(x)=y$ équivaut à $\frac{x}{1+x}=y$, soit $x=\frac{y}{1-y}$. De même, pour $y\in[-1,0]$, $f(x)=y$ équivaut à $\frac{x}{1-x}=y$ soit $x=\frac{y}{1+y}$. Finalement, $f^{-1}:]-1,1[\longrightarrow\mathbb{R}$ est donnée par

$$f^{-1}(x)=\frac{x}{1-|x|}.$$

Exercice 29 *Montrer que les fonctions suivantes sont des bijections et calculer leurs fonctions réciproques.*

1. $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^+$, $f(x)=e^{3x+1}$.
2. $g:\mathbb{R}^-\longrightarrow]0,1]$, $g(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

Solution -
Nous allons utilisé le théorème 8.

1. Nous allons montrer, dans un premier temps, que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   Soient $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ tels que $x_1<x_2$. On a alors

   $$3x_1+1<3x_2+1$$

   et puisque l'exponentielle est strictement croissante, on déduit que $f(x_1)<f(x_2)$ et donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   D'un autre côté, f est continue et donc, en vertu du théorème 8, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$. Or

   $$\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x)=0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=+\infty$$

   et ainsi $f(\mathbb{R})=]0,+\infty[$.
   Calculons f^{-1}. Soit $x\in]0,+\infty[$. La relation $f(y)=x$ est équivalente à $e^{3y+1}=x$, soit $3y+1=\ln x$ et donc $y=\frac{\ln x-1}{3}$. Finalement, $f^{-1}:]0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ est donnée par

   $$f^{-1}(x)=\frac{\ln x-1}{3}.$$

2. Nous allons montrer, dans un premier temps, que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$.
Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^-$ tels que $x_1 < x_2$. On a alors
$$x_2^2 + 1 < x_1^2 + 1$$
et par suite $\frac{1}{x_1^2+1} < \frac{1}{x_2^2+1}$, soit $g(x_1) < g(x_2)$ et donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$.
D'un autre côté, g est continue et donc, en vertu du théorème 8, g réalise une bijection de $\mathbb{R}^-$ sur $g(\mathbb{R}^-)$. Or
$$g(0) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \longrightarrow -\infty} g(x) = 0$$
et et ainsi $g(\mathbb{R}^-) =]0, 1]$.
Calculons g^{-1}. Soit $x \in]0, 1]$. La relation $g(y) = x$ est équivalente à $\frac{1}{y^2+1} = x$, soit $y^2 + 1 = \frac{1}{x}$ et donc $y = -\sqrt{\frac{1-x}{x}}$ car $y \in \mathbb{R}^-$. Finalement, $g^{-1} :]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^-$ est donnée par
$$g^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{1-x}{x}}.$$

Exercice 30 *Soit* $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *continue et telle que* $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$. *Montrer que* f *est bornée.*

Solution - Soit $\epsilon > 0$ fixé. Puisque $\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$, d'après la définition de la limite en $+\infty$ (*cf.* Proposition 2.1.4), il existe $b > 0$ tel que
$$\forall x > b \quad a - \epsilon \leq f(x) \leq a + \epsilon.$$
Ceci montre que f est bornée sur $]b, +\infty[$. Maintenant f est continue sur $[0, b]$ et donc f est bornée sur $[0, b]$ d'après le théorème 7. En conclusion, f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 3

Fonctions d'une variable réelle : dérivabilité

Rappelons qu'un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est un intervalle de la forme $]a, b[$, $]-\infty, a[$ ou $]a, +\infty[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ un point $a \in I$ est dit intérieur s'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ tel que $a \in J$. Par exemple, 0 est un point intérieur de $[-1, 1]$ alors que -1 et 1 ne sont pas des points intérieurs.

3.1 Définition de la dérivée et premières propriétés

Définition 12 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert et $a \in I$.*

On dit que f est dérivable en a s'il existe un réel qu'on notera $f'(a)$ vérifiant

$$f'(a) = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Exemples -

1. **La fonction constante $f_0(x) = c$ est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}$ et on a**

$$f_0'(a) = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f_0(x) - f_0(a)}{x - a} = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{c - c}{x - a} = 0.$$

2. **La fonction constante $f_1(x) = x$ est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}$ et on a**

$$f_1'(a) = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{f_1(x) - f_1(a)}{x - a} = \lim_{x \longrightarrow a} \frac{x - a}{x - a} = 1.$$

3. **Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^n$ est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$ et on a**

$$f'(a) = na^{n-1}. \tag{3.1}$$

En effet, pour tout $h \in \mathbb{R}$, on a

$$(a+h)^n = a^n + \sum_{k=1}^{n} C_n^k h^k a^{n-k},$$

de sorte que

$$\frac{(a+h)^n - a^n}{h} = \begin{cases} 1 & \textbf{si} \quad n = 1 \\ C_n^1 a^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} C_n^k h^{k-1} a^{n-k} & \textbf{si} \quad n \geq 2. \end{cases}$$

On obtient donc

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h} = \begin{cases} 1 & \textbf{si} \quad n = 1 \\ C_n^1 a^{n-1} & \textbf{si} \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Ceci donne le résultat énoncé si on sait que $C_n^1 = n$.

4. **La fonction $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable en tout point $a \neq 0$ et sa dérivée est**

$$g'(a) = -\frac{1}{a^2}. \tag{3.2}$$

En effet, on a

$$g(a+h) - g(a) = \frac{1}{a+h} - \frac{1}{a} = -\frac{h}{a(a+h)}$$

et par suite

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} -\frac{1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}.$$

5. **La fonction $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \sqrt{x}$ est dérivable en tout point $a > 0$ et on a**

$$h'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}. \tag{3.3}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} h(a+h) - h(a) &= \sqrt{a+h} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a})(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} \\ &= \frac{h}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}, \end{aligned}$$

et par suite

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{h(a+h) - h(a)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Remarque - (Important !) Si f est dérivable en a, on définit la fonction α sur $I \setminus \{a\}$ par

$$\alpha(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a).$$

On a, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\alpha(x), \tag{3.4}$$

et $\lim_{x \longrightarrow a} \alpha(x) = 0$.

Comme la notion de dérivée est définie à l'aide d'une limite, et comme il y a une notion de limite à droite et de limite à gauche, on peut parler de dérivée à droite et de dérivée à gauche.

Définition 13 *Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable à droite (resp. à gauche) au point a si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite à droite (resp. à gauche) finie au point a notée $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$).*

La proposition suivante est une conséquence de la proposition 16 du chapitre 2.

Proposition 22 *La fonction f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche de a et on a $f'_d(a) = f'_g(a)$. Dans ce cas, on a $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.*

La proposition suivante est une conséquence de (3.4).

Proposition 23 *Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point.*

Remarque - La réciproque de cette proposition est fausse. En effet, la fonction $x \longrightarrow |x|$ est continue en 0, mais n'est pas dérivable en 0 car

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1 \quad \textbf{et} \quad \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1.$$

Nous allons maintenant donner deux interprétations de la dérivée en un point.

Si $f(x)$ est la position d'une particule au temps $x \neq x_0$, le quotient

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

est la vitesse moyenne de la particule entre x et x_0. Il est alors naturel de regarder

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

quand il existe comme la **vitesse instantanée** de la particule en x_0. Cette interprétation reste valable même si x n'est pas le temps, on peut regarder $f'(x_0)$ comme la **variation instantanée** de $f(x)$ en x_0.
La dérivée a aussi une interprétation graphique. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère affine $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit x un autre point de I différent de a. On notera A et M les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectifs a et x. La quantité $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est le coefficient directeur de la droite AM et on a :

Théorème 9 *Si f est dérivable en a, $\mathcal{C}$ admet une tangente (T) en A non parallèle à $(O, \overrightarrow{j})$ et de coefficient directeur $f'(a)$ et (T) a pour équation $y = f(a) + (x-a)f'(a)$.*

Exemple - La fonction $f(x) = x^2$ et dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$ et, d'après (3.1), $f'(a) = 2a$. Ainsi l'équation de la tangente (T) de la courbe représentative de f au point $(1,1)$ est $y = 1 + 2(x-1)$.

3.2 Opérations sur les fonctions dérivables

Proposition 24 *L'ensemble $\mathcal{D}_a$ des fonctions dérivables au point a est inclus dans l'espaces $\mathcal{C}_a$ des fonctions continues en a, et pour toutes fonctions f et g de $\mathcal{D}_a$, pour tout réel λ, on a*

1. $f + g \in \mathcal{D}_a$; $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
2. $\lambda f \in \mathcal{D}_a$; $(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a)$,
3. $fg \in \mathcal{D}_a$, $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

Théorème 10 *Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur deux intervalles ouverts et $a \in I$ tel que $f(a) \in J$. Si f est dérivable en a et g en $f(a)$ alors $g \circ f$ est dérrivable en a et*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Proposition 25 *Si f est dérivable en a et si $f(a) \neq 0$, la fonction $\dfrac{1}{f}$ est dérivable au point a et*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{(f(a))^2}.$$

Il en résulte

$$(f, g \in \mathcal{D}_a, g(a) \neq 0) \quad \Rightarrow \quad (\frac{f}{g} \in \mathcal{D}_a, \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}.)$$

Les propositions 24 et 25 ainsi que le théorème 10 constituent la base du calcul des dérivées. Combinés avec les dérivées des fonctions usuelles, ils permettent de calculer la dérivée d'une large classe de fonctions. On rappelle ici un tableau qu'il est impératif de connaître par cœur.

$f(x)$	$f'(x)$
$x^\alpha, \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Le théorème suivant complète l'arsenal.

Théorème 11 *Soit $f : I \longrightarrow J$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle ouvert I. Suppose que f est dérivable en un point $a \in I$ et $f'(a) \neq 0$. Alors f admet une fonction réciproque $f^{-1} : J \longrightarrow I$, f^{-1} est dérivable au point $b = f(a)$ et*

$$[f^{-1}]'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$

Une application directe de ce théorème est le calcul des dérivées des fonctions arcsin et arccos. En effet, ces deux fonctions sont dérivables sur $]-1, 1[$ et, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad (\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{3.5}$$

D'un autre côté, la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}. \tag{3.6}$$

3.3 Fonctions dérivées et dérivées d'ordre supérieur

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I. Si f est dérivable en tout point de I, l'application $f' : I \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $x \mapsto f'(x)$ est appeleé **fonction dérivée** de f. Si f' est continue sur I, on dit que f est continûment dérivable sur I ou encore que f est de classe C^1 sur I.
Si f' est elle même dérivable sur I, on notera f'' sa fonction dérivée et on dit que f est deux fois dérivable sur I.
Plus généralement, on note $f^{(3)}, f^{(4)}, \ldots, f^{(n)}$ les fonctions dérivées d'ordre supérieur, si elles existent, de la fonction f et l'on dit que f est de classe C^n sur I, si f est dérivable n fois et $f^{(n)}$ est continue sur I.
Exemple - Nous allons montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right). \tag{3.7}$$

Pour $n = 1$, on a $\sin'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$. On suppose la formule vraie au rang n. On a

$$\begin{aligned} \sin^{(n+1)}(x) &= (\sin^{(n)})'(x) = \left(\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin\left(x + n\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

De la même manière, on peut montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right). \tag{3.8}$$

Théorème 12 (Formule de Leibniz) *Si f et g sont deux fonctions dérivables n fois en un point a, alors la fonction fg est dérivable n fois en a et*

$$(fg)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)g(a) + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k f^{(n-k)}(a)g^{(k)}(a) + f(a)g^{(n)}(a),$$

où $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Exemple - Nous allons utiliser la formule de Leibniz pour calculer la dérivée d'ordre 4 de la fonction $h(x) = (x-1)^3 \ln x$. Posons $f(x) = (x-1)^3$ et $g(x) = \ln x$. On a

$$f'(x) = 3(x-1)^2,\ f''(x) = 6(x-1),\ f^{(3)}(x) = 6,\ f^{(4)}(x) = 0.$$

D'un autre côté, on a

$$g'(x) = \frac{1}{x},\ g''(x) = -\frac{1}{x^2},\ g^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3},\ g^{(4)}(x) = \frac{-6}{x^4}.$$

Donc, d'après la formule de Leibniz,

$$\begin{aligned} h^{(4)}(x) &= f^{(4)}(x)g(x) + C_4^1 f^{(3)}(x)g'(x) + C_4^2 f''(x)g''(x) + C_4^3 f'(x)g^{(3)}(x) \\ &\quad + f(x)g^{(4)}(x) \\ &= 4 \times 6\frac{1}{x} + 6 \times 6(x-1) \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 4 \times 3(x-1)^2 \frac{2}{x^3} + (x-1)^3 \left(\frac{-6}{x^4}\right) \\ &= 6\left(\frac{4}{x} - \frac{6}{x} + \frac{6}{x^2} + \frac{4}{x} - \frac{8}{x^2} + \frac{4}{x^3} - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) \\ &= 6\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right). \end{aligned}$$

3.4 Théorème de Rolle et théorème des accroissements finis

Définition 14 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle.*

1. *On dira que f présente un maximum local en $a \in I$, s'il existe un $\epsilon > 0$ tel que*
$$\forall x \in I \cap]a-\epsilon, a+\epsilon[, \qquad f(x) \leq f(a).$$
2. *On dira que f présente un minimum local en $a \in I$, s'il existe un $\epsilon > 0$ tel que*
$$\forall x \in I \cap]a-\epsilon, a+\epsilon[, \qquad f(x) \geq f(a).$$

Si 1. ou 2. est vérifiée, on dira que f présente un extremum local en a.

Théorème 13 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle quelconque et soit $x_0 \in I$. Si f présente un extrémum local en x_0, si x_0 est un point intérieur et si $f'(x_0)$ existe alors $f'(x_0) = 0$.*

Remarques -

1. **La réciproque de ce théorème est fausse. La fonction $f(x) = x^3$ vérifie $f'(0) = 0$ mais f est strictement croissante et ne présente pas d'extremum en 0.**
2. **L'hypothèse "x_0 est un point intérieur" est importante. Par exemple, la fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ présente un maximum au point 1 mais la dérivée à gauche en 1 n'est pas nulle.**

Le théorème suivant est une conséquence du théorème 13 et du théorème 7.

Théorème 14 (Théorème de Rolle) *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe un point $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Remarque - Graphiquement, le théorème de Rolle signifie que si la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction continue rencontre une droite horizontale en deux points d'abscisses respectifs a et b et si $\mathcal{C}$ admet une tangente en tout point d'abscisse compris entre a et b alors il existe un point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $a < c < b$ où la tangente est horizontale.

Le théorème des accroissements finis est une généralisation du théorème de Rolle et c'est parmi les théorèmes importants de l'analyse.

Théorème 15 (Formule des accroissements finis) *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Exemple - Nous allons utiliser le théorème des accroissements finis pour calculer

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}}{x^2}.$$

Soit $x > 0$. La fonction e^x est continue sur $[\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x}]$ et est dérivable sur $]\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x}[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c(x) \in]\frac{1}{x+1}, \frac{1}{x}[$ tel que

$$e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}} = e^{c(x)} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \right) = -\frac{e^{c(x)}}{x(x+1)}.$$

On aura alors

$$\frac{e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = -\frac{e^{c(x)}}{x^3(x+1)}.$$

Puisque $\frac{1}{x+1} < c(x) < \frac{1}{x}$, $\lim_{x \longrightarrow 0^+} e^{c(x)} = +\infty$ et donc

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x+1}} - e^{\frac{1}{x}}}{x^2} = -\infty.$$

Le corollaire suivant est une conséquence importante de la formule des accroissements finis.

Corollaire 3 (Inégalité des accroissements finis)*Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si f' est bornée sur $]a, b[$, c'est-à-dire, qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in]a, b[$, $|f'(x)| \leq M$, alors, pour tout $x, y \in [a, b]$,*

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Exemple - Les fonctions sin **et** cos **vérifient les hypothèses du corollaire 3 sur tout intervalle** $[a, b]$ **de** $\mathbb{R}$ **avec** $M = 1$. **On déduit alors que, pour tout** $x < y$,

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y| \quad \textbf{et} \quad |\cos x - \cos y| \leq |x - y|.$$

3.5 Applications du théorème des accroissement finis

Nous allons donner quelques applications de la formule des accroissements finies.

Proposition 26 *Soit* f *une fonction continue sur un intervalle quelconque* $I \subset \mathbb{R}$ *et dérivable en tout point intérieur de* I. *Alors :*

1. *La fonction* f *est strictement croissante sur* I, *si et seulement si que pour tout point intérieur* x *de* I, $f'(x) > 0$.
2. *La fonction* f *est strictement décroissante sur* I, *si et seulement si que pour tout point intérieur* x *de* I, $f'(x) < 0$.
3. *La fonction* f *est constante sur* I, *si et seulement si que pour tout point intérieur* x *de* I, $f'(x) = 0$.

L'inégalité des accroissements finis et la proposition 26 sont très utiles dans l'étude de la convergence des suites définies par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction.

Exemple - Considérons la suite définie par $u_0 = 0$ **et** $u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n^2}$ **pour tout** $n \geq 0$. **Remarquons que si cette suite est convergente vers un réel** ℓ **alors** ℓ **vérifie** $\ell = \frac{1}{1+\ell^2}$. **En fait, nous allons montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis que cette suite converge vers une solution de l'équation** $f(x) = x$ **où** $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ **est définie par** $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

- **Montrons d'abord que l'équation** $f(x) = x$ **admet une solution unique dans** $\mathbb{R}$. **On a**

  $$f(x) = x \iff x^3 + x - 1 = 0.$$

  La fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ **définie par** $g(x) = x^3 + x - 1$ **est dérivable sur** $\mathbb{R}$ **et sa dérivée** $g'(x) = 3x^2 + 1 >$ **et donc** g **est strictement croissante sur** $\mathbb{R}$ **d'après la proposition 26. D'un autre côté,** $\lim_{x \longrightarrow -\infty} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ **et donc en vertu du théorème 8,** g **réalise une bijection de** $\mathbb{R}$ **sur** $\mathbb{R}$. **Il en résulte alors qu'il existe un unique** $\ell \in \mathbb{R}$ **tel que** $g(\ell) = 0$ **soit** $f(\ell) = \ell$.

- **Nous allons maintenant majorer f' sur $\mathbb{R}$. En effet, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a**

$$f'(x) = -2\frac{x}{(1+x^2)^2}.$$

Pour étudier cette fonction nous allons étudier ses variations. On a

$$f''(x) = -2\frac{(1+x^2)^2 - x(4x)(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = -2\frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}.$$

On a alors le tableau de variation

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	**0**	**-**	**0**	$+$	
$f'(x)$	**0**	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\searrow$	**-**$\frac{3\sqrt{3}}{8}$	$\nearrow$	**0**

En conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f'(x)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8} \leq 0.7.$$

- **Puisque $f(\ell) = \ell$, on déduit en vertu de l'inégalité des accroissements finis (*cf.* Corollaire 3) que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,**

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq 0.7|u_n - \ell|.$$

De cette inégalité, on déduit par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \ell| \leq (0.7)^n |u_0 - \ell|$$

et puisque $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (0.7)^n$, on déduit finalement que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

Proposition 27 (**Règle de l'Hôpital**) *Soient $f, g :]a-\epsilon, a+\epsilon[\longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur $]a-\epsilon, a+\epsilon[$ et dérivables sur $]a-\epsilon, a+\epsilon[\setminus \{a\}$ satisfaisants :*

(i) $f(a) = g(a) = 0$,

(ii) $g(t) \neq 0$ et $g'(t) \neq 0$ pour tout $t \neq a$.

Alors, si $\lim\limits_{t \longrightarrow a} \dfrac{f'(t)}{g'(t)}$ existe, on a

$$\lim_{t \longrightarrow a} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \longrightarrow a} \frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

Exemple - En utilisant la règle de l'Hôpital, nous allons calculer la limite

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}.$$

Posons $f(x) = 1 + \sin x - \cos x$ **et** $g(x) = 1 - \sin x - \cos x$. **Ces deux fonctions satisfont les hypothèses de la proposition 27 et donc**

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\cos x + \sin x}{- \cos x + \sin x} = -1.$$

3.6 Formule de Taylor-Lagrange

La formule de Taylor-Lagrange généralise la formule des accroissements finis.

Théorème 16 (Formule de Taylor-Lagrange) *Soit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction définie sur un intervalle quelconque et soient* $a, b \in I$ *deux points intérieurs et soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Si, pour tout* $1 \leq k \leq n$, $f^{(k)}$ *est définie et continue sur* $[a, b]$ *et si* $f^{(n+1)}$ *est définie sur* $]a, b[$, *alors il existe* $c \in]a, b[$ *tel que*

$$\begin{aligned} f(b) &= f(a) + (b-a)f'(a) + \ldots + \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) \\ &+ \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c). \end{aligned}$$

Exemple - En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, nous allons établir l'inégalité suivante :

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \quad (x > 0).$$

Pour tout $x > 0$, **la fonction sinus vérifie les hypothèses du théorème 16 sur l'intervalle** $[0, x]$. **On peut donc appliquer la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 3 et il existe donc un réel** $c(x) \in]0, x[$ **tel que**

$$\sin x = \sin 0 + \sin'(0)x + \frac{1}{2} \sin''(0)x^2 + \frac{1}{6} \sin^{(3)}(c(x))x^3.$$

Puisque $\sin(0) = \sin''(0) = 0$, $\sin'(0) = \cos(0) = 1$ **et** $\sin^{(3)} = -\cos$, **on déduit que** $\sin x = x - \frac{1}{6} \cos(c(x))x^3$ **et donc**

$$\sin x - x + \frac{x^3}{6} = \frac{x^3}{6}(1 - \cos(c(x))) \geq 0,$$

car $x > 0$ **et** $1 - \cos(c(x)) \geq 0$, **ce qui prouve l'inégalité souhaitée.**

3.7 Exercices corrigés

Exercice 31 *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & si \quad x < 0, \\ 1+\sin x & si \quad x \geq 0. \end{cases}$$

1. *Etudier la continuité de f.*
2. *Donner le domaine de définition de f' et calculer f'.*
3. *Etudier la continuité de f' sur son domaine de définition.*

Solution -

1. La fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R}^*$. D'un autre côté, on a
$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = 1 = f(0)$$
et donc f est continue en 0, en vertu de la proposition 18. Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction f est clairement dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et ce en vertu de la proposition 24 et on a,
$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < 0, \\ \cos x & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$
D'un autre côté,
$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1, \\ \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{x}{x} = 1. \end{aligned}$$
En vertu de la proposition 22, on déduit que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$.
3. La fonction f' est clairement continue sur $\mathbb{R}^*$. D'un autre côté, on a
$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} f'(x) = 1 = f'(0)$$
et donc f' est continue en 0, en vertu de la proposition 18. Finalement, f' est continue sur $\mathbb{R}$ et donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 32 *Soit f une fonction dérivable en a. Montrer que*

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

Construire un exemple où $\lim_{h \longrightarrow 0} \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ *existe sans que f soit dérivable en a.*

Solution -
On a

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \frac{1}{2}\frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{1}{2}\frac{f(a-h) - f(a)}{-h}.$$

D'un autre côté, puisque f est dérivable en a, on a

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{-h} = f'(a),$$

et la relation est vérifiée.

La fonction $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en 0, par contre

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0-h)}{2h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{|h| - |-h|}{2h} = 0.$$

Exercice 33 *On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0, \\ 0 & si \quad x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0, \\ 0 & si \quad x = 0, \end{cases}$$

1. *Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.*
2. *Montrer que g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que g' est continue sur $\mathbb{R}^*$.*

Solution -

1. La fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R}^*$. D'un autre côté, on a

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = f(0)$$

car, pour tout $x \neq 0$, $0 \leq \left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$ et donc f est continue en 0, en vertu de la proposition 18. Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction f est clairement dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et ce en vertu de la proposition 24 et du théorème 10 et on a, pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x}.$$

D'un autre côté,

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

En utilisant la contraposée de la proposition 12, nous allons montrer que cette limite n'existe pas. Considérons les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$a_n = \frac{1}{n\pi} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{(4n+1)\frac{\pi}{2}}.$$

Ces deux suites convergent vers 0 et on a,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{a_n}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{b_n}\right) = 1.$$

On déduit alors, en vertu de la proposition 12, que $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'existe pas et donc f n'est pas dérivable en 0.

2. La fonction g est clairement continue sur $\mathbb{R}^*$. D'un autre côté, on a

$$\lim_{x \longrightarrow 0} g(x) = g(0)$$

car, pour tout $x \neq 0$, $0 \leq \left|x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq |x^2|$ et donc g est continue en 0, en vertu de la proposition 18. Finalement, g est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction g est clairement dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et ce en vertu de la proposition 24 et du théorème 10 et on a, pour tout $x \neq 0$,

$$g'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

D'un autre côté,

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

et donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.
La fonction g' est clairement continue sur $\mathbb{R}^*$ et puisque

$$\lim_{x \longrightarrow 0} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

et $\lim_{x \longrightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas (on pourra utiliser un même raisonnement que ci-dessus), on déduit que $\lim_{x \longrightarrow 0} g'(x)$ n'existe pas et donc g n'est pas continue en 0. Finalement, g' est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 34 *Montrer que la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & si \quad x < 0, \\ x^3 + \sin x & si \quad x \geq 0. \end{cases}$$

admet une tangente au point d'abscisse 0 et calculer l'équation de cette tangente.

Solution -
La fonction f est clairement continue sur $\mathbb{R}^*$ et on a

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = 0 = f(0)$$

et donc f est continue en 0, en vertu de la proposition 18. La fonction f est clairement dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et ce en vertu de la proposition 24 et on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x^3 + \sin x}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0^+} (x^2 + \frac{\sin x}{x}) = 1, \\ \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0^-} (x + 1) = 1. \end{aligned}$$

En vertu de la proposition 22, on déduit alors que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$. Finalement, la courbe représentative de f admet une tangente en $(0, 0)$ dont l'équation est donnée par $y = x$ (*cf.* Théorème 9).

Exercice 35 *Soit f la fonction définie sur* $]-1, 1[$ *par*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln|x|} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0, \\ 0 & si \quad x = 0. \end{cases}$$

1. *Montrer que f est dérivable sur $]-1,1[$.*
2. *On considère la suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$. Calculer la limite de $(f'(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$.*
3. *En déduire que f' n'est pas continue en 0.*

Solution -

1. La fonction f est clairement dérivable sur $]-1,1[\setminus\{0\}$ et ce en vertu de la proposition 24 et du théorème 10 et on a, pour tout $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$,

$$f'(x) = \frac{\ln|x|-1}{\ln^2|x|}\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x\ln|x|}\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

D'un autre côté,

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{1}{\ln|x|}\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

car

$$0 \leq \left|\frac{1}{\ln|x|}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq \frac{1}{|\ln|x||}$$

et $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \frac{1}{|\ln|x||} = 0$. On déduit alors que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. Finalement f est dérivable sur $]-1,1[$ et on a

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\ln|x|-1}{\ln^2|x|}\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x\ln|x|}\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f'(u_n) = \dfrac{1}{u_n \ln u_n}$. Or $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0$ et donc $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n \ln u_n = 0^-$. Il en résulte que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f'(u_n) = -\infty.$$

3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et la suite $(f'(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ donc, en vertu de la contraposée de la proposition 12, f' n'est pas continue en 0.

Exercice 36 *Calculer les limites suivantes :*

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^x-1}{\sin x},\quad \lim_{x\longrightarrow e}\frac{\sin x-\sin e}{\ln x-1},$$
$$\lim_{x\longrightarrow a}\frac{\sin^2(x)-\sin^2(a)}{x^2-a^2},\quad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\ln(ax+1)}{\ln(bx+1)}\quad (a>0, b>0).$$

Solution -

Dans tout cet exercice, nous allons utiliser la formule suivante :

$$\lim_{x\longrightarrow a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

valable pour toute fonction f dérivable en a.

1. On a

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^x-1}{\sin x} = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^x-1}{x}\times\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}.$$

Les fonctions e^x et $\sin x$ sont dérivables en 0 et on a

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^x-1}{x}=e^0=1\quad\text{et}\quad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x}{x}=\cos 0=1.$$

Finalement,

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^x-1}{\sin x}=1.$$

2. On a

$$\lim_{x\longrightarrow e}\frac{\sin x-\sin e}{\ln x-1} = \lim_{x\longrightarrow e}\frac{\sin x-\sin e}{x-e}\times\frac{1}{\frac{\ln x-\ln e}{x-e}}.$$

Les fonctions $\sin x$ et $\ln x$ sont dérivables en e et on a

$$\lim_{x\longrightarrow e}\frac{\sin x-\sin e}{x-e}=\cos(e)\quad\text{et}\quad \lim_{x\longrightarrow e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\frac{1}{e}.$$

Finalement,

$$\lim_{x\longrightarrow e}\frac{\sin x-\sin e}{\ln x-1}=e\cos(e).$$

3. On a

$$\lim_{x\longrightarrow a}\frac{\sin^2(x)-\sin^2(a)}{x^2-a^2} = \lim_{x\longrightarrow a}\frac{\sin^2(x)-\sin^2(a)}{(x+a)(x-a)}.$$

La fonction $\sin^2 x$ est dérivable en a et on a

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{\sin^2(x) - \sin^2(a)}{x - a} = 2\cos(a)\sin(a).$$

Finalement,

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{\sin^2(x) - \sin^2(a)}{x^2 - a^2} = \frac{\cos(a)\sin(a)}{a}.$$

4. On a

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(ax+1)}{\ln(bx+1)} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(ax+1)}{x} \times \frac{1}{\frac{\ln(bx+1)}{x}}.$$

Les fonctions $\ln(ax+1)$ et $\ln(bx+1)$ sont dérivables en 0 et on a

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(ax+1)}{x} = \frac{a}{a \times 0 + 1} = a \quad \text{et} \quad \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(bx+1)}{x} = \frac{b}{b \times 0 + 1} = b.$$

Finalement,

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(ax+1)}{\ln(bx+1)} = \frac{a}{b}.$$

Exercice 37 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $f_n(x) = x^{n-1} \ln x$. Montrer par récurrence que*

$$f_n^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}.$$

Solution -

Nous allons procéder par récurrence. Pour $n = 1$, on $f_1(x) = \ln x$ et $f_1'(x) = \frac{1}{x} = \frac{0!}{x}$ et la formule est vérifiée. Supposons que

$$f_n^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}.$$

Remarquons d'abord que $f_{n+1}(x) = x f_n(x)$. On a alors

$$\begin{aligned}
f_{n+1}^{(n+1)}(x) &= (x f_n(x))^{(n+1)} \\
&\overset{(a)}{=} x f_n^{(n+1)}(x) + (n+1) f_n^{(n)}(x) \\
&= x(f_n^{(n)})'(x) + (n+1) f_n^{(n)}(x) \qquad (\text{on a } f_n^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}) \\
&= -\frac{(n-1)!}{x} + (n+1)\frac{(n-1)!}{x} \\
&= \frac{n!}{x},
\end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence et établit la formule. Note que dans (a) on a utilisé la formule de Leibniz (théorème 12)).

Exercice 38 *Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. En utilisant la formule de Leibniz montrer que*

$$g^{(4)}(x) = \frac{1}{x^5} \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Solution -

Posons $f(x) = x^3$ et $h(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$. On a

$$f'(x) = 3x^2,\ f''(x) = 6x,\ f^{(3)}(x) = 6,\ f^{(4)}(x) = 0.$$

D'un autre côté, on a

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right), \\
h''(x) &= -\frac{2}{x^3} \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^4} \cos\left(\frac{1}{x}\right), \\
h^{(3)}(x) &= \frac{6}{x^4} \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^5} \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{4}{x^5} \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^6} \sin\left(\frac{1}{x}\right), \\
&= \left(\frac{6}{x^4} - \frac{1}{x^6}\right) \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{6}{x^5} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \\
h^{(4)}(x) &= \left(-\frac{24}{x^5} + \frac{12}{x^7}\right) \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \left(\frac{1}{x^8} - \frac{36}{x^6}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

Donc, d'après la formule de Leibniz (voir théorème 12),

$$\begin{aligned}
g^{(4)}(x) &= f^{(4)}(x)h(x) + C_4^1 f^{(3)}(x)h'(x) + C_4^2 f''(x)h''(x) + C_4^3 f'(x)h^{(3)}(x) \\
&\quad + f(x)h^{(4)}(x) \\
&= 24h'(x) + 36xh''(x) + 12x^2 h^{(3)}(x) + x^3 h^{(4)}(x) \\
&= \left(\frac{24}{x^2} - \frac{72}{x^2} + \frac{72}{x^2} - \frac{12}{x^4} - \frac{24}{x^2} + \frac{12}{x^4}\right) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \\
&\quad + \left(-\frac{36}{x^3} + \frac{72}{x^3} + \frac{1}{x^5} - \frac{36}{x^3}\right) \cos\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{1}{x^5} \cos\left(\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

Exercice 39 *Calculer les limites suivantes :*

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right),\quad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{(1-\cos x)}{\tan x},\quad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\tan(x^4)}{x^4e^x}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}.$$

Solution -

1. On a
$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sin x}{x\sin x}.$$
Les fonctions $x\mapsto x-\sin x$ et $x\mapsto x\sin x$ vérifient les hypothèse de la proposition 27 en 0 et donc on peut appliquer la règle de l'Hôpital ce qui donne
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}.$$
Les fonctions $x\mapsto 1-\cos x$ et $x\mapsto \sin x+x\cos x$ vérifient les hypothèse de la proposition 27 en 0 et donc on peut appliquer la règle de l'Hôpital une deuxième fois ce qui donne
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0.$$
2. Les fonctions $x\mapsto 1-\cos x$ et $x\mapsto \tan x$ vérifient les hypothèse de la proposition 27 en 0 et donc on peut appliquer la règle de l'Hôpital ce qui donne
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1-\cos x}{\tan x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x}{1+\tan^2 x}=0.$$
3. Les fonctions $x\mapsto \tan(x^4)$ et $x\mapsto x^4e^x$ vérifient les hypothèse de la proposition 27 en 0 et donc on peut appliquer la règle de l'Hôpital ce qui donne
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\tan(x^4)}{x^4e^x} = \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{4x^3(1+\tan^2(x^4))}{(x^4+4x^3)e^x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{4(1+\tan^2(x^4))}{(x+4)e^x}=1.$$
4. Les fonctions $x\mapsto \ln(\cos(ax))$ et $x\mapsto \ln(\cos(bx))$ vérifient les hypothèse de la proposition 27 en 0 et donc on peut appliquer la règle de l'Hôpital ce qui donne
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{a\tan(ax)}{b\tan(bx)}.$$

Les fonctions $x \mapsto \tan(ax))$ et $x \mapsto \tan(bx))$ vérifient les hypothèse de la proposition 27 en 0 et donc on peut appliquer la règle de l'Hôpital une deuxième fois ce qui donne

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))} = \frac{a}{b} \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{\tan(bx)} = \frac{a^2}{b^2} \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1 + \tan^2(ax)}{1 + \tan^2(bx)} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Exercice 40 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que le polynôme $P(X) = X^5 + aX + b$ admet au plus trois racines réelles.*

Solution -

Raisonnons par absurde et supposons que $P(X)$ admet quatre racines réelles $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. La fonction polynôme $P(x)$ est continue sur $[a_1, a_2]$ et dérivable sur $]a_1, a_2[$ et $P(a_1) = P(a_2) = 0$. Donc, d'après le théorème de Rolle (*cf.* Théorème 14), il existe $c_1 \in]a_1, a_2[$ tel que $P'(c_1) = 0$. Un raisonnement analogue, permet de montrer qu'ils existent $c_2 \in]a_2, a_3[$ et $c_3 \in]a_3, a_4[$ tels que $P'(c_2) = P'(c_3) = 0$. Ainsi $P'(X)$ admet trois racines $c_1 < c_2 < c_3$. On réitère le raisonnement ci-dessus pour montrer qu'ils existent $d_1 \in]c_1, c_2[$ et $d_2 \in]c_2, c_3[$ tels que $P''(d_1) = P''(d_2) = 0$. Or $P''(X) = 20X^3$ et ce polynôme n'admet que 0 comme racine réelle ce qui constitue une contradiction. En résumé, $P(X)$ admet au plus trois racines réelles.

Exercice 41 *Montrer les inégalités suivantes :*

(a) $x > 0$, $\frac{1}{x+1} < \ln(1 + \frac{1}{x}) < \frac{1}{x}$.

(b) $0 < x < y$, $0 < \ln y - \ln x \leq \frac{1}{x}(y - x)$.

Solution -

(a) Soit $x > 0$. Remarquons d'abord que

$$\ln(1 + \frac{1}{x}) = \ln(1 + x) - \ln x.$$

La fonction ln est continue sur $[x, x + 1]$ et dérivable sur $]x, x + 1[$ et donc, d'après le théorème des accroissement finis (*cf.* Théorème 15), il existe $c \in]x, 1 + x[$ tel que

$$\ln(1 + x) - \ln x = \frac{1}{c}.$$

Or, puisque $0 < x < c < x+1$, on déduit que $\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$ et l'inégalité souhaitée est établie.

(b) La fonction ln est continue sur $[x, y]$ et dérivable sur $]x, y[$. Donc, d'après le théorème des accroissement finis (*cf.* Théorème 15), il existe $c \in]x, y[$ tel que

$$\ln y - \ln x = (y - x)\frac{1}{c}.$$

Or, puisque $0 < x < c < y$, $\ln y > \ln x$ et $0 < \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$. On déduit alors l'inégalité souhaitée.

Exercice 42 *En utilisant la formule de Taylor-Lagrange, démontrer l'inégalité suivante :*

$$\tan x \geq x + \frac{x^3}{3} \quad (x > 0).$$

Solution -

Pour tout $x > 0$, la fonction tan vérifie les hypothèses du théorème 16 sur l'intervalle $[0, x]$. On peut donc appliquer la formule de Taylor-Lagrange avec un reste à l'ordre 3 et il existe donc un réel $c(x) \in]0, x[$ tel que

$$\tan x = \tan 0 + \tan'(0)x + \frac{1}{2}\tan''(0)x^2 + \frac{1}{6}\tan^{(3)}(c(x))x^3.$$

On a

$$\begin{aligned}
\tan(0) &= 0, \\
\tan'(0) &= 1 + \tan^2(0) = 1, \\
\tan''(0) &= 2\tan(0)(1 + \tan^2(0)) = 0, \\
\tan^{(3)} x &= 2(1 + \tan^2(x)) + 6(1 + \tan^2 x)\tan^2 x \\
&= 2(1 + \tan^2(x))(1 + 3\tan^2 x).
\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\tan x - x - \frac{x^3}{3} = \frac{1}{3}\left([1 + \tan^2(c(x))][1 + 3\tan^2(c(x))] - 1\right)x^3 \geq 0,$$

car $x > 0$ et $[1 + \tan^2(c(x))][1 + 3\tan^2(c(x))] \geq 1$, ce qui prouve l'inégalité souhaitée.

Exercice 43 *1. Montrer, en utilisant la formule des accroissements finis, que*

$$\frac{1}{3} < \ln\frac{3}{2}.$$

2. Montrer, en appliquant la formule de Taylor-Lagrange (avec un reste à l'ordre 4) à l'application $x \mapsto e^x$ sur un intervalle bien choisi que

$$\frac{113}{81} < \sqrt[3]{e} < \frac{113}{81} + \frac{1}{1296}.$$

Solution -

1. La fonction logarithme est continue sur $[1, \frac{3}{2}]$ et dérivable sur $]1, \frac{3}{2}[$ et donc d'après le théorème des accroissement finis (*cf.* Théorème 15), il existe $c \in]1, \frac{3}{2}[$ tel que

$$\ln\frac{3}{2} - \ln 1 = (\frac{3}{2} - 1)\frac{1}{c} = \frac{1}{2c}.$$

Or $c < \frac{3}{2}$ entraîne $\frac{2}{3} < \frac{1}{c}$ puis $\frac{1}{3} < \frac{1}{2c} = \ln\frac{3}{2}$, ce qui établit l'inégalité souhaitée.

2. La fonction exponentielle étant infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle vérifie les hypothèses du théorème 16 sur $[0, \frac{1}{3}]$. On peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange avec un reste d'ordre 4. Il existe donc $d \in]0, \frac{1}{3}[$ tel que

$$e^{\frac{1}{3}} = e^0 + \frac{1}{3}e^0 + \frac{(\frac{1}{3})^2}{2}e^0 + \frac{(\frac{1}{3})^3}{6}e^0 + \frac{(\frac{1}{3})^4}{24}e^d,$$

soit

$$e^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{18} + \frac{1}{162} + \frac{1}{1944}e^d,$$

soit encore

$$\sqrt[3]{e} = \frac{113}{81} + \frac{1}{1944}e^d. \qquad (*)$$

De cette relation, on déduit rapidement que

$$\frac{113}{81} < \sqrt[3]{e}.$$

D'un autre côté, $d < \frac{1}{3}$ entraîne $e^d < e^{\frac{1}{3}}$. Or, d'après la première question $\frac{1}{3} < \ln\frac{2}{3}$ et donc $e^{\frac{1}{3}} < \frac{2}{3}$ et par suite

$$\frac{1}{1944}e^d < \frac{1}{1944} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{1296}$$

et finalement, d'après $(*)$,

$$\sqrt[3]{e} < \frac{113}{81} + \frac{1}{1296},$$

ce qui achève de montrer l'inégalité souhaitée.

Chapitre 4

Fonctions usuelles

Ce chapitre regroupe les résultats importants sur les fonctions les plus utilisées en analyse. Son contenu doit être connu par cœur par les étudiants.

4.1 Fonction valeur absolue

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur absolue de x est le réel noté $|x|$ défini par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0. \end{cases}$$

La fonction valeur absolue qui $x \mapsto |x|$ est paire, continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa fonction dérivée est donnée par

$$|x|' = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

La fonction valeur absolue s'interprète géométriquement comme une distance : $|x - y|$ est la distance entre les réels x et y sur la droite réelle. Les propriétés de la valeur absolue en tant que distance (ou norme) sont regroupées dans la proposition 1.

4.2 Fonctions puissances entières

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, x à la puissance n est le réel $x^n = x \times \ldots \times x$ (produit n fois).
Pour $n \in \mathbb{Z}^-$, on pose $x^n = \frac{1}{x^{-n}}$. On a

$$x^{n+m} = x^n x^m, \; x^{nm} = (x^n)^m, \; (xy)^n = x^n y^n \quad \text{et} \quad x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction $x \mapsto x^n$ à la même parité que n. Elle est continue et dérivable sur son domaine de définition ($\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ et $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$) et sa dérivée est donnée par

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

On a :

- Pour $n \geq 1$,

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \longrightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad n \text{ paire} \\ -\infty & \text{si} \quad n \text{ impaire.} \end{cases}$$

- Pour $n < 0$,

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} x^n = 0, \ \lim_{x \longrightarrow 0^+} x^n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \longrightarrow 0^-} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad n \text{ paire} \\ -\infty & \text{si} \quad n \text{ impaire.} \end{cases}$$

4.3 Fonctions racine n-ième

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $x \mapsto x^{2n}$ est une fonction continue strictement croissante de $[0, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$ et donc, d'après le théorème 8, elle est bijective. Sa bijection réciproque appelée **puissance $2n$-ième** est la fonction définie de $[0, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$, continue et strictement croissante notée $x \mapsto x^{\frac{1}{2n}}$ ou aussi $\sqrt[2n]{x}$. En plus, puisque la fonction $x \mapsto x^{2n}$ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et sa dérivée ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$, on déduit d'après le théorème 11 que la puissance $2n$-ième est dérivable sur $]0, +\infty[$ et sa dérivée est donnée par

$$(x^{\frac{1}{2n}})' = \frac{1}{2n} x^{\frac{1}{2n}-1}.$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $x \mapsto x^{2n+1}$ est une fonction continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et donc, d'après le théorème 8, elle est bijective. Sa bijection réciproque appelée **puissance $2n+1$-ième** est la fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, continue et strictement croissante notée $x \mapsto x^{\frac{1}{2n+1}}$ ou aussi $\sqrt[2n+1]{x}$. En plus, puisque la fonction $x \mapsto x^{2n+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$, on déduit d'après le théorème 11 que la puissance $2n+1$-ième est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est donnée par

$$(x^{\frac{1}{2n+1}})' = \frac{1}{2n+1} x^{\frac{1}{2n+1}-1}.$$

Dans les formules de dérivée ci-dessus, nous utilisons les puissances rationnelles définies par

$$x^{\frac{p}{q}} = \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p, \quad p \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad q \in \mathbb{N}^*.$$

4.4 Exponentielle, logarithme népérien et puissances quelconques

- La fonction exponentielle exp, $x \mapsto e^x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\exp' = \exp$. Le nombre e^1 est noté e, il vaut environ $e \simeq 2,718$.
- La fonction logarithme (népérien) ln est définie, continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x \in]0,+\infty[$,

$$\ln' x = \frac{1}{x}.$$

- La fonction exponentielle exp réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $]0,+\infty[$ et sa bijection réciproque est ln qui est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et donc

$$(\forall x \in \mathbb{R},\ \ln e^x = x) \quad \text{et} \quad (\forall x \in]0,+\infty[,\ e^{\ln x} = x).$$

- **Transformation somme/produit :**

$$(\forall x, y \in \mathbb{R},\ \ e^{x+y} = e^x e^y) \quad \text{et} \quad (\forall x, y \in]0,+\infty[,\ \ \ln(xy) = \ln x + \ln y).$$

En particulier,

$$(\forall x \in \mathbb{R},\ \ e^{-x} = \frac{1}{e^x}) \quad \text{et} \quad (\forall x \in]0,+\infty[,\ \ \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x).$$

- **Limites usuelles :**

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty,\ \lim_{x \longrightarrow +\infty} xe^{-x} = 0,\ \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0,\ \lim_{x \longrightarrow 0} x \ln x = 0.$$

- Pour tout $x \in]0,+\infty[$ et tout $y \in \mathbb{R}$, x **puissance** y est le réel noté x^y et défini par

$$x^y = e^{y \ln x}.$$

Noter que x^y n'est définie que si x est **strictement positif**.
- Pour tous $x, x' \in]0,+\infty[$ et pour tous $y, y' \in \mathbb{R}$, on a

$$x^{y+y'} = x^y x^{y'},\ x^{yy'} = (x^y)^{y'},\ (xx')^y = x^y x'^y \quad \text{et} \quad x^{-y} = \frac{1}{x^y} = \left(\frac{1}{x}\right)^y.$$

- Pour tout $x \in]0,+\infty[$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$\ln(x^y) = y \ln x.$$

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a
$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}.$$
Cette fonction réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$ est sa bijection réciproque est la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$.
- **Croissances comparées de l'exponentielle, le logarithme et les puissances**

  Principe général : L'exponentielle est plus puissante que les puissances qui elles-mêmes sont plus puissantes que le logarithme.

$$\begin{array}{lll}
\text{Pour } \alpha > 0, \displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty & \text{et} & \displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} x^\alpha e^{-x} = 0,\\
\text{Pour } \alpha,\beta \in]0,+\infty[, \displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x^\alpha}{(\ln x)^\beta} = +\infty & \text{et} & \displaystyle\lim_{x\longrightarrow0} x^\alpha(\ln x)^\beta = 0,\\
\text{Pour } \alpha,\beta \in]0,+\infty[, \displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{e^x}{(\ln x)^\beta} = +\infty & \text{et} & \displaystyle\lim_{x\longrightarrow0} (\ln x)^\beta e^{-x} = 0.
\end{array}$$

4.5 Fonctions circulaires

- Les fonctions sinus et cosinus sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques. La fonction sinus est impaire et la fonction cosinus et paire. On a
$$\sin' = \cos \quad \text{et} \quad \cos' = -\sin.$$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$
- On a
$$\sin x = \sin y \iff x \equiv y \bmod 2\pi \text{ ou } x \equiv \pi - y \bmod 2\pi,$$
et
$$\cos x = \cos y \iff x \equiv y \bmod 2\pi \text{ ou } x \equiv -y \bmod 2\pi.$$
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\begin{array}{c|c}
\sin(x+\pi) = -\sin x & \sin(\pi - x) = \sin x\\
\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x & \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x\\
\cos(x+\pi) = -\cos x & \cos(\pi - x) = -\cos x\\
\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x & \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x.
\end{array}$$

- Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{l|l} \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y & \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y & \cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{array}$$

De ces formules, on déduit

$$\begin{aligned} \sin x \sin y &= \tfrac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)), \\ \sin x \cos y &= \tfrac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y)), \\ \cos x \cos y &= \tfrac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y)). \end{aligned}$$

Ces formules donnent d'une manière aisée

$$\begin{array}{r|r} \sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) & \cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right). \end{array}$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 \quad \text{et} \quad \sin(2x) = 2\cos x \sin x.$$

Ainsi

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2} \quad \text{et} \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}.$$

- La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ par $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Elle est impaire, π-périodique, continue et dérivable sur son domaine de définition et on a

$$\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Les formules suivantes sont vérifiées pour x et y pour lesquels chaque terme est bien définie.

- **Résolution d'équations** :

$$\tan x = \tan y \iff x \equiv y \bmod \pi.$$

- **Formules d'addition :**

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \quad \text{et} \quad \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}.$$

- **Formules de duplication :**

$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

- **Expression en fonction de** $\tan\frac{x}{2}$ **:** Si on pose $t = \tan\frac{x}{2}$, on a

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

4.6 Fonction arccosinus, arcsinus et arctangente

- La fonction sin : $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$ est une fonction continue et strictement croissante et donc, d'après le théorème 8 elle est bijective. Sa bijection réciproque est la fonction arcsin : $[-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ainsi la fonction arcsin est continue et strictement croissante sur $[-1, 1]$. En plus, puisque la fonction sinus est dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et sa dérivée ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on déduit d'après le théorème 11 que arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ et sa dérivée est donnée par

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

- La fonction cos : $[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ est une fonction continue et strictement croissante dont l'inverse est la fonction arccos : $[-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$. Ainsi la fonction arccos est continue et strictement décroissante sur $[-1, 1]$. En plus, puisque la fonction cosinus est dérivable sur $[0, \pi]$ et sa dérivée ne s'annule pas sur $]0, \pi[$, on déduit d'après le théorème 11 que arccos est dérivable sur $]-1, 1[$ et sa dérivée est donnée par

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

- La fonction tan $:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et strictement croissante dont l'inverse est la fonction arctan : $\mathbb{R} \longrightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Ainsi la fonction arctan est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En plus, puisque la fonction tangente est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et sa dérivée ne s'annule pas sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on déduit d'après le théorème 11 que arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est donnée par

$$\arctan' x = \frac{1}{1 + x^2}.$$

- Pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\cos(\arccos x) = \sin(\arcsin x) = \tan(\arctan x) = x, \tag{4.1}$$

$$\cos(\arcsin x) = \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}. \tag{4.2}$$

- Pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

$$\arcsin(\sin x) = x.$$

- Pour tout $x \in [0, \pi]$,

$$\arccos(\cos x) = x.$$

- Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,
$$\arctan(\tan x) = x.$$

Attention, les trois dernières formules ne sont pas valables pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par exemple,

$$\begin{aligned} \arcsin(\sin \pi) &= \arcsin(0) = 0 \neq \pi, \\ \arccos(\cos(2\pi)) &= \arccos(1) = 0 \neq 2\pi, \\ \arctan(\tan \pi) &= \arctan(0) = 0 \neq \pi. \end{aligned}$$

4.7 Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle **sinus hyperbolique** de x le réel noté $\sinh x$ et défini par
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$
On appelle **cosinus hyperbolique** de x le réel noté $\cosh x$ et défini par
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$
La fonction sinh est impaire et la fonction cosh est paire. Elles sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\sinh' x = \cosh x \quad \text{et} \quad \cosh' x = \sinh x.$$
- On appelle **tangente hyperbolique** de x le réel noté $\tanh x$ et défini par
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$
La fonction tanh est impaire, continue et dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\tanh' x = 1 - \tan^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}.$$
- La fonction sinh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et sa bijection réciproque sera notée arg sinh. La fonction arg sinh est définie, paire, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\arg\sinh x = \ln(1 + \sqrt{1 + x^2}) \quad \text{et} \quad \arg\sinh' x = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

- La fonction cosh réalise une bijection de $[0, +\infty[$ vers $[1, +\infty[$ et sa bijection réciproque sera notée arg cosh. La fonction arg cosh est définie, continue sur $[1, +\infty[$ mais elle n'est dérivable que sur $]1, +\infty[$. On a, pour tout $x \in [1, +\infty[$,

$$\operatorname{arg\,cosh} x = \ln(1 + \sqrt{x^2 - 1}).$$

et pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$\operatorname{arg\,cosh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

- La fonction tanh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1, 1[$ et sa bijection réciproque sera notée arg tanh. La fonction arg tanh est définie, impaire, continue et dérivable sur $]-1, 1[$. On a, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\operatorname{arg\,tanh} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad \text{et} \quad \operatorname{arg\,tanh}' x = \frac{1}{1-x^2}.$$

- **Trigonométrie hyperbolique :**
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

- Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cos x \sinh y, \\
\sinh(x-y) &= \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y, \\
\cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y, \\
\cosh(x-y) &= \cosh x \cosh y - \sinh x \sinh y, \\
\tanh(x+y) &= \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}, \\
\tanh(x-y) &= \frac{\tanh x - \tanh y}{1 - \tanh x \tanh y}.
\end{aligned}$$

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\cosh(2x) &= \cosh^2 x + \sinh^2 x = 1 + 2\sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1, \\
\sinh(2x) &= 2 \cosh x \sinh x.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\cosh^2 x = \frac{1 + \cosh(2x)}{2} \quad \text{et} \quad \sinh^2 x = \frac{\cosh(2x) - 1}{2}.$$

De même,

$$\tanh(2x) = \frac{2\tanh x}{1+\tanh^2 x}.$$

Si on pose $t = \tanh\frac{x}{2}$, on a

$$\tanh x = \frac{2t}{1+t^2},\ \sinh x = \frac{2t}{1-t^2} \quad \text{et} \quad \cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2}.$$

4.8 Exercices corrigés

Exercice 44 *Ecrire sous la forme* $\frac{m}{n}\pi$ *avec* $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ *et* m *et* n *premier entre eux,* $\arcsin(\sin\alpha)$, $\arccos(\cos\alpha)$ *et* $\arctan(\tan\alpha)$ *pour*

$$\alpha = \frac{59}{5}\pi,\ \alpha = \frac{84}{5}\pi \quad et \quad \alpha = \frac{76}{5}\pi.$$

Solution -

- On a
$$\alpha = \frac{59}{5}\pi = \frac{60-1}{5}\pi = 12\pi - \frac{\pi}{5}.$$
Ainsi
$$\begin{aligned}
\arcsin(\sin\alpha) &= \arcsin(\sin(-\frac{\pi}{5})) = -\frac{\pi}{5} \qquad (\text{car } -\frac{\pi}{5} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]),\\
\arccos(\cos\alpha) &= \arccos(\cos(-\frac{\pi}{5}))\\
&= \arccos(\cos(\frac{\pi}{5})) = \frac{\pi}{5} \qquad (\text{car } \frac{\pi}{5} \in [0, \pi]),\\
\arctan(\tan\alpha) &= \arctan(\tan(-\frac{\pi}{5})) = -\frac{\pi}{5} \qquad (\text{car } -\frac{\pi}{5} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[).
\end{aligned}$$

- On a
$$\alpha = \frac{84}{5}\pi = \frac{80+4}{5}\pi = 16\pi + \frac{4\pi}{5}.$$
Ainsi
$$\begin{aligned}
\arcsin(\sin\alpha) &= \arcsin(\sin(\frac{4\pi}{5})) = \arcsin(\sin(\pi - \frac{4\pi}{5}))\\
&= \arcsin(\sin(\frac{\pi}{5})) = \frac{\pi}{5} \qquad (\text{car } \frac{\pi}{5} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]),\\
\arccos(\cos\alpha) &= \arccos(\cos(\frac{4\pi}{5})) = \frac{4\pi}{5} \qquad (\text{car } \frac{4\pi}{5} \in [0, \pi]),\\
\arctan(\tan\alpha) &= \arctan(\tan(\frac{4\pi}{5})) = \arctan(-\tan(\pi - \frac{4\pi}{5}))\\
&= -\arctan(\tan(\frac{\pi}{5})) = -\frac{\pi}{5} \qquad (\text{car } \frac{\pi}{5} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[).
\end{aligned}$$

- On a
$$\alpha = \frac{76}{5}\pi = \frac{80-4}{5}\pi = 16\pi - \frac{4\pi}{5}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\arcsin(\sin\alpha) &= \arcsin(\sin(-\frac{4\pi}{5})) = -\arcsin(\sin(\frac{4\pi}{5})) \\
&\overset{(a)}{=} -\frac{\pi}{5}, \\
\arccos(\cos\alpha) &= \arccos(\cos(-\frac{4\pi}{5})) \\
&= \arccos(\cos(\frac{4\pi}{5})) = \frac{4\pi}{5} \qquad (\text{car } \frac{4\pi}{5} \in [0,\pi]), \\
\arctan(\tan\alpha) &= \arctan(\tan(-\frac{4\pi}{5})) = -\arctan(\tan(\frac{4\pi}{5})) \\
&\overset{(b)}{=} \frac{\pi}{5}.
\end{aligned}$$

Dans (a) et (b) nous avons utilisé la question précédente.

Exercice 45 *Résoudre l'équations suivante :*

$$\arctan x - \arctan 6x = -\frac{\pi}{4}. \qquad (E)$$

Solution -

En appliquant la tangente aux deux membres de l'équation et en utilisant la formule de la tangente de la somme, on obtient

$$\frac{\tan(\arctan x) - \tan(\arctan 6x)}{1 + \tan(\arctan 6x)\tan(\arctan x)} = -1,$$

soit

$$\frac{-5x}{1+6x^2} = -1$$

ou encore

$$6x^2 - 5x + 1 = 0.$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 25 - 24 = 1$ et donc les racines de sont $x_1 = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{1}{3}$. Ainsi

$$\tan(\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \arctan(3)) = \tan(\arctan\left(\frac{1}{3}\right) - \arctan(2)) = \tan(-\frac{\pi}{4}).$$

En utilisant une calculatrice, on vérifie que

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \arctan(3) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad \text{et} \quad \arctan\left(\frac{1}{3}\right) - \arctan(2) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

Puisque la tangente est injective sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on déduit que $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ sont solutions de (E). En conclusion, l'ensemble des solutions de (E) est $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$.

Exercice 46 *Démontrer les inégalités suivantes :*

1. *Pour tout* $0 < x < 1$, $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} < \arcsin x$.
2. *Pour tout* $x > 0$, $\dfrac{x}{1+x^2} < \arctan x$.

Solution -

1. Soit $0 < x < 1$ fixé. La fonction arcsin est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$, donc d'après le théorème des accroissements finis (*cf.* Théorème 15), il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$\arcsin x - \arcsin 0 = (x - 0) \arcsin' c,$$

soit

$$\arcsin x = \frac{x}{\sqrt{1-c^2}}. \tag{1}$$

Or la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est strictement décroissante (sa dérivée est strictement négative) et donc, puisque $c < x$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}. \tag{2}$$

En combinant (1) et (2), on obtient

$$\arcsin x > \frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

ce qui montre l'inégalité souhaitée.

2. Soit $0 < x$ fixé. La fonction arctan est continue sur $[0, x]$ et dérivable sur $]0, x[$, donc d'après le théorème des accroissements finis (*cf.* Théorème 15), il existe $c \in]0, x[$ tel que

$$\arctan x - \arctan 0 = (x - 0) \arctan' c,$$

soit

$$\arctan x = \frac{x}{1+c^2}. \tag{3}$$

Or la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est strictement décroissante (sa dérivée est strictement négative) et donc, puisque $c < x$,

$$\frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{1+c^2}. \tag{4}$$

En combinant (3) et (4), on obtient

$$\arctan x > \frac{x}{1+x^2},$$

ce qui montre l'inégalité souhaitée.

Exercice 47 *Résoudre l'équation*

$$\arcsin x = \arcsin\frac{2}{5} + \arcsin\frac{3}{5}. \tag{E}$$

Solution -

Remarquons d'abord que cette équation est définie pour $x \in [-1, 1]$ et elle a un sens puisque

$$\arcsin\frac{2}{5} + \arcsin\frac{3}{5} \simeq 1.055 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

En appliquant le sinus aux deux membres de (E) et en utilisant la formule du sinus de la somme, on obtient

$$\sin(\arcsin x) = \sin(\arcsin\frac{2}{5})\cos(\arcsin\frac{3}{5}) + \cos(\arcsin\frac{2}{5})\sin(\arcsin\frac{3}{5}). \tag{1}$$

En utilisant les formules (4.1) et (4.2), on obtient

$$x = \frac{2}{5}\sqrt{1-\frac{9}{25}} + \frac{3}{5}\sqrt{1-\frac{4}{25}} = \frac{8+3\sqrt{21}}{25} \simeq 0,86.$$

Inversement, si $x = \frac{8+3\sqrt{21}}{25}$ elle vérifie (1) et puisque le sinus est injective sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on déduit que x est solution de (E).
En conclusion, $\frac{8+3\sqrt{21}}{25}$ est l'unique solution de (E).

Exercice 48 *Vérifier que, pour tout $x \in [-1,1]$,*

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \operatorname{sg}(x)\frac{\pi}{2},$$

où $\operatorname{sg}(x)$ *est le signe de* x.

Solution -

- La fonction $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \arcsin x + \arccos x$$
est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$ et, pour tout $x \in]-1,1[$,
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$
D'après la proposition 26, f est constante sur $[-1,1]$. Or $f(0) = \frac{\pi}{2}$ et donc, pour tout $x \in [-1,1]$,
$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$
- La fonction $g :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$g(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$$
est continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ et, pour tout $x \in]0,+\infty[$,
$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0.$$
D'après la proposition 26, g est constante sur $]0,+\infty[$. Or $g(1) = \frac{\pi}{2}$ et donc, pour tout $x > 0$,
$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$
Si $x < 0$, on $-x > 0$ et donc, d'après ce qui précède,
$$\arctan(-x) + \arctan(-\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2},$$
et comme arctan est impaire, on déduit que
$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2},$$
ce qui permet de conclure.

Exercice 49 *Etudier la fonction*

$$x \mapsto \arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) + \arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right).$$

Solution -
Notons f cette fonction. Un réel $x \in D_f$ si et seulement si

$$-1 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1.$$

La première inégalité est toujours vérifiée et en multipliant par $1+x^2$, on déduit que la deuxième inégalité est équivalente à

$$(x+1)^2 \geq 0 \quad \text{et} \quad (x-1)^2 \geq 0. \tag{1}$$

Donc $D_f = \mathbb{R}$.
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Un réel x est dans $D_{f'}$ si et seulement si

$$\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| = \left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| = 1.$$

Ces deux équations sont équivalentes à $|x| = 1$ ou $x = 0$. Ainsi $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Calculons la dérivée de f. Pour tout $x \in D_{f'}$, on a

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}} \\
&\quad - \frac{2(1+x^2) - 2x(2x)}{(1+x^2)^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(2x)^2}{(1+x^2)^2}}} \\
&= \frac{-4x}{(1+x^2)^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} - \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}} \\
&= \frac{-2}{1+x^2}\left(\frac{x}{|x|} + \frac{1-x^2}{|1-x^2|}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{4}{1+x^2} & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } -1 < x < 0 \\ -\frac{4}{1+x^2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

D'un autre côté,

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = \arcsin(-1) + \arccos(0) = 0$$

et $f(-1) = f(0) = \pi$ et $f(1) = 0$.
En conclusion :

- La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty, -1]$ et réalise une bijection de $]-\infty, -1]$ sur $]0, \pi]$.
- La fonction f est constante sur $[-1, 0]$ et vaut π.
- La fonction f est strictement décroissante sur $[0, 1]$ et réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, \pi]$.
- La fonction f est constante sur $[1, +\infty[$ et vaut 0.

Exercice 50 *Donner une expression simple de*

$$\arg\cosh\sqrt{\frac{1+\cosh|x|}{2}},\ \arg\sinh(2x\sqrt{1+x^2}) \quad et \quad \arg\tanh\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right).$$

Solution - D'après les formules de trigonométrie hyperbolique

$$\cosh^2\left(\frac{|x|}{2}\right) = \frac{1+\cosh|x|}{2}$$

et donc

$$\arg\cosh\sqrt{\frac{1+\cosh|x|}{2}} = \arg\cosh\cosh\left(\frac{|x|}{2}\right) = \frac{|x|}{2}.$$

On a

$$\begin{array}{rcl} \arg\sinh(2x\sqrt{1+x^2}) & = & \ln(2x\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+4x^2(1+x^2)}) \\ & = & \ln(2x^2+1+2x\sqrt{1+x^2}), \\ \arg\tanh\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right) & = & \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+\frac{x^2-1}{x^2+1}}{1-\frac{x^2-1}{x^2+1}}\right) \\ & = & \dfrac{1}{2}\ln(x^2) = \ln x. \end{array}$$

Exercice 51 *Exprimer* $\cosh^5 x$ *et* $\sinh^5 x$ *en fonction de* $\sinh(px)$ *et* $\cosh(px)$ $(0 \leq p \leq 5)$.

Solution - D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$\begin{array}{rcl}
\cosh^5 x & = & \frac{1}{32}(e^x + e^{-x})^5 \\
& = & \frac{1}{32}\left(e^{5x} + C_5^1 e^{4x}e^{-x} + C_5^2 e^{3x}e^{-2x} + C_5^3 e^{2x}e^{-3x} + C_5^4 e^x e^{-4x} + e^{-5x}\right) \\
& = & \frac{1}{32}\left(e^{5x} + e^{-5x} + 5(e^{3x} + e^{-3x}) + 10(e^x + e^{-x})\right) \\
& = & \frac{1}{16}\cosh(5x) + \frac{5}{16}\cosh(3x) + \frac{5}{8}\cosh(x). \\
\sinh^5 x & = & \frac{1}{32}(e^x - e^{-x})^5 \\
& = & \frac{1}{32}\left(e^{5x} - C_5^1 e^{4x}e^{-x} + C_5^2 e^{3x}e^{-2x} - C_5^3 e^{2x}e^{-3x} + C_5^4 e^x e^{-4x} - e^{-5x}\right) \\
& = & \frac{1}{32}\left(e^{5x} - e^{-5x} - 5(e^{3x} - e^{-3x}) + 10(e^x - e^{-x})\right) \\
& = & \frac{1}{16}\sinh(5x) - \frac{5}{16}\sinh(3x) + \frac{5}{8}\sinh(x).
\end{array}$$

Exercice 52 *Vérifier l'égalité :*

$$2 \arg\tanh(\tan x) = \arg\tanh(\sin(2x)).$$

Solution - On a

$$\sin(2x) = \frac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$$

et donc

$$\begin{array}{rcl}
\arg\tanh(\sin(2x)) & = & \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}}{1 - \frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}}\right) \\
& = & \frac{1}{2}\ln\left(\frac{(1 + \tan x)^2}{(1 - \tan x)^2}\right) \\
& = & \ln\left(\frac{1 + \tan x}{1 + \tan x}\right) \\
& = & 2 \arg\tanh(\tan x).
\end{array}$$

Chapitre 5

Comparaison locale des fonctions et développements limités

Dans tout ce chapitre J désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

5.1 Comparaison locale des fonctions

Dans cette section, si $a \in J$ quand $J =]-\infty, +\infty[$, $J =]-\infty, b[$ ou $J =]b, +\infty[$ on autorisera $a = \pm\infty$.

Au voisinage de 0, la quantité $(0.001)^{100}$ est plus petite que la quantité $(0.001)^{10}$ et ceci à cause du fait que la fonction $f(x) = x^{100}$ est, au voisinage de 0, plus petite que la fonction $g(x) = x^{10}$ car

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \longrightarrow 0} x^{90} = 0.$$

Par contre, au voisinage de $+\infty$, c'est l'inverse qui se produit, la fonction $g(x) = x^{10}$ est négligeable devant la fonction $f(x) = x^{100}$ car

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} x^{-90} = 0.$$

Ces remarques nous amènent à poser la définition suivante :

Définition 15 *Soient $f, g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in J$ (a peut être infini). On dit que "$f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ au voisinage de a" et on notera $f(x) = o_a(g(x))$ si et seulement si*

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

La notation $f(x) = o_a(g(x))$ se lit "$f(x)$ est un petit o de $g(x)$ au voisinage de a".
Exemple - On a les relations, pour tout $\alpha > 0$,

$$x^4 = o_0(x^3),\ x = o_0(\sqrt{x}),\ \ln x = o_{+\infty}(x^\alpha) \text{ et } x^\alpha = o_{+\infty}(e^x).$$

La recherche d'un équivalent d'une fonction au voisinage d'un point a pour objectif d'avoir une idée de l'ordre de grandeur de cette fonction au voisinage de ce point.

Définition 16 *Soient $f, g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in J$ (a peut être infini). On dit que f est équivalente à g en a et on note $f \sim_a g$ si et seulement si*

$$\lim_{x \longrightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Exemple - On a

$$\sin x \sim_0 x,\ \ \ln(x+1) \sim_0 x \ \text{ et } \ \sqrt{x^2+x+1} \sim_{+\infty} x.$$

Proposition 28 *Soient $f, g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in J$ (a peut être infini). Alors :*

1. *$f \sim_a f$,*
2. *$f \sim_a g$ implique que $g \sim_a f$,*
3. *$f \sim_a g$ et $g \sim_a h$ impliquent $f \sim_a h$,*
4. *Si $f \sim_a g$ et $h \sim_a k$ alors $fh \sim_a gk$,*
5. *Si $f \sim_a g$ alors $\frac{1}{f} \sim_a \frac{1}{g}$,*
6. *Si $f(x) = o_a(g(x))$ et $g \sim_a h$ alors $f(x) = o_a(h(x))$,*
7. *Si $f \sim_a g$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow b} u(x) = a$ alors $f \circ u \sim_b g \circ u$.*

5.2 Développements limités d'une fonction en un point

5.2.1 Définition et premières propriétés

Dans cette section a désigne un réel fini et $n \in \mathbb{N}$.

Définition 17 *Soit $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in J$. On dit que f admet un développement limité en a à l'ordre n et on note DL_a^n, s'il existe $n+1$ réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que quand x tend vers a*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + o_a\left((x-a)^n\right).$$

La fonction polynomiale, définie par

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n,$$

s'appelle la partie régulière du développement limité.

Remarques -

1. **Si f est continue en a alors DL_a^0 existe et on a, au voisinage de a,**
$$f(x) = f(a) + o_a(1),$$
et inversement si DL_a^0 existe alors f est continue en a et $a_0 = f(a)$.
2. **Si f est dérivable en a alors DL_a^1 existe et on a, au voisinage de a,**
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o_a((x-a)),$$
et inversement si DL_a^1 existe alors f est dérivable en a et $f'(a) = a_1$.

Proposition 29 *On suppose que f admet un DL_a^n donné par*

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + o_a\left((x-a)^n\right).$$

Alors :

1. *La partie régulière $P_n(x)$ est unique.*
2. *Pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, f admet un DL_a^k dont la partie régulière est*
$$P_k(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_k(x-a)^k.$$
On dira que $P_k(x)$ est obtenue par en tronquant $P_n(x)$ à l'ordre k.
3. *Si $a = 0$ et f est paire alors $a_{2p+1} = 0$ pour tout p tel que $0 \leq 2p+1 \leq n$.*
4. *Si $a = 0$ et f est impaire alors $a_{2p} = 0$ pour tout p tel que $0 \leq 2p \leq n$.*

Soit P un polynôme à coefficient réels de dégré n. La formule de Taylor établie dans le cours d'algèbre est donnée par

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{5.1}$$

Le théorème suivant généralise cette formule et assure l'existence des développements limités à tout ordre des fonctions usuelles.

Théorème 17 (**Formule de Taylor-Young**) *Soit $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in J$. Si f est n-fois dérivable sur J et $n+1$-fois dérivable en a alors DL_a^n existe et est donné par la formule de Taylor-Young*

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o_a((x-a)^n).$$

Exemple - On considère la fonction $f(x) = \sqrt{x^2+1}$. Cette fonction vérifie les hypothèses du théorème 17 pour $n = 2$ et admet donc un DL_0^2 que nous allons calculer. On a

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad \textbf{et} \quad f''(x) = \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ainsi $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ et $f''(0) = 1$ et donc, au voisinage de 0,

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2).$$

Remarque - La réciproque du théorème 17 est fausse. Il existe des fonctions qui ont un développement limité à l'ordre 2 en 0 sans qu'elles soient deux fois dérivable en 0 (voir exercice 57).

En pratique, on utilise rarement la formule de Taylor-Young. Les techniques classiques du calcul des développements limités vont être exposées dans la suite. Elles reposent toutes sur la connaissance des développements limités en 0 des fonctions usuelles. La liste de ces développements limités est donnée à la fin du chapitre.

Toutes le formules de développements limités utilisées jusqu'à la fin de ce chapitre sont tirées de cette liste.

5.2.2 Opérations élémentaires sur les développements limités

1. **Somme de deux DL.** Si f et g admettent un DL_a^n avec

   $$f(x) = P_n(x) + o_a((x-a)^n) \quad \text{et} \quad g(x) = Q_n(x) + o_a((x-a)^n),$$

   alors $f + g$ admet un DL_a^n donné par

   $$f(x) + g(x) = P_n(x) + Q_n(x) + o_a((x-a)^n).$$

   Exemple - On a

   $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o_0(x^3) \quad \textbf{et} \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o_0(x^3).$$

Donc
$$e^x + \frac{1}{1-x} = 2 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{6}x^3 + o_0(x^3).$$

2. **Produit de deux** DL**.** Si f et g admettent un DL_a^n avec
$$f(x) = P_n(x) + o_a((x-a)^n) \quad \text{et} \quad g(x) = Q_n(x) + o_a((x-a)^n),$$
alors fg admet un DL_a^n donné par
$$f(x) + g(x) = R_n(x) + o_a((x-a)^n),$$
où $R_n(x)$ est obtenu en tronquant $P_n(x)Q_n(x)$ à l'ordre n.
Exemple - On a
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o_0(x^3) \quad \textbf{et} \quad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o_0(x^3).$$
On a
$$\begin{aligned} (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3})(1 - x + x^2 - x^3) &= x - x^2 + x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} + o_0(x^3) \\ &= x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + o_0(x^3). \end{aligned}$$
Donc
$$\frac{\ln(x+1)}{1+x} = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + o_0(x^3).$$

3. **Quotient de deux** DL**.** Si $g(a) \neq 0$ et si f et g admettent un DL_a^n avec
$$f(x) = P_n(x) + o_a((x-a)^n) \quad \text{et} \quad g(x) = Q_n(x) + o_a((x-a)^n),$$
alors $\frac{f}{g}$ admet un DL_a^n donné par
$$f(x) + g(x) = R_n(x) + o_a((x-a)^n),$$
où $R_n(x)$ est le quotient de la division suivant les puissances croissantes à l'ordre n de $P_n(x)$ par $Q_n(x)$.
Exemple - Nous allons calculer le DL_0^3 **de** $\frac{1+2x+3x^3}{1+x+2x^2}$**. Effectuons la division suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre 3 de** $1 + 2x + 3x^3$ **par** $1 + x + 2x^2$**. On a**

$$
\begin{array}{l|l}
1+2x+3x^3 & \underline{1+x+2x^2} \\
\underline{1+x+2x^2} & 1+x-3x^2+4x^3 \\
\qquad x-2x^2+3x^3 & \\
\quad \underline{x+x^2+2x^3} & \\
\qquad -3x^2+x^3 & \\
\qquad \underline{-3x^2-3x^3-6x^4} & \\
\qquad\qquad\qquad 4x^3+6x^4 & \\
\qquad\qquad\qquad \underline{4x^3+4x^4+8x^5} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 2x^4-8x^5 &
\end{array}
$$

On déduit alors que

$$1+2x+3x^3=(1+x+2x^2)(1+x-3x^2+4x^3)+2x^4(1-2x)$$

et donc

$$\frac{1+2x+3x^3}{1+x+2x^2}=1+x-3x^2+4x^3+o_0(x^3).$$

4. **Composition de deux** DL**.** Si $f(a)=0$ et si f admet un DL_a^n de partie régulière $P_n(x)$ et g admet un DL_0^n de partie régulière $Q_n(x)$ alors $g\circ f$ admet un DL_a^n de partie régulière $R_n(x)$ obtenue en tronquant $Q_n\circ P_n(x)$ à l'ordre n.
Exemple - Nous allons calculer le DL_0^3 **de** $e^{\sin x}$**. On a**

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o_0(x^3) \quad \textbf{et} \quad \sin x=x-\frac{x^3}{6}+o_0(x^3).$$

Puisque $\sin 0=0$**,** DL_0^3 **de** $e^{\sin x}$ **a un sens et en posant** $u=x-\frac{x^3}{6}$**, on a**

$$
\begin{aligned}
1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6} &= 1+x-\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o_0(x^3)\\
&= 1+x+\frac{1}{2}x^2+o(x^3).
\end{aligned}
$$

Donc DL_0^3 **est donné par**

$$e^{\sin x}=1+x+\frac{1}{2}x^2+o_0(x^3).$$

5. **Dérivation d'un** DL**.** Si f admet un DL_a^n de partie régulière $P_n(x)$ et f' admet un DL_0^{n-1} de partie régulière $Q_{n-1}(x)$ alors

$$Q_{n-1}(x)=P_n'(x).$$

Exemple - Nous allons calculer le DL_0^4 de $\frac{1}{(1+x)^2}$. Cette fonction est C^∞ et donc admet un DL_0^4 en vertu du théorème 17. D'un autre côté, cette fonction est la dérivée de $-\frac{1}{x+1}$. Or

$$-\frac{1}{1+x} = -1 + x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 + o_0(x^5)$$

et donc, en dérivant, on obtient

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 + o_0(x^4).$$

Remarque - En général, f peut admettre un DL_a^n sans que f' admette un DL_a^{n-1} (Voir exercice 57).

6. **Primitivation d'un DL.** Si f admet un DL_a^n donné par

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + o_a\left((x-a)^n\right),$$

alors la primitive de f qui s'annule en a donnée par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ admet un DL_a^{n+1} donné par

$$F(x) = a_0(x-a) + a_1\frac{(x-a)^2}{2} + \ldots + a_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + o_a((x-a)^{n+1}).$$

Exemple - Nous avons

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o_0(x^4).$$

On déduit alors que

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + o_0(x^5). \tag{5.2}$$

5.3 Applications des développements limités

5.3.1 Calcul des limites

Le calcul des développement limités est un outil puissant pour trouver des équivalents de fonctions compliquées et ainsi calculer leurs limites.
Exemple - Nous allons calculer

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x} - x}{(\arctan x)^3}.$$

Pour cela nous allons effectuer un DL_0^3 de l'expression ci-dessus. D'après les formules classiques du développement limité (voir liste), on a

$$\begin{array}{rcl} \tan x &=& x + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^3), \\ \sqrt{1+u} &=& 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 + o_0(u^3), \\ \sqrt{1-u} &=& 1 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 - \frac{1}{16}u^3 + o_0(u^3). \end{array}$$

En posant $u = x + \frac{1}{3}x^3$ **et en effectuant les calculs on obtient**

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{1+\tan x} &=& 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{11}{48}x^3 + o_0(x^3), \\ \sqrt{1-\tan x} &=& 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{11}{48}x^3 + o_0(x^3). \end{array}$$

Donc

$$\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x} - x = \frac{11}{24}x^3 + o_0(x^3).$$

D'un autre côté, d'après (5.2), $\arctan x = x - \frac{1}{2}x^3 + o_0(x^3)$ **et donc**

$$(\arctan x)^3 = x^3 + o_0(x^3).$$

Donc

$$\frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x} - x}{(\arctan x)^3} \sim_0 \frac{11}{24},$$

et finalement

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x} - x}{(\arctan x)^3} = \frac{11}{24}.$$

5.3.2 Développement asymptotique

Définition 18 *1. Soit f une fonction définie sur un intervalle J sauf peut être en un point $a \in J$ et soit $n \in \mathbb{Z}$. On dit que f admet un développement asymptotique en a à l'ordre n s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que la fonction $g(x) = (x-a)^p f(x)$ admet un DL_a^{n+p}.*

2. Soit f une fonction définie sur $]x_0, +\infty[$ (resp. $]-\infty, x_0[$). On dit que f admet une développement asymptotique en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si la fonction $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un développement asymptotique en 0.

Exemples -

1. **Nous allons calculer le développement asymptotique à l'ordre 3 en 0 de la fonction** $f(x) = \frac{1+3x+x^4}{x^3-x^5}$**. Puisque**

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + o_0(x^6),$$

on déduit que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^3}\frac{1+3x+x^4}{1-x^2} \\ &= \frac{1}{x^3}\left(1+3x+x^4)(1+x^2+x^4+x^6+o_0(x^6)\right) \\ &= \frac{1}{x^3}\left(1+3x+x^2+3x^3+2x^4+3x^5+2x^6+o_0(x^6)\right) \\ &= \frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x}+3+2x+3x^2+2x^3+o_0(x^3). \end{aligned}$$

2. **Nous allons calculer le développement asymptotique en** $\pm\infty$ **à l'ordre 3 de la fonction** $f(x) = \frac{x^2+2x+3}{x^2+x+1}$**. On a**

$$f(x) = \frac{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})}{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})} = \frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1+2u+3u^2}{1+u+u^2},$$

avec $u = \frac{1}{x}$**. Maintenant,**

$$\begin{aligned} \frac{1+2u+3u^2}{1+u+u^2} &= (1+2u+3u^2)\left(1-u-u^2+(u+u^2)^2-(u+u^2)^3\right) \\ &\quad +o_0(u^3) \\ &= (1+2u+3u^2)\left(1-u-u^2+u^2+2u^3-u^3\right)+o_0(u^3) \\ &= (1+2u+3u^2)\left(1-u+u^3\right)+o_0(u^3) \\ &= 1+u+u^2-2u^3+o_0(u^3). \end{aligned}$$

Finalement

$$f(x) = 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}+o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Les développements asymptotiques en $\pm\infty$ sont très utiles dans l'étude des asymptotes d'un graphe d'une fonction et de la position de ce graphe par rapport à son asymptote.

Exemple - Considérons la fonction $g(x) = x\ln f(x)$ **où** $f(x) = \frac{x^2+2x+3}{x^2+x+1}$ **est la fonction étudiée dans l'exemple précédent. Nous avons vu que**

$$f(x) = 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}+o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

ou encore

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

D'un autre côté, en 0 **on a**

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o_0(u^2).$$

En posant $u = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ **et en faisant les calculs, on déduit que**

$$\ln\left(\frac{x^2+2x+3}{x^2+x+1}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

soit

$$g(x) = 1 + \frac{1}{2x} + o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right).$$

On déduit donc que

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} g(x) - 1 = 0$$

et donc la droite $y = 1$ **est asymptote au graphe de** g **en** $\pm\infty$**. Puisque**

$$g(x) - 1 = \frac{1}{2x} + o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2} + x o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

et $\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} x o_{\pm\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$**, on déduit que le graphe est au dessous de son asymptote en** $-\infty$ **et au dessus de son asymptote en** $+\infty$**.**

5.4 Développements limités en 0 des fonctions usuelles

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + o_0(x^n),\\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o_0(x^n),\\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o_0(x^n),\\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o_0(x^n),\\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2p}}{2p!} + o_0(x^{2p+1}),\\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o_0(x^{2p+2}),\\
\tanh x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o_0(x^8),\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^p\frac{x^{2p}}{2p!} + o_0(x^{2p+1}),\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o_0(x^{2p+2}),\\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o_0(x^8),\\
(1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\\
&\quad + o_0(x^n),\\
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \frac{7}{256}x^5 + o_0(x^5).
\end{aligned}
$$

5.5 Exercices corrigés

Exercice 53 *1. Pour tout $x \in]0,1[$ on pose*

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x\ln x,\ f_2(x) = \ln(1+x),\ f_3(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}, \\ f_4(x) &= \frac{x^3}{\ln x},\ f_5(x) = e^{\frac{1}{\ln x}}. \end{aligned}$$

Montrer que

$$\begin{aligned} f_4(x) &= o_0(f_2(x)),\ f_2(x) = o_0(f_1(x)),\ f_1(x) = o_0(f_5(x)), \\ f_5(x) &= o_0(f_3(x)). \end{aligned}$$

2. Pour tout $x \in]1,+\infty[$ on pose

$$\begin{aligned} g_1(x) &= x\ln x,\ g_2(x) = \ln(1+x),\ g_3(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}, \\ g_4(x) &= \frac{x^3}{\ln x},\ g_5(x) = e^{\frac{1}{\ln x}}. \end{aligned}$$

Montrer que

$$\begin{aligned} g_5(x) &= o_{+\infty}(g_2(x)),\ g_2(x) = o_{+\infty}(g_1(x)),\ g_1(x) = o_{+\infty}(g_3(x)), \\ g_3(x) &= o_{+\infty}(g_4(x)). \end{aligned}$$

Solution -

1. (a) On a
$$\frac{f_4(x)}{f_2(x)} = \frac{x^3}{\ln x \ln(x+1)}.$$
Or $\ln(x+1) \sim_0 x$ et donc $\frac{f_4(x)}{f_2(x)} \sim_0 \frac{x^2}{\ln x}$ et par suite
$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{f_4(x)}{f_2(x)} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^2}{\ln x} = 0,$$
ce qui montre que $f_4(x) = o_0(f_2(x))$.

   (b) On a
$$\frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \frac{\ln(1+x)}{x\ln x}.$$
Or $\ln(x+1) \sim_0 x$ et donc $\frac{f_2(x)}{f_1(x)} \sim_0 \frac{1}{\ln x}$ et par suite
$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{1}{\ln x} = 0,$$
ce qui montre que $f_2(x) = o_0(f_1(x))$.

(c) On a

$$\frac{f_1(x)}{f_5(x)} = x\ln x e^{-\frac{1}{\ln x}}.$$

Or $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{\ln x}} = e^0 = 1$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} x\ln x = 0$ et par suite

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{f_1(x)}{f_5(x)} = 0,$$

ce qui montre que $f_1(x) = o_0(f_5(x))$.

(d) On a

$$\frac{f_5(x)}{f_3(x)} = \frac{e^{\frac{1}{\ln x}}}{x^2 e^{\frac{1}{x}}}.$$

Or $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} e^{\frac{1}{\ln x}} = e^0 = 1$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}} = +\infty$ et par suite

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{f_5(x)}{f_3(x)} = 0,$$

ce qui montre que $f_5(x) = o_0(f_3(x))$.

2. (a) On a

$$\frac{g_5(x)}{g_2(x)} = \frac{e^{\frac{1}{\ln x}}}{\ln(x+1)}.$$

Or $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} e^{\frac{1}{\ln x}} = e^0 = 1$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \ln(x+1) = +\infty$ et par suite

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{g_5(x)}{g_2(x)} = 0,$$

ce qui montre que $g_5(x) = o_{+\infty}(g_2(x))$.

(b) On a

$$\frac{g_2(x)}{g_1(x)} = \frac{\ln(x+1)}{x\ln x} = \frac{\ln(x+1)}{(x+1)}\frac{(x+1)}{x\ln x} = \frac{\ln(x+1)}{x+1}\left(\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{x\ln x}\right).$$

Or $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{(x+1)} = 0$, $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$ et $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \frac{1}{x\ln x} = 0$ et par suite

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} \frac{g_2(x)}{g_1(x)} = 0,$$

ce qui montre que $g_2(x) = o_{+\infty}(g_1(x))$.

(c) On a

$$\frac{g_1(x)}{g_3(x)} = \frac{x\ln x}{x^2 e^{\frac{1}{x}}} = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}.$$

Or $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}} = 1$ et par suite

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{g_1(x)}{g_3(x)} = 0,$$

ce qui montre que $g_1(x) = o_{+\infty}(g_3(x))$.

(d) Enfin,

$$\frac{g_3(x)}{g_4(x)} = \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}}}{\frac{x^3}{\ln x}} = \frac{\ln x}{x} e^{\frac{1}{x}}.$$

$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x\longrightarrow+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ et par suite

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{g_3(x)}{g_4(x)} = 0,$$

ce qui montre que $g_3(x) = o_{+\infty}(g_4(x))$.

Exercice 54 *En utilisant les équivalents classiques, calculer les limites suivantes :*

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{(1-\cos x)\arctan x}{\sinh x \sin x \tan x},\ \lim_{x\longrightarrow 0} (\sin x + 1)^{\frac{1}{x}},\ \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))},\ \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x\sin(x-1)}{x^3-1}.$$

Solution -

1. On a

$$1-\cos x \sim_0 \frac{x^2}{2},\ \arctan x \sim_0 x,\ \sinh x \sim_0 x,\ \sin x \sim_0 x,\ \tan x \sim_0 x.$$

En vertu de la proposition 28, on déduit que

$$(1-\cos x)\arctan x \sim_0 \frac{x^3}{2} \quad \text{et} \quad \sinh x \sin x \tan x \sim_0 x^3,$$

puis

$$\frac{(1-\cos x)\arctan x}{\sinh x \sin x \tan x} \sim_0 \frac{\frac{x^3}{2}}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

Finalement,

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{(1-\cos x)\arctan x}{\sinh x \sin x \tan x} = \frac{1}{2}.$$

2. On a, pour $x \neq 0$,
$$(\sin x + 1)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(\sin x+1)}.$$
Or
$$\ln(\sin x + 1) \sim_0 \sin x \quad \text{et} \quad \sin x \sim_0 x$$
et par transitivité
$$\ln(\sin x + 1) \sim_0 x.$$
Par suite, en vertu de la proposition 28,
$$\frac{1}{x}\ln(\sin x + 1) \sim_0 \frac{x}{x} = 1.$$
On déduit alors que
$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{x}\ln(\sin x + 1) = 1,$$
et par continuité de l'exponentielle
$$\lim_{x \longrightarrow 0} e^{\frac{1}{x}\ln(\sin x+1)} = e.$$
Finalement,
$$\lim_{x \longrightarrow 0} (\sin x + 1)^{\frac{1}{x}} = e.$$
3. On a $\ln(1+u) \sim_0 u$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \cos(ax) - 1 = 0$ et donc, d'après la proposition 28,
$$\ln(\cos(ax)) = \ln(1 + \cos(ax) - 1) \sim_0 \cos(ax) - 1.$$
Or $\cos(ax) - 1 \sim_0 -\frac{a^2x^2}{2}$ et par transitivité
$$\ln(\cos(ax)) \sim_0 -\frac{a^2x^2}{2}.$$
Un raisonnement analogue donne $\ln(\cos(bx)) \sim_0 -\frac{b^2x^2}{2}$ et en vertu de la proposition 28, on obtient
$$\frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))} \sim_0 \frac{-\frac{a^2x^2}{2}}{-\frac{b^2x^2}{2}} = \frac{a^2}{b^2}.$$
Finalement,
$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))} = \frac{a^2}{b^2}.$$
Nous avons déjà calculé cette limite en utilisant la règle de l'Hôpital dans l'exercice 39.

4. On a

$$\sin(x-1) \sim_1 (x-1) \quad \text{et} \quad x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1) \sim_1 3(x-1),$$

et par suite, en vertu de la proposition 28,

$$\frac{x\sin(x-1)}{x^3-1} \sim_1 \frac{x(x-1)}{3(x-1)} = \frac{x}{3},$$

et donc

$$\lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x\sin(x-1)}{x^3-1} = \frac{1}{3}.$$

Exercice 55 *Calculer les développement limités suivants :*

$$DL_1^4: \quad xe^{-2x}, \quad DL_2^3: \quad \ln(x^2+x-4),$$
$$DL_{-1}^4: \quad x\ln(x+3), \quad DL_0^3: \quad \frac{\sqrt{\sin x + 1}}{1+x+x^2}.$$

Solution - Pour les formules utilisées dans cet exercice, le lecteur peut consulter le paragraphe 5.4 de ce chapitre.

1. On pose $u = x - 1$ et on écrit

$$xe^{-2x} = (u+1)e^{-2(u+1)} = e^{-2}(u+1)e^{-2u}.$$

Quand x tend vers 1, u tend vers 0. Calculons alors DL_0^4 de

$$e^{-2}(u+1)e^{-2u}.$$

En utilisant le développement limité de e^x en 0, on obtient

$$\begin{aligned} e^{-2u} &= 1 + (-2u) + \frac{1}{2}(-2u)^2 + \frac{1}{6}(-2u)^3 + \frac{1}{24}(-2u)^4 + o_0(u^4) \\ &= 1 - 2u + 2u^2 - \frac{4}{3}u^3 + \frac{2}{3}u^4 + o_0(u^4). \end{aligned}$$

En multipliant par $(1+u)$ et en tronquant les termes de degré supérieur où égal à 5, on obtient

$$\begin{aligned} (u+1)e^{-2u} &= 1 - 2u + 2u^2 - \frac{4}{3}u^3 + \frac{2}{3}u^4 + u - 2u^2 + 2u^3 - \frac{4}{3}u^4 \\ &\quad + o_0(u^4), \\ &= 1 - u + \frac{2}{3}u^3 - \frac{2}{3}u^4 + o_0(u^4). \end{aligned}$$

Finalement, le DL_1^4 de xe^{-2x} est donné par

$$xe^{-2x} = e^{-2}\left(1-(x-1)+\frac{2}{3}(x-1)^3-\frac{2}{3}(x-1)^4\right)+o_1((x-1)^4).$$

2. On pose $u = x-2$ et on écrit

$$\begin{aligned}\ln(x^2+x-4) &= \ln((u+2)^2+u+2-4) = \ln(u^2+5u+2)\\ &= \ln(2(1+\frac{u^2+5u}{2})) = \ln 2+\ln(1+\frac{u^2+5u}{2}).\end{aligned}$$

Quand x tend vers 2, u tend vers 0 et $\frac{u^2+5u}{2}$ tend vers 0. Calculons alors DL_0^3 de $\ln(1+\frac{u^2+5u}{2})$. En utilisant le développement limité en 0 de $\ln(1+x)$, on obtient

$$\begin{aligned}\ln(1+\frac{u^2+5u}{2}) &= \frac{u^2+5u}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{u^2+5u}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{u^2+5u}{2}\right)^3+o_0(u^3),\\ &= \frac{5}{2}u+\frac{1}{2}u^2-\frac{25}{8}u^2-\frac{5}{4}u^3+\frac{125}{24}u^3+o_0(u^3)\\ &= \frac{5}{2}u-\frac{21}{8}u^2+\frac{95}{24}u^3+o_0(u^3).\end{aligned}$$

Nous avons tronqué tous les termes de degrés supérieur où égal à 4. Finalement, le DL_2^3 de $\ln(x^2+x-4)$ est donné par

$$\ln(x^2+x-4) = \ln 2+\frac{5}{2}(x-2)-\frac{21}{8}(x-2)^2+\frac{95}{24}(x-2)^3+o_2((x-2)^3).$$

3. On pose $u = x+1$ et on écrit

$$\begin{aligned}x\ln(x+3) &= (u-1)\ln(u+2) = (u-1)\ln(2(1+\frac{u}{2}))\\ &= (u-1)\ln 2+(u-1)\ln(1+\frac{u}{2}).\end{aligned}$$

Quand x tend vers -1, u tend vers 0 et on obtient

$$\begin{aligned}\ln(1+\frac{u}{2}) &= \frac{u}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{u}{2}\right)^3-\frac{1}{4}\left(\frac{u}{2}\right)^4+o_0(u^4)\\ &= \frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+\frac{1}{24}u^3-\frac{1}{64}u^4+o_0(u^4).\end{aligned}$$

En multipliant par $u-1$ et en tronquant les termes de degrés supérieur où égal à 5, on obtient

$$\begin{aligned}(u-1)\ln(1+\frac{u}{2}) &= \frac{1}{2}u^2-\frac{1}{8}u^3+\frac{1}{24}u^4-\frac{1}{2}u+\frac{1}{8}u^2-\frac{1}{24}u^3\\ &\quad+\frac{1}{64}u^4+o_0(u^4),\\ &= -\frac{1}{2}u+\frac{5}{8}u^2-\frac{1}{6}u^3+\frac{11}{192}u^4+o_0(u^4),\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}(u-1)\ln 2+(u-1)\ln(1+\frac{u}{2}) &= -\ln 2+(\ln 2-\frac{1}{2})u+\frac{5}{8}u^2-\frac{1}{6}u^3\\ &\quad +\frac{11}{192}u^4+o_0(u^4).\end{aligned}$$

Finalement, le DL^4_{-1} de $x\ln(x+3)$ est donné par

$$\begin{aligned}x\ln(x+3) &= -\ln 2+(\ln 2-\frac{1}{2})(x+1)+\frac{5}{8}(x+1)^2-\frac{1}{6}(x+1)^3\\ &\quad +\frac{11}{192}(x+1)^4+o_{-1}((x+1)^4).\end{aligned}$$

4. En utilisant les formules classiques des développements limités, on obtient

$$\begin{aligned}\sin x &= x-\frac{x^3}{6}+o_0(x^3),\\ \sqrt{1+u} &= 1+\frac{1}{2}u-\frac{1}{8}u^2+\frac{1}{16}u^3+o_0(u^3),\\ \sqrt{1+\sin x} &= 1+\frac{1}{2}(x-\frac{x^3}{6})-\frac{1}{8}(x-\frac{x^3}{6})^2+\frac{1}{16}(x-\frac{x^3}{6})^3+o_0(x^3)\\ &= 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o_0(x^3)\\ &= 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{48}x^3+o_0(x^3),\\ \frac{1}{1+u} &= 1-u+u^2-u^3+o_0(u^3),\\ \frac{1}{1+x+x^2} &= 1-(x+x^2)+(x+x^2)^2-(x+x^2)^3+o_0(x^3)\\ &= 1-x-x^2+x^2+2x^3-x^3+o_0(x^3)\\ &= 1-x+x^3+o_0(x^3).\end{aligned}$$

En multipliant $(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{48}x^3)$ par $(1-x+x^3)$ et en tronquant les termes de degrés supérieur où égal à 4, on obtient

$$\frac{\sqrt{\sin x+1}}{1+x+x^2}=1-\frac{1}{2}-\frac{5}{8}x^2+\frac{53}{48}x^3+o_0(x^3).$$

Exercice 56 *Calculer les développements limités à l'ordre 4 en 0 des fonctions suivantes :*

$$\cosh(2x)\sinh(3x),\quad \tfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+\sin x}},\quad (1+x^2)^x,$$
$$(\cos x)^{1+\sin x},\quad \tfrac{1}{1-\tan x}-\tan(\tfrac{x}{1-x}).$$

Solution -

1. Les applications $x \mapsto \cosh x$ et $x \mapsto \sinh x$ possèdent des développements limités à l'ordre 4 donnés par
$$\cosh x = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o_0(x^4) \quad \text{et} \quad \sinh x = x+\frac{1}{6}x^3+o_0(x^4).$$
Par suite
$$\cosh(2x) = 1+2x^2+\frac{2}{3}x^4+o_0(x^4) \quad \text{et} \quad \sinh(3x) = 3x+\frac{9}{2}x^3+o_0(x^4).$$
En multipliant $(1+2x^2+\frac{2}{3}x^4)$ par $(3x+\frac{9}{2}x^3)$ et en tronquant les termes de degrés supérieur où égal à 5, on obtient
$$\cosh(2x)\sinh(3x) = 3x+\frac{21}{2}x^3+o_0(x^4).$$

2. On écrit
$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+\sin x}} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}(1+\sin x)^{-\frac{1}{2}}.$$
En utilisant les formules classiques du développement limité, on obtient
$$\begin{array}{rcl}
(1+u)^{\frac{1}{2}} & = & 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{128}x^4+o_0(x^4),\\
(1+x^2)^{\frac{1}{2}} & = & 1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o_0(x^4),\\
\sin x & = & x-\frac{1}{6}x^3+o_0(x^4),\\
(1+u)^{-\frac{1}{2}} & = & 1-\frac{1}{2}u+\frac{3}{8}u^2-\frac{5}{16}u^3+\frac{35}{128}u^4+o_0(u^4),\\
(1+\sin x)^{-\frac{1}{2}} & = & 1-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{6}x^3)+\frac{3}{8}(x-\frac{1}{6}x^3)^2-\frac{5}{16}(x-\frac{1}{6}x^3)^3\\
 & & +\frac{35}{128}(x-\frac{1}{6}x^3)^4+o_0(x^4)\\
 & = & 1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^3+\frac{3}{8}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{5}{16}x^3+\frac{35}{128}x^4+o_0(x^4)\\
 & = & 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{11}{48}x^3+\frac{19}{128}x^4+o_0(x^4).
\end{array}$$

En multipliant $(1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4)$ par $(1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{11}{48}x^3+\frac{19}{128}x^4)$ et en tronquant les termes de degrés supérieur où égal à 5, on obtient

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+\sin x}} = 1-\frac{1}{2}x+\frac{7}{8}x^2-\frac{23}{48}x^3+\frac{27}{128}x^4+o_0(x^4).$$

3. On écrit
$$(1+x^2)^x = e^{x\ln(1+x^2)}.$$
En utilisant les formules classiques du développement limité, on obtient
$$\begin{array}{rcl} \ln(1+u) & = & u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3-\frac{1}{4}u^4+o_0(u^4), \\ \ln(1+x^2) & = & x^2-\frac{1}{2}x^4+o_0(x^4), \\ x\ln(1+x^2) & = & x^3+o_0(x^4), \\ e^u & = & 1+u+\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{6}u^3+\frac{1}{24}u^4+o_0(u^4), \\ e^{x\ln(1+x^2)} & = & 1+x^3+o_0(x^4). \end{array}$$
Ainsi
$$(1+x^2)^x = 1+x^3+o_0(x^4).$$

4. On écrit
$$(\cos x)^{1+\sin x} = e^{(1+\sin x)\ln(\cos x)}.$$
En utilisant les formules classiques du développement limité, on obtient
$$\begin{array}{rcl} 1+\sin x & = & 1+x-\frac{1}{3}x^3+o_0(x^4), \\ \cos x & = & 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o_0(x^4), \\ \ln(1+u) & = & u-\frac{1}{2}u^2+\frac{1}{3}u^3-\frac{1}{4}u^4+o_0(u^4), \\ \ln(\cos x) & = & \ln(1+\cos x-1) \\ & = & (-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4)-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4)^2 \\ & & +\frac{1}{3}(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4)^3-\frac{1}{4}(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4)^4+o_0(x^4) \\ & = & -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{8}x^4+o_0(x^4) \\ & = & -\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4+o_0(x^4). \end{array}$$

En multipliant $1+x-\frac{1}{3}x^3$ par $-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4$ et en tronquant les termes de degrés supérieur où égal à 5, on obtient

$$(1+\sin x)\ln(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + o_0(x^4).$$

D'un autre côté,

$$e^u \quad = \quad 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{24}u^4 + o_0(u^4).$$

En remplaçant dans cette expression u par $-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{12}x^4$ et en tenant compte du fait que les termes de degrés supérieur où égal à 5 doivent être tronqués, on obtient

$$\begin{aligned} e^{(1+\sin x)\ln(\cos x)} &= 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{8}x^4 + o_0(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o_0(x^4). \end{aligned}$$

Finalement,

$$(\cos x)^{1+\sin x} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o_0(x^4).$$

5. En utilisant les formules classiques du développement limité, on obtient

$$\begin{aligned} \tan x &= x + \frac{1}{3}x^3 + o_0(x^4), \\ \frac{1}{1-u} &= 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + o(u^4), \\ \frac{1}{1-\tan x} &= 1 + x + \frac{1}{3}x^3 + (x+\frac{1}{3}x^3)^2 + (x+\frac{1}{3}x^3)^3 + (x+\frac{1}{3}x^3)^4 + o(x^4), \\ &= 1 + x + \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + x^3 + x^4 + o(x^4) \\ &= 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{5}{3}x^4 + o(x^4), \\ \frac{x}{1-x} &= x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4), \\ \tan\left(\frac{x}{1-x}\right) &= x + x^2 + x^3 + x^4 + \frac{1}{3}(x + x^2 + x^3 + x^4)^3 + o_0(x^4) \\ &= x + x^2 + x^3 + x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^4 \\ &= x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^4 + o_0(x^4). \end{aligned}$$

Finalement,

$$\frac{1}{1-\tan x} - \tan\left(\frac{x}{1-x}\right) = 1 - \frac{1}{3}x^4 + o_0(x^4).$$

Exercice 57 *On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par*

$$f(x) = 2 + 2x + x^3 \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad \textit{pour} \quad x \neq 0, \quad f(0) = 2.$$

1. *Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et possède donc un développement limité à l'ordre 1 que l'on écrira.*
2. *Montrer que f n'est pas deux fois dérivable en 0 mais possède un développement limité à l'ordre 2 en 0.*
3. *L'application f' possède-t-elle un développement limité en 0 à l'ordre 1 ?*

Solution -

1. Les fonction $x \mapsto 2 + 2x$, $x \longrightarrow x^3$, $x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. D'un autre côté,

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} 2 + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 2,$$

car $0 \leq \left|x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq x^2$. Il s'ensuit que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 2$ et donc f admet un développement limité d'ordre 1 en 0 donné par

$$f(x) = 2 + 2x + o_0(x).$$

2. Pour tout $x \neq 0$, on a

$$f'(x) = 2 + 3x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) + x \sin\left(\frac{1}{x}\right),$$

et donc

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \left(3x \cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Or $\left|3x\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 3|x|$ et donc $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} 3x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. D'un autre côté, $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'existe pas (Voir Exercice 33). En conclusion,

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x}$$

n'existe pas et donc f n'est pas deux fois dérivable en 0.
En outre,

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} = \lim_{x\longrightarrow 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

et donc $x^3\cos\left(\frac{1}{x}\right) = o_0(x^2)$. Ainsi, au voisinage de 0,

$$f(x) = 2 + 2x + o_0(x^2),$$

ce qui montre que f admet un DL_0^2 bien que f n'est pas deux fois dérivable en 0.

3. Si f' admet un DL_0^1 alors f' serait dérivable en 0, ce qui n'est pas vrai. En conclusion, f' n'admet pas de développement limité d'ordre 1 en 0 bien que f admet un DL_0^2.

Exercice 58 *1. (a) Ecrire le DL_0^6 des fonctions*

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \textit{et} \quad x \mapsto \frac{1}{1+x^2}.$$

(b) En déduire le DL_0^7 des fonctions

$$x \mapsto \arcsin x \quad \textit{et} \quad x \mapsto \arctan x.$$

(c) Utiliser ce qui précède pour calculer

$$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\arctan(\arcsin x) - \arcsin(\arctan x)}{x^7}.$$

2. Calculer le DL_0^4 de $\frac{1}{\cos^2 x}$ et en déduire le DL_0^5 de $\tan x$.

Solution -

1. (a) Pour calculer DL_0^6 de $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\frac{1}{1+x^2}$, il suffit de cacluler DL_0^3 de $\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ et $\frac{1}{1+u}$. En utilisant les formules classiques du développement limité, on obtient

$$\begin{aligned}(1-u)^{-\frac{1}{2}} &= 1+\frac{1}{2}u+\frac{3}{8}u^2+\frac{5}{16}u^3+o_0(u^3),\\ \frac{1}{1+u} &= 1-u+u^2-u^3+o_0(u^3).\end{aligned}$$

On déduit que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+o_0(x^6),\\ \frac{1}{1+x^2} &= 1-x^2+x^4-x^6+o_0(x^6).\end{aligned}$$

(b) Puisque $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$, on déduit en vertu de la règle du calcul du développement limité pour les primitives que

$$\begin{aligned}\arcsin x &= x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{112}x^7+o_0(x^7),\\ \arctan x &= x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+o_0(x^7).\end{aligned}$$

(c) Nous allons commencer par calculer DL_0^7 de

$$\arctan(\arcsin x)-\arcsin(\arctan x).$$

D'après la question précédente, on a

$$\arctan u = u-\frac{1}{3}u^3+\frac{1}{5}u^5-\frac{1}{7}u^7+o_0(u^7).$$

Posons

$$u = x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{112}x^7.$$

On a

$$\begin{aligned}u^2 &= x^2+\frac{1}{3}x^4+\frac{8}{45}x^6+o_0(x^7), \quad u^3 = x^3+\frac{1}{2}x^5+\frac{37}{120}x^7+o_0(x^7),\\ u^4 &= x^4+\frac{2}{3}x^6+o_0(x^7), \quad u^5 = x^5+\frac{5}{6}x^7+o_0(x^7),\\ u^6 &= x^6+o_0(x^7), \quad u^7 = x^7+o_0(x^7).\end{aligned}$$

On déduit alors que

$$\arctan(\arcsin x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{13}{120}x^5 - \frac{173}{5040}x^7 + o_0(x^7).$$

De même, on a

$$\arcsin u = u + \frac{1}{6}u^3 + \frac{3}{40}u^5 + \frac{5}{112}u^7 + o_0(u^7).$$

Posons

$$u = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7.$$

On a

$$\begin{aligned} u^2 &= x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{23}{45}x^6 + o_0(x^7), \quad u^3 = x^3 - x^5 + \frac{14}{15}x^7 + o_0(x^7), \\ u^4 &= x^4 - \frac{4}{3}x^6 + o_0(x^7), \quad u^5 = x^5 - \frac{5}{3}x^7 + o_0(x^7), \\ u^6 &= x^6 + o_0(x^7), \quad u^7 = x^7 + o_0(x^7). \end{aligned}$$

On déduit alors que

$$\arcsin(\arctan x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{13}{120}x^5 - \frac{341}{5040}x^7 + o_0(x^7).$$

On obtient alors que

$$\arctan(\arcsin x) - \arcsin(\arctan x) = \frac{1}{30}x^7 + o_0(x^7),$$

et donc

$$\begin{aligned} \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\arctan(\arcsin x) - \arcsin(\arctan x)}{x^7} &= \lim_{x\longrightarrow 0}\left(\frac{1}{30} + \frac{o_0(x^7)}{x^7}\right) \\ &= \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o_0(x^4), \\ \cos^2 x &= 1 - x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o_0(x^4), \\ \frac{1}{1-u} &= 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + o_0(u^4). \end{aligned}$$

En posant $u = x^2 - \frac{1}{3}x^4$, on déduit que

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o_0(x^4).$$

Or $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ et donc par primitivation, on déduit que

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o_0(x^5).$$

Exercice 59 *Calculer les développements limités en 0 à l'ordre 5 des fonctions* $(1+\sin x)^x$ *et* $(1+x)^{\sin x}$ *et en déduire*

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{(1+x)^{\sin x} - (1+\sin x)^x}{x^5}.$$

Solution -
On écrit

$$(1+\sin x)^x = e^{x\ln(1+\sin x)} \quad \text{et} \quad (1+x)^{\sin x} = e^{\sin x \ln(1+x)}.$$

En utilisant les formules classiques du développement limité, on obtient

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + o_0(x^4), \\
\ln(1+u) &= u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + o_0(u^4), \\
\ln(1+\sin x) &= x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}(x - \frac{1}{6}x^3)^2 + \frac{1}{3}(x - \frac{1}{6}x^3)^3 \\
&\quad -\frac{1}{4}(x - \frac{1}{6}x^3)^4 + o_0(x^4) \\
&= x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o_0(x^4) \\
&= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 + o_0(x^4), \\
x\ln(1+\sin x) &= x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{12}x^5 + o_0(x^5).
\end{aligned}$$

D'un autre côté,

$$e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{24}u^4 + \frac{1}{120}u^5 + o_0(u^5). \qquad (*)$$

En remplaçant, dans cette expression, u par $x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{5}{12}x^5$ et en tronquant les termes de degrés supérieur où égal à 6, on obtient

$$e^{x\ln(1+\sin x)} = 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{7}{12}x^5 + o_0(x^5).$$

De la même manière, on a

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5 + o_0(x^5), \\ \ln(1+x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 + o_0(x^5). \end{aligned}$$

En faisant le produit de $x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{120}x^5$ par $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$ tout en tronquant les termes de degrés supérieur où égal à 6, on obtient

$$\sin x \ln(1+x) = x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^5 + o_0(x^5).$$

En remplaçant, dans $(*)$, u par $x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{6}x^5$ et en tronquant les termes de degrés supérieur où égal à 6, on obtient

$$e^{\sin x\ln(1+x)} = 1 + x^2 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^5 + o_0(x^5).$$

En retranchant, on obtient

$$(1+\sin x)^x - (1+x)^{\sin x} = \frac{1}{12}x^5 + o_0(x^5),$$

et finalement,

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{(1+\sin x)^x - (1+x)^{\sin x}}{x^5} = \frac{1}{12}.$$

Exercice 60 *Calculer le développement asymptotique en 0 à l'ordre 3 des fonctions :*

$$\frac{1+x+3x^3}{x^3+x^5}, \qquad \frac{1}{x(\cos x - 1)} - \frac{1}{x^2}.$$

Solution -

1. On a
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + o_0(x^6).$$
En multipliant $1 - x^2 + x^4 - x^6$ par $1 + x + 3x^3$ et en tronquant les termes de degrés supérieur où égal à 7, on obtient
$$\frac{1+x+3x^3}{1+x^2} = 1 + x - x^2 + 2x^3 + x^4 - 2x^5 - x^6 + o_0(x^6).$$
En multipliant cette expression par $\frac{1}{x^3}$, on obtient
$$\frac{1+x+3x^3}{x^3+x^5} = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 2 + x - 2x^2 - x^3 + o_0(x^3).$$

2. On a
$$\begin{aligned} \cos x - 1 &= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{40320}x^8 + o_0(x^8), \\ x(\cos x - 1) &= -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{24}x^5 - \frac{1}{720}x^7 + \frac{1}{40320}x^9 + o_0(x^9), \\ \frac{1}{x(\cos x - 1)} &= -\frac{2}{x^3}\left(\frac{1}{1 - (\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{360}x^4 + \frac{1}{20160}x^6 + o_0(x^6))}\right). \end{aligned}$$
Or
$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 + o_0(u^6).$$
En remplaçant dans cette expression u par $\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{360}x^4 + \frac{1}{20160}x^6$ et en tronquant les termes de degrés supérieur où égal à 7, on obtient
$$\frac{1}{1 - (\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{360}x^4 + \frac{1}{20160}x^6 + o_0(x^6))} = 1 + \frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{240}x^4 + \frac{1}{6048}x^6 + o_0(x^6).$$
Finalement,
$$\frac{1}{x(\cos x - 1)} - \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{6x} - \frac{1}{120}x - \frac{1}{3024}x^3 + o_0(x^3).$$

Exercice 61 *Calculer le développement asymptotique en $+\infty$ à l'ordre 3 des fonctions :*
$$\ln\left(\frac{x^2+2x+3}{x^2+x+1}\right), \qquad \sqrt{x^4+x+1}, \qquad \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}.$$

Solution -

1. On écrit

$$\begin{aligned}\frac{x^2+2x+3}{x^2+x+1} &= \frac{x^2(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})}{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})} = \frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{1+2u+3u^2}{1+u+u^2} \qquad \text{avec} \quad u=\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Quand x tend vers $+\infty$, u tend vers 0. Ecrivons le DL_0^3 de $\frac{1+2u+3u^2}{1+u+u^2}$. On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+u+u^2} &= 1-u-u^2+(u+u^2)^2-(u+u^2)^3+o_0(u^3) \\ &= 1-u+u^3+o_0(u^3).\end{aligned}$$

En multipliant $1-u+u^3$ par $1+2u+3u^2$ et en tronquant les termes de degrés supérieur où égal à 4, on obtient

$$\frac{1+2u+3u^2}{1+u+u^2} = 1+u+u^2-2u^3+o_0(u^3).$$

D'un autre côté,

$$\ln(1+v) = v-\frac{1}{2}v^2+\frac{1}{3}v^3+o_0(v^3).$$

En remplaçant, dans cette expression, v par $u+u^2-2u^3$ et en tronquant les termes de degrés supérieur où égal à 4, on obtient

$$\ln\left(\frac{1+2u+3u^2}{1+u+u^2}\right) = u+\frac{1}{2}u^2-\frac{8}{3}u^3+o_0(u^3).$$

Finalement, le développement asymptotique en $+\infty$ à l'ordre 3 de $\ln\left(\frac{x^2+2x+3}{x^2+x+1}\right)$ est donné par

$$\ln\left(\frac{x^2+2x+3}{x^2+x+1}\right) = \frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}-\frac{8}{3x^3}+o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

2. On écrit, pour $x>0$,

$$\begin{aligned}\sqrt{x^4+x+1} &= \sqrt{x^4(1+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4})} = x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}} \\ &= x^2\sqrt{1+u^3+u^4} \qquad \text{avec} \quad u=\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Quand x tend vers $+\infty$, u tend vers 0. Ecrivons le DL_0^5 de $\sqrt{1+u^3+u^4}$. On a

$$\sqrt{1+v} = 1 + \frac{1}{2}v - \frac{1}{8}v^2 + o_0(v^2).$$

En remplaçant, dans cette expression, v par u^3+u^4 et en tronquant les termes de degrés supérieur où égal à 6, on obtient

$$\sqrt{1+u^3+u^4} = 1 + \frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{2}u^4 + o_0(u^5).$$

Finalement,

$$\sqrt{x^4+x+1} = x^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

3. En posant $u = \frac{1}{x}$, on obtient

$$\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} = \sqrt{\frac{1+u}{1+2u}}.$$

Quand x tend vers $+\infty$, u tend vers 0. Ecrivons le DL_0^3 de $\sqrt{\frac{1+u}{1+2u}}$. On a

$$\frac{1}{1+2u} = 1 - 2u + 4u^2 - 8u^3 + o_0(u^3).$$

En multipliant $1-2u+4u^2-8u^3$ par $1+u$ et en tronquant les termes de degrés supérieur où égal à 4, on obtient

$$\frac{1+u}{1+2u} = 1 - u + 2u^2 - 4u^3 + o_0(u^3).$$

Maintenant,

$$\sqrt{1+v} = 1 + \frac{1}{2}v - \frac{1}{8}v^2 + \frac{1}{16}v^3 + o_0(v^3).$$

En remplaçant, dans cette expression, v par $-u+2u^2-4u^3$ et en tronquant les termes de degrés supérieur où égal à 4, on obtient

$$\sqrt{\frac{1+u}{1+2u}} = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{7}{8}u^2 - \frac{25}{16}u^3 + o_0(u^3).$$

Finalement,

$$\sqrt{\frac{x+1}{x+2}} = 1 - \frac{1}{2x} + \frac{7}{8x^2} - \frac{25}{16x^3} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Exercice 62 *Etudier la position du graphe de la fonction* $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ *par rapport à sa tangente au point* $(0,0)$.

Solution -

Posons $f(x) = \ln(1+x+x^2)$. On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ et donc $y = x$ est l'équation de la tangente à la courbe de f en $(0,0)$. Pour étudier la position de la courbe par rapport à sa tangente, nous allons étudier le signe de $f(x) - x$. Pour cela calculons le DL_0^2 de f. On a

$$\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + o_0(u^2).$$

En remplaçant, dans cette expression, u par $x+x^2$ et en tronquant les termes de degrés supérieur où égal à 3, on obtient

$$\ln(1+x+x^2) = x + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2).$$

On déduit alors que, pour $x \neq 0$,

$$f(x) - x = x^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{o_0(x^2)}{x^2} \right).$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{o_0(x^2)}{x^2}$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, donc il existe un $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]-\delta, \delta[$,

$$\frac{1}{2} + \frac{o_0(x^2)}{x^2} \geq 0.$$

Ainsi, pour tout $x \in]-\delta, \delta[$, $f(x) \geq x$ et donc le graphe est au dessus de sa tangente en $(0,0)$.

Exercice 63 *On considère les fonctions*

$$u(x) = \left(x^3 - 2x^2 + 1\right)^{\frac{1}{3}}, \quad v(x) = \sqrt{x^2+x+1} \quad et \quad f(x) = u(x) - v(x).$$

1. *Déterminer le domaine de définition de* f.
2. *Donner un équivalent de* f *en* $-\infty$ *et en déduire* $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$.

3. *Déterminer l'asymptote du graphe de f en $-\infty$. Donner la position du graphe par rapport à l'asymptote.*
4. *Faire la même étude en $+\infty$.*

Solution -

1. La racine cubique est définie sur $\mathbb{R}$ et donc u est définie sur $\mathbb{R}$. D'un autre côté, $x \in D_v$ si et seulement si $x^2+x+1 \geq 0$. Or le discriminant de x^2+x+1 est $\Delta = 1-4 = -3 < 0$ et donc $x^2+x+1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Finalement, le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$.
2. Pour déterminer un équivalent de f en $-\infty$, nous allons calculer le développement asymptotique de f en $-\infty$ à l'ordre 1. On a, pour $x < 0$,

$$\begin{aligned} u(x) &= \left(x^3-2x^2+1\right)^{\frac{1}{3}} = \left(x^3(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3})\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= x\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} = x\left(1-2u+u^3\right)^{\frac{1}{3}} \qquad \text{avec} \quad u=\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Quand x tend vers $-\infty$, u tend vers 0. Ecrivons le DL_0^2 de $(1-2u+u^3)^{\frac{1}{3}}$. On a

$$\begin{aligned} (1+v)^{\frac{1}{3}} &= 1+\frac{1}{3}v+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)v^2+o_0(v^2) \\ &= 1+\frac{1}{3}v-\frac{1}{9}v^2++o_0(v^2). \end{aligned}$$

En remplaçant, dans cette expression, v par $-2u+u^3$ et en tronquant les termes de degrés supérieur où égal à 3, on obtient

$$\left(1-2u+u^3\right)^{\frac{1}{3}} = 1-\frac{2}{3}u-\frac{4}{9}u^2+o_0(u^2),$$

et donc

$$u(x) = x-\frac{2}{3}-\frac{4}{9x}+o_{-\infty}\left(\frac{1}{x}\right).$$

D'un autre côté, pour $x < 0$,

$$\begin{aligned} v(x) &= \sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})} \\ &= |x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = -x\sqrt{1+u+u^2} \qquad \text{avec} \quad u=\frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Quand x tend vers $-\infty$, u tend vers 0. Ecrivons le DL_0^2 de $\sqrt{1+u+u^2}$. On a

$$\sqrt{1+v} = 1 + \frac{1}{2}v - \frac{1}{8}v^2 + o_0(v^2).$$

En remplaçant, dans cette expression, v par $u+u^2$ et en tronquant les termes de degrés supérieur où égal à 3, on obtient

$$\sqrt{1+u+u^2} = 1 + \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 + o_0(u^2),$$

et donc

$$v(x) = -x - \frac{1}{2} - \frac{3}{8x} + o_{-\infty}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Finalement,

$$f(x) = 2x - \frac{1}{6} - \frac{5}{72x} + o_{-\infty}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (*).$$

Ainsi $f(x) \sim_{-\infty} 2x - \frac{1}{6}$ et par suite

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

3. D'après la question précédente, on a

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} (f(x) - 2x + \frac{1}{6}) = 0,$$

et donc la droite d'équation $y = 2x - \frac{1}{6}$ est asymptote au graphe de f au voisinage de $-\infty$. En plus, en vertu de $(*)$, on a

$$f(x) - 2x + \frac{1}{6} = \frac{1}{x}\left(-\frac{5}{72} + x o_{-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Puisque $\lim_{x \longrightarrow -\infty} x o_{-\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, il existe $a < 0$ tel que pour tout $x < a$,

$$-\frac{5}{72} + x o_{-\infty}\left(\frac{1}{x}\right) < 0.$$

Ainsi, pour tout $x < a$,

$$f(x) - 2x + \frac{1}{6} > 0$$

et donc le graphe est au dessus de son asymptote.

4. Un calcul analogue à celui fait dans 2. permet de montrer que

$$u(x) = x - \frac{2}{3} - \frac{4}{9x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad v(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right),$$

et donc

$$f(x) = -\frac{7}{6} - \frac{59}{72x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right).$$

De cette relation, on déduit que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\dfrac{7}{6}$, $y = -\frac{7}{6}$ est asymptote et que le graphe est au dessous de son asymptote.

Chapitre 6

Intégrale de Riemann des fonctions continues par morceaux

6.1 L'intégrale de Riemann : définition et propriétés

L'intégrale de Riemann d'une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux mesure l'aire algébrique entre l'axe des x, le graphe de f et les droites $x = a$ et $x = b$. Cette intégrale se définit simplement pour les fonctions en escalier. Toute fonction continue par morceaux peut être approchée par des fonctions en escalier (voir théorème 18) et donc l'intégrale de Riemann peut être définie pour toute fonction continue par morceaux. La notion de convergence uniforme de suites de fonctions permet de définir ce qu'on entend par approcher une fonction.

6.1.1 Convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions

Dans ce paragraphe J désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 19 *Une suite de fonctions sur J est la donnée pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq n_0$ d'une fonction $f_n : J \longrightarrow \mathbb{R}$. Une telle suite sera notée $(f_n)_{n \geq n_0}$.*

Exemples -

1. **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \cos nx$ définit une suite de fonctions sur $\mathbb{R}$.**
2. **Pour tout $n \geq 1$, $f_n(x) = \frac{1}{x+n}$ définit une suite de fonctions sur $\mathbb{R}$.**

Définition 20 *Soit $(f_n)_{n \geq n_0}$ une suite de fonctions sur J et $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.*

1. *On dira que* $(f_n)_{n\geq n_0}$ *converge simplement vers* f *sur* J *si, pour tout* $x \in J$,
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = f(x).$$
2. *On dira que* $(f_n)_{n\geq n_0}$ *converge uniformément vers* f *sur* J *si la suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *définie par*
$$u_n = \sup_{x\in J} |f_n(x) - f(x)|,$$
vérifie
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0.$$

Remarque - Puisque, pour tout $x \in J$,
$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in J} |f_n(x) - f(x)|,$$
la convergence uniforme entraîne la convergence simple. La réciproque n'est pas vraie en général comme le montre l'exemple qui suit.

Exemples -

1. **On considère la suite de fonctions définies sur** $[0,1]$ **par** $f_n(x) = x^n$. **Pour tout** $x \in [0,1[$, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = 0$ **et** $\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(1) = 1$. **Donc** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement sur** $[0,1]$ **vers la fonction définie par** $f(x) = 0$ **pour** $x \in [0,1[$ **et** $f(1) = 1$.
D'un autre côté, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1,$$
et donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **ne converge pas uniformément vers** f **sur** $[0,1]$.
2. **On considère la suite de fonctions définies sur** $[0,1]$ **par**
$$f_n(x) = x^n(1-x).$$
Pour tout $x \in [0,1]$, $\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = 0$ **et donc** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement sur** $[0,1]$ **vers la fonction nulle.**
D'un autre côté, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x).$$
Or
$$f_n'(x) = nx^{n-1}(x-1) + x^n = x^{n-1}((n+1)x - n).$$

Donc f_n est croissante sur $[0, \frac{n}{n+1}]$ et décroissante sur $[\frac{n}{n+1}, 1]$ et donc

$$u_n = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{1}{n+1}\right).$$

Maintenant

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \quad = \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} e^{n\ln(\frac{n}{n+1})} = e^{-1},$$

car

$$n\ln(\frac{n}{n+1}) = n\ln(1-\frac{1}{n+1}) \sim -\frac{n}{n+1}.$$

On déduit alors que $\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0$ et donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.

6.1.2 Intégrale de Riemann d'une fonction en escalier

Définition 21 *Une subdivision de $[a,b]$ est une suite finie $(a_i)_{i=0}^{i=n}$ telle que*

$$a_0 = a < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b.$$

Définition 22 *On dira que f est une fonction en escalier sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $(a_i)_{i=0}^{i=n}$ de $[a,b]$ et des nombres réels $v_1,\ldots,v_n$ tels que pour tout $i = 1,\ldots,n$*

$$f(x) = v_i, \qquad \text{pour tout } x \in]a_{i-1}, a_i[.$$

L'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ sera noté $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$.

Exemples -

1. **Toute fonction constante est une fonction en escalier.**
2. **La fonction partie entière est une fonction en escalier sur tout $[a,b] \subset \mathbb{R}$.**

Proposition 30 *Soient $f, g \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $f+g$, fg et λf,*$\min(f,g)$*,* $\max(f,g)$*, $|f|$ appartiennent à $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$.*

La proposition suivante permet de définir l'intégrale de Riemann d'une fonction en escalier.

Proposition 31 *Soient* $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$, $(a_i)_{i=0}^{i=n}$ *une subdivision associée à* f *et* $v_1,\ldots,v_n$ *les valeurs prises par* f *sur* $]a_0,a_1[,\ldots,]a_{n-1},a_n[$. *Alors le nombre réel*

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})v_i$$

ne dépend pas de la subdivision associée à f.

Définition 23 *Soient* $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$, $(a_i)_{i=0}^{i=n}$ *une subdivision associée à* f *et* $v_1,\ldots,v_n$ *les valeurs prises par* f *sur* $]a_0,a_1[,\ldots,]a_{n-1},a_n[$. *L'intégrale de Riemann de* f *est le nombre réel*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})v_i.$$

Exemple - Si $f(x) = v$ **pour tout** $x \in [a,b]$ **alors**

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)v.$$

6.1.3 Intégrale de Riemann d'une fonction continue par morceaux

Définition 24 *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. *On dira que* f *est une fonction continue par morceaux sur* $[a,b]$ *s'il existe une subdivision* $(a_i)_{i=0}^{i=n}$ *de* $[a,b]$ *telle que, pour tout* $i = 1,\ldots,n$, f *est continue sur* $]a_{i-1},a_i[$, $\lim\limits_{x\longrightarrow a_{i-1}^+} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow a_i^-} f(x)$ *existent et sont finis.*

L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ *sera noté* $\mathcal{C}_m^0([a,b],\mathbb{R})$.

Exemples -

1. **Toute fonction continue sur** $[a,b]$ **est continue par morceaux sur** $[a,b]$**.**
2. **Toute fonction en escalier sur** $[a,b]$ **est continue par morceaux sur** $[a,b]$**. Ainsi** $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_m^0([a,b],\mathbb{R})$**.**
3. **La fonction définie sur** $[0,1]$ **par**

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \textbf{si} \quad x \in]0,\frac{1}{2}[\\ (x-\frac{1}{2})\sin\left(\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\right) & \textbf{si} \quad x \in]\frac{1}{2},1[\\ 0 & \textbf{si} \quad x = 2, \frac{1}{2}, \textbf{ ou } 1, \end{cases}$$

est continue par morceaux sur $[0,1]$ **car** f **est continue sur** $]0,\frac{1}{2}[$ **et** $]\frac{1}{2},1[$ **et**

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0, \\
\lim_{x\longrightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow \frac{1}{2}^-} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^{-4}, \\
\lim_{x\longrightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow \frac{1}{2}^+} (x-\frac{1}{2})\sin\left(\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\right) = 0, \\
\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow 1^-} (x-\frac{1}{2})\sin\left(\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\sin 2.
\end{aligned}$$

4. **La fonction définie sur** $[0,1]$ **par**

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2}} & \textbf{si} \quad x \in]0,\frac{1}{2}[\\ (x-\frac{1}{2})\sin\left(\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\right) & \textbf{si} \quad x \in]\frac{1}{2},1[\\ 0 & \textbf{si} \quad x = 2, \frac{1}{2}, \ \textbf{ou}\ 1, \end{cases}$$

n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$ **car**

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x^2}} = +\infty.$$

Proposition 32 *Une fonction continue par morceaux sur* $[a,b]$ *est bornée sur* $[a,b]$.

Proposition 33 *Soient* $f,g \in \mathcal{C}^0_m([a,b],\mathbb{R})$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Alors* $f+g$, fg *et* λf,$\min(f,g)$, $\max(f,g)$, $|f|$ *appartiennent à* $\mathcal{C}^0_m([a,b],\mathbb{R})$.

Le théorème suivant est à la base de l'existence de l'intégrale de Riemann pour une fonction continue par morceaux.

Théorème 18 *Soit* $f \in \mathcal{C}^0_m([a,b],\mathbb{R})$. *Alors :*

1. *Il existe une suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ *qui converge uniformément vers* f *sur* $[a,b]$.
2. *Pour toute suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ *qui converge uniformément vers* f *sur* $[a,b]$, $\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers un nombre qui ne dépend que de* f.

La définition suivante a un sens grâce au Théorème 18.

Définition 25 *Soit* $f \in \mathcal{C}_m^0([a,b],\mathbb{R})$*. L'intégrale de Riemann de* f *est le nombre*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x)dx,$$

où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite d'éléments de* $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ *qui converge uniformément vers* f *sur* $[a,b]$*.*

Les propriétés importantes de l'intégrale de Riemann sont regroupées dans le théorème suivant.

Théorème 19 *Soient* $f, g \in \mathcal{C}_m^0([a,b],\mathbb{R})$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Alors :*

1. $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ *et* $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$,
2. *Si pour tout* $x \in [a,b]$, $f(x) \geq 0$ *alors* $\int_a^b f(x)dx \geq 0$,
3. *Si pour tout* $x \in [a,b]$, $f(x) \geq g(x)$ *alors* $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$,
4. *Si pour tout* $x \in [a,b]$, $f(x) \leq M$ *alors* $\int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$,
5. $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.
6. *Pour toute suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *d'éléments de* $\mathcal{C}_m^0([a,b],\mathbb{R})$ *qui converge uniformément sur* $[a,b]$ *vers* $f \in \mathcal{C}_m^0([a,b],\mathbb{R})$*, la suite* $\left(\int_a^b f_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $\int_a^b f(x)dx$*.*

L'inégalité suivante est très utile dans la pratique.

Proposition 34 (**Inégalité de Cauchy-Schwarz.**) *Soient* $f, g \in \mathcal{C}_m^0([a,b],\mathbb{R})$*. Alors*

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b (f(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b (g(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Il est claire que la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = 0$ pour $x \in]0,1[$ et $f(0) = f(1) = 2$ vérifie $f \geq 0$, $\int_0^1 f(x)dx = 0$ et f n'est pas identiquement nulle. Par contre, pour une fonction continue, on a le résultat suivant.

Proposition 35 *Soit* f *une fonction continue sur* $[a,b]$*. Alors*

$$\left(f(x) \geq 0 \; \forall\, x \in [a,b] \quad et \quad \int_a^b f(x)dx = 0\right) \Rightarrow \forall\, x \in [a,b],\; f(x) = 0.$$

Proposition 36 (**Formule de la moyenne**) *Soient* f *une fonction continue sur* $[a,b]$*. Alors il existe* $c \in [a,b]$ *tel que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Si f est une fonction continue par morceaux sur un intervalle J. Posons, pour tout $a, b \in J$,

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad \text{si} \;\; a \geq b.$$

Proposition 37 (**Relation de Chasle**) *Soient f une fonction continue par morceaux sur un intervalle J. Alors, pour tous $a, b, c \in J$,*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Le résultat suivant est une conséquence du théorème 18 où les "sommes de Riemann" sont les intégrales de certaines suites particulières de fonctions en escalier qui approchent uniformément une fonction donnée et leur limite est l'intégrale de cette fonction. Les sommes de Riemann permettent de calculer simplement la limite de nombreuses suites.

Proposition 38 (**Sommes de Riemann**) *Soient f une fonction continue sur $[a, b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons*

$$u_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n}).$$

Alors la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente et

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \int_a^b f(x)dx.$$

Exemple - Pour illustrer cette proposition, nous allons l'utiliser pour calculer l'intégrale $\int_0^1 xdx$. On considère la fonction $f(x) = x$. Pour $a = 0$ et $b = 1$ la somme de Riemann associée à f est donnée par

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \overset{(1.14)}{=} \frac{n+1}{2n}.$$

Ainsi

$$\int_0^1 xdx = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

On retrouve un résultat qu'on connaît déjà.

6.2 Intégrales et primitives

Définition 26 *Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On appelle primitive de f toute fonction F définie sur I telle que*

$$\forall x \in I, \qquad F'(x) = f(x).$$

Remarque - Si F est une primitive de f, alors les autres primitives de f sont toutes de la forme $F + c$ où c est une constante.

Théorème 20 *Soit f une fonction continue sur un intervalle J et soit $a \in J$. Alors :*

1. *La fonction $F : J \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$
est une primitive de f.
2. *Pour toute primitive g de f et pour tout $a, b \in J$, on a*
$$\int_a^b f(x)dx = [g(x)]_a^b = g(b) - g(a).$$

Une liste des primitives usuelles sera donnée à la fin de ce chapitre. Nous allons donner quelques techniques pratiques pour le calcul intégrale.

Théorème 21 (**Formule de changement de variable**) *Soit u une fonction de classe C^1 sur un intervalle I. Soit f une fonction continue sur $u(I)$ et soient $a, b \in I$. Alors*

$$\int_a^b f(u(t))u'(t)dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt.$$

Exemple - En utilisant la formule de changement de variable, nous allons calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx$. Posons $u = \cos x$. On obtient $du = -\sin x dx$ et donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx = -\int_1^0 u^2 du = \int_0^1 u^2 du = \left[\frac{1}{3}u^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

La formule

$$(uv)' = u'v + uv'$$

est à l'origine de l'intégration par parties qui est une technique de calcul très efficace.

Théorème 22 (**Intégration par parties**) *Soient u, v deux fonctions de classe C^1 sur I et soient $a, b \in I$. Alors*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Exemple - En utilisant une intégration par parties, nous allons calculer $\int_1^2 x \ln x dx$. Posons $v'(x) = x$ et $u(x) = \ln x$. On obtient alors

$$\begin{aligned} \int_1^2 x \ln x dx &= \left[\frac{x^2}{2} \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} dx \\ &= 2 \ln 2 - \frac{1}{4}[x^2]_1^2 = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

6.3 Tableau des primitives usuelles

f	Intervalle	Primitive
$x^n, n \in \mathbb{N} \setminus -1$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\ln(\lvert x \rvert)$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus -1$	$\mathbb{R}^{*+}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin x$
$\tan x$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$	$\ln(\lvert \cos x \rvert)$
$\sinh x$	$\mathbb{R}$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\mathbb{R}$	$\sinh x$
$\dfrac{1}{x^2+1}$	$\mathbb{R}$	$\arctan x$

6.4 Exercices corrigés

Exercice 64 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$f_n(x) = \frac{1}{n}[nx],$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x.

1. *Montrer que f_n est une fonction en escalier sur $[0,1]$ et calculer $\int_0^1 f_n(x)dx$.*
2. (a) *Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on déterminera.*
   (b) *Montrer que la suite $(\int_0^1 f_n(x)dx)_{n\geq 1}$ est convergente et que*

$$\lim_{n\longrightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx.$$

Solution -

1. On considère la subdivision de $[0,1]$ donnée par

$$(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1).$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq k \leq n$ et soit $\frac{k-1}{n} < x < \frac{k}{n}$. On a

$$k - 1 < nx < k$$

et donc $[nx] = k - 1$. Par conséquent, pour tout $x \in]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}[$,

$$f_n(x) = \frac{k-1}{n},$$

et donc f_n est constante sur chaque intervalle $]\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}[$ pour $k = 1, \dots, n$, ce qui montre que f_n est une fonction en escalier. En plus,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f_n(x)dx &= \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \frac{k-1}{n} dx = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n} - \frac{k-1}{n}\right) \frac{k-1}{n} \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (k-1) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k \\
&\overset{(1.15)}{=} \frac{1}{n^2} \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{2n}.
\end{aligned}$$

(a) Pour tout $x \in [0,1]$, on a, d'après (1.5),

$$nx \leq [nx] < nx + 1$$

et donc

$$x \leq f_n(x) < x + \frac{1}{n}.$$

De cette double inégalité, on déduit que

$$0 \leq f_n(x) - x < \frac{1}{n},$$

et donc

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\sup_{x \in [0,1]} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0.$$

Ceci montre que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $f(x) = x$.

(b) On a vu que, pour tout $n \geq 1$, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx = \frac{n-1}{2n}$ et donc

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \frac{1}{2}.$$

D'un autre côté, d'après le théorème 18, la suite $(\int_0^1 f_n(x)dx)_{n \geq 1}$ converge vers $\displaystyle\int_0^1 xdx$. On déduit alors le résultat bien connu

$$\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}.$$

Exercice 65 *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tout* $x \in [1,2]$, *on pose* $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+x}$.

1. *Montrer que la suite de fonctions* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* $[1,2]$ *vers une fonction que l'on précisera.*
2. *En déduite* $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_1^2 \frac{e^{-nx}}{1+x} dx$.

Solution -

1. On a clairement que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[1,2]$ vers la fonction nulle. Pour étudier la convergence uniforme, nous allons calculer $\sup_{x\in[1,2]} |f_n(x)|$. On a, pour tout $x \in [1,2]$,

$$f_n'(x) = -\frac{e^{-nx}(n(1+x)+1)}{(x+1)^2} < 0.$$

Donc f_n est strictement décroissante sur $[1,2]$ et donc

$$\sup_{x\in[1,2]} |f_n(x)| = f_n(1).$$

Il en découle alors que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\sup_{x\in[1,2]} |f_n(x)|\right) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{e^{-n}}{2} = 0.$$

Ainsi, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[1,2]$ vers la fonction nulle.

2. D'après le théorème 19, on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_1^2 \frac{e^{-nx}}{1+x}dx = 0.$$

Exercice 66 *Montrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$, on a*

$$\ln b - \ln a \leq \frac{b-a}{\sqrt{ab}}. \tag{6.1}$$

(On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz à 1 et $\frac{1}{x}$).

Solution -

On considère les deux fonctions f et g définies sur $[a,b]$ par $f(x) = 1$ et $g(x) = \frac{1}{x}$. Ces deux fonctions sont continues sur $[a,b]$ et donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (*cf.* Proposition 34),

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b (f(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b (g(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{$*$}$$

Or

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| &= \int_a^b \frac{1}{x}dx = \ln b - \ln a,\\
\left(\int_a^b (f(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{b-a},\\
\left(\int_a^b (g(x))^2dx\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_a^b \frac{dx}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}} = \frac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{ab}}.
\end{aligned}$$

En remplaçant dans $(*)$ on obtient (6.1).

Exercice 67 *Soient a et b deux nombres réels, $a < b$ et $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et strictement positives.*

1. *Montrer que, pour tous $p, q \in \mathbb{N}^*$,*

$$\left(\int_a^b g(t)dt\right)^2 \leq \int_a^b (f(t))^{\frac{p}{q}} g(t)dt \times \int_a^b (f(t))^{-\frac{p}{q}} g(t)dt. \tag{6.2}$$

2. *En déduire que*

$$\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2 \leq \int_a^b (f(t))^{\frac{p+q}{q}} dt \times \int_a^b (f(t))^{\frac{q-p}{q}} dt. \tag{6.3}$$

Solution -

1. On considère les deux fonctions h et k définies sur $[a,b]$ par

$$h(t) = \sqrt{g(t)\,(f(t))^{\frac{p}{q}}} \quad \text{et} \quad k(t) = \sqrt{g(t)\,(f(t))^{-\frac{p}{q}}}.$$

Ces deux fonctions sont bien définies car $f > 0$ et $g > 0$, sont continues sur $[a,b]$ et donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (*cf.* Proposition 34), on a

$$\left|\int_a^b h(t)k(t)dt\right| \leq \left(\int_a^b (h(t))^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b (k(t))^2dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

et donc

$$\left|\int_a^b h(t)k(t)dt\right|^2 \leq \int_a^b (h(t))^2dt \times \int_a^b (k(t))^2dt. \tag{$*$}$$

Or

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b h(t)k(t)dt\right|^2 &= \left(\int_a^b g(t)dt\right)^2, \\ \int_a^b (h(t))^2 dt &= \int_a^b g(t)\,(f(t))^{\frac{p}{q}}\,dt, \\ \int_a^b (k(t))^2 dt &= \int_a^b g(t)\,(f(t))^{-\frac{p}{q}}\,dt.\end{aligned}$$

En remplaçant dans $(*)$ on obtient (6.2).

2. L'inégalité (6.3) s'obtient à partir de (6.2) en prenant $f = g$.

Exercice 68 *(***Théorème de Riemann-Lebesque***) Soient $a < b$ et f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$. Montrer que*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_a^b f(x)\cos(nx)dx = 0.$$

Solution -

En utilisant une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\cos(nx)dx &= \left[f(x)\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_a^b - \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\sin(nx)dx \\ &= \frac{1}{n}\left(f(b)\sin(nb) - f(a)\sin(na)\right) - \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\sin(nx)dx.\end{aligned}$$

La fonction f étant de classe C^1 et donc f' est continue sur $[a, b]$. D'après le théorème 7, f' est bornée sur $[a, b]$ et donc il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in [a, b]$, $|f'(x)| \leq M$. En utilisant les propriétés de l'intégrale (*cf.* Théorème 19), on déduit que

$$\left|\frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\sin(nx)dx\right| \leq \frac{1}{n}\int_a^b |f'(x)\sin(nx)|dx \leq \frac{M(b-a)}{n},$$

et ainsi

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\sin(nx)dx = 0.$$

D'un autre côté,

$$\left|\frac{1}{n}\left(f(b)\sin(nb) - f(a)\sin(na)\right)\right| \leq \frac{|f(a)| + |f(b)|}{n},$$

et donc
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(f(b) \sin(nb) - f(a) \sin(na) \right) = 0.$$
Finalement,
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \cos(nx) dx = 0.$$

Exercice 69 *On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par*
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

1. *Montrer que, pour tout $n \geq 1$,*
$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{dt}{t} \leq u_n \leq \int_n^{2n} \frac{dt}{t}.$$

2. *En déduire $\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n$.*

Solution -

1. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq k \leq n$. Pour tout $t \in [n+k, n+k+1]$, on a
$$\frac{1}{t} \leq \frac{1}{n+k}$$
et donc
$$\int_{n+k}^{n+k+1} \frac{dt}{t} \leq \int_{n+k}^{n+k+1} \frac{dt}{n+k} = \frac{1}{n+k}.$$
En faisant la somme sur k et en utilisant la relation de Chasles, on obtient
$$\sum_{k=1}^{n} \int_{n+k}^{n+k+1} \frac{dt}{t} = \int_{n+1}^{2n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = u_n,$$
ce qui montre la première inégalité.
Maintenant, soit $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq k \leq n$. Pour tout $t \in [n+k-1, n+k]$, on a
$$\frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{t}$$

et donc
$$\frac{1}{n+k} \leq \int_{n+k-1}^{n+k} \frac{dt}{t}.$$
En faisant la somme sur k et en utilisant la relation de Chasles, on obtient
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = u_n \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{n+k-1}^{n+k} \frac{dt}{t} = \int_{n}^{2n} \frac{dt}{t},$$
ce qui montre la deuxième inégalité.

2. On a
$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{dt}{t} = \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \text{ et } \quad \int_{n}^{2n} \frac{dt}{t} = \ln 2.$$
On déduit alors de la première question que, pour tout $n \geq 1$,
$$\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq u_n \leq \ln 2.$$
Or $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) = \ln 2$ et grâce à la proposition 8 on déduit que
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \ln 2.$$

Exercice 70 *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $u_n = \displaystyle\int_1^e x^2 \ln^n x dx$.

1. *Calculer* u_0 *et* u_1.
2. *Etudier la monotonie de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et montrer qu'elle est convergente.*
3. *Montrer que, pour tout* $x \in [1, e]$,
$$0 \leq \ln x \leq \frac{x}{e},$$
et en déduire $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$.
4. *Montrer que, pour tout* $n \geq 0$,
$$u_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} u_n$$
et retrouver $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$ *et* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} n u_n$.

Solution -

1. On a

$$\begin{aligned} u_0 &= \int_1^e x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}, \\ u_1 &= \int_1^e x^2 \ln x dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x} dx \qquad \text{(Intégration par parties)} \\ &= \frac{e^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [1, e]$, on a

$$0 \leq \ln x \leq 1,$$

et donc

$$0 \leq \ln^{n+1} x \leq \ln^n x.$$

En multipliant par x^2, on déduit que, tout $x \in [1, e]$,

$$0 \leq x^2 \ln^{n+1} x \leq x^2 \ln^n x.$$

L'intégrale conserve l'ordre (*cf.* théorème 19), il s'ensuit que

$$0 \leq \int_1^e x^2 \ln^{n+1} x dx \leq \int_1^e x^2 \ln^n x dx$$

soit encore

$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

Nous avons donc vérifié que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0. D'après le théorème des suites monotones (*cf.* théorème 2), $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un nombre réel $\ell \geq 0$.

3. On considère la fonction définie sur $[1, e]$ par

$$f(x) = \ln x - \frac{x}{e}.$$

Cette fonction est dérivable et on a, pour tout $x \in [1, e]$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e} = \frac{e - x}{xe} \geq 0.$$

Ainsi f est croissante sur $[1, e]$ et donc, pour tout $x \in [1, e]$, $f(x) \leq f(e) = 0$, soit

$$\ln x \leq \frac{x}{e}.$$

D'un autre côté, pour tout $x \in [1, e]$, $\ln 1 \leq \ln x$, soit $0 \leq \ln x$. Finalement, nous avons montré que, pour tout $x \in [1, e]$,

$$0 \leq \ln x \leq \frac{x}{e}.$$

De cette double inégalité on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq x^2 \ln^n x \leq \frac{x^{n+2}}{e^n},$$

et par passage à l'intégrale

$$0 \leq u_n \leq \int_1^e \frac{x^{n+2}}{e^n} dx.$$

Or

$$\int_1^e \frac{x^{n+2}}{e^n} dx = \frac{1}{e^n} \left[\frac{1}{n+3} x^{n+3} \right]_1^e = \frac{e^3}{n+3} - \frac{1}{e^n(n+3)}.$$

Il en résulte que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_1^e \frac{x^{n+2}}{e^n} dx = 0,$$

et donc, d'après le principe des gendarmes (*cf.* Proposition 8),

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 0.$$

4. En utilisant une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \int_1^e x^2 \ln^{n+1} x dx &= \left[\frac{x^3}{3} \ln^{n+1} x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \times \frac{(n+1)}{x} \ln^n x dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} \int_1^e x^2 \ln^n x dx, \end{aligned}$$

soit

$$u_{n+1} = \frac{e^3}{3} - \frac{n+1}{3} u_n. \qquad (*)$$

Nous allons maintenant utiliser cette relation pour retrouver le fait que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 0$.

Nous avons vu dans 2. que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente vers une

limite $\ell \geq 0$. Supposons que $\ell > 0$. On aura alors $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$ et $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{n+1}{3} u_n = +\infty$, ce qui est en contradiction avec la relation $(*)$. Par suite $\ell = 0$.
D'un autre côté, on déduit de la relation $(*)$ que

$$nu_n = e^3 - 3u_{n+1} - u_n,$$

et par suite que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} nu_n = e^3.$$

Exercice 71 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos x}\right)^n dx$.*

1. *Justifier l'existence de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
2. *Calculer I_0 et I_2.*
3. *Calculer la valeur de I_1 en faisant le changement de variable $t = \sin x$.*
4. *Vérifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.*
5. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$I_{n+1} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-1}.$$

6. *En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.*

Solution -

1. La fonction $x \mapsto \cos x$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $\cos x \neq 0$. Il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos^n x}$ est définie et continue sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et donc I_n existe.
2. On a

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \frac{\pi}{4}, \\ I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1. \end{aligned}$$

3. Faisons le changement de variable $t = \sin x$, pour $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$. On a $dt = \cos x dx$. On obtient alors que
$$\frac{dx}{\cos x} = \frac{dt}{\cos^2 x} = \frac{dt}{1-\sin^2 x} = \frac{dt}{1-t^2}.$$
Ainsi
$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} dx = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{1-t^2}.$$
Or
$$\frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{2(1+t)} + \frac{1}{2(1-t)}.$$
Il en résulte que
$$I_1 = \frac{1}{2}\left[\ln(1+t)\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \frac{1}{2}\left[\ln|1-t|\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\right).$$
4. Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$,
$$1 \le \frac{1}{\cos x}$$
et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$1 \le \frac{1}{\cos^n x} \le \frac{1}{\cos^{n+1} x}.$$
En passant à l'intégrale, on déduit que $I_n \le I_{n+1}$ et donc la suite $(I_n)_{n\ge 1}$ est croissante.
5. On utilise une intégration par parties. On écrit
$$\begin{aligned}
I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} \times \frac{1}{\cos^{n-1} x} dx \\
&= \left[\tan x \times \frac{1}{\cos^{n-1} x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \times \frac{(n-1)\sin x \cos^{n-2} x}{\cos^{2(n-1)} x} dx \\
&= \left(\sqrt{2}\right)^{n-1} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} \times \frac{(n-1)\sin x \cos^{n-2} x}{\cos^{2(n-1)} x} dx \\
&= \left(\sqrt{2}\right)^{n-1} - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^{n+1} x} dx \\
&= \left(\sqrt{2}\right)^{n-1} - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^{n+1} x} dx \\
&= \left(\sqrt{2}\right)^{n-1} - (n-1)I_{n+1} + (n-1)I_{n-1}.
\end{aligned}$$

De cette relation on déduit que

$$nI_{n+1} = \left(\sqrt{2}\right)^{n-1} + (n-1)I_{n-1},$$

soit

$$I_{n+1} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n}I_{n-1}. \qquad (*)$$

On obtient alors la relation souhaitée.

6. Nous avons dans 4. que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Il y a alors deux possibilités, soit elle est convergente, soit elle diverge vers $+\infty$. Supposons qu'elle converge vers un réel ℓ. Il s'ensuit que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} I_{n+1} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{n-1}{n} I_{n-1} = \ell,$$

et donc d'après la relation $(*)$,

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}}{n} = 0,$$

ce qui est faux car

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}}{n} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{e^{(n-1)\ln(\sqrt{2})}}{n} = +\infty.$$

Ainsi

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} I_n = +\infty.$$

Exercice 72 *On pose, pour tout $x > 0$, $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}dt$.*

1. *Montrer que F est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$.*
2. *Déterminer le signe de $F(x)$ et $F'(x)$ sur $]0, +\infty[$.*
3. *Calculer le développement limité de F en 1 à l'ordre 3.*
4. *Montrer que, pour tout $x > 0$, $F(\frac{1}{x}) = F(x)$.*
5. *Montrer que, pour tout $t \geq 1$,*

$$0 \leq \frac{\ln t}{1+t^2} \leq \frac{2\sqrt{t}}{t^2}$$

et en déduire de F est majorée sur $[1, +\infty[$ et que $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} F(x)$ existe.

6. *Que peut-t-on dire de* $\lim_{x \longrightarrow 0^+} F(x)$ *?*
7. F *est-elle bornée sur* $]0, +\infty[$ *?*

Solution -

1. La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et donc, d'après le théorème 20, F est la primitive de f qui s'annule en 1. Il en découle que F est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$.
2. Pour tout $x \in]0, 1]$, on a
$$F(x) = -\int_x^1 \frac{\ln t}{1+t^2} dt.$$
Or, pour tout $t \in [x, 1]$, $\frac{\ln t}{1+t^2} \leq 0$ et donc $F(x) \geq 0$.
Pour $x > 1$ et pour tout $t \in [1, x]$, $\frac{\ln t}{1+t^2} \geq 0$ et donc $F(x) \geq 0$. Finalement, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $F(x) \geq 0$.
D'un autre côté, pour tout $x \in]0, +\infty[$,
$$F'(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}.$$
Il en résulte que $F'(x)$ est du signe de $\ln x$ sur $]0, +\infty[$, elle est donc strictement négative sur $]0, 1[$ et positive sur $[1, +\infty[$.
3. Pour calculer le développement limité de F en 1 à l'ordre 3, nous allons calculer le développement limité de F' en 1 à l'ordre 2. On pose $u = x-1$ et on écrit
$$F'(x) = \frac{\ln x}{1+x^2} = \frac{\ln(1+u)}{1+(1+u)^2} = \frac{\ln(1+u)}{2+2u+u^2} = \frac{1}{2}\frac{\ln(1+u)}{1+u+\frac{u^2}{2}}.$$
Or, les formules classiques du développement limité en 0 donnent
$$\begin{aligned} \ln(1+u) &= u - \frac{u^2}{2} + o_0(u^2), \\ \frac{1}{1+u+\frac{u^2}{2}} &= 1 - u - \frac{u^2}{2} + (u + \frac{u^2}{2})^2 + o_0(u^2) \\ &= 1 - u + \frac{u^2}{2} + o_0(u^2). \end{aligned}$$
En faisant le produit des parties entières et en tronquant les termes de degrés supérieur où égal à 3, on obtient
$$\frac{\ln(1+u)}{1+u+\frac{u^2}{2}} = u - \frac{3}{2}u^2 + o_0(u^2).$$

Ainsi

$$F'(x) = \frac{1}{2}(x-1) - \frac{3}{4}(x-1)^2 + o_1((x-1)^2),$$

et finalement

$$F(x) = \frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{4}(x-1)^3 + o_1((x-1)^3).$$

4. On a

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\ln t}{1+t^2} dt.$$

On fait le changement de variable $u = \frac{1}{t}$. On a alors $du = -u^2 dt$ et donc

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \int_1^x \frac{\ln(\frac{1}{u})}{1+\frac{1}{u^2}}(-\frac{du}{u^2}) = \int_1^x \frac{\ln u}{u^2+1} du = F(x).$$

5. Pour tout $t \geq 1$, $\ln t \geq 0$. Pour montrer la deuxième inégalité, et puisque $\frac{1}{1+t^2} \leq \frac{1}{t^2}$, il suffit de montrer que $\ln t \leq 2\sqrt{t}$. Pour cela considérons la fonction $f(t) = \ln t - 2\sqrt{t}$. Cette fonction est dérivable sur $[1, +\infty[$ et, pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$f'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1-\sqrt{t}}{t} \leq 0,$$

et donc f est décroissante sur $[1, +\infty[$ et par suite, pour tout $t \in [1, +\infty[$, $f(t) \leq f(1) = -2 < 0$ et l'inégalité est vérifiée. Nous avons alors montré que, pour tout $t \geq 1$,

$$0 \leq \frac{\ln t}{1+t^2} \leq \frac{2\sqrt{t}}{t^2}.$$

Par passage à l'intégrale, on déduit que, pour tout $x \geq 1$,

$$0 \leq F(x) \leq \int_1^x \frac{2\sqrt{t}}{t^2} dt.$$

Or

$$\int_1^x \frac{2\sqrt{t}}{t^2} dt = 2\int_1^x t^{-\frac{3}{2}} dt = -4\left[t^{-\frac{1}{2}}\right]_1^x = -\frac{4}{\sqrt{x}} + 4.$$

Finalement, pour tout $x \geq 1$,

$$0 \leq F(x) \leq -\frac{4}{\sqrt{x}} + 4 \leq 4,$$

et donc F est majorée sur $[1,+\infty[$.
D'un autre côté, nous avons vu que F' est positive sur $[1,+\infty[$ et donc F est croissante sur $[1,+\infty[$. Ainsi F est croissante majorée sur $[1,+\infty[$ et donc $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} F(x)$ existe.

6. On a
$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} F(x) = \lim_{X\longrightarrow+\infty} F\left(\frac{1}{X}\right) \overset{4.}{=} \lim_{X\longrightarrow+\infty} F(X),$$
et donc $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} F(x)$ existe en vertu de 5.

7. Nous avons vu que, pour tout $x \in [1,+\infty[$,
$$0 \leq F(x) \leq 4.$$
Pour $x \in]0,1[$, $\frac{1}{x} \in [1,+\infty[$ et donc $0 \leq F(\frac{1}{x}) \leq 4$ et puisque, $F(\frac{1}{x}) = F(x)$, on déduit que
$$0 \leq F(x) \leq 4.$$
Nous avons alors établi que F est bornée sur $]0,+\infty[$.

Exercice 73 *Montrer que les suites de nombre réels définies par*
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1}{n^2+k^2}, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{2n^2+2nk+k^2}, \quad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+8k^3}.$$
sont convergentes et calculer leurs limites.

Solution -

Il s'git de reconnaître des sommes de Riemann et utiliser la proposition 38.

1. On écrit
$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+1}{n^2(1+(\frac{k}{n})^2)} = \frac{n+1}{n} \times \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2} \\ &= \frac{n+1}{n} s_n, \end{aligned}$$
où
$$s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(\frac{k}{n})^2}.$$

Nous reconnaissons dans l'écriture de s_n la somme de Riemann (*cf.* Proposition 38) sur l'intervalle $[0,1]$ relative à la fonction $x \longrightarrow \frac{1}{1+x^2}$. On déduit alors que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} s_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Comme $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$, on déduit que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{n+1}{n^2+k^2} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

2. On écrit

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{2n^2+2nk+k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n(1+\frac{k}{n})}{n^2(2+2\frac{k}{n}+(\frac{k}{n})^2)} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1+\frac{k}{n}}{2+2\frac{k}{n}+(\frac{k}{n})^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1+\frac{k}{n}}{1+(1+\frac{k}{n})^2}. \end{aligned}$$

On reconnaît ici la somme de Riemann (*cf.* Proposition 38) sur l'intervalle $[1,2]$ relative à la fonction $x \longrightarrow \frac{x}{1+x^2}$. On déduit alors que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = \int_1^2 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_1^2 = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{2}\right).$$

3. On écrit

$$\begin{aligned} w_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+8k^3} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3(1+8\frac{k^3}{n^3})} \\ &= \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{1+(\frac{2k}{n})^3} = \frac{1}{8}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{(\frac{2k}{n})^2}{1+(\frac{2k}{n})^3} = \frac{1}{8}s_n, \end{aligned}$$

où s_n est la somme de Riemann (*cf.* Proposition 38) sur l'intervalle $[0,2]$ relative à la fonction $x \longrightarrow \frac{x^2}{1+x^3}$. On déduit alors que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} v_n = \frac{1}{8}\int_0^2 \frac{x^2}{1+x^3}dx = \frac{1}{24}\left[\ln(1+x^3)\right]_0^2 = \frac{1}{24}\ln 9 = \frac{1}{12}\ln 3.$$

Chapitre 7

Calcul des primitives

Le calcul des intégrales repose sur le calcul des primitives (*cf.* Théorème 20). Dans ce chapitre, nous allons passer en revue les techniques classiques de calcul des primitives. Toutes ces techniques supposent la connaissance des primitives des fonctions usuelles qui sont données à la fin du chapitre précédent. Dans ce qui suit, $\int f(x)dx$ désigne une primitive de f.

7.1 Changement de variables

Le principe du changement de variable a été énoncé dans le théorème 21 que nous rappelons ici.

Théorème 23 (**Formule de changement de variable**) *Soit u une fonction de classe C^1 sur un intervalle I. Soit f une fonction continue sur $u(I)$ et soient $a, b \in I$. Alors*

$$\int_a^b f(u(t))u'(t)dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt.$$

Exemple - Nous allons calculer la primitive de $\cos x \sin^2 x$ qui s'annule en 0. Notons F cette primitive. On a

$$F(x) = \int_0^x \cos t \sin^2 t dt.$$

Faisant le changement de variable $u = \sin t$. On a $du = \cos t dt$ et donc

$$F(x) = \int_0^{\sin x} u^2 du = \frac{1}{3}\left[u^3\right]_0^{\sin x} = \frac{1}{3}\sin^3 x.$$

7.2 Intégration par parties

Le principe d'intégration par parties a été énoncé dans le théorème 22 que nous rappelons ici.

Théorème 24 (**Intégration par parties**) *Soient u, v deux fonctions de classe C^1 sur I et soient $a, b \in I$. Alors*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [uv]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Exemple - En utilisant deux intégrations par parties, nous allons calculer $\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$. Posons $v'(x) = e^{-x}$ et $u(x) = x^2$. On obtient alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2 e^{-x} dx &= \left[-x^2 e^{-x}\right]_0^1 + 2\int_0^1 x e^{-x} dx \\ &= -e^{-1} + 2\left(\left[-x e^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx\right) \\ &= -3e^{-1} + 2\left[-e^{-x}\right]_0^1 = -5e^{-1} + 2.\end{aligned}$$

7.3 Fractions rationnelles

Nous allons donner la méthode générale pour calculer les primitives de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ où $P(x)$ et $Q(x)$ sont deux polynômes tels que $\deg P < \deg Q$ (on peut toujours se ramener à ce cas pour toute fraction rationnelle en effectuant, si nécessaire, la division euclidienne du numérateur par le dénominateur).
Première étape. On décompose le dénominateur $Q(x)$ en polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ et on obtient

$$Q(x) = cA_1(x) \dots A_p(x)B_1(x) \dots B_q(x)$$

avec c une constante et, pour tout $i = 1, \dots, p$ et $j = 1, \dots, q$,

$$A_i(x) = (x - a_i)^{n_i} \quad \text{et} \quad B_j(x) = (x^2 + b_j x + c_j)^{m_j} \ \text{ où } \ b_j^2 - 4c_j < 0.$$

Deuxième étape. On effectue la décomposition en éléments simples de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ et on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} &= \sum_{i=1}^{p} S_i + \sum_{j=1}^{q} T_j, \\
S_i &= \sum_{\ell=1}^{n^i} \frac{\alpha_i}{(x-a_i)^\ell}, \quad (\alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, p), \\
T_j &= \sum_{\ell=1}^{m^j} \frac{\beta_j x + \gamma_j}{(x^2 + b_j x + c_j)^\ell}, \quad (\beta_j, \gamma_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, q).
\end{aligned}$$

Troisième étape. On calcule les primitives de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en utilisant la décomposition ci-dessus ce qui nous ramène à calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{\alpha}{(x-a)^\ell} dx \quad \text{et} \quad \int \frac{\beta x + \gamma}{(x^2 + bx + c)^\ell} dx \ \text{ avec } b^2 - 4c < 0.$$

La première est simple et donne

$$\int \frac{\alpha}{(x-a)^\ell} dx = \begin{cases} \alpha \ln|x-a| + K & \text{si } \ \ell = 1, \\ \frac{\alpha}{(1-\ell)(x-a)^{\ell-1}} + K & \text{si } \ \ell > 1. \end{cases}$$

Pour calculer la deuxième, on la décompose sous la forme

$$\int \frac{\beta x + \gamma}{(x^2 + bx + c)^\ell} dx = \frac{\beta}{2} \int \frac{2x + b}{(x^2 + bx + c)^\ell} dx + (\gamma - \frac{b\beta}{2}) \int \frac{1}{(x^2 + bx + c)^\ell} dx.$$

Maintenant

$$\int \frac{2x + b}{(x^2 + bx + c)^\ell} dx = \begin{cases} \ln(x^2 + bx + c) + K & \text{si } \ \ell = 1, \\ \frac{1}{(1-\ell)(x^2+bx+c)^{\ell-1}} + K & \text{si } \ \ell > 1. \end{cases}$$

Pour la dernière, on remarque que puisque $b^2 - 4c < 0$, on a

$$\begin{aligned}
x^2 + bx + c &= (x + \frac{1}{2}b)^2 + \left(\frac{\sqrt{4c - b^2}}{2}\right)^2 \\
&= (x+a)^2 + d^2 \quad \text{avec} \quad a = \frac{1}{2}b, d^2 = \left(\frac{\sqrt{4c - b^2}}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int \frac{1}{(x^2 + bx + c)^\ell} dx = \int \frac{1}{((x+a)^2 + d^2)^\ell} dx = \frac{1}{d^{2\ell}} \int \frac{1}{((\frac{x+a}{d})^2 + 1)^\ell} dx.$$

On fait le changement de variable $u = \frac{x+a}{d}$ et on obtient

$$\int \frac{1}{(x^2+bx+c)^\ell}dx = \frac{1}{d^{2\ell-1}}\int \frac{1}{(u^2+1)^\ell}du.$$

On pose

$$I_\ell = \int \frac{1}{(u^2+1)^\ell}du.$$

On a

$$I_1 = \arctan u$$

et les termes d'ordre supérieur s'obtiennent par récurrence (Voir Exercice 74).
Exemple - Nous allons calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{x}{x^4-16}dx.$$

Effectuons d'abord la décomposition en éléments simples de $\frac{x}{x^4-16}$. On a

$$\frac{x}{x^4-16} \quad = \quad \frac{x}{(x-2)(x+2)(x^2+4)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+2} + \frac{cx+d}{x^2+4}.$$

En multipliant les deux membres de cette égalité par $x-2$ et en faisant $x=2$, on obtient

$$a = \frac{2}{(2+2)(4+4)} = \frac{1}{16}.$$

De la même manière, on obtient $b = \frac{1}{16}$. Puisque la fraction rationnelle est impaire on déduit que $d=0$. Pour calculer c, on prend $x=1$ et on obtient

$$-\frac{1}{15} = -\frac{1}{16} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{16} + \frac{c}{5}$$

et donc $c = -\frac{1}{8}$. Ainsi

$$\frac{x}{x^4-16} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{2(x+2)} - \frac{x}{x^2+4}\right)$$

et donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{x^4-16}dx &= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\left[\ln|x-2|\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\ln|x+2|\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+4)\right]_0^1\right) \\ &= \frac{1}{16}(-\ln 2 + \ln 3 - \ln 2 - \ln 5 + 2\ln 2) = \frac{1}{16}\ln\frac{3}{5}.\end{aligned}$$

7.4 Polynômes en $\cos x$ et $\sin x$

Pour calculer
$$\int \cos^n x \sin^m x dx$$
on discute suivant la parité de m et n :

1. $n = 2p+1$. On fait le changement de variable $u = \sin x$. En effet, on a
$$\begin{aligned}\int \cos^{2p+1} x \sin^m x dx &= \int (\cos^2 x)^p \sin^m x \cos x dx \\ &= \int (1-\sin^2 x)^p \sin^m x \cos x dx \\ &= \int (1-u^2)^p u^m du.\end{aligned}$$

2. $m = 2p+1$. On fait le changement de variable $u = \cos x$. En effet, on a
$$\begin{aligned}\int \sin^{2p+1} x \cos^n x dx &= \int (\sin^2 x)^p \cos^n x \sin x dx \\ &= \int (1-\cos^2 x)^p \cos^n x \sin x dx \\ &= -\int (1-u^2)^p u^n du.\end{aligned}$$

3. Si n et m sont paires on linéarise. Il s'agit d'utiliser les formules d'Euler
$$\cos x = \frac{e^{\imath x} + e^{-\imath x}}{2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{e^{\imath x} - e^{-\imath x}}{2\imath}$$
pour calculer $\cos^n x$ et $\sin^m x$ à l'aide de la formule du binôme de Newton
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} a^k b^{n-k}. \tag{7.1}$$
Exemple - Nous allons calculer
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx.$$
En utilisant la formule du binôme et la formule d'Euler, on obtient
$$\begin{aligned}\sin^4 x &= \frac{1}{16}\left(e^{\imath x} - e^{-\imath x}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{-4\imath x} - 4e^{-2\imath x} + 6 - 4e^{2\imath x} + e^{4\imath x}\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(e^{-4\imath x} + e^{4\imath x} - 4(e^{-2\imath x} + e^{2\imath x}) + 6\right) = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}.\end{aligned}$$
Ainsi
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx = \frac{1}{32}\left[\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\left[\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3\pi}{16} = \frac{3\pi}{16}.$$

7.5 Polynômes en $\cosh x$ et $\sinh x$

Pour calculer $\int \cosh^n x \sinh^m x dx$ on discute suivant la parités de m et n :

1. $n = 2p+1$. On fait le changement de variable $u = \sinh x$. En effet, on a
$$\begin{aligned}\int \cosh^{2p+1} x \sinh^m x dx &= \int (\cosh^2 x)^p \sinh^m x \cosh x dx \\ &= \int (1+\sinh^2 x)^p \sinh^m x \cosh x dx \\ &= \int (1+u^2)^p u^m du.\end{aligned}$$

2. $m = 2p+1$. On fait le changement de variable $u = \cosh x$. En effet, on a
$$\begin{aligned}\int \sinh^{2p+1} x \cosh^n x dx &= \int (\sinh^2 x)^p \cosh^n x \sinh x dx \\ &= \int (\cosh^2 x - 1)^p \cosh^n x \sinh x dx \\ &= \int (u^2-1)^p u^n du.\end{aligned}$$

3. Si n et m sont paires on linéarise. Il s'agit d'utiliser les formules
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
pour calculer $\cosh^n x$ et $\sinh^m x$ à l'aide de la formule du binôme (7.1).

7.6 Fractions rationnelles en $\cos x$ et $\sin x$

Pour calculer
$$\int F(\cos x, \sin x) dx,$$
où F est une fraction rationnelle, on étudie l'expression
$$E(x) = F(\cos x, \sin x) dx.$$

1. Si $E(\pi - x) = E(x)$, on fait le changement de variable $u = \sin x$.
2. Si $E(-x) = E(x)$, on fait le changement de variable $u = \cos x$.
3. Si $E(x+\pi) = E(x)$, on fait le changement de variable $u = \tan x$.

4. Si aucun des cas ci-dessus n'est vérifié, on fait le changement de variable $u = \tan\frac{x}{2}$ et on utilise les formules
$$du = \frac{1}{2}(1+u^2)dx, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}. \qquad (7.2)$$

Les règles ci-dessus sont connues sous le nom de **règles de Bioche**.

Exemples -

1. **Nous allons calculer**
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{1+\sin x}.$$
On remarque que
$$\frac{\cos(\pi - x)d(\pi - x)}{1+\sin(\pi - x)} = \frac{\cos x dx}{1+\sin x},$$
puisque $d(\pi - x) = -dx$**,** $\cos(\pi - x) = -\cos x$ **et** $\sin(\pi - x) = \sin x$**. On fait le changement de variable** $u = \sin x$**. On a** $du = \cos x dx$ **et donc**
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{1+\sin x} \quad = \quad \int_0^1 \frac{du}{1+u} = [\ln|1+u|]_0^1 = \ln 2.$$

2. **Nous allons calculer**
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\cos x + \sin^2 x}.$$
On remarque que
$$\frac{\sin(-x)d(-x)}{\cos(-x) + (\sin(-x))^2} = \frac{\sin x dx}{\cos x + \sin^2 x},$$
puisque $d(-x) = -dx$**,** $\sin(-x) = -\sin x$ **et** $\cos(-x) = \cos x$**. On fait alors le changement de variable** $u = \cos x$ **et donc** $du = -\sin x dx$**. On obtient alors**
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\cos x + \sin^2 x} &= -\int_1^0 \frac{du}{u+1-u^2} = -\int_0^1 \frac{du}{u^2-u-1} \\ &= -\int_0^1 \frac{du}{(u - \frac{1+\sqrt{5}}{2})(u - \frac{1-\sqrt{5}}{2})}.\end{aligned}$$
Or
$$\frac{1}{(u - \frac{1+\sqrt{5}}{2})(u - \frac{1-\sqrt{5}}{2})} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{u - \frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \frac{1}{u - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right).$$

On déduit alors que

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\cos x + \sin^2 x} &= -\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\ln\left|\frac{u-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{u-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\right|\right]_0^1 \\ &= -\frac{2}{\sqrt{5}}\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}\right) = -\frac{2}{\sqrt{5}}\ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right).\end{aligned}$$

3. **Nous allons calculer**

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{\cos x + \sin x}.$$

On remarque que

$$\frac{\sin(x+\pi)d(x+\pi)}{\cos(x+\pi)+\sin(x+\pi)} = \frac{\sin x dx}{\cos x + \sin^2 x},$$

puisque $\sin(x+\pi) = -\sin x$**,** $\cos(x+\pi) = -\cos x$ **et** $d(\pi + x) = dx$**. On fait alors le changement de variable** $u = \tan x$**. On a** $du = (1+u^2)dx$ **et**

$$\frac{\sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{\sin x}{\cos x(1+\tan x)} = \frac{u}{1+u}$$

et donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{\cos x + \sin x} = \int_0^1 \frac{udu}{(1+u)(1+u^2)}.$$

Or la décomposition en éléments simples de $\frac{u}{(1+u)(1+u^2)}$ **est donnée par**

$$\frac{u}{(1+u)(1+u^2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{u+1}{1+u^2} - \frac{1}{1+u}\right).$$

On déduit que

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{\cos x + \sin x} &= \frac{1}{4}\left[\ln(1+u^2)\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\arctan u\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\ln|1+u|\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4}\ln 2 + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\ln 2 = -\frac{1}{4}\ln 2 + \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

4. **Nous allons calculer**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}.$$

On remarque qu'aucune des trois règles de Bioche n'est valable dans ce cas. On pose alors $u = \tan\frac{x}{2}$**. On a**

$$du = \frac{1}{2}(1+u^2)dx \quad \textbf{et} \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

et donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x} = \int_0^1 \frac{2du}{(1+u^2)(1+\frac{1-u^2}{1+u^2})} = \int_0^1 du = 1.$$

7.7 Fractions rationnelles en $\cosh x$ et $\sinh x$

Ces fractions se traitent comme le cas précédent. Pour calculer

$$\int F(\cosh x, \sinh x)dx$$

où F est une fraction rationnelle, et comme $\cosh x = \cos \imath x$ et $\sinh x = \sin \imath x$, on étudie l'expression $E(x) = F(\cos x, \sin x)dx$:

1. Si $E(\pi - x) = E(x)$, on fait le changement de variable $u = \sinh x$.
2. Si $E(-x) = E(x)$, on fait le changement de variable $u = \cosh x$.
3. Si $E(x + \pi) = E(x)$, on fait le changement de variable $u = \tanh x$.
4. Si aucun des cas ci-dessus n'est vérifié, on fait le changement de variable $u = \tanh \frac{x}{2}$ et on utilise les formules

$$du = \frac{1}{2}(1 - u^2)dx, \quad \cosh x = \frac{1+u^2}{1-u^2} \quad \text{et} \quad \sinh x = \frac{2u}{1-u^2}. \tag{7.3}$$

Exemples -

1. **Nous allons calculer**

$$\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{\cosh x dx}{2 + \sinh x}.$$

on remarque que

$$\frac{\cos(\pi - x)d(\pi - x)}{2 + \sin(\pi - x)} = \frac{\cos x dx}{1 + \sin x},$$

puisque $d(\pi - x) = -dx$**,** $\cos(\pi - x) = -\cos x$ **et** $\sin(\pi - x) = \sin x$**. On fait le changement de variable** $u = \sinh x$**. On a** $du = \cosh x dx$ **et donc**

$$\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{\cosh x dx}{2 + \sinh x} = \int_0^1 \frac{du}{2+u} = [\ln|2+u|]_0^1 = \ln\frac{3}{2}.$$

2. **Nous allons calculer**

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + \cosh x}.$$

On remarque qu'aucune des trois règles de Bioche n'est valable dans ce cas. On pose alors $u = \tanh \frac{x}{2}$**. On a**

$$du = \frac{1}{2}(1 - u^2)dx \quad \textbf{et} \quad \cosh x = \frac{1+u^2}{1-u^2}$$

et donc

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + \cosh x} = \int_0^{\tanh(\frac{1}{2})} du = \tanh(\frac{1}{2}).$$

7.8 Fractions rationnelles en x et $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

Pour calculer

$$\int F(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$$

où F est une fraction rationnelle, on effectue le changement de variable

$$u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \quad u^n = \frac{ax+b}{cx+d}$$

et on calcule x en fonction de u.

Exemple - Nous allons calculer l'intégrale

$$\int_{-1}^{0} \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}}{x+2}dx.$$

On effectue le changement de variable $u = \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}$**. On déduit alors que**

$$x = \frac{1-2u^2}{u^2-1}, \quad dx = \frac{2u}{(u^2-1)^2}du \quad \textbf{et} \quad x+2 = \frac{1}{1-u^2}.$$

Ainsi

$$\int_{-1}^{0} \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}}{x+2}dx \quad = \quad \int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{2u^2}{1-u^2}du.$$

Or

$$\frac{2u^2}{1-u^2} = -2 + \frac{2}{1-u^2} = -2 + \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}.$$

On déduit alors que

$$\int_{-1}^{0} \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}}{x+2}dx = -\sqrt{2} + \ln(3+2\sqrt{2}).$$

7.9 Fractions rationnelles en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Pour calculer $\int F(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ où F est une fraction rationnelle, on distingue plusieurs cas :

1. $a = 0$. On est ramené au cas de la section précédente, on effectue le changement de variable $u = \sqrt{bx + c}$.
2. $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. Dans ce cas, $ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2$ et on se ramène à calculer la primitive d'une fraction rationnelle en x.
3. $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Dans ce cas, pour que $ax^2 + bx + c$ soit positif, on a nécessairement $a > 0$. On écrit alors

   $$ax^2 + bx + c = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \alpha^2 \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-\Delta}{a}}.$$

   On déduit alors que

   $$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \alpha\sqrt{\left(\frac{\sqrt{a}}{\alpha}x + \frac{b}{2\alpha\sqrt{a}}\right)^2 + 1}. \tag{7.4}$$

   On effectue alors le changement de variable

   $$\sinh t = \frac{\sqrt{a}}{\alpha}x + \frac{b}{2\alpha\sqrt{a}}$$

   et ainsi

   $$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \alpha \cosh t.$$

   On est alors ramené au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle en $\cosh t$ et $\sinh t$ traité dans la section 7.7.
4. $a > 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. On écrit alors

   $$ax^2 + bx + c = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \alpha^2 \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{a}}.$$

   On déduit alors que

   $$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \alpha\sqrt{\left(\frac{\sqrt{a}}{\alpha}x + \frac{b}{2\alpha\sqrt{a}}\right)^2 - 1}. \tag{7.5}$$

   On effectue alors le changement de variable

   $$\cosh t = \frac{\sqrt{a}}{\alpha}x + \frac{b}{2\alpha\sqrt{a}}$$

   et ainsi

   $$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \alpha \sinh t.$$

   On est alors ramené au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle en $\cosh t$ et $\sinh t$ traité dans la section 7.7.

5. $a < 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. On écrit alors

$$ax^2 + bx + c = \alpha^2 - \left(\sqrt{-a}x - \frac{b}{2\sqrt{-a}}\right)^2 \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta}{-a}}.$$

On déduit alors que

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \alpha\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{-a}}{\alpha}x - \frac{b}{2\alpha\sqrt{-a}}\right)^2}. \tag{7.6}$$

On effectue alors le changement de variable

$$\cos t = \frac{\sqrt{-a}}{\alpha}x - \frac{b}{2\alpha\sqrt{-a}}$$

et ainsi

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \alpha|\sin t|.$$

On est alors ramené au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle en $\cos t$ et $\sin t$ traité dans la section 7.6.

Exemples -

1. **Calculons une primitive de $\sqrt{x^2 + 2x + 2}$. On a**

$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1.$$

Faisons le changement de variable $x + 1 = \sinh u$. Ainsi $dx = \cosh u du$ et donc

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{x^2 + 2x + 2}\, dx &= \int \sqrt{\sinh^2 u + 1} \cosh u\, du = \int \cosh^2 u\, du \\
&= \frac{1}{2}\int (1 + \cosh 2u) du \\
&= \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}\sinh 2u + k \\
&= \frac{1}{2}\arg\sinh(x + 1) + \frac{1}{4}\sinh(2\arg\sinh(x + 1)) + k \\
&= \frac{1}{2}\sinh(\arg\sinh(x + 1))\cosh(\arg\sinh(x + 1)) \\
&\quad + \frac{1}{2}\arg\sinh(x + 1) + k \\
&= \frac{1}{2}(x + 1)\sqrt{(x + 1)^2 + 1} + \frac{1}{2}\arg\sinh(x + 1) + k \\
&= \frac{1}{2}(x + 1)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + \frac{1}{2}\arg\sinh(x + 1) + k.
\end{aligned}$$

2. Calculons une primitive de $\sqrt{x^2+2x-3}$**. On a**

$$x^2+2x-3=(x+1)^2-4=4\left(\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2-1\right).$$

Faisons le changement de variable $\frac{1}{2}(x+1)=\cosh u$**. Ainsi** $dx=2\sinh u du$ **et donc**

$$\begin{aligned}
\int\sqrt{x^2+2x-3}\,dx &= 4\int\sqrt{\cosh^2 u-1}\sinh u\,du=4\int|\sinh u|\sinh u\,du\\
&= 2\epsilon\int(\cosh 2u-1)du \qquad (\epsilon \textbf{ est le signe de } \sinh u)\\
&= \epsilon(\sinh 2u-2u+k)\\
&= \epsilon\sinh(2\arg\cosh(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}))-2\epsilon\arg\cosh(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})+k\\
&= \epsilon 2\sinh(\arg\cosh(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}))\cosh(\arg\cosh(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}))\\
&\quad -2\epsilon\arg\cosh(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})+k\\
&= \epsilon(x+1)\sqrt{1+(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})^2}-2\epsilon\arg\cosh(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})+k\\
&= \epsilon\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x-3}-2\epsilon\arg\cosh(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})+k.
\end{aligned}$$

3. Calculons une primitive de $\sqrt{-x^2-2x+3}$**. On a**

$$-x^2-2x+3=4-(x+1)^2=4\left(1-\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\right)^2\right).$$

Faisons le changement de variable $\frac{1}{2}(x+1)=\sin u$**. Ainsi** $dx=2\cos u du$ **et donc**

$$\begin{aligned}
\int\sqrt{-x^2-2x+3}\,dx &= 4\int\sqrt{1-\sin^2 u}\cos u\,du=4\int|\cos u|\cos u\,du\\
&= 2\epsilon\int(\cos 2u+1)du \qquad (\epsilon \textbf{ est le signe de } \cos u)\\
&= \epsilon(\sin 2u+2u+k)\\
&= \epsilon\sin(2\arcsin(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}))+2\epsilon\arcsin(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})+k\\
&= \epsilon 2\sin(\arcsin(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}))\cos(\arcsin(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}))\\
&\quad +2\epsilon\arcsin(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})+k\\
&= \epsilon(x+1)\sqrt{1-(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})^2}+2\epsilon\arcsin(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})+k\\
&= \epsilon\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{-x^2-2x+3}+2\epsilon\arcsin(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})+k.
\end{aligned}$$

7.10 Exercices corrigés

Exercice 74 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction définie par*

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{du}{(1+u^2)^n}.$$

1. *Calculer F_1.*
2. *En utilisant une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$(2n-1)F_n(x) - 2nF_{n+1}(x) = -\frac{x}{(1+x^2)^n}, \tag{7.7}$$

et en déduire F_2 et F_3.

Solution -

1. On a

$$F_1(x) = \int_0^x \frac{du}{1+u^2} = [\arctan u]_0^x = \arctan x.$$

2. Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \int_0^x \frac{du}{(1+u^2)^n} = \left[u\frac{1}{(1+u^2)^n}\right]_0^x - \int_0^x u \times \frac{-2nu}{(1+u^2)^{n+1}} \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int_0^x \frac{u^2+1-1}{(1+u^2)^{n+1}}du \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nF_n(x) - 2nF_{n+1}(x), \end{aligned}$$

et on déduit (7.7).

3. En utilisant (7.7), on déduit que

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \frac{1}{2}\left(\arctan x + \frac{x}{(1+x^2)}\right), \\ F_3(x) &= \frac{3}{8}\arctan x + \frac{3}{8}\frac{x}{(1+x^2)} + \frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

Exercice 75 *On considère les intégrales*

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx \quad \text{et} \quad N = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx.$$

1. Montrer que $M = N$.

2. Calculer $M + N$ et en déduire M et N.

Solution -

1. On effectue le changement de variable $x = \frac{\pi}{2} - u$ et on obtient

$$M = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - u)}{\sin(\frac{\pi}{2} - u) + \cos(\frac{\pi}{2} - u)}(-du) = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{\sin u + \cos u} du = N.$$

2. On a

$$M + N = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + \sin x}{\sin x + \cos x} dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Puisque $M = N$, on déduit que $2M = \frac{\pi}{2}$ et donc

$$M = N = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 76 *Calculer les intégrales suivantes :*

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 5}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}}, \quad \int_0^1 e^x \sin(e^x) dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx.$$

Solution -

1. On a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 5} &= \frac{1}{5} \int_0^1 \frac{dx}{(\frac{x}{\sqrt{5}})^2 + 1} = \frac{\sqrt{5}}{5} \left[\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{5}} \right) \right]_0^1 \\ &= \frac{\sqrt{5} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)}{5}. \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{5 - x^2}} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - (\frac{x}{\sqrt{5}})^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \left[\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{5}} \right) \right]_0^1 \\ &= \frac{\sqrt{5} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)}{5}. \end{aligned}$$

3. On a
$$\int_0^1 e^x \sin(e^x)dx = [-\cos(e^x)]_0^1 = -\cos(e) + \cos(1).$$
4. On a
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos^5 x}dx = \frac{1}{4}\left[\cos^{-4} x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}((\sqrt{2})^4 - 1) = \frac{3}{4}.$$

Exercice 77 *Calculer les primitives suivantes :*
$$\int e^x \cos x dx, \quad \int e^{-x} \sin^2 x dx, \quad \int \frac{\ln x}{x^3}dx, \quad \int x \arctan x dx, \quad \int \arcsin x dx.$$

Solution -

1. On procède par une double intégration par parties :
$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x dx.$$
Par suite
$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2}\left(e^x \cos x + e^x \sin x\right) + k.$$
2. On a $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$ et donc
$$\begin{aligned} \int e^{-x} \sin^2 x dx &= \frac{1}{2}\int e^{-x} dx - \frac{1}{2}\int e^{-x} \cos(2x)dx \\ &= -\frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}\int e^{-x}\cos(2x)dx. \end{aligned}$$
On fait une double intégration par parties :
$$\begin{aligned} \int e^{-x}\cos(2x)dx &= -e^{-x}\cos(2x) - 2\int e^{-x}\sin(2x)dx \\ &= -e^{-x}\cos(2x) + 2e^{-x}\sin(2x) - 4\int e^{-x}\cos(2x)dx. \end{aligned}$$
Par suite
$$\int e^{-x}\cos(2x)dx = \frac{1}{5}e^{-x}\left(2\sin(2x) - \cos(2x)\right),$$
et finalement
$$\int e^{-x}\sin^2 x dx = \frac{1}{10}e^{-x}\left(\cos(2x) - 2\sin(2x) - 5\right) + k.$$

3. On procède par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x^3}dx &= -\frac{\ln x}{2x^2}+\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2}\times\frac{1}{x}dx \\ &= -\frac{\ln x}{2x^2}+\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^3}dx = -\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+k.\end{aligned}$$

4. On procède par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int x\arctan x dx &= \frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}dx \\ &= \frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{2}x^2\arctan x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\arctan x+k.\end{aligned}$$

5. On procède par intégration par parties :

$$\int \arcsin x dx = x\arcsin x-\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+k.$$

Exercice 78 *Calculer les primitives suivantes :*

$$\int \cos x\cos(2x)dx,\quad \int \sin x\sin(3x)dx,\quad \int \cos^6 x dx,\quad \int \cosh^2 x\sinh^2 x dx.$$

Solution -

Pour cet exercice, le lecteur doit consulter les formules classiques de la trigonométrie et de la trigonométrie hyperbolique vues dans le chapitre 4.

1. On a $\cos(2x) = 1-2\sin^2 x$ et donc

$$\begin{aligned}\int \cos x\cos(2x)dx &= \int \cos x dx-2\int \cos x\sin^2 x dx \\ &= \sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+k.\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}\sin(3x) &= \sin(2x)\cos x+\cos(2x)\sin x \\ &= 2\sin x\cos^2 x+(2\cos^2 x-1)\sin x \\ &= 4\sin x\cos^2 x-\sin x.\end{aligned}$$

Donc

$$\int \sin x \sin(3x)dx = 4\int \sin^2 x \cos^2 x dx - \int \sin^2 x dx.$$

Or $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ et $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4}\sin^2(2x)$ et donc

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x), \\ \int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \frac{1}{4}\int \sin^2(2x)dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos(4x))dx \\ &= \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin(4x), \end{aligned}$$

et finalement,

$$\int \sin x \sin(3x)dx = \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{1}{8}\sin(4x) + k.$$

3. Nous allons utiliser la formule de Moivre et la formule de Newton pour linéariser $\cos^6 x$. La formule de Moivre donne

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{\imath x} + e^{-\imath x}),$$

et la formule de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n a^k b^{n-k}, \qquad (C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!})$$

donne

$$\begin{aligned} \cos^6 x &= \frac{1}{64}\left(C_0^6 e^{-6\imath x} + C_1^6 e^{\imath x} e^{-5\imath x} + C_2^6 e^{2\imath x} e^{-4\imath x} + C_3^6 e^{3\imath x} e^{-3\imath x} + \right. \\ &\quad \left. + C_4^6 e^{4\imath x} e^{-2\imath x} + C_5^6 e^{5\imath x} e^{-\imath x} + C_6^6 e^{6\imath x}\right) \\ &= \frac{1}{64}\left(C_0^6 e^{-6\imath x} + C_1^6 e^{-4\imath x} + C_2^6 e^{-2\imath x} + C_3^6 + C_4^6 e^{2\imath x} \right. \\ &\quad \left. + C_5^6 e^{4\imath x} + C_6^6 e^{6\imath x}\right) \end{aligned}$$

Comme $C_0^6 = C_6^6 = 1$, $C_1^6 = C_5^6 = 6$, $C_2^6 = C_4^6 = 15$, $C_3^6 = 20$ et en utilisant la formule de Moivre, on trouve

$$\cos^6 x = \frac{1}{32}\cos(6x) + \frac{3}{16}\cos(4x) + \frac{15}{32}\cos(2x) + \frac{5}{16}.$$

Finalement,

$$\int \cos^6 x dx = \frac{1}{192}\cos(6x) + \frac{3}{64}\cos(4x) + \frac{15}{64}\cos(2x) + \frac{5}{16}x + k.$$

4. On a
$$\cosh^2 x \sinh^2 x = \frac{1}{4}\sinh^2(2x) = \frac{1}{8}(\cosh 4x - 1),$$
et donc
$$\int \cosh^2 x \sinh^2 x dx = \frac{1}{32}\sinh(4x) - \frac{1}{8}x + k.$$

Exercice 79 *Calculer les intégrales suivantes :*
$$\int_2^3 \frac{dx}{x^2-1}, \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x(x^2+1)}, \int_0^1 \frac{x^2-5x+5}{x^2+4}dx, \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-4}, \int_2^3 \frac{x+1}{x(x-1)^3}dx.$$

Solution -

Cet exercice est basé sur la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles traitée dans le cours d'algèbre.

1. La décomposition en éléments simples de $\frac{1}{x^2-1}$ donne
$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}.$$
En multipliant les deux membres de cette égalité par $x-1$ et en faisant $x=1$, on obtient $a=\frac{1}{2}$. Un calcul analogue donne $b=-\frac{1}{2}$. Ainsi
$$\begin{aligned}\int_2^3 \frac{dx}{x^2-1} &= \frac{1}{2}\left[\ln|x-1|\right]_2^3 - \frac{1}{2}\left[\ln|x+1|\right]_2^3 \\ &= \frac{1}{2}\ln 2 - \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3 = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

2. La décomposition en éléments simples de $\frac{1}{x(x^2+1)}$ donne
$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1}.$$
En multipliant les deux membres de cette égalité par x et en faisant $x=0$, on obtient $a=1$. En multipliant les deux membres par x et en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $b+a=0$ et donc $b=-1$. En prenant $x=1$, on obtient $\frac{1}{2} = a + \frac{1}{2}(b+c)$ ce qui donne $c=0$. Ainsi
$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x(x^2+1)} &= \left[\ln x\right]_1^{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_1^{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 2 = \ln 2 - \frac{1}{2}\ln 3.\end{aligned}$$

3. On écrit
$$\frac{x^2-5x+5}{x^2+4}=\frac{x^2+4-5x+1}{x^2+4}=1-\frac{5x}{x^2+4}+\frac{1}{x^2+4},$$
et
$$\frac{1}{x^2+4}=\frac{1}{4}\frac{1}{(\frac{x}{2})^2+1}.$$
Ainsi
$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{x^2-5x+5}{x^2+4}dx &= [x]_0^1-\frac{5}{2}\left[\ln(x^2+4)\right]_0^1+\frac{1}{2}\left[\arctan(\frac{x}{2})\right]_0^1\\ &= 1-\frac{5}{2}\ln 5+5\ln 2+\frac{1}{2}\arctan(\frac{1}{2}).\end{aligned}$$

4. La décomposition en éléments simples de $\frac{1}{x^2-4}$ donne
$$\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{(x-2)(x+2)}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x+2}.$$
En multipliant les deux membres de cette égalité par $x-2$ et en faisant $x=2$, on obtient $a=\frac{1}{4}$. Un calcul analogue donne $b=-\frac{1}{4}$. Ainsi
$$\begin{aligned}\int_{-1}^1\frac{dx}{x^2-4} &= \frac{1}{4}\left[\ln|x-2|\right]_{-1}^1-\frac{1}{4}\left[\ln|x+2|\right]_{-1}^1\\ &= -\frac{1}{4}\ln 3-\frac{1}{4}\ln 3=-\frac{1}{2}\ln 3.\end{aligned}$$

5. La décomposition en éléments simples de $\frac{x+1}{x(x-1)^3}$ donne
$$\frac{x+1}{x(x-1)^3}=\frac{a}{x}+\frac{b}{(x-1)^3}+\frac{c}{(x-1)^2}+\frac{d}{x-1}.$$
En multipliant les deux membres de cette égalité par x et $(x-1)^3$ et en faisant, respectivement, $x=0$ et $x=1$, on obtient $a=-1$ et $b=2$. Maintenant, en multipliant par x et en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient $d+a=0$ soit $d=1$. En prenant $x=-1$, on obtient $0=-a-\frac{b}{8}+\frac{c}{4}-\frac{d}{2}$ soit $c=-1$ et donc
$$\frac{x+1}{x(x-1)^3}=-\frac{1}{x}+\frac{2}{(x-1)^3}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}.$$
Ainsi
$$\begin{aligned}\int_2^3\frac{x+1}{x(x-1)^3}dx &= -\left[\ln x\right]_2^3-\left[\frac{1}{(x-1)^2}\right]_2^3+\left[\frac{1}{x-1}\right]_2^3+\left[\ln|x-1|\right]_2^3\\ &= \ln\frac{2}{3}+\ln 2+\frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Exercice 80 *On considère la fraction rationnelle* $F(x) = \frac{1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$. *Décomposer* F *en éléments simples et calculer* $\int_0^1 F(x)dx$.

Solution - Les polynômes x^2+x+1 et x^2-x+1 ont même discriminant $\Delta = -3$ et donc ils sont tous les deux irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. Ainsi la décomposition en éléments simples de F s'écrit

$$\frac{1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} = \frac{ax+b}{x^2+x+1} + \frac{cx+d}{x^2-x+1}.$$

En écrivant que $F(-x) = F(x)$, on déduit que $c = -a$ et $b = d$. En faisant $x = 0$, on obtient $1 = b + d$ soit $b = d = \frac{1}{2}$. En faisant $x = 1$, on obtient

$$\frac{1}{3} = \frac{a + \frac{1}{2}}{3} + c + \frac{1}{2} = -\frac{2a}{3} + \frac{2}{3},$$

et donc $a = \frac{1}{2}$ et $c = -\frac{1}{2}$. Finalement

$$\frac{1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} = \frac{1}{2}\frac{x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\frac{x-1}{x^2-x+1}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+x+1}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}, \\
\int \frac{x-1}{x^2-x+1}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-x+1}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1} \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-x+1}.
\end{aligned}$$

Maintenant

$$\begin{aligned}
x^2+x+1 &= (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right), \\
x^2-x+1 &= (x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(\left(\frac{2x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1\right),
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2+x+1} &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\\ \int \frac{dx}{x^2-x+1} &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).\end{aligned}$$

En combinant tout ce qui précède, et en utilisant le fait que $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{6}$ et $\arctan\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\pi}{3}$, on déduit que

$$\int_0^1 F(x)dx = \frac{1}{4}\ln 3 + \frac{\sqrt{3}\pi}{12}.$$

Exercice 81 *Calculer les intégrales suivantes :*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^3 x}dx,\quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos x}dx,\quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}.$$

Solution -

1. On pose
$$E(x) = \frac{\cos x dx}{1+\sin^3 x}.$$
On a $E(\pi-x)=E(x)$ car $\cos(\pi-x)=-\cos x$, $\sin(\pi-x)=\sin x$ et $d(\pi-x)=-dx$. D'après les règles de Bioche, on effectue le changement de variable $u=\sin x$. Ainsi $du=\cos x dx$ et donc
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^3 x}dx = \int_0^1 \frac{du}{1+u^3}.$$
Pour calculer l'intégrale de droite, nous allons d'abord décomposer en éléments simples la fraction $\frac{1}{1+u^3}$. Or
$$1+u^3=(1+u)(u^2-u+1)$$
et donc
$$\frac{1}{1+u^3}=\frac{a}{u+1}+\frac{bu+c}{u^2-u+1}.$$
En multipliant par $u+1$ et en faisant $u=-1$, on trouve $a=\frac{1}{3}$. En faisant $u=0$, on obtient $c+a=1$ et donc $c=\frac{2}{3}$. En multipliant par u

et en faisant tendre u vers l'infini, on obtient $0 = a + b$ et donc $b = -\frac{1}{3}$. Ainsi

$$\frac{1}{1+u^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{u+1} - \frac{u-2}{u^2-u+1}\right).$$

On continue la transformation :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+u^3} &= \frac{1}{3(u+1)} - \frac{1}{6}\frac{2u-4}{u^2-u+1} \\ &= \frac{1}{3(u+1)} - \frac{1}{6}\frac{2u-1}{u^2-u+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{u^2-u+1}. \end{aligned}$$

Or, dans l'exercice 80, nous avons vu que

$$\int \frac{1}{u^2-u+1}du = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{du}{1+u^3} &= \frac{1}{3}\left[\ln|1+u|\right]_0^1 - \frac{1}{6}\left[\ln(u^2-u+1)\right]_0^1 \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{3}\left[\arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\sqrt{3}\pi}{9}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^3 x}dx = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\sqrt{3}\pi}{9}.$$

2. On pose $E(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos x}dx$. On a $E(-x) = E(x)$ et donc, d'après les règles de Bioche, on effectue le changement de variable $u = \cos x$ et, puisque $du = -\sin x dx$, on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{\cos x}dx = -\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1-u^2}{u}du = -\left[\ln u - \frac{1}{2}u^2\right]_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}.$$

3. On pose

$$E(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}dx$$

On a $E(\pi + x) = E(x)$ car $\sin(\pi + x) = -\sin x$, $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $d(\pi + x) = dx$. D'après les règles de Bioche, on effectue le changement de variable $u = \tan x$, soit $du = (1 + u^2)dx$. Ainsi

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x(1-\tan x)}{\cos x(1+\tan x)}dx = \int_0^1 \frac{1-u}{(1+u)(1+u^2)}du.$$

On effectue la décomposition en éléments simples de $\frac{1-u}{(1+u)(1+u^2)}$. Cette décomposition s'écrit

$$\frac{1-u}{(1+u)(1+u^2)} = \frac{a}{1+u} + \frac{bu+c}{u^2+1}.$$

En multipliant par $u+1$ et en faisant $u=-1$, on trouve $a=1$. En faisant $u=0$, on obtient $c+a=1$ et donc $c=0$. En multipliant par u et en faisant tendre u vers l'infini, on obtient $0=a+b$ et donc $b=-1$. Ainsi

$$\frac{1-u}{(1+u)(1+u^2)} \quad = \quad \frac{1}{u+1} - \frac{u}{u^2+1} = \frac{1}{u+1} - \frac{1}{2}\frac{2u}{u^2+1}.$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{1-u}{(1+u)(1+u^2)}du \quad = \quad [\ln|u+1|]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\ln(1+u^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Finalement,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}dx = \frac{1}{2}\ln 2.$$

4. Aucune des règles de Bioche n'est valable dans ce cas, on effectue alors le changement de variable $u = \tan\frac{x}{2}$ et on utilise les relations

$$du = \frac{1}{2}(1+u^2)dx, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

On obtient alors que

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x} \quad &= \quad \int_0^1 \frac{2du}{(1+u^2)(2+\frac{1-u^2}{1+u^2})} = \int_0^1 \frac{2du}{3+u^2} \\ &= \quad \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{du}{1+(\frac{u}{\sqrt{3}})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\arctan(\frac{u}{\sqrt{3}})\right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}\pi}{9},\end{aligned}$$

car $\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$.

Exercice 82 *Calculer les intégrales suivantes :*

$$\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{\cosh x}{1+\sinh^3 x}dx, \quad \int_0^{\ln(2+\sqrt{3})} \frac{\sinh^3 x}{\cosh x}dx,$$
$$\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{\cosh x - \sinh x}{\cosh x + \sinh x}dx, \quad \int_0^{2\ln\sqrt{3}} \frac{dx}{2+\cosh x}dx.$$

Solution -
Le lecteur peut comparer cet exercice à l'exercice 81.

1. On pose
$$E(x) = \frac{\cos x}{1+\sin^3 x}dx$$
On a $E(\pi - x) = E(x)$ car $\cos(\pi - x) = -\cos x$, $\sin(\pi - x) = \sin x$ et $d(\pi - x) = -dx$. D'après les règles de Bioche, on effectue le changement de variable $u = \sinh x$. Ainsi
$$du = \cosh x dx, \quad \sinh 0 = 0 \quad \text{et} \quad \sinh(\ln(1+\sqrt{2})) = 1$$
et donc
$$\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{\cosh x}{1+\sinh^3 x}dx \quad = \quad \int_0^1 \frac{du}{1+u^3}.$$
Pour calculer l'intégrale de droite, nous allons d'abord décomposer en éléments simples la fraction $\frac{1}{1+u^3}$. Or $1 + u^3 = (1 + u)(u^2 - u + 1)$ et donc
$$\frac{1}{1+u^3} = \frac{a}{u+1} + \frac{bu+c}{u^2-u+1}.$$
En multipliant par $u + 1$ et en faisant $u = -1$, on trouve $a = \frac{1}{3}$. En faisant $u = 0$, on obtient $c + a = 1$ et donc $c = \frac{2}{3}$. En multipliant par u et en faisant tendre u vers l'infini, on obtient $0 = a + b$ et donc $b = -\frac{1}{3}$. Ainsi
$$\frac{1}{1+u^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{u+1} - \frac{u-2}{u^2-u+1}\right).$$
On continue la transformation :
$$\begin{aligned}\frac{1}{1+u^3} &= \frac{1}{3(u+1)} - \frac{1}{6}\frac{2u-4}{u^2-u+1} \\ &= \frac{1}{3(u+1)} - \frac{1}{6}\frac{2u-1}{u^2-u+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{u^2-u+1}.\end{aligned}$$
Or, dans l'exercice 80, nous avons vu que
$$\int \frac{1}{u^2-u+1}du = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{du}{1+u^3} &= \frac{1}{3}\left[\ln|1+u|\right]_0^1 - \frac{1}{6}\left[\ln(u^2-u+1)\right]_0^1 \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{3}\left[\arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\sqrt{3}\pi}{9}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{\cosh x}{1+\sinh^3 x}dx = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\sqrt{3}\pi}{9}.$$

2. On pose

$$E(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos x}dx.$$

On a $E(-x) = E(x)$ et donc, d'après les règles de Bioche, on effectue le changement de variable $u = \cosh x$. On a

$$du = \sinh x dx, \quad \cosh 0 = 1 \quad \text{et} \quad \cosh(\ln(2+\sqrt{3})) = 2,$$

, on obtient, en utilisant la relation $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$,

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln(2+\sqrt{3})} \frac{\sinh^3 x}{\cosh x}dx &= \int_0^{\ln(2+\sqrt{3})} \frac{(\cosh^2 x - 1)\sinh x}{\cosh x}dx \\ &= \int_1^2 \frac{u^2-1}{u}du = \left[\frac{1}{2}u^2 - \ln u\right]_1^2 = \frac{3}{2} - \ln 2.\end{aligned}$$

3. On pose

$$E(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}dx.$$

On a $E(\pi + x) = E(x)$ car $\sin(\pi + x) = -\sin x$, $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $d(\pi + x) = dx$. D'après les règles de Bioche, on effectue le changement de variable $u = \tanh x$, soit $du = (1-u^2)dx$. On a $\tanh 0 = 0$ et $\tanh(\ln\sqrt{3}) = \frac{1}{2}$. Ainsi

$$\begin{aligned}\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{\cosh x - \sinh x}{\cosh x + \sinh x}dx &= \int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{\cosh x(1-\tanh x)}{\cosh x(1+\tanh x)}dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-u}{(1+u)(1-u^2)}du \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{du}{(1+u)^2} = -\left[\frac{1}{1+u}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{\cosh x - \sinh x}{\cosh x + \sinh x} dx = \frac{1}{3}.$$

4. Aucune des règles de Bioche n'est valable dans ce cas, on effectue alors le changement de variable $u = \tanh\frac{x}{2}$ et on utilise les relations

$$du = \frac{1}{2}(1-u^2)dx, \quad \cos x = \frac{1+u^2}{1-u^2}.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\ln\sqrt{3}} \frac{dx}{2+\cosh x} &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2du}{(1-u^2)(2+\frac{1+u^2}{1-u^2})} \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2du}{3-u^2} = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{du}{1-(\frac{u}{\sqrt{3}})^2} \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\operatorname{arctanh}(\frac{u}{\sqrt{3}})\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\ln\left(\frac{2\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}-1}\right).
\end{aligned}$$

Exercice 83 *Calculer* $\int_0^1 \sqrt{-x^2+x+1}\, dx$ *et* $\int_{-1}^0 \sqrt{x^2-x+1}\, dx$ *puis* $\int_{-1}^1 \sqrt{1+|x(x-1)|}\, dx$.

Solution -
On a

$$\begin{aligned}
-x^2+x+1 &= -(x^2-x-1) = -((x-\frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}) = \frac{5}{4}\left(1-\left(\frac{2x}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2\right) \\
x^2-x+1 &= (x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left(1+\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

Pour calculer $\int_0^1 \sqrt{-x^2+x+1}\ dx$, on fait le changement de variable $\sin t = \frac{2x}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}$. Ainsi $dx = \frac{\sqrt{5}}{2}\cos t dt$ et donc

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{-x^2+x+1}\, dx &= \frac{5}{4}\int_{-\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}})}^{\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}})} |\cos t| \cos t dt \\
&= \frac{5}{4}\int_{-\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}})}^{\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}})} \cos^2 t dt \\
&= \frac{5}{8}\int_{-\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}})}^{\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}})} (1+\cos 2t) dt \\
&= \frac{5}{4}\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}}) + \frac{5}{16}\left[\sin(2t)\right]_{-\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}})}^{\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}})} \\
&= \frac{5}{4}\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}}) + \frac{5}{8}\sin(2\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}})).
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\sin(2\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}})) &= 2\sin(\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}}))\cos(\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}})) \\
&= \frac{2}{\sqrt{5}}(1-\sin^2(\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}})))^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{5}}(1-\frac{1}{5})^{\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_0^1 \sqrt{-x^2+x+1}\, dx = \frac{5}{4}\arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}}) + \frac{1}{2}.$$

Pour calculer $\int_{-1}^0 \sqrt{x^2-x+1}\ dx$, on fait le changement de variable $\sinh t = \frac{2x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ainsi $dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\cosh t dt$ et d'après la formule

$$\text{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}),$$

on déduit que

$$\text{arcsinh}(-\frac{3}{\sqrt{3}}) = \ln(2-\sqrt{3}) \quad \text{et} \quad \text{arcsinh}(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = -\frac{1}{2}\ln 3.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} \sqrt{x^2 - x + 1}\, dx &= \frac{3}{4} \int_{\ln(2-\sqrt{3})}^{-\frac{1}{2}\ln 3} |\cosh t| \cosh t dt \\
&= \frac{3}{4} \int_{\ln(2-\sqrt{3})}^{-\frac{1}{2}\ln 3} \cosh^2 t dt \\
&= \frac{3}{8} \int_{\ln(2-\sqrt{3})}^{-\frac{1}{2}\ln 3} (\cosh 2t + 1) dt \\
&= -\frac{3}{16} \ln 3 - \frac{3}{8} \ln(2 - \sqrt{3}) + \frac{3}{16} \left[\sinh(2t)\right]_{\ln(2-\sqrt{3})}^{-\frac{1}{2}\ln 3} \\
&= -\frac{3}{16} \ln 3 - \frac{3}{8} \ln(2 - \sqrt{3}) + \frac{3}{16} \sinh(\ln \frac{1}{3}) \\
&\quad -\frac{3}{16} \sinh(\ln((2 - \sqrt{3})^2))
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\sinh(\ln \frac{1}{3}) &= \frac{1}{2}(\frac{1}{3} - 3) = -\frac{8}{6}, \\
\sinh(\ln((2 - \sqrt{3})^2)) &= \sinh(\ln(7 - 4\sqrt{3})) = \frac{1}{2}(7 - 4\sqrt{3} + \frac{1}{7 - 4\sqrt{3}}) \\
&= \frac{1}{2}(7 - 4\sqrt{3} - \frac{7 + 4\sqrt{3}}{47 - 48}) = -4\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_{-1}^{0} \sqrt{x^2 - x + 1}\, dx = -\frac{3}{16} \ln 3 - \frac{3}{8} \ln(2 - \sqrt{3}) - \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Comme $x(x-1)$ positif sur $[-1, 0]$ et négatif sur $[0, 1]$, on déduit que

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + |x(x-1)|}\, dx = \int_{-1}^{0} \sqrt{x^2 - x + 1}\, dx + \int_{0}^{1} \sqrt{-x^2 + x + 1}\, dx$$

et donc

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + |x(x-1)|}\, dx = -\frac{3}{16} \ln 3 - \frac{3}{8} \ln(2 - \sqrt{3}) + \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{5}{4} \arcsin(\frac{1}{\sqrt{5}}).$$

Exercice 84 *Calculer les intégrales suivantes :*

$$\int_1^2 x\sqrt{x^2-2x+5}\,dx, \quad \int_0^1 \frac{\sqrt{x+2}}{x+1}dx,$$
$$\int_0^1 \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\frac{dx}{x+1}, \quad \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\frac{dx}{2x-1}.$$

Solution -

1. On écrit

$$\sqrt{x^2-2x+5} = \sqrt{(x-1)^2+4} = 2\sqrt{(\frac{x}{2}-\frac{1}{2})^2+1},$$

et on fait le changement de variable $\sinh t = \frac{x}{2}-\frac{1}{2}$. On a $dx = 2\cosh t dt$, $x = 2\sinh t + 1$ et, d'après la formule

$$\text{arcsinh} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1}),$$

on déduit que

$$\text{arcsinh}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \text{arcsinh}(\frac{1}{2}) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x\sqrt{x^2-2x+5}\,dx &= 4\int_0^{\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} (2\sinh t+1)\cosh^2 t dt \\
&= 4\int_0^{\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} (2\sinh t\cosh^2 t + \frac{1}{2}(\cosh(2t)+1)dt \\
&= \frac{8}{3}\left[\cosh^3 t\right]_0^{\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} + \left[\sinh 2t\right]_0^{\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} \\
&\quad +2\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \\
&= \frac{8}{3}\cosh^3(\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)) - \frac{8}{3} \\
&\quad +\sinh(2\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)) + 2\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).
\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\cosh(\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+\frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1}\right)=\frac{\sqrt{5}}{2},\\
\sinh(\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1}\right)=\frac{1}{2},\\
\sinh(2\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)) &= 2\sinh(\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right))\cosh(\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right))\\
&= \frac{\sqrt{5}}{2}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_1^2 x\sqrt{x^2-2x+5}\,dx=\frac{13\sqrt{5}}{6}-\frac{8}{3}+2\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

2. On fait le changement de variable $u=\sqrt{x+2}$. On a $du=\frac{dx}{2u}$ et $x=u^2-2$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_0^1\frac{\sqrt{x+2}}{x+1}dx &= \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\frac{2u^2du}{u^2-1}=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\frac{2(u^2-1)du}{u^2-1}+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\frac{2du}{u^2-1}\\
&= 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}du+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\frac{2du}{u^2-1}
\end{aligned}$$

Or

$$\frac{2}{u^2-1}=\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+1},$$

et donc

$$\int_0^1\frac{\sqrt{x+2}}{x+1}dx=2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\ln\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right)-\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right).$$

3. On effectue le changement de variable $u=\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$. On a $u^3=\frac{x-1}{x+1}$, soit $x=\frac{u^3+1}{1-u^3}$ et donc $dx=\frac{6u^2}{(u^3-1)^2}$. D'un autre côté, $x+1=\frac{2}{1-u^3}$. Il en

résulte que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\frac{dx}{x+1} &= = -3\int_{-1}^0 \frac{u^3}{u^3-1}du \\ &= -3\int_{-1}^0 du - 3\int_{-1}^0 \frac{du}{u^3-1} = -3 - \int_{-1}^0 \frac{3du}{u^3-1}.\end{aligned}$$

La décomposition en éléments simples de $\frac{3}{u^3-1}$ donne

$$\frac{3}{u^3-1} = \frac{1}{u-1} - \frac{u+2}{u^2+u+1} = \frac{1}{u-1} - \frac{1}{2}\frac{2u+1}{u^2+u+1} - \frac{3}{2}\frac{1}{u^2+u+1}.$$

Dans l'exercice 80, nous avons montré que

$$\int \frac{du}{u^2+u+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

On déduit alors que

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 \frac{3du}{u^3-1} &= [\ln|u-1|]_{-1}^0 - \frac{1}{2}\left[\ln(u^2+u+1)\right]_{-1}^0 \\ &\quad -\sqrt{3}\left[\arctan\left(\frac{2u}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-1}^0 \\ &= -\ln 2 - 2\sqrt{3}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\ln 2 - \frac{\sqrt{3}\pi}{3}.\end{aligned}$$

Finalement,

$$\int_0^1 \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\frac{dx}{x+1} = -3 + \ln 2 + \frac{\sqrt{3}\pi}{3}.$$

4. On effectue le changement de variable $u = \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$. On a $u^2 = \frac{x+1}{1-x}$, soit $x = \frac{u^2-1}{u^2+1}$ et $dx = \frac{4udu}{(u^2+1)^2}$. D'un autre côté, $2x-1 = \frac{u^2-3}{1+u^2}$. Ainsi

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\frac{dx}{2x-1} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{4u^2du}{(u^2-3)(1+u^2)}.$$

La décomposition en éléments simples de $\frac{4u}{(u^2-3)(1+u^2)}$ donne

$$\frac{4u^2}{(u^2-3)(1+u^2)} = \frac{\sqrt{3}}{2(u-\sqrt{3})} - \frac{\sqrt{3}}{2(u+\sqrt{3})} + \frac{1}{u^2+1}.$$

On déduit alors que

$$\begin{aligned}
\int_1^{\sqrt{2}} \frac{4u^2du}{(u^2-3)(1+u^2)} &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\ln|u-\sqrt{3}|\right]_1^{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\ln(u+\sqrt{3})\right]_1^{\sqrt{2}} \\
&\quad + [\arctan u]_1^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\ln(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}) - \frac{\sqrt{3}}{2}\ln(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}) \\
&\quad + \arctan(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}\frac{dx}{2x-1} &= \frac{\sqrt{3}}{2}\ln(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}) - \frac{\sqrt{3}}{2}\ln(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}) \\
&\quad + \arctan(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Chapitre 8

Intégrales généralisées

Dans le chapitre 6, nous avons définis et étudié les propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. Dans ce chapitre, il s'agit de généraliser cette étude à toute fonction f définie sur un intervalle semi-ouvert $[a, b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (resp. $]a, b]$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$) qui est continue par morceaux sur tout intervalle de la forme $[a, c]$ avec $c \in [a, b[$ (resp. $[c, b]$ avec $c \in]a, b]$). Une telle fonction sera dite continue par morceaux sur $[a, b[$ (resp. $]a, b]$).

8.1 Intégrale généralisée convergente

Les définitions seront données sur les intervalles de la forme $[a, b[$ ou $[a, +\infty[$, le lecteur peut étendre sans difficultés ces définitions aux cas des intervalles de la forme $]a, b]$ et $]-\infty, a]$.

Définition 27 1. *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si $\lim_{x \longrightarrow b^-} \int_a^x f(t)dt$ existe et est finie. On pose alors*

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \longrightarrow b^-} \int_a^x f(t)dt.$$

Dans le cas contraire, on dira que $\int_a^b f(t)dt$ est divergente.

2. *Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$. On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente si $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$ existe et est*

finie. On pose alors

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x\longrightarrow+\infty}\int_a^x f(t)dt.$$

Dans le cas contraire, on dira que $\int_a^b f(t)dt$ *est divergente.*

Déterminer la nature d'une intégrale généralisée c'est dire si elle est convergente ou divergente.

Soit f continue par morceaux sur $[a,b[$ avec $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Pour tout $c\in]a,b[$, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ ont la même nature et si l'une des deux converge on a la relation de Chasle

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt. \tag{8.1}$$

Soit f continue par morceaux sur $]a,b[$ avec $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ et $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$. Alors

$$\int_a^b f(t)dt \quad \text{converge} \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^c f(t)dt \ \text{ et } \ \int_c^b f(t)dt \ \text{ convergent,}$$

où $c\in]a,b[$.

Si f et g sont continues par morceaux sur $[a,b[$ avec $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ et si $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont convergentes alors, pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$, $\int_a^b (f(t)+\alpha g(t))dt$ est convergente et on a

$$\int_a^b (f(t)+\alpha g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \alpha\int_a^b g(t)dt.$$

Remarque - La convergence de l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ n'a de sens que si f n'est pas bornée au voisinage de b, par exemple, si $\lim_{x\longrightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$. Si cette limite est finie, f se prolonge par continuité en b et on retrouve une intégrale classique. On dit alors que $\int_a^b f(t)dt$ est une fausse intégrale généralisée. Par exemple, $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ et donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ est une fausse intégrale généralisée.

Exemples - (Intégrales de Riemann)

1. Au voisinage de 0. On considère l'intégrale généralisée

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha},$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$**. Pour tout** $x \in]0,1]$**, on a**

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} -\ln x & \textbf{si} \quad \alpha = 1, \\ \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right) & \textbf{si} \quad \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Puisque $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ **et**

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = \begin{cases} 0 & \textbf{si} \quad \alpha < 1, \\ +\infty & \textbf{si} \quad \alpha > 1, \end{cases}$$

on déduit que

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} \quad \textbf{converge} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 1. \tag{8.2}$$

et dans ce cas

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

2. Au voisinage de $+\infty$**. On considère l'intégrale généralisée**

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha},$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$**. Pour tout** $x \in [1, +\infty[$**, on a**

$$\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \ln x & \textbf{si} \quad \alpha = 1, \\ \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right) & \textbf{si} \quad \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Puisque $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ **et**

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = \begin{cases} +\infty & \textbf{si} \quad \alpha < 1, \\ 0 & \textbf{si} \quad \alpha > 1, \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \quad \textbf{converge} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1. \tag{8.3}$$

et dans ce cas

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

8.2 Intégrales généralisées des fonctions positives

Dans ce paragraphe, $[a, b[$ est un intervalle semi-ouvert avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Si f est une fonction continue par morceaux et positive sur $[a, b[$ alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est croissante et admettra une limite en b si elle est bornée. Cette remarque a pour conséquence les propositions suivantes.

Proposition 39 *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ et telles qu'il existe $c \in [a, b[$, pour tout $x \in [c, b[$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Alors :*

1. *Si $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge.*
2. *Si $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ diverge.*

Exemple - Nous allons étudier la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{1+t^2} dt$. La fonction $t \mapsto \frac{\sin^2 t}{1+t^2}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$ et on a, pour tout $t \in [0, +\infty[$,

$$0 \leq \frac{\sin^2 t}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

Or

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

Il en résulte que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ est convergente et, en vertu de la proposition 39, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{1+t^2} dt$ est convergente.

Proposition 40 *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ et telles qu'il existe $c \in [a, b[$ avec f et g sont* **positives** *sur $[c, b[$ et $f(x) = o_b(g(x))$. Alors si $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge.*

Proposition 41 *Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b[$ et telles qu'il existe $c \in [a, b[$ avec f et g sont* **positives** *sur $[c, b[$ et $f(x) \sim_b (g(x))$. Alors $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ sont de même nature.*

Exemples -

1. **Nous allons étudier la nature de** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}dt$. **La fonction** $t \mapsto \frac{\ln t}{t^2+1}$ **est continue et positive sur** $[1, +\infty[$. **En plus,**
$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} t^{\frac{3}{2}} \frac{\ln t}{t^2+1} = 0$$
et donc $\dfrac{\ln t}{t^2+1} = o_{+\infty}\left(\dfrac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right)$. **L'intégrale de Riemann** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}$ **est convergente en vertu de (8.3) et la proposition 40 permet de déduire que** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+1}dt$ **est convergente.**
2. **Nous allons étudier la nature de** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{t}}{t}dt$. **La fonction** $t \mapsto \frac{\sin\sqrt{t}}{t}$ **est continue et positive sur** $]0, 1]$. **En plus,**
$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{\sin\sqrt{t}}{t} \times \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{t}}} = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}} = 1$$
et donc $\dfrac{\sin\sqrt{t}}{t} \sim_0 \dfrac{1}{\sqrt{t}}$. **Or l'intégrale** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ **est une intégrale de Riemann qui est convergente en vertu de (8.2). Ainsi, grâce à la proposition 41, on peut déduire que** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin\sqrt{t}}{t}dt$ **est convergente.**

8.3 Convergence absolue

Définition 28 *Soit f continue par morceaux sur $[a, b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dira que que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente.*

La convergence absolue entraîne la convergence.

Proposition 42 *Soit f continue par morceaux sur $[a, b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente alors elle est convergente et on a*
$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt.$$

Exemple -Nous allons montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(1/t)}{\sqrt{\sin t}}dt$ **est absolument convergente. La fonction** $t \mapsto \frac{\sin(1/t)}{\sqrt{\sin t}}$ **est continue sur** $]0, 1]$ **et ne garde pas un**

signe constant au voisinage de 0. On a

$$0 \leq \left|\frac{\sin(1/t)}{\sqrt{\sin t}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{\sin t}} \sim_0 \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

Or $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ **est une intégrale de Riemann convergente en vertu de (8.2). Ainsi, en vertu de la proposition 41,** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\sin t}}$ **est convergente et donc** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(1/t)}{\sqrt{\sin t}}dt$ **est absolument convergente et donc convergente.**

Définition 29 *Soit f continue par morceaux sur $[a, b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dira que que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est semi-convergente si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ est divergente et $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente.*

On montrera, dans la dernière section, que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ est semi-convergente.

La remarque suivante est très utile en pratique.

Remarques -

1. **Si on a** $\alpha < 1$ **et** $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0} t^\alpha f(t) = 0$ **alors** $|f(t)| = o_0\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ **et puisque** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ **est convergente (voir (8.2)) on déduit, grâce à la proposition 40, que** $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ **est absolument convergente et donc convergente.**
2. **Si on a** $\alpha > 1$ **et** $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = 0$ **alors** $|f(t)| = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ **et puisque** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ **est convergente (voir (8.3)) on déduit, grâce à la proposition 40, que** $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)dt$ **est absolument convergente et donc convergente.**

8.4 Intégration par parties et changement de variables

Dans ce paragraphe, $[a, b[$ est un intervalle semi-ouvert avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Théorème 25 *Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur $[a,b[$ telles que $\lim\limits_{t\longrightarrow b^-} u(t)v(t)$ existe et est finie. Alors $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)dt$ sont de même nature et quand elles* **convergent** *on a*

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^{b^-} - \int_a^b u(t)v'(t)dt.$$

Remarque - Ce théorème est à utiliser avec précaution : on commence d'abord par calculer $\lim\limits_{t\longrightarrow b^-} u(t)v(t)$ et étudier la convergence des intégrales $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)dt$, il suffit d'établir la convergence de l'une des deux et une fois on a la convergence on peut écrire l'égalité ci-dessus.

Exemple - En utilisant le théorème 25 nous allons montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ est convergente. Posons $u'(t) = \sin t$ et $v(t) = \frac{1}{t}$. On a

$$\lim_{t\longrightarrow +\infty} u(t)v(t) = \lim_{t\longrightarrow +\infty} \frac{-\cos t}{t} = 0,$$

car $0 \leq \left|\frac{-\cos t}{t}\right| \leq \frac{1}{|t|}$. D'un autre côté,

$$\int_1^{+\infty} u(t)v'(t)dt = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}dt$$

qui est une intégrale généralisée absolument convergente. En effet,

$$\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{t^2},$$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, d'après (8.3), et la proposition (39) permet de conclure. Finalement, les conditions du théorème 25 sont vérifiées et donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ est convergente.

Nous allons maintenant montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ n'est pas absolument convergente. Soit k un entier supérieur ou égal à 3. On a

$$\begin{aligned}\int_1^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t}dt \geq & \int_\pi^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t}dt = \sum_{j=1}^{k-1} \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}dt \\ \geq & \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{(j+1)\pi} \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} |\sin t|dt.\end{aligned}$$

Or
$$\int_{j\pi}^{(j+1)\pi} |\sin t|dt = \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} \sin t dt = 2,$$
et donc
$$\int_{1}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t}dt \geq \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j+1}.$$
D'un autre côté,
$$\sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j+1} \geq \sum_{j=1}^{k-1} \int_{j+1}^{j+2} \frac{dx}{x} = \int_{2}^{k+1} \frac{dx}{x} = \ln(\frac{k+1}{2})$$
et ainsi
$$\int_{1}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t}dt \geq \frac{2\ln(\frac{k+1}{2})}{\pi}.$$
Puisque $\lim_{k\longrightarrow+\infty} \ln(\frac{k+1}{2}) = +\infty$**, on déduit alors que** $\int_{1}^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}dt$ **est divergente. En conclusion,** $\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ **est semi-convergente.**

Un raisonnement analogue à celui de cet exemple permet de déduire le critère de convergence suivant connu sous le nom de critère de Dirichlet.

Théorème 26 (**Critère de Dirichlet**) *Soit f continue sur $[a,b[$ et soit g de classe C^1 sur $[a,b[$. On suppose que $F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$ est bornée sur $[a,b[$, $\int_{a}^{b} g'(t)dt$ est absolument convergente et $\lim_{x\longrightarrow b^-} g(x) = 0$. Alors $\int_{a}^{b} f(t)g(t)dt$ est convergente.*

Exemple - En utilisant le critère de Dirichlet, nous allons montrer que, pour tout $0 < \alpha \leq 1$, $\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}dt$ **est convergente. Posons** $f(t) = \sin t$ **et** $g(t) = \frac{1}{t^\alpha}$**. Ces fonctions sont de classe** C^1 **sur** $[1,+\infty[$**. La fonction**
$$F(x) = \int_{1}^{x} f(t)dt = -\cos x + \cos 1$$
vérifie pour tout $x \in [1,+\infty[$, $|F(x)| \leq 2$ **et donc elle est bornée. D'un autre côté,**
$$\int_{1}^{+\infty} |g'(t)|dt = \alpha\int_{1}^{+\infty} \frac{dt}{t^{\alpha+1}}$$
qui est convergente en vertu de (8.3). En plus, $\lim_{t\longrightarrow+\infty} g(t) = 0$**. Les conditions du théorème 26 sont vérifiées et donc** $\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}dt$ **est convergente.**

Nous allons achever ce chapitre par le changement de variable dans les intégrales généralisées.

Théorème 27 *Soit ϕ de classe C^1 et monotone sur $[a,b[$ et f continue sur $\phi([a,b[)$. Alors $\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt$ et $\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)du$ sont de même nature et quand elles convergent on a*

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(u)du.$$

Remarque - Un changement de variable peut transformer une intégrale simple en une intégrale généralisée et vise versa. Par exemple, $\int_0^\pi \frac{dt}{2+\cos t}$ est transformée après le changement de variable $u = \tan\frac{t}{2}$ en $\int_0^{+\infty} \frac{2du}{3+u^2}$.

Exemple - On étudier la nature de $\int_0^{+\infty} \sin(e^t)dt$. On fait le changement de variable $u = e^t$. Ainsi $\sin(e^t)dt = \frac{\sin u}{u}du$ et donc $\int_0^{+\infty} \sin(e^t)dt$ et de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}du$ qui est convergente comme nous l'avons vu plus haut.

8.5 Exercices corrigés

Exercice 85 *Calculer les intégrales généralisées suivantes :*

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^2dx, \quad \int_1^{+\infty} e^{-x}\sin x dx, \quad \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$\int_0^{\pi}\left(\frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2}\right)dx, \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}+\frac{\cos x}{x^2}\right)dx.$$

Solution -

1. Soit $t>0$. Une double intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{-x}x^2dx &= -\left[e^{-x}x^2\right]_0^t + 2\int_0^t xe^{-x}dx \\ &= -t^2e^{-t} + 2\left(-\left[e^{-x}x\right]_0^t + \int_0^t e^{-x}dx\right) \\ &= -t^2e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t} + 2.\end{aligned}$$

Ainsi
$$\int_0^{+\infty} e^{-x}x^2dx = \lim_{t\longrightarrow+\infty}\int_0^t e^{-x}x^2dx = 2.$$

2. Soit $t>0$. Une double intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{-x}\sin xdx &= -\left[e^{-x}\sin x\right]_0^t + \int_0^t e^{-x}\cos xdx \\ &= -e^{-t}\sin t + \left(-\left[e^{-x}\cos x\right]_0^t - \int_0^t e^{-x}\sin xdx\right) \\ &= -e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t + 1 - \int_0^t e^{-x}\sin xdx.\end{aligned}$$

De cette relation, on déduit que

$$\int_0^t e^{-x}\sin xdx = \frac{1}{2}\left(-e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t + 1\right).$$

Puisque, $\lim\limits_{t\longrightarrow+\infty} e^{-t} = 0$ et $\sin t$ et $\cos t$ sont bornés, on obtient

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}\sin xdx = \lim_{t\longrightarrow+\infty}\int_0^t e^{-x}\sin xdx = \frac{1}{2}.$$

3. Pour $0 \leq t < 1$, on a
$$\int_0^t \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[-\sqrt{1-x^2}\right]_0^t = -\sqrt{1-t^2}+1.$$
Ainsi
$$\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\longrightarrow 1^-} \int_0^t \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = 1.$$

4. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx$ convergent. Commençons par calculer une primitive de $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$. Une intégration par parties donne
$$\begin{aligned}\int \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx &= x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \int x \times \frac{-2}{x^3} \times \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} dx\\ &= x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + 2\int \frac{dx}{x^2+1}\\ &= x\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + 2\arctan x.\end{aligned}$$
Ainsi
$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx &= \lim_{t\longrightarrow 0^+} \int_t^1 \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx\\ &= \lim_{t\longrightarrow 0^+} \left(\ln 2 + \frac{\pi}{2} - t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) - 2\arctan t\right)\\ &= \ln 2 + \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$
car
$$\lim_{t\longrightarrow 0^-} t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) = \lim_{t\longrightarrow 0^-} (t\ln(1+t^2) - 2t\ln t) = 0.$$
De la même,
$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx &= \lim_{t\longrightarrow +\infty} \int_1^t \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx\\ &= \lim_{t\longrightarrow +\infty} \left(t\ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right) + 2\arctan t - \ln 2 - \frac{\pi}{2}\right)\\ &= \frac{\pi}{2} - \ln 2,\end{aligned}$$

car $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} \arctan t = \dfrac{\pi}{2}$ et $\ln(1+\frac{1}{t^2}) \sim_{+\infty} \frac{1}{t^2}$. Finalement,

$$\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx = \int_0^1 \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx + \int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) dx = \pi.$$

5. Pour $t > 0$, on a

$$\int_t^{\pi} \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right) dx = \left[\frac{\sin x}{x}\right]_t^{\pi} = -\frac{\sin t}{t}.$$

Ainsi

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right) dx = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \int_t^{\pi} \left(\frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right) dx = -1.$$

6. Pour $t > 0$, on a

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \left(\frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x}{x^2}\right) dx = -\left[\frac{\cos x}{x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{t} = -\frac{\cos t}{t}.$$

Or $0 \leq \left|\frac{\cos t}{t}\right| \leq \frac{1}{t}$ et ainsi

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x}{x^2}\right) dx = \lim_{t \longrightarrow +\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{t} \left(\frac{\sin x}{x} + \frac{\cos x}{x^2}\right) dx = 0.$$

Exercice 86 *Etudier la nature des intégrales généralisées suivantes :*

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx, \quad \int_0^1 \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1} dx,$$
$$\int_0^{+\infty} \ln x e^{-x} dx, \quad \int_0^{+\infty} \sqrt{x} \ln(1+\frac{1}{x}) dt, \quad , \quad \int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3} dx.$$

Solution -

1. On a $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1$ et donc la fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x^2)}{x^2}$ se prolonge par continuité en 0 et par suite $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} dx$ est une fausse intégrale généralisée et donc converge.

2. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}}$ converge si et seulement si les deux intégrales $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}}$ et $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}}$ convergent.

   La fonction $x \mapsto \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}$ est continue et positive sur $]0, \frac{1}{2}]$ et
$$\frac{1}{(1-x)\sqrt{x}} \sim_0 \frac{1}{\sqrt{x}}.$$
   Donc, d'après la proposition 41, les intégrales $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}}$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ont la même nature. Or
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\longrightarrow 0^+} \int_t^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\longrightarrow 0^+} \left[2\sqrt{x}\right]_t^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}.$$
   Donc $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}}$ est convergente.
   La fonction $x \mapsto \frac{1}{(1-x)\sqrt{x}}$ est continue et positive sur $[\frac{1}{2}, 1[$ et
$$\frac{1}{(1-x)\sqrt{x}} \sim_1 \frac{1}{1-x}.$$
   Donc, d'après la proposition 41, les intégrales $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}}$ et $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{1-x}$ ont la même nature. Or
$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{t\longrightarrow 1^-} \int_{\frac{1}{2}}^t \frac{dx}{1-x} = \lim_{t\longrightarrow 1^-} \left[-\ln|1-x|\right]_{\frac{1}{2}}^t = +\infty.$$
   Donc $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}}$ est divergente.
   En conclusion, $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)\sqrt{x}}$ est divergente.

3. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}dx$ converge si et seulement si les deux intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2+1}dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}dx$ convergent.
   Posons $f(x) = \frac{\ln x}{x^2+1}$. On a $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^+} \sqrt{x}|f(x)| = 0$ et donc
$$|f(x)| = o_0\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Puisque $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ est une intégrale de Riemann convergente (voir (8.2)) on déduit, grâce à la proposition 40, que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ est absolument convergente et donc convergente.
De même, on a $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} x^{\frac{3}{2}}|f(x)| = 0$ et donc

$$|f(x)| = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{x^{\frac{3}{2}}}$ est une intégrale de Riemann convergente (voir (8.3)) on déduit, grâce à la proposition 40, que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ est absolument convergente et donc convergente.
En conclusion, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}dx$ converge.

4. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln x e^{-x}dx$ converge si et seulement si les deux intégrales $\displaystyle\int_0^1 \ln x e^{-x}dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln x e^{-x}dx$ convergent.
Posons $f(x) = \ln x e^{-x}$. On a $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0^+} \sqrt{x}|f(x)| = 0$ et donc

$$|f(x)| = o_0\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Puisque $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ est une intégrale de Riemann convergente (voir (8.2)) on déduit, grâce à la proposition 40, que $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ est absolument convergente et donc convergente.
De même, on a $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow+\infty} x^2|f(x)| = 0$ et donc

$$|f(x)| = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est une intégrale de Riemann convergente (voir (8.3)) on déduit, grâce à la proposition 40, que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ est absolument

convergente et donc convergente.
En conclusion, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln x e^{-x} dx$ converge.

5. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{x}\ln(1+\frac{1}{x})dx$ converge si et seulement si les deux intégrales $\displaystyle\int_0^{1} \sqrt{x}\ln(1+\frac{1}{x})dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sqrt{x}\ln(1+\frac{1}{x})dx$ convergent.
On a
$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} \sqrt{x}\ln(1+\frac{1}{x}) = \lim_{x\longrightarrow 0^+} \left(\sqrt{x}\ln(1+x) - \sqrt{x}\ln x\right) = 0,$$
et donc la fonction $x \mapsto \sqrt{x}\ln(1+\frac{1}{x})$ se prolonge par continuité en 0. Ainsi $\displaystyle\int_0^{1} \sqrt{x}\ln(1+\frac{1}{x})dx$ est une fausse intégrale généralisée et donc converge.
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}\ln(1+\frac{1}{x})$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$ et
$$\sqrt{x}\ln(1+\frac{1}{x}) \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$
Donc, d'après la proposition 41, les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sqrt{x}\ln(1+\frac{1}{x})dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}dx$ ont la même nature. Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}dx$ est une intégrale de Riemann divergente (voir (8.3)) et par suite $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sqrt{x}\ln(1+\frac{1}{x})dx$ est divergente.
En conclusion, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{x}\ln(1+\frac{1}{x})dx$ diverge.

6. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x-\sin x}{x^3}dx$ converge si et seulement si les deux intégrales $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x-\sin x}{x^3}dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x-\sin x}{x^3}dx$ convergent.
Or
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)$$
et donc $\displaystyle\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1}{6}$ et et donc la fonction $x \mapsto \frac{x-\sin x}{x^3}$ se prolonge par continuité en 0, ainsi $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x-\sin x}{x^3}dx$ est une fausse intégrale généralisée et donc converge.

D'un autre côté, la fonction $x \mapsto \frac{x-\sin x}{x^3}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$ car $\sin x \leq x$ pour $x > 0$ et

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} x^2 \times \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x} = 1$$

et par suite $\frac{x-\sin x}{x^3} \sim_{+\infty} \frac{1}{x^2}$. Donc, d'après la proposition 41, les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3} dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} dx$ ont la même nature.
Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} dx$ est une intégrale de Riemann convergente (voir (8.3)) et par suite $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3} dx$ est convergente.
En conclusion, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3} dx$ converge.

Exercice 87 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Le but de l'exercice est d'étudier la convergence de l'intégrale dite* **intégrale de Bertrand** *définie par*

$$I_{a,b} = \int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^a (\ln t)^b}.$$

1. *Pour $a > 1$, montrer que $I_{a,b}$ converge.*
2. *Pour $a = 1$, calculer $\displaystyle\int_e^x \frac{dt}{t(\ln t)^b}$ et déterminer les valeurs de b pour lesquelles $I_{1,b}$ converge.*
3. *On suppose $a < 1$, en utilisant le fait que $\displaystyle\lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{t}{t^a (\ln t)^b} = +\infty$, montrer que $I_{a,b}$ diverge.*

Solution -

1. La fonction $f(t) = \frac{1}{t^a (\ln t)^b}$ est continue et positive sur $[e, +\infty[$ et pour $\alpha \in]1, a[$

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} t^\alpha f(t) = \lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{1}{t^{a-\alpha} (\ln t)^b} = 0.$$

Donc

$$f(t) = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^\alpha}\right).$$

Puisque $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est une intégrale de Riemann convergente (voir (8.3)) on déduit, grâce à la proposition 40, que $\displaystyle\int_e^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.

2. On effectue le changement de variable $u = \ln t$. Ainsi $du = \frac{dt}{t}$ et donc

$$\int_e^x \frac{dt}{t(\ln t)^b} = \int_1^{lnx} \frac{du}{u^b}.$$

Cette intégrale est une intégrale de Riemann et converge si et seulement si $b > 1$ (voir (8.3)). En conclusion, $I_{1,b}$ converge si et seulement si $b > 1$.

3. $\displaystyle\lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{t}{t^a(\ln t)^b} = +\infty$, on déduit que, pour t suffisamment grand,

$$\frac{t}{t^a(\ln t)^b} \geq 1$$

et donc

$$\frac{1}{t^a(\ln t)^b} \geq \frac{1}{t}.$$

Or l'intégrale $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t}$ est une intégrale de Riemann divergente (voir (8.3)), on déduit, en vertu de la proposition 39, que $I_{a,b}$ diverge.

Exercice 88 *Montrer que les intégrales généralisées suivantes sont absolument convergentes :*

$$\int_0^1 (\ln x)\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) dx, \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos x dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{(\ln x)\cos x}{x^{\frac{3}{2}}} dx.$$

Solution -

1. Pour tout $x \in]0, 1]$, on a

$$\left|(\ln x)\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right| \leq |\ln x| = -\ln x.$$

Nous allons montrer que $\int_0^1 \ln x dx$ est convergente. Or, pour tout $t \in]0, 1]$, en faisant une intégration par parties, on obtient

$$\int_t^1 \ln x dx \quad = \quad [x \ln x]_t^1 - \int_t^1 x \times \frac{1}{x} dx = -t \ln t + t - 1.$$

Ainsi
$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \int_t^1 \ln x dx = -1.$$
Maintenant on déduit, en vertu de la proposition 39, que
$$\int_0^1 \left| (\ln x) \left(\sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) \right| dx$$
est convergente, ce qui permet de conclure.

2. On a, pour tout $x \in [0, +\infty[$,
$$|e^{-x^2} \cos(x)| \leq e^{-x^2}.$$
Nous allons montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est convergente. On écrit
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$
La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$ et $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} x^2 e^{-x^2} = 0$. Donc
$$e^{-x^2} = o_{+\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right).$$
Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est une intégrale de Riemann convergente (voir (8.3)) on déduit, grâce à la proposition 40, que $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ est convergente. Maintenant, en utilisant la proposition 39, on déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |e^{-x^2} \cos(x)| dx$ est convergente, ce qui permet de conclure.

3. Pour tout $x \geq 1$, on a
$$\left| \frac{(\ln x) \cos x}{x^{\frac{3}{2}}} \right| \leq \frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}.$$
Nous allons montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}} dx$ est convergente. Or
$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}} dx = \int_1^e \frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}} dx + \int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}} dx.$$

Avec les notations de l'exercice 87, on a

$$\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}} dx = I_{\frac{3}{2},-1}$$

qui est une intégrale de Bertrand convergente, d'après l'exercice 87. La proposition 39 permet de conclure.

Exercice 89 (**Intégrales d'Euler**). *On pose*

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx \quad et \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)dx.$$

1. *Montrer que I et J sont convergentes et que $I = J$.*
2. *Calculer $I + J$ et en déduire les valeurs de I et J.*

Solution -

1. La fonction $x \mapsto \ln(\sin x)$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. En plus $\ln(\sin x) \sim_0 \ln x$ et donc $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(\sin x) = 0$. Ainsi

$$|\ln(\sin x)| = o_0\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Puisque $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ est une intégrale de Riemann convergente (voir (8.2)) on déduit, grâce à la proposition 40, que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx$ est absolument convergente et donc convergente.
On effectue le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - x$. On a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \ln(\sin(\frac{\pi}{2} - u))(-du) = J.$$

En vertu du théorème 27, on déduit que J est convergente.

2. On a

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x \cos x)dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\frac{1}{2}\sin 2x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(2)dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)dx - \frac{\pi \ln 2}{2}. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $u = 2x$, on obtient

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)dx = \int_0^{\pi} \ln(\sin u)du = I + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin u)du.$$

En effectuant le changement de variable $v = \pi - u$, on obtient

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin u)du = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln(\sin(\pi - v))dv = J.$$

Ainsi

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin 2x)dx - \frac{\pi \ln 2}{2} = \frac{1}{2}(I + J) - \frac{\pi \ln 2}{2},$$

soit

$$I = J = -\frac{\pi \ln 2}{2}.$$

Exercice 90 *Etudier la convergence des intégrales généralisées*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}dx \quad , \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx.$$

Solution - On applique le critère de Dirichlet (*cf.* théorème 26).

1. Posons $f(x) = \cos x$ et $g(x) = \frac{1}{x}$. Ces fonctions sont de classe C^1 sur $[1, +\infty[$. La fonction $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt = \sin x - \sin 1$ vérifie pour tout $x \in [1, +\infty[$, $|F(x)| \leq 2$ et donc elle est bornée. D'un autre côté,

$$\int_1^{+\infty} |g'(t)|dt = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$$

qui est convergente en vertu de (8.3). En plus, $\lim_{t \longrightarrow +\infty} g(t) = 0$. Les conditions du critère de Dirichlet (*cf.* théorème 26) sont vérifiées et donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x}dx$ est convergente.

2. Posons $f(x) = \cos x$ et $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Ces fonctions sont de classe C^1 sur $[1, +\infty[$. La fonction $F(x) = \int_1^x f(t)dt = \sin x - \sin 1$ vérifie pour tout $x \in [1, +\infty[$, $|F(x)| \leq 2$ et donc elle est bornée. D'un autre côté,

$$\int_1^{+\infty} |g'(t)|dt = 2\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3}$$

qui est convergente en vertu de (8.3). En plus, $\lim_{t \longrightarrow +\infty} g(t) = 0$. Les conditions du critère de Dirichlet (*cf.* théorème 26) sont vérifiées et donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}dx$ est convergente.

Exercice 91 *Montrer que les intégrales généralisées*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx \quad et \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}dx$$

sont convergentes et calculer leurs valeurs en fonction de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$*.*
(On pourra utiliser une intégration par parties.)

Solution -
Nous allons étudier la convergence en 0 et $+\infty$. En 0, on a

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\sin^4 x}{x^2} = 0,$$

et donc, les deux intégrales $\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$ et $\int_0^1 \frac{\sin^4 x}{x^2}dx$ sont des faux intégrales généralisées et donc convergentes.
D'un autre côté, pour tout $x > 0$, on a

$$0 \leq \frac{\sin^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad 0 \leq \frac{\sin^4 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}.$$

Puisque $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}^2$ est une intégrale de Riemann convergente en vertu de (8.3), on déduit, grâce à la proposition 39, que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}dx$

sont convergentes.
En conclusion, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx$ sont convergentes.
Maintenant, nous allons utiliser l'intégration par parties des intégrales généralisées (*cf.* Théorème 25).
Posons $u(x) = -\frac{1}{x}$ et $v(x) = \sin^2 x$. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow 0^+} u(x)v(x) &= -\lim_{x \longrightarrow 0^+} \sin x \frac{\sin x}{x} = 0, \\
\lim_{x \longrightarrow +\infty} u(x)v(x) &= -\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x} = 0, \qquad (\text{car } 0 \leq \frac{\sin^2 x}{x} \leq \frac{1}{x}).
\end{aligned}$$

Puisque

$$\int_0^{+\infty} u'(x)v(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

est convergente, d'après le théorème 25,

$$\int_0^{+\infty} u(x)v'(x)dx = -\int_0^{+\infty} \frac{2\sin x \cos x}{x} dx$$

est convergente et on a

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx &= -\left[\frac{\sin^2 x}{x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2\sin x \cos x}{x} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx.
\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $u = 2x$, on déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du.$$

Finalement,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

De la même manière, en appliquant le théorème 25, on déduit que

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx &= -\left[\frac{\sin^4 x}{x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{4\cos x \sin^3 x}{x} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{4\cos x \sin^3 x}{x} dx.
\end{aligned}$$

Or

$$4\cos x\sin^3 x = 2\sin(2x)\sin^2 x = \sin(2x)(1-\cos(2x)) = \sin(2x) - \frac{1}{2}\sin(4x).$$

En effectuant, respectivement, les changement de variable $u = 2x$ et $v = 4x$, on déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{4\cos x\sin^3 x}{x}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx.$$

Ainsi

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx.$$

Exercice 92 *Soit* $I = -\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}}dx.$

1. *Montrer que* I *est convergente.*
2. *Calculer la dérivée de* $\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ *sur* $]0,1[$.
3. *En déduire que* $I = 2\pi$.

Solution -

1. On écrit

$$I = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}}dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}}dx.$$

La fonction $x \mapsto -\frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}}$ est continue et positive sur $]0,\frac{1}{2}]$ et

$$-\frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}} \sim_0 -\frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

D'après la proposition 41, les intégrales

$$-\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}}dx \quad \text{et} \quad -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$$

sont de même nature. Or, en utilisant une intégration par parties, on obtient, pour tout $t \in]0, \frac{1}{2}]$,

$$\begin{aligned}
\int_t^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx &= \left[2\sqrt{x}\ln x\right]_t^{\frac{1}{2}} - 2\int_t^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x}}{x} dx \\
&= -\frac{2}{\sqrt{2}}\ln 2 - 2\sqrt{t}\ln t - 2\int_t^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\
&= -\frac{2}{\sqrt{2}}\ln 2 - 2\sqrt{t}\ln t - 4\left[\sqrt{x}\right]_t^{\frac{1}{2}} \\
&= -\frac{2}{\sqrt{2}}\ln 2 - 2\sqrt{t}\ln t - \frac{4}{\sqrt{2}} + 4\sqrt{t}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \int_t^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = -\frac{2}{\sqrt{2}}\ln 2 - \frac{4}{\sqrt{2}}.$$

En conclusion, $-\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}} dx$ est convergente.

D'un autre côté, $x \mapsto -\frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}}$ est continue et positive sur $[\frac{1}{2}, 1[$ et, puisque

$$\ln(x) = \ln(1 + x - 1) \sim_1 (x - 1),$$

on a

$$-\frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}} \sim_1 -\frac{x-1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

D'après la proposition 41, les intégrales

$$-\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}} dx \quad \text{et} \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} dx$$

sont de même nature. Or

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} dx = \lim_{t \longrightarrow 1^-} \left[-2\sqrt{1-x}\right]_{\frac{1}{2}}^t = \lim_{t \longrightarrow 1^-} (-2\sqrt{1-t} + \frac{2}{\sqrt{2}}) = \frac{2}{\sqrt{2}}.$$

En conclusion, $-\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}} dx$ est convergente.

Finalement, I est convergente.

2. On a, pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right)' = \frac{1}{2(1-x)^2}\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}}.$$

3. D'après la question précédente, on a

$$I = \int_0^1 u'(x)v(x)dx,$$

avec $u(x) = -2\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ et $v(x) = \ln x$. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 0^+} u(x)v(x) &= -2 \lim_{x\longrightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}\ln x}{\sqrt{1-x}} = 0, \\
\lim_{x\longrightarrow 1^-} u(x)v(x) &= -2 \lim_{x\longrightarrow 1^-} \sqrt{x}\frac{\ln x}{\sqrt{1-x}} = 0, \qquad (\ln x \sim_1 x-1).
\end{aligned}$$

Les conditions d'intégration par parties des intégrales généralisées sont alors satisfaites (voir théorème 25), on a alors

$$I = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)dx = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}.$$

Calculons cette intégrale. On a

$$\sqrt{x-x^2} = \sqrt{\frac{1}{4} - (x-\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1-(2x-1)^2}.$$

On pose alors $\sin t = 2x - 1$. On a alors

$$2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t dt}{|\cos t|} = 2\pi.$$

Finalement,

$$I = 2\pi.$$

Exercice 93 *1. Montrer que les deux intégrales* $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx$ *et* $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$ *sont convergentes.*

2. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx$ *est convergente et que*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx = 0.$$

3. *Soit $a > 0$. A l'aide d'un changement de variable montrer que*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2a} \ln a.$$

Solution -

1. La fonction $x \mapsto -\frac{\ln x}{1+x^2}$ est continue et positive sur $]0,1]$ et

$$-\frac{\ln x}{1+x^2} \sim_0 -\ln x.$$

D'après la proposition 41, les intégrales

$$-\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx \quad \text{et} \quad -\int_0^1 \ln x dx$$

sont de même nature. Or, en utilisant une intégration par parties, on obtient, pour tout $t \in]0,1]$,

$$\int_t^1 \ln x dx = [x \ln x]_t^1 - \int_t^1 dx = -t \ln t + t - 1.$$

Donc

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \int_t^1 \ln x dx = -1.$$

En conclusion, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ est convergente.

D'un autre côté, en effectuant le changement de variable $u = \frac{1}{x}$, on a $dx = -\frac{1}{u^2} du$ et donc

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx &= \int_1^0 \frac{\ln(\frac{1}{u})}{1+\frac{1}{u^2}} \left(-\frac{1}{u^2} du\right) \\ &= -\int_0^1 \frac{\ln u}{1+u^2} du. \end{aligned}$$

On déduit alors que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ est convergente et que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = -\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx.$$

2. On écrit
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}dx,$$
et on conclut à l'aide de la question précédente.
3. On effectue le changement de variable $u = \frac{x}{a}$. On obtient alors que
$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2+x^2}dx &= a\int_0^{+\infty} \frac{\ln(au)}{a^2+a^2u^2}du \\ &= \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{\ln a + \ln u}{1+u^2}du \\ &= \frac{\ln a}{a}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}du + \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2}du. \end{aligned}$$
Or, d'après la question précédente, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{1+u^2}du = 0$ et d'un autre côté,
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}du = [\arctan u]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$
Finalement,
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi \ln a}{2a}.$$

Exercice 94 *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dt$.*

1. *Montrer que I_n est bien définie.*
2. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n$.*
3. *En déduire la valeur de I_n.*
(On admet que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.)

Solution -

1. On écrit
$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x^2}dx + \int_1^{+\infty} x^n e^{-x^2}dx.$$

La fonction $x \mapsto x^n e^{-x^2}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$ et $\lim_{x \longrightarrow +\infty} x^2 x^n e^{-x^2} = 0$. Donc

$$x^n e^{-x^2} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Puisque $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est une intégrale de Riemann convergente (voir (8.3)) on déduit, grâce à la proposition 40, que I_n est convergente.

2. On pose $u(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ et $v(x) = e^{-x^2}$. On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x \longrightarrow 0^+} u(x)v(x) &= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{1}{n+1} x^{n+1} e^{-x^2} = 0, \\
\lim_{x \longrightarrow +\infty} u(x)v(x) &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} e^{-x^2} = 0.
\end{aligned}$$

Les conditions d'intégration par parties des intégrales généralisées sont alors satisfaites (voir théorème 25), on a alors

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{+\infty} u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u(x)v'(x)dx \\
&= \frac{2}{n+1} \int_0^{+\infty} x^{n+2} e^{-x^2} dx = \frac{2}{n+1} I_{n+2}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n.$$

3. De la relation précédente, on déduit par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
I_{2n} &= \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2^n} I_0, \\
I_{2n+1} &= n! I_1.
\end{aligned}$$

On a

$$I_1 = \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{2n} = \frac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2^{n+1}} \sqrt{\pi} \quad \text{et} \quad I_{2n+1} = \frac{n!}{2}.$$

Exercice 95 *Montrer que les intégrales de Fresnel* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos(t^2)dt$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sin(t^2)dt$ *sont convergentes.*
(On pourra utiliser un changement de variable).

Solution -
On effectue le changement de variable $u = t^2$. On a $du = 2\sqrt{u}dt$ et donc

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \cos(t^2)dt &= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{\sqrt{u}}du, \\ \int_1^{+\infty} \sin(t^2)dt &= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}du.\end{aligned}$$

Posons $f(t) = \cos t$ et $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$. Ces fonctions sont de classe C^1 sur $[1, +\infty[$. La fonction $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt = \sin x - \sin 1$ vérifie pour tout $x \in [1, +\infty[$, $|F(x)| \leq 2$ et donc elle est bornée. D'un autre côté,

$$\int_1^{+\infty} |g'(t)|dt = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}$$

qui est convergente en vertu de (8.3). En plus, $\lim\limits_{t \longrightarrow +\infty} g(t) = 0$. Les conditions du théorème 26 sont vérifiées et donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt$ est convergente. Un raisonnement analogue montre que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt$ est convergente. En utilisant le théorème 27, on déduit que les intégrales de Fresnel sont convergentes.

Chapitre 9

Equations différentielles linéaire d'ordre 1 et 2

9.1 Equations différentielles linéaires : généralités

Définition 30 *1. On appelle équation différentielle linéaire une équation de la forme*

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = b, \qquad (E)$$

où $a_0, \ldots, a_n, b$ sont des fonctions et $y^{(k)}$ est la dérivée d'ordre k de la fonction inconnue y. L'entier n ($a_n \neq 0$) est appelé l'ordre de (E).

2. On appelle solution générale de (E) toute expression dépendant d'un certains nombre de paramètres et qui donne toutes les solutions de (E) quand ces paramètres varient.

3. L'équation (E) est dite à coefficients constants si $a_0, \ldots, a_n$ sont des fonctions constantes.

Exemples -

1. **$y' + 3y = e^x$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.**
2. **$y' + 3(y)^2 = e^x$ est une équation différentielle non linéaire du premier ordre.**
3. **$(x^2+1)y'' + \cos(x)\, y' + 3e^x y = 1$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients non constants.**

Définition 31 *L'équation différentielle sans second membre associée à l'équation différentielle (E) est l'équation différentielle*

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0. \qquad (E')$$

Proposition 43 *La solution générale d'une équation différentielle linéaire (E) est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre (E') avec une solution particulière de (E).*

9.2 Equations différentielles linéaires du premier ordre

On considère l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$a_1 y' + a_0 y = b, \qquad (E_1)$$

où a_0, a_1, b sont des fonctions continues et y est une fonction inconnue.
L'équation sans second membre associée à (E_1) est l'équation

$$a_1 y' + a_0 y = 0. \qquad (E_1')$$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel a_1 ne s'annule pas et soit $A = \int \frac{a_0(x)}{a_1(x)} dx$ une primitive de $\frac{a_0(x)}{a_1(x)}$ sur I.

Théorème 28 1. *L'ensemble des solutions de (E_1') sur I est*

$$\mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \{Ce^{-A(x)}, C \in \mathbb{R}\}.$$

Ainsi l'espace vectoriel des solutions sur I de (E_1') est la droite vectorielle engendrée par la fonction $x \mapsto e^{-A(x)}$.

2. *L'ensemble des solutions de (E_1) sur I est*

$$\mathcal{S} = \left\{Ce^{-A(x)} + y_0, C \in \mathbb{R}\right\}$$

où y_0 est une solution particulière de (E).

3. (**Méthode de variation de la constante**) *Pour trouver une solution particulière de (E), on pose $y_0 = C(x)e^{-A(x)}$ et on calcule $C(x)$ en écrivant que y_0 est solution de (E_1).*

4. (**Problème de Cauchy**) *Pour tout $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, il existe une unique solution y de (E_1), définie sur I et telle que $y(x_0) = y_0$.*

Pour étudier l'équation (E) dans le cas général, on détermine les racines de a_1 et on trouve les solutions sur des intervalles maximaux où a_1 ne s'annule pas et on définit la solution générale par morceaux. On regarde si ces solutions admettent des limites aux points où a_1 s'annule.

Exemples -

1. **Nous allons résoudre l'équation différentielle linéaire du premier ordre**
$$x(x-1)y' + y = x + 1. \tag{E}$$
Puisque $x(x-1) = 0$ pour $x = 0$ ou $x = 1$, nous allons étudier les solutions de (E) sur les intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$
   (a) **Solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$. D'après le théorème 28, les solutions de l'équation sans second membre sont de la forme $Ce^{-\int \frac{1}{x(x-1)}dx}$. Or**
$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x},$$
et donc sur $]-\infty, 0[$ on a
$$-\int \frac{1}{x(x-1)}dx = \ln|x| - \ln|1-x| = \ln(-x) - \ln(1-x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right).$$
On déduit alors que les solutions de l'équation sans second membre sur $]-\infty, 0[$ sont de la forme $\dfrac{Cx}{x-1}$.
Grâce à la méthode de variation de la constante, cherchons une solution particulière de (E) de la forme $y_0 = \dfrac{C(x)x}{x-1}$. On a
$$y_0' = \frac{C'(x)x}{x-1} - \frac{C(x)}{(x-1)^2}.$$
Ainsi y_0 est solution de (E) si et seulement si
$$C'(x)x^2 - \frac{C(x)x}{(x-1)} + \frac{C(x)x}{x-1} = x + 1$$
soit
$$C'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}.$$
On prend alors $C(x) = \ln(-x) - \dfrac{1}{x}$ et donc $y_0 = \dfrac{x\ln(-x) - 1}{x-1}$ est une solution particulière de (E). On déduit alors que l'ensemble des solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$ est donné par
$$\mathcal{S} = \left\{\frac{Cx + x\ln(-x) - 1}{x-1}, C \in \mathbb{R}\right\}.$$

(b) **Solutions de (E) sur $]0,1[$. Un calcul analogue à celui ci-dessus montre que les solutions de l'équation sans second membre sur $]0,1[$ sont de la forme $\dfrac{Cx}{1-x}$. Grâce à la méthode de variation de la constante, cherchons une solution particulière de (E) de la forme $y_0 = \dfrac{C(x)x}{1-x}$. On a**

$$y_0' = \frac{C'(x)x}{1-x} + \frac{C(x)}{(1-x)^2}.$$

Ainsi y_0 est solution de (E) si et seulement si

$$-C'(x)x^2 + \frac{C(x)x}{(x-1)} + \frac{C(x)x}{1-x} = x+1$$

soit

$$C'(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}.$$

On prend alors $C(x) = -\ln(x) + \dfrac{1}{x}$ et donc $y_0 = \dfrac{-x\ln(x)+1}{1-x}$ est une solution particulière de (E). On déduit alors que l'ensemble des solutions de (E) sur $]0,1[$ est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{Cx - x\ln(x) + 1}{1-x}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

(c) **Solutions de (E) sur $]1,+\infty[$. De la même manière que ci-dessus on déduit alors que l'ensemble des solutions de (E) sur $]1,+\infty[$ est donné par**

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{Cx + x\ln(x) - 1}{x-1}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

On remarque que les solutions se prolongent par continuité en 0 alors que leur limite en 1 est infinie.

9.3 Equations différentielles linéaires du second d'ordre à coefficients constants

On considère l'équation différentielle linéaire de second ordre à coefficients constants

$$y'' + by' + cy = d, \qquad (E)$$

avec a, b deux constantes réelles, d une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. L'équation sans second membre associée est

$$y'' + by' + cy = d. \tag{E'}$$

On associe à (E) le polynôme $P_E \in \mathbb{R}[X]$ appelé **polynôme caractéristique** de (E) et défini par

$$P_E(X) = X^2 + bX + c.$$

Soient λ_1 et λ_2 les racines dans $\mathbb{C}$ de P_E. On a

$$P_E(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \quad \text{avec} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -b \text{ et } \lambda_1\lambda_2 = c.$$

Théorème 29 *1. L'ensemble $\mathcal{S}_{E'}$ des solutions de (E') est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et on a :*

(a) Si $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors les fonctions

$$t \mapsto e^{\lambda_1 t} \quad \textit{et} \quad t \mapsto e^{\lambda_2 t}$$

forment une base de $\mathcal{S}_{E'}$, c'est-à-dire,

$$\mathcal{S}_{E'} = \{Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}, A, B \in \mathbb{R}\}.$$

(b) Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$, alors les fonctions

$$t \mapsto e^{\lambda t} \quad \textit{et} \quad t \mapsto te^{\lambda t}$$

forment une base de $\mathcal{S}_{E'}$, c'est-à-dire,

$$\mathcal{S}_{E'} = \{(A + Bt)e^{\lambda t}, A, B \in \mathbb{R}\}.$$

(c) Si $\lambda_1 = r + i\omega$ et $\lambda_2 = r - i\omega$ avec $\omega \neq 0$ alors les fonctions

$$t \mapsto e^{rt}\cos(\omega t) \quad \textit{et} \quad t \mapsto e^{rt}\sin(\omega t)$$

forment une base de $\mathcal{S}_{E'}$, c'est-à-dire,

$$\mathcal{S}_{E'} = \{Ae^{rt}\cos(\omega t) + Be^{rt}\sin(\omega t), A, B \in \mathbb{R}\}.$$

2. L'ensemble $\mathcal{S}_E$ des solutions de (E) est donné par

$$\mathcal{S}_E = \{y + y_0, y \in \mathcal{S}_{E'}\},$$

où y_0 est une solution particulière de (E).

3. (**Problème de Cauchy**) *Pour tout* $(x_0, y_0, z_0) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, *il existe une unique solution* y *de* (E) *et telle que* $y(x_0) = y_0$ *et* $y'(x_0) = z_0$.

La méthode de variation des constantes permet de trouver des solutions particulières de(E). Dans le cas où le second membre de (E) est de la forme $d = e^{at}P(t)$ avec $a \in \mathbb{C}$ et P un polynôme, on a les situations suivantes :

1. $a \in \mathbb{R}$:
   (a) Si a n'est pas racine du polynôme P_E alors il existe une unique solution de (E) de la forme $e^{at}Q(t)$ avec Q un polynôme de même degré que P ;
   (b) Si a est une racine simple du polynôme P_E alors il existe une unique solution de (E) de la forme $e^{at}tQ(t)$ avec Q un polynôme de même degré que P ;
   (c) Si a est racine double du polynôme P_E alors il existe une unique solution de (E) de la forme $e^{at}t^2Q(t)$ avec Q un polynôme de même degré que P.
2. $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
   (a) Si a n'est pas racine du polynôme P_E alors il existe une unique solution de (E) de la forme $Q_1(t)\sin t + Q_2(t)\cos t$ avec Q_1 et Q_2 deux polynômes de même degré que P ;
   (b) Si a est une racine simple du polynôme P_E alors il existe une unique solution de (E) de la forme $t(Q_1(t)\sin t + Q_2(t)\cos t)$ avec Q_1 et Q_2 deux polynômes de même degré que P ;
   (c) Si a est racine double du polynôme P_E alors il existe une unique solution de (E) de la forme $t^2(Q_1(t)\sin t + Q_2(t)\cos t)$ avec Q_1 et Q_2 deux polynômes de même degré que P.

Exemples -

1. **Nous allons résoudre l'équation différentielle**

$$y'' + y = \sin x. \tag{E}$$

Le polynôme caractéristique de (E) **est** $P_E(X) = X^2+1$ **et ces racines sont** $\imath$ **et** $-\imath$. **Puisque le second membre est de la forme** $\sin x = \frac{1}{2\imath}(e^{\imath x} - e^{-\imath x})$, $\imath$ **et** -$\imath$ **sont racines de** P_E, **cherchons une solution particulière de la forme** $y_0 = x(\alpha \sin x + \beta \cos x)$. **On trouve facilement** $\alpha = 0$ **et** $\beta = -\frac{1}{2}$ **et donc l'ensemble des solutions** $\mathcal{S}_E$ **est donné par**

$$\mathcal{S}_E = \left\{ A\cos t + B\sin t - \frac{1}{2}t\cos t, A, B \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. **Nous allons résoudre l'équation différentielle**

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-x}(x-1). \qquad (E)$$

Le polynôme caractéristique de (E) **est** $P_E(X) = X^2 + 3X + 2$ **et ces racines sont** -1 **et** -2**. Puisque le second membre est de la forme** $e^{-x}(x-1)$ **et** -1 **est une racine de** P_E**, cherchons une solution particulière de la forme** $y_0 = (ax+b)xe^{-x}$**. On a**

$$\begin{aligned} y_0' &= (2ax+b)e^{-x} - (ax^2+bx)e^{-x} \\ &= (-ax^2 + (2a-b)x + b)e^{-x}, \\ y_0'' &= (-2ax + (2a-b))e^{-x} - (-ax^2 + (2a-b)x + b)e^{-x} \\ &= (ax^2 - (4a-b)x + 2a - 2b)e^{-x}. \end{aligned}$$

Ainsi y_0 **est solution de** (E) **si et seulement si**

$$(2ax + 2a + b)e^{-x} = (x-1)e^{-x}.$$

Il en résulte alors que $a = \frac{1}{2}$ **et** $b = -2$**. Finalement l'ensemble** $\mathcal{S}_E$ **des solutions de** (E) **est donné par**

$$\mathcal{S}_E = \left\{ Ae^{-t} + Be^{-2t} + (\frac{1}{2}t^2 - 2t)e^{-t}, A, B \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. **Nous allons résoudre l'équation différentielle**

$$y'' - 2y' + y = e^{x}(x+1). \qquad (E)$$

Le polynôme caractéristique de (E) **est** $P_E(X) = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$ **et** 1 **est racine double de** P_E**. Puisque le second membre est de la forme** $e^x(x+1)$ **et** 1 **est une racine de** P_E**, cherchons une solution particulière de la forme** $y_0 = (ax+b)x^2e^x$**. On a**

$$\begin{aligned} y_0' &= (3ax^2 + 2bx)e^x + (ax^3 + bx^2)e^x \\ &= (ax^3 + (3a+b)x^2 + 2bx)e^x, \\ y_0'' &= (3ax^2 + 2(3a+b)x + 2b)e^x + (ax^3 + (3a+b)x^2 + 2bx)e^x \\ &= (ax^3 + (6a+b)x^2 + 2(3a+2b)x + 2b)e^x. \end{aligned}$$

Ainsi y_0 **est solution de** (E) **si et seulement si**

$$(6ax + 2b)e^x = (x+1)e^x.$$

Il en résulte alors que $a = \frac{1}{6}$**,** $b = \frac{1}{2}$ **et** c **quelconque. Finalement l'ensemble** $\mathcal{S}_E$ **des solutions de** (E) **est donné par**

$$\mathcal{S}_E = \left\{ (A + Bt)e^t + (\frac{1}{6}t + \frac{1}{2})t^2e^t, A, B \in \mathbb{R} \right\}.$$

9.4 Exercices corrigés

Exercice 96 *On considère l'équation différentielle*

$$2x(x^2+1)y' + 2x^2y = 1. \qquad (E)$$

1. *Montrer sans faire de calcul que* (E) *n'admet pas de solution sur* $\mathbb{R}$.
2. *Trouver les solutions de* (E) *sur* $]-\infty, 0[$ *et* $]0, +\infty[$. *Retrouver le résultat précédent.*

Solution -

1. Supposons que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une solution de (E). On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$2x(x^2+1)f'(x) + 2x^2f(x) = 1.$$
En particulier, pour $x = 0$, on aura $0 = 1$ ce qui est impossible. En conclusion, (E) n'admet aucune solution sur $\mathbb{R}$.
2. (E) est une équation différentielle du premier ordre linéaire et donc, d'après le théorème 28, les solutions de (E) sont de la forme
$$y(x) = Ce^{-A(x)} + y_0,$$
où $A(x) = \int \frac{2x^2}{2x(x^2+1}dx$ et y_0 est une solution particulière. Or
$$A(x) = \int \frac{2x^2}{2x(x^2+1)}dx = \int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$
Cherchons y_0 par la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire,
$$y_0(x) = C(x)e^{-A(x)} = C(x)e^{\ln(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}})} = \frac{C(x)}{\sqrt{x^2+1}}.$$
On a
$$y_0'(x) = \frac{C'(x)}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{xC(x)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}.$$
Donc y_0 est solution de (E) si et seulement si
$$2x\sqrt{x^2+1}C'(x) - \frac{2x^2C(x)}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{2x^2C(x)}{\sqrt{x^2+1}} = 1,$$
soit
$$C'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{x^2+1}}.$$

Donc
$$C(x) = \int \frac{dx}{2x\sqrt{x^2+1}}.$$
Pour calculer cette primitive, nous allons effectuer le changement de variable $u = \sqrt{x^2+1}$. On a alors $x^2 = u^2 - 1$, $udu = xdx$ et donc
$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{2x\sqrt{x^2+1}} &= \int \frac{du}{2(u^2-1)} = \frac{1}{4}\int \frac{du}{u-1} - \frac{1}{4}\int \frac{du}{u+1} \\ &= \frac{1}{4}\ln|u-1| - \frac{1}{4}\ln|u+1| \\ &= \frac{1}{4}\ln(\sqrt{x^2+1}-1) - \frac{1}{4}\ln(\sqrt{x^2+1}+1).\end{aligned}$$
Ainsi
$$y_0(x) = \frac{1}{4\sqrt{x^2+1}}\left(\ln(\sqrt{x^2+1}-1) - \ln(\sqrt{x^2+1}+1)\right).$$
Finalement, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ est donné par
$$\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{4\sqrt{x^2+1}}\left(C + \ln(\sqrt{x^2+1}-1) - \ln(\sqrt{x^2+1}+1)\right), C \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercice 97 *Résoudre sur* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ *les deux équations différentielles*
$$y'\cos x + y\sin x = 1. \qquad (E_1) \qquad y' + y\tan x = \sin(2x) \qquad (E_2).$$

Solution -

1. (E_1) est une équation différentielle du premier ordre linéaire et donc, d'après le théorème 28, les solutions de (E_1) sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sont de la forme
$$y(x) = Ce^{-A(x)} + y_0$$
où
$$A(x) = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\ln(\cos x),$$
et y_0 est une solution particulière. Cherchons y_0 par la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire,
$$y_0(x) = C(x)e^{-A(x)} = C(x)\cos x.$$

Donc y_0 est solution de (E_1) si et seulement si

$$(C'(x)\cos x - C(x)\sin x)\cos x + C(x)\cos x \sin x = 1,$$

soit

$$C'(x) = \frac{1}{\cos^2 x},$$

et donc $C(x) = \tan x$ et

$$y_0(x) = \sin x.$$

En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E_1) sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est donné par

$$\mathcal{S} = \{C\cos x + \sin x, C \in \mathbb{R}\}.$$

2. (E_2) est une équation différentielle du premier ordre linéaire et donc, d'après le théorème 28, les solutions de (E_2) sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sont de la forme

$$y(x) = Ce^{-A(x)} + y_0$$

où

$$A(x) = \int \tan x dx = -\ln(\cos x),$$

et y_0 est une solution particulière. Cherchons y_0 par la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire,

$$y_0(x) = C(x)e^{-A(x)} = C(x)\cos x.$$

Donc y_0 est solution de (E_2) si et seulement si

$$(C'(x)\cos x - C(x)\sin x) + C(x)\cos x \tan x = \sin(2x),$$

soit

$$C'(x) = \frac{\sin(2x)}{\cos x} = 2\sin x,$$

et donc $C(x) = -2\cos x$ et

$$y_0(x) = -2\cos^2 x.$$

En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E_2) sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{C\cos x - 2\cos^2 x, C \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercice 98 *Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :*

$$y' + 2y = x, \quad (E_1), \quad y' + 2y = \sin x, \quad (E_2), \quad y' + y = \cos(x)e^x, \quad (E_3),$$
$$y' + y = 2\cos^2(x)e^x \quad (E_4).$$

Solution -

Ce sont des équations différentielles linéaires du premier ordre et nous allons utiliser le théorème 28 pour calculer leurs solutions.

1. Les solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$$y(x) = Ce^{-A(x)} + y_0$$

où

$$A(x) = \int 2dx = 2x,$$

et y_0 est une solution particulière. Cherchons y_0 par la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire,

$$y_0(x) = C(x)e^{-A(x)} = C(x)e^{-2x}.$$

Donc y_0 est solution de (E_1) si et seulement si

$$(C'(x) - 2C(x))e^{-2x} + 2C(x)e^{-2x} = x,$$

soit

$$C'(x) = xe^{2x}.$$

Une intégration par parties donne

$$C(x) = \int xe^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x},$$

et donc

$$y_0(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}.$$

En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$ est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{Ce^{-2x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}, C \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. Les solutions de (E_2) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$$y(x) = Ce^{-A(x)} + y_0$$

où

$$A(x) = \int 2dx = 2x,$$

et y_0 est une solution particulière. Cherchons y_0 par la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire,

$$y_0(x) = C(x)e^{-A(x)} = C(x)e^{-2x}.$$

Donc y_0 est solution de (E_2) si et seulement si

$$(C'(x) - 2C(x))e^{-2x} + 2C(x)e^{-2x} = \sin x,$$

soit

$$C'(x) = \sin xe^{2x}.$$

Une double intégration par parties donne

$$\begin{aligned} C(x) &= \int \sin xe^{2x}dx = \frac{1}{2}\sin xe^{2x} - \frac{1}{2}\int \cos xe^{2x}dx \\ &= \frac{1}{2}\sin xe^{2x} - \frac{1}{4}\cos xe^{2x} - \frac{1}{4}\int \sin xe^{2x}dx. \end{aligned}$$

De cette relation, on déduit que

$$C(x) = \frac{1}{5}(2\sin x - \cos x)e^{2x},$$

et donc

$$y_0(x) = \frac{1}{5}(2\sin x - \cos x).$$

En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E_2) sur $\mathbb{R}$ est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ Ce^{-2x} + \frac{1}{5}(2\sin x - \cos x), C \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Les solutions de (E_3) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$$y(x) = Ce^{-A(x)} + y_0$$

où

$$A(x) = \int dx = x,$$

et y_0 est une solution particulière. Cherchons y_0 par la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire,

$$y_0(x) = C(x)e^{-A(x)} = C(x)e^{-x}.$$

Donc y_0 est solution de (E_3) si et seulement si

$$(C'(x) - C(x))e^{-x} + C(x)e^{-x} = \cos xe^{x},$$

soit

$$C'(x) = \cos xe^{2x}.$$

Une double intégration par parties donne

$$\begin{aligned} C(x) &= \int \cos xe^{2x}dx = \frac{1}{2}\cos xe^{2x} + \frac{1}{2}\int \sin xe^{2x}dx \\ &= \frac{1}{2}\cos xe^{2x} + \frac{1}{4}\sin xe^{2x} - \frac{1}{4}\int \cos xe^{2x}dx. \end{aligned}$$

De cette relation, on déduit que

$$C(x) = \frac{1}{5}(2\cos x + \sin x)e^{2x},$$

et donc

$$y_0(x) = \frac{1}{5}(2\cos x + \sin x)e^{x}.$$

En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E_3) sur $\mathbb{R}$ est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ Ce^{-x} + \frac{1}{5}(2\cos x + \sin x)e^{x}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Les solutions de (E_4) sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$$y(x) = Ce^{-A(x)} + y_0$$

où

$$A(x) = \int \ dx = x,$$

et y_0 est une solution particulière. Cherchons y_0 par la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire,

$$y_0(x) = C(x)e^{-A(x)} = C(x)e^{-x}.$$

Donc y_0 est solution de (E_4) si et seulement si

$$(C'(x) - C(x))e^{-x} + C(x)e^{-x} = 2\cos^2 x e^{x},$$

soit

$$C'(x) = 2\cos^2 x e^{2x} = \cos(2x)e^{2x} + e^{2x}.$$

Une double intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int \cos(2x)e^{2x}dx &= \frac{1}{2}\cos(2x)e^{2x} + \int \sin(2x)e^{2x}dx \\ &= \frac{1}{2}\cos(2x)e^{2x} + \frac{1}{2}\sin(2x)e^{2x} - \int \cos(2x)e^{2x}dx. \end{aligned}$$

De cette relation, on déduit que

$$C(x) = \frac{1}{4}(\cos(2x) + \sin(2x) + 2)e^{2x},$$

et donc

$$y_0(x) = \frac{1}{4}(\cos(2x) + \sin(2x) + 2)e^{x}.$$

En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E_4) sur $\mathbb{R}$ est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ Ce^{-x} + \frac{1}{4}(\cos(2x) + \sin(2x) + 2)e^{x}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 99 *Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle I :*

$$\begin{array}{ll} 1) & (1+x^2)y' + 2xy + 1 = 0, \quad I = \mathbb{R}, \\ 2) & y' + 2xy = 2xe^{-x^2}, \quad I = \mathbb{R}, \\ 3) & \sqrt{1-x^2}\, y' + y = 1, \quad I =]-1,1[\\ 4) & (2+\cos x)y' + \sin(x)y = (2+\cos x)\sin x, \quad I = \mathbb{R}. \end{array}$$

Solution -

Ce sont des équations différentielles linéaires du premier ordre et nous allons utiliser le théorème 28 pour calculer leurs solutions.

1. Les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$$y(x) = Ce^{-A(x)} + y_0$$

où

$$A(x) = \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \ln(1+x^2),$$

et y_0 est une solution particulière. Cherchons y_0 par la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire,

$$y_0(x) = C(x)e^{-A(x)} = \frac{C(x)}{1+x^2}.$$

Donc y_0 est solution si et seulement si

$$(1+x^2)\left(\frac{C'(x)}{1+x^2} - \frac{2xC(x)}{(1+x^2)^2}\right) + \frac{2C(x)}{1+x^2} + 1 = 0,$$

soit

$$C'(x) = -1,$$

et donc

$$y_0(x) = -\frac{x}{1+x^2}.$$

En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions sur $\mathbb{R}$ est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{c-x}{1+x^2}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$$y(x) = Ce^{-A(x)} + y_0$$

où

$$A(x) = \int 2x dx = x^2,$$

et y_0 est une solution particulière. Cherchons y_0 par la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire,

$$y_0(x) = C(x)e^{-A(x)} = C(x)e^{-x^2}.$$

Donc y_0 est solution si et seulement si

$$(C'(x) - 2xC(x))e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2},$$

soit
$$C'(x) = 2x,$$
et donc
$$y_0(x) = x^2 e^{-x^2}.$$

En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions sur $\mathbb{R}$ est donné par
$$\mathcal{S} = \left\{ (C + x^2)e^{-x^2}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Les solutions de cette équation sur $]-1,1[$ sont de la forme
$$y(x) = Ce^{-A(x)} + y_0$$
où
$$A(x) = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x,$$
et y_0 est une solution particulière. On remarque que $y_0 = 1$ est solution. En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions sur $]-1,1[$ est donné par
$$\mathcal{S} = \left\{ 1 + Ce^{-\arcsin x}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Les solutions de cette équation sur $\mathbb{R}$ sont de la forme
$$y(x) = Ce^{-A(x)} + y_0$$
où
$$A(x) = \int \frac{\sin x}{2 + \cos x} dx = -\ln(2 + \cos x),$$
et y_0 est une solution particulière. Cherchons y_0 par la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire,
$$y_0(x) = C(x)e^{-A(x)} = C(x)(2 + \cos x).$$
Donc y_0 est solution si et seulement si
$$(2+\cos x)(C'(x)(2+\cos x) - C(x)\sin x) + \sin x C(x)(2+\cos x) = (2+\cos x)\sin x,$$
soit
$$C'(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x},$$
et donc
$$y_0(x) = -(2 + \cos x)\ln(2 + \cos x).$$

En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions sur $\mathbb{R}$ est donné par
$$\mathcal{S} = \left\{ (2 + \cos x)(C - \ln(2 + \cos x)), C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 100 *On considère l'équation différentielle*

$$xy' + 2y = \frac{x}{x^2+1}. \tag{E}$$

1. *Déterminer les solutions de* (E) *sur* $]-\infty, 0[$ *et sur* $]0, +\infty[$.
2. *Déterminer les solutions de* (E) *sur* $\mathbb{R}$.

Solution -

1. (E) est une équation différentielle du premier ordre linéaire et donc, d'après le théorème 28, ses solutions sur $]-\infty, 0[$ sont de la forme

$$y(x) = Ce^{-A(x)} + y_0$$

où

$$A(x) = \int \frac{2}{x} dx = 2\ln(-x) = \ln x^2,$$

et y_0 est une solution particulière. Cherchons y_0 par la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire,

$$y_0(x) = C(x)e^{-A(x)} = \frac{C(x)}{x^2}.$$

Donc y_0 est solution de (E) si et seulement si

$$x(\frac{C'(x)}{x^2} - \frac{2C(x)}{x^3}) + \frac{2C(x)}{x^2} = \frac{x}{1+x^2},$$

soit

$$C'(x) = \frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2},$$

et donc

$$y_0(x) = \frac{1}{x} - \frac{\arctan x}{x^2}.$$

En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}_1$ des solutions sur $]-\infty, 0[$ est donné par

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \frac{C + x - \arctan x}{x^2}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Un calcul analogue montre que l'ensemble $\mathcal{S}_2$ des solutions sur $]0, +\infty[$ est donné par

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \frac{C + x - \arctan x}{x^2}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Soit y une solution de (E) continue sur $\mathbb{R}$. Donc il existe deux constantes C_1 et C_2 tels que

$$y(x) = \begin{cases} \frac{C_1 + x - \arctan x}{x^2} & \text{si} \quad x < 0, \\ \frac{C_2 + x - \arctan x}{x^2} & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

Puisque y est continue en 0, on aura, d'après la proposition 18,

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{C_1 + x - \arctan x}{x^2} = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{C_2 + x - \arctan x}{x^2} = y(0).$$

Or, un développement limité de $\arctan x$ en 0 donne

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + o_0(x^3). \tag{$*$}$$

Il en résulte que

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{C + x - \arctan x}{x^2} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad C = 0 \\ \infty & \text{si} \quad C \neq 0. \end{cases}$$

On déduit donc que $C_1 = C_2 = 0$ et que $y(0) = 0$. En conclusion, (E) admet une unique solution continue sur $\mathbb{R}$ donnée par

$$y(x) = \begin{cases} \frac{x - \arctan x}{x^2} & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Notons que puisque, d'après $(*)$,

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{y(x)}{x} = \frac{1}{3},$$

y est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 101 *Montrer que l'équation différentielle*

$$|x|y' + y = x^2 \tag{E}$$

possède une seule solution dérivable sur $\mathbb{R}$.

Solution -

(E) est une équation différentielle du premier ordre linéaire et donc, d'après le théorème 28, ses solutions sur $]-\infty, 0[$ sont de la forme

$$y(x) = Ce^{-A(x)} + y_0$$

où

$$A(x) = -\int \frac{1}{x}dx = -\ln(-x),$$

et y_0 est une solution particulière. Cherchons y_0 par la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire,

$$y_0(x) = C(x)e^{-A(x)} = -C(x)x.$$

Donc y_0 est solution de (E) si et seulement si

$$-x(-C'(x)x - C(x)) - C(x)x = x^2,$$

soit

$$C'(x) = 1,$$

et donc

$$y_0(x) = -x^2.$$

En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}_1$ des solutions de (E) sur $]-\infty, 0[$ est donné par

$$\mathcal{S}_1 = \left\{-Cx - x^2, C \in \mathbb{R}\right\}.$$

D'un autre côté, les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ sont de la forme

$$y(x) = Ce^{-A(x)} + y_0$$

où

$$A(x) = \int \frac{1}{x}dx = \ln x,$$

et y_0 est une solution particulière. Cherchons y_0 par la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire,

$$y_0(x) = C(x)e^{-A(x)} = \frac{C(x)}{x}.$$

Donc y_0 est solution de (E) si et seulement si

$$x\left(\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2}\right) + \frac{C(x)}{x} = x^2,$$

soit

$$C'(x) = x^2,$$

et donc

$$y_0(x) = \frac{1}{3}x^2.$$

En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}_2$ des solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ est donné par

$$\mathcal{S}_2 = \left\{ \frac{C}{x} + \frac{1}{3}x^2, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

Soit y une solution de (E) dérivable sur $\mathbb{R}$. D'après ce qui précède, il existe deux constantes C_1 et C_2 tels que

$$y(x) = \begin{cases} C_1 x - x^2 & \text{si} \quad x < 0, \\ \frac{C_2}{x} + \frac{1}{3}x^2 & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

Puisque y est continue en 0, on aura, d'après la proposition 18,

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} C_1 x - x^2 = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{C_2}{x} + \frac{1}{3}x^2 = y(0).$$

On déduit alors que $C_2 = 0$ et que $y(0) = 0$. D'un autre côté, puisque y est dérivable en 0, on aura

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{y(x)}{x} = C_1 = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{y(x)}{x} = 0.$$

Finalement, de (E) admet une unique solution dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par

$$y(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x \leq 0, \\ \frac{1}{3}x^2 & \text{si} \quad x \geq 0. \end{cases}$$

Exercice 102 (**Modèle de Verhulst**) *On repique des plantes de 10 cm de haut sous une serre. On sait que la taille maximale de ces plantes est de 1 m. On note $f(t)$ la taille, en m, d'une plante après t jours. On a donc $f(0) = 0,1$. Le modèle de Verhulst consiste à considérer que la vitesse de croissance de la plante suit la relation $f'(t) = af(t)(1 - f(t))$ où a est une constante. Autrement dit, f est une solution sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation différentielle*

$$y' = ay(1 - y). \tag{E}$$

1. *On pose pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $z(t) = \dfrac{1}{f(t)}$. Déterminer une équation différentielle satisfaite par z et la résoudre sur $\mathbb{R}^+$.*
2. *En déduire que $f(t) = \dfrac{1}{9e^{-at} + 1}$.*

Solution -

1. On pose $f(t) = \frac{1}{z(t)}$. La fonction f est solution de (E) si et seulement si
$$-\frac{z'(t)}{(z(t))^2} = \frac{a}{z(t)}(1 - \frac{1}{z(t)}),$$
soit
$$-z'(t) - az(t) + a = 0,$$
et donc z est solution de l'équation différentielle
$$y' + ay - a = 0. \tag{E'}$$

2. (E') est une équation différentielle du premier ordre linéaire et donc, d'après le théorème 28, ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont de la forme
$$y(x) = Ce^{-A(x)} + y_0$$
où
$$A(x) = \int a dx = ax,$$
et y_0 est une solution particulière. On remarque que $y_0 = 1$ satisfait (E'). Donc les solutions de (E') sont de la forme
$$z(t) = Ce^{-at} + 1.$$
On déduit alors que les solutions de (E) sont de la forme $y(t) = \frac{1}{Ce^{-at}+1}$ et puisque $f(0) = 0,1$, on déduit que $C = \frac{1}{0{,}1} - 1 = 9$ et donc
$$f(t) = \frac{1}{9e^{-at} + 1}.$$

Exercice 103 *Résoudre dans chacun des cas suivants l'équation différentielle*
$$y'' - 2y' - 3y = f(x), \tag{E}$$
1. $f(x) = x$, 2. $f(x) = xe^{-x}$, 3. $f(x) = \sin x$.

Solution - C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et, d'après le théorème 29, ses solutions sont de la forme

$$y = y_0 + y_H,$$

où y_0 est une solution particulière et y_H est solution de l'équation sans second membre

$$y'' - 2y' - 3y = 0. \tag{H}$$

Commençons par déterminer les solutions de (H). Pour cela considérons son polynôme caractéristique

$$P(X) = X^2 - 2X - 3.$$

Le discriminant de $P(X)$ est $\Delta = 4 + 12 = 16$ et donc les racines de $P(X)$ sont $r_1 = 3$ et $r_2 = -1$. Ainsi, d'après le théorème 29, les solutions de (H) sont de la forme

$$y_H = \alpha e^{3x} + \beta e^{-x} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Déterminons maintenant dans chacun des cas ci-dessus une solution particulière de (E).

1. $f(x) = x$. Comme $f(x) = xe^{0x}$ et 0 n'est pas racine de $P(X)$, cherchons une solution particulière de la forme $y_0 = ax + b$. Ainsi y_0 est solution de (E) si et seulement si

$$-2a - 3(ax + b) = x,$$

soit $-3a = 1$ et $3b + 2a = 0$ et donc $a = -\frac{1}{3}$ et $b = \frac{2}{9}$.
En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) avec $f(x) = x$ est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ \alpha e^{3x} + \beta e^{-x} - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. $f(x) = xe^{-x}$. Comme -1 est racine de $P(X)$, cherchons une solution particulière de la forme $y_0 = x(ax + b)e^{-x}$. On a

$$\begin{aligned} y_0' &= (2ax + b - ax^2 - bx)e^{-x} = (-ax^2 + (2a - b)x + b)e^{-x} \\ y_0'' &= (-2ax + 2a - b + ax^2 - (2a - b)x - b)e^{-x} \\ &= (ax^2 - (4a - b)x + 2a - 2b)e^{-x}. \end{aligned}$$

Donc y_0 est solution de (E) si et seulement si

$$(ax^2 - (4a - b)x + 2a - 2b) - 2(-ax^2 + (2a - b)x + b) - 3(ax^2 + bx) = x,$$

soit $a = -\frac{1}{8}$ et $b = -\frac{1}{16}$.
En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) avec $f(x) = xe^{-x}$ est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ \alpha e^{3x} + \beta e^{-x} - \frac{1}{16} x(2x+1)e^{-x}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. $f(x) = \sin x$. Comme $\sin x = \frac{1}{2\imath}(e^{\imath x} - {}^{-\imath x})$ et comme $\imath$ et $-\imath$ ne sont pas racines de $P(X)$, cherchons une solution particulière de la forme $y_0 = a\sin x + b\cos x$. On a

$$y_0' = a\cos x - b\sin x \quad \text{et} \quad y_0'' = -a\sin x - b\cos x,$$

et donc y_0 est solution de (E) si et seulement si

$$-a\sin x - b\cos x - 2(a\cos x - b\sin x) - 3(a\sin x + b\cos x) = \sin x,$$

soit $-4a + 2b = 1$ et $-4b - 2a = 0$. Ainsi $a = -\frac{1}{5}$ et $b = \frac{1}{10}$.
En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) avec $f(x) = \sin x$ est donné par

$$\mathcal{S} = \left\{ \alpha e^{3x} + \beta e^{-x} - \frac{1}{10}(2\sin x - \cos x), \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 104 *On considère l'équation différentielle*

$$y'' + 2y' + 4y = xe^x. \tag{E}$$

1. *Déterminer l'ensemble de solutions de* (E).
2. *Déterminer les solutions* h *de* (E) *vérifiant* $h(0) = 0$ *et* $h'(0) = 0$.
3. *Soit* $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fois dérivables vérifiant*

$$t^2 f''(t) + 3tf'(t) + 4f(t) = t\ln t.$$

On pose $g(x) = f(e^x)$.

   (a) Vérifier que g *est solution de* (E).

   (b) En déduire l'expression de f.

Solution -

1. C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et, d'après le théorème 29, ses solutions sont de la forme
$$y = y_0 + y_H,$$
où y_0 est une solution particulière et y_H est solution de l'équation sans second membre
$$y'' + 2y' + 4y = 0. \tag{H}$$
Commençons par déterminer les solutions de (H). Pour cela considérons son polynôme caractéristique
$$P(X) = X^2 + 2X + 4.$$
Le discriminant de $P(X)$ est $\Delta = 4 - 16 = -12$ et donc les racines de $P(X)$ sont $r_1 = -1 + \imath\sqrt{3}$ et $r_2 = -1 - \imath\sqrt{3}$. Ainsi, d'après le théorème 29, les solutions de (H) sont de la forme
$$y_H = (\alpha \sin(\sqrt{3}x) + \beta \cos(\sqrt{3}x))e^{-x} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$
Déterminons maintenant une solution particulière de (E). Puisque le second membre est de la forme xe^x et 1 n'est pas racine de $P(X)$, cherchons une solution de la forme $y_0 = (ax + b)e^x$. Ainsi
$$y_0' = (ax + a + b) \quad \text{et} \quad y_0'' = (ax + 2a + b)e^x.$$
Donc
$$ax + 2a + b + 2(ax + a + b) + 4(ax + b) = x,$$
soit $a = \frac{1}{7}$ et $b = -\frac{4}{49}$.
En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) est donné par
$$\mathcal{S} = \left\{ (\alpha \sin(\sqrt{3}x) + \beta \cos(\sqrt{3}x))e^{-x} + \frac{1}{49}(7x - 4)e^x, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. D'après la question précédente,
$$h(x) = (\alpha \sin(\sqrt{3}x) + \beta \cos(\sqrt{3}x))e^{-x} + \frac{1}{49}(7x - 4)e^x$$
avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et donc
$$h'(x) = (-(\sqrt{3}\beta + \alpha) \sin(\sqrt{3}x) + (\sqrt{3}\alpha - \beta) \cos(\sqrt{3}x))e^{-x} + \frac{1}{49}(7x + 3)e^x.$$
Les conditions $h(0) = 0$ et $h'(0) = 0$ sont équivalentes à
$$\beta = \frac{4}{49} \quad \text{et} \quad \frac{1}{49\sqrt{3}}.$$

3. (a) On a

$$g'(x) = e^x f'(e^x) \quad \text{et} \quad g''(x) = e^x(f'(e^x) + e^x f''(e^x)).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} g''(x) + 2g'(x) + 4g(x) &= e^x(f'(e^x) + e^x f''(e^x)) + 2e^x f'(x) \\ &\quad +4f(e^x) \\ &= (e^x)^2 f''(e^x) + 3e^x f'(x) + 4f^(e^x) \\ &= e^x \ln(e^x) = xe^x, \end{aligned}$$

et donc g vérifie (E).

(b) D'après 1., il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels

$$f(e^x) = (\alpha \sin(\sqrt{3}x) + \beta \cos(\sqrt{3}x))e^{-x} + \frac{1}{49}(7x - 4)e^x.$$

En posant $t = e^x$, on déduit que

$$f(t) = \frac{1}{t}\Big(\alpha \sin(\sqrt{3}\ln t) + \beta \cos(\sqrt{3}\ln t)\Big) + \frac{t}{49}(7\ln t - 4).$$

Exercice 105 *On considère l'équation différentielle suivante :*

$$y'' - 4y' + 4y = f(x). \tag{E}$$

1. *Résoudre l'équation sans second membre associée à (E).*
2. *Trouver une solution particulière de (E) lorsque $f(x) = e^{-2x}$ et lorsque $f(x) = e^{2x}$.*
3. *Donner la forme générale des solutions de (E) lorsque*

$$f(x) = e^{-2x} + e^{2x}.$$

Solution -

1. Le polynôme caractéristique de l'équation sans second membre associée à (E) est $P(X) = (X - 2)^2$. D'après le théorème 29, les solutions de l'équation sans second membre sont

$$y_H = (ax + b)e^{2x}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

2. Si $f(x) = e^{-2x}$ et comme -2 n'est pas solution de $P(X)$, cherchons une solution de la forme $y_0 = \alpha e^{-2x}$. Ainsi
$$4\alpha + 8\alpha + 4\alpha = 1,$$
soit $\alpha = \frac{1}{16}$ et $y_0 = \frac{e^{-2x}}{16}$.
Si $f(x) = e^{2x}$ et comme 2 est racine double de $P(X)$, cherchons une solution de la forme $y_0 = \alpha x^2 e^{2x}$. On a
$$y_0' = 2\alpha(x + x^2)e^{2x} \quad \text{et} \quad y_0'' = 2\alpha(1 + 4x + 2x^2)e^{2x},$$
et donc
$$2\alpha(1 + 4x + 2x^2) - 8\alpha(x + x^2) + 4\alpha x^2 = 1,$$
soit $\alpha = \frac{1}{2}$. Ainsi $y_0 = \frac{1}{2}x^2 e^{2x}$.
3. En utilisant tout ce qui précède, on déduit que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) est donné par
$$\mathcal{S} = \left\{ (ax + b)e^{2x} + \frac{e^{-2x}}{16} + \frac{1}{2}x^2 e^{2x}, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Chapitre 10

Fonctions de deux variables réelles I

Dans ce chapitre, nous allons étudier les fonctions de deux variables, c'est-à-dire, les applications d'une partie $A \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour de telles fonctions, nous allons étendre les notions de limites, continuité et dérivabilité. Ces notions ont été définies, dans les chapitres précédents, pour les fonctions d'une partie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Le lecteur aurait remarqué que l'outil principal qui a été utilisé pour définir ces notions était la valeur absolue. Nous allons commencé par introduire un équivalent dans $\mathbb{R}^2$ de la valeur absolue.

10.1 Norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$

Définition 32 *1. On appelle norme euclidienne d'un vecteur $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ le nombre réel noté $\|u\|$ et défini par*

$$\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

2. On appelle distance euclidienne de deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^2$ le nombre réel noté $d(u, v)$ et défini par

$$d(u, v) = \|u - v\|.$$

Il est claire que si $u = (x, y)$, on a

$$|x| \leq \|u\| \quad \text{et} \quad |y| \leq \|u\|. \tag{10.1}$$

Remarque - La norme euclidienne généralise la valeur absolue. En effet, si $u = (x, 0)$ ou $u = (0, x)$ alors

$$\|u\| = |x|.$$

Cette proposition généralise la proposition 1 du chapitre 1.

Proposition 44 *Soient $u, v \in \mathbb{R}^2$ et $x \in \mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont vérifiées.*
(**N1**) $\|u\| \geq 0$.
(**N2**) $\|u\| = 0 \Longleftrightarrow u = 0$.
(**N3**) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *(inégalité triangulaire).*
(**N4**) $\|xu\| = |x|\|u\|$.

La proposition suivante est une reformulation de la proposition ci-dessus.

Proposition 45 *Soient $u, v, w \in \mathbb{R}^2$. Les propriétés suivantes sont vérifiées.*
(**d1**) $d(u, v) \geq 0$.
(**d2**) $d(u, v) = 0 \Longleftrightarrow u = v$.
(**d3**) $d(u, v) = d(v, u)$.
(**d4**) $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 33 *Soient $u_0 \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}^+$.*

1. *La boule ouverte de centre u_0 et de rayon r est l'ensemble noté $B(u_0, r)$ et défini par*
$$B(u_0, r) = \{v \in \mathbb{R}^2, d(u_0, v) < r\}.$$
2. *La boule fermée de centre u_0 et de rayon r est l'ensemble noté $\overline{B}(u_0, r)$ défini par*
$$\overline{B}(u_0, r) = \{v \in \mathbb{R}^2, d(u_0, v) \leq r\}.$$
3. *Un ouvert de $\mathbb{R}^2$ est une partie $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ telle que, pour tout $u \in \Omega$ il existe $r > 0$ tel que $B(u, r) \subset \Omega$.*

Intuitivement, un ouvert de $\mathbb{R}^2$ est une partie **dans** laquelle tout point a de la place autour de lui, on peut se déplacer à partir de chaque point dans toutes les directions sans sortir de l'ouvert.

Exemples -

1. **Toute boule ouverte de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.**
2. **Si $a < b$ et $c < d$, le rectangle (ouvert) $]a, b[\times]c, d[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Par contre, $[a, b] \times [c, d]$ n'est pas un ouvert car toute boule ouverte de centre (a, c) rencontre le complémentaire de $[a, b] \times [c, d]$.**

10.2 Limite d'une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$

Définition 34 *Une fonction de deux variables réelles est une application d'une partie $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y). \end{array}$$

Une telle fonction peut donner lieu à une représentation graphique dans $\mathbb{R}^3$ donnée par la surface $S_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z = f(x,y)\}$.

Jusqu'à la fin de cette section, les fonctions considérées sont définies sur une partie $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^2$ et $u_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un **point adhérent** à $\mathcal{A}$, c'est-à-dire, qu'il existe une suite $((x_n, y_n))_{n \geq n_0}$ de points de $\mathcal{A}$ qui **converge** vers u_0, c'est-à-dire,

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = x_0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} y_n = y_0.$$

Exemples -

1. **Le point** $(1,0)$ **est adhérent à la boule ouverte** $B((0,0),1)$**. En effet, la suite** $\left((1 - \frac{1}{n}, 0)\right)_{n \geq 1}$ **est une suite de points de** $B((0,0),1)$ **et**

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{n}) = 1 \quad \textbf{et} \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} 0 = 0.$$

2. **Le point** $(2,0)$ **n'est pas adhérent à** $B((0,0),1)$**.**

Définition 35 *On dira que f tend vers ℓ quand u tend vers u_0 si :*

$$\forall \epsilon > 0, \;\; \exists \delta > 0, \qquad \forall u \in \mathcal{A}, \; (d(u, u_0) \leq \delta \; \Rightarrow \; |f(u) - \ell| \leq \epsilon).$$

Le réel ℓ est aussi appelé limite de f en u_0.

Exemple - On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ **définie par**

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

et soit $u_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$**. Nous allons montrer que** f **tend vers** $x_0^2 + y_0^2$ **quand** u **tend vers** u_0**.**
Soit $\epsilon > 0$**, on cherche** $\delta > 0$ **tel que si** $\|u - u_0\| \leq \delta$ **alors** $|x^2 + y^2 - x_0^2 - y_0^2| \leq \epsilon$**.**
Puisque u **doit être proche de** u_0**, on suppose d'abord que** $\|u - u_0\| \leq 1$**.**
Ceci entraîne, en particulier, que

$$\|u\| \leq \|u - u_0\| + \|u_0\| \leq 1 + \|u_0\|.$$

D'un autre côté,

$$\begin{array}{rcl} |f(u)-f(u_0)| & = & |x^2+y^2-x_0^2-y_0^2| \leq |x^2-x_0^2|+|y^2-y_0^2| \\ & \leq & |x-x_0||x+x_0|+|y-y_0||y+y_0| \\ & \overset{(10.1)}{\leq} & \|u-u_0\|\left(|x+x_0|+|y+y_0|\right) \\ & \leq & \|u-u_0\|\left(|x|+|y|+|x_0|+|y_0|\right) \\ & \overset{(10.1)}{\leq} & \|u-u_0\|\left(2(1+\|u_0\|)+2\|u_0\|\right) \end{array}$$

Prenons $\delta = \min\left(1, \frac{\epsilon}{2(1+2\|u_0\|)}\right)$**. Si** $\|u-u_0\| \leq \delta$ **alors** $\|u-u_0\| \leq 1$ **et** $\|u-u_0\| \leq \frac{\epsilon}{2(1+2\|u_0\|)}$ **et donc**

$$|f(u)-f(u_0)| \leq \epsilon.$$

Il y a une relation étroite entre les limites des suites de $\mathbb{R}^2$ et les limites des fonctions de deux variables.

Proposition 46 *La fonction* f *tend vers* ℓ *quand* u *tend vers* u_0 *si et seulement si, pour toute suite* $((x_n,y_n))_{n\geq 0}$ *de* $\mathcal{A}\setminus\{u_0\}$ *qui converge vers* u_0*, on a* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f(x_n,y_n)=\ell$.

La caractérisation des limites par les suites sert surtout à montrer que certaines fonctions de deux variables n'ont pas de limites en certains points.

Exemple - En utilisant la contraposée de la proposition 46, nous allons montrer que la fonction $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\longrightarrow\mathbb{R}$ **définie par**

$$f(x,y)=\frac{y^2}{x^2+y^2}$$

n'admet pas de limite en $(0,0)$**. En effet, les deux suites** $(u_n)_{n\geq 1}$ **et** $(v_n)_{n\geq 1}$ **définies par** $u_n=(0,\frac{1}{n})$ **et** $v_n=(\frac{1}{n},0)$ **convergent vers** $(0,0)$ **alors que**

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f(u_n)=1 \quad \textbf{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} f(v_n)=0.$$

Supposons que f tend vers $\ell\in\mathbb{R}$ lorsque u tend vers u_0. D'après l'unicité de la limite d'une suite (*cf.* Proposition 4 chapitre 1), ℓ est unique et on pose

$$\ell=\lim_{u\longrightarrow u_0} f(u).$$

Proposition 47 *On suppose que* $\lim\limits_{u\longrightarrow u_0} f(u)=\ell_1$ *et* $\lim\limits_{u\longrightarrow u_0} g(u)=\ell_2$*. Alors :*

1. $\lim\limits_{u\longrightarrow u_0}(f+g)(u)=\ell_1+\ell_2$,

2. $\lim_{u \longrightarrow u_0} (fg)(u) = \ell_1 \ell_2$,
3. $\lim_{u \longrightarrow u_0} (\alpha f)(u) = \alpha \ell_1$,
4. *si* $\ell_2 \neq 0$ *et* $g(u) \neq 0$, $\lim_{u \longrightarrow u_0} \left(\frac{f}{g}\right)(u) = \frac{\ell_1}{\ell_2}$.

10.3 Fonctions continues sur une partie de $\mathbb{R}^2$

Les fonctions considérées dans cette section sont définies sur une partie $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$.

Définition 36 *On dira que f est continue en $u_0 \in \mathcal{A}$ si $\lim_{u \longrightarrow u_0} f(u) = f(u_0)$. On notera $\mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues en tout point de $\mathcal{A}$.*

Proposition 48 *Si f et g sont continues en u_0 alors $f+g$, fg et αf sont continues en u_0 ($\alpha \in \mathbb{R}$). Si en plus, $g(u) \neq 0$ pour tout $u \in \mathcal{A}$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en u_0.*

Proposition 49 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $f \in \mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ et $\phi \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ telle que $f(\mathcal{A}) \subset I$ alors $\phi \circ f \in \mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathbb{R})$.*

Exemple - On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \textbf{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \textbf{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Cette fonction est clairement continue en tout point $(x,y) \neq (0,0)$. Etudions la continuité de f en $(0,0)$. Pour cela, nous allons utiliser la proposition 46. Soit $((x_n,y_n))_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ telle que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} y_n = 0$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n^2 y_n^2 \leq \frac{1}{2}(x_n^2 + y_n^2)^2,$$

et donc

$$|f(x_n,y_n)| \leq \frac{1}{2}(x_n^2 + y_n^2).$$

Cett inégalité implique clairement que $\lim_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n,y_n) = 0$. Alors, en vertu de la proposition 46, $\lim_{u \longrightarrow (0,0)} f(u) = f(0,0)$ et donc f est continue en $(0,0)$. Finalement, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

10.4 Dérivabilité d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Pour définir la notion de dérivabilité d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, appelée aussi **différentiabilité**, nous allons rappeler la notion de dérivabilité d'une fonction d'une seule variable et essayer après d'étendre, d'une manière naturelle, cette notion aux fonctions de deux variables.
Soit $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. Rappelons (*cf.* Chapitre 3) que g est dite dérivable en x_0 s'il existe un réel ℓ tel que

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} = \ell,$$

ou d'une manière équivalente

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{|g(x_0+h)-g(x_0)-\ell h|}{|h|} = 0. \tag{10.2}$$

On considère, maintenant, une fonction f définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soit $u_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$. Puisque la norme euclidienne généralise la valeur absolue, il est alors naturel, en vertu de la relation (10.2), de poser la définition suivante. On dira que f est **différentiable** en u_0 s'il existe $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lim_{(h_1,h_2) \longrightarrow (0,0)} \frac{|f(x_0+h_1, y_0+h_2)) - f(u_0) - \ell_1 h_1 - \ell_2 h_2|}{\|(h_1,h_2)\|} = 0. \tag{10.3}$$

En prenant dans cette équation, respectivement, $h_1 = 0$ et $h_2 = 0$, on déduit que

$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{|f(x_0, y_0+h)) - f(u_0) - \ell_2 h|}{|h|} = 0,$$
$$\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{|f(x_0+h, y_0)) - f(u_0) - \ell_1 h|}{|h|} = 0,$$

soit

$$\ell_1 = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(u_0)}{h} \quad \text{et} \quad \ell_2 = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(u_0)}{h}.$$

Nous pouvons, maintenant, définir la notion de différentiabilité d'une manière précise.

Définition 37 *Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert et $u_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$.*

On appelle dérivées partielles de f en u_0 les deux nombres réels (quand ils existent) définis par

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(u_0) &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(u_0)}{h},\\ \frac{\partial f}{\partial y}(u_0) &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(u_0)}{h}.\end{aligned}$$

2. *On dira que f est différentiable en u_0 si $\frac{\partial f}{\partial x}(u_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(u_0)$ existent et*

$$\lim_{(h_1,h_2) \longrightarrow (0,0)} \frac{|f(x_0+h_1, y_0+h_2)) - f(u_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(u_0)h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(u_0)h_2|}{\|(h_1,h_2)\|} = 0,$$

où $\|(h_1,h_2)\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$.

Remarque - L'hypothèse que le domaine de définition de f est un ouvert est nécessaire car, dans l'équation (10.3), $f(x_0+h_1, y_0+h_2)$ n'est défini que si f est définie sur un boule ouverte de centre (x_0, y_0).

Exemples -

1. **On considère la fonction $f(x,y) = x + |y|$. Nous allons étudier la différentiablité de f en $(0,0)$. Commençons par calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$. Nous avons**

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{h}{h} = 1,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{|h|}{h}.\end{aligned}$$

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ et, puisque $\lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$ et $\lim_{h \longrightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = -1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ n'existe pas. Ainsi, f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

2. **On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par**

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \textbf{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \textbf{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Nous allons étudier la différentiablité de f en $(0,0)$. Commençons par calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$. Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{0}{h} = 0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.\end{aligned}$$

D'un autre côté,

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{|f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Nous allons montrer que cette limite est différente de 0**. Pour cela, on considère la suite** $\left((\frac{1}{n},\frac{1}{n})\right)_{n\geq 1}$**. Cette suite tend vers** $(0,0)$ **mais**

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{1}{n}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

En vertu de la proposition 46, $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \neq 0$ **et donc** f **n'est pas différentiable en** $(0,0)$**.**

3. **On considère la fonction** $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ **définie par**

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y^4}{\sqrt{x^2+y^2}} & \textbf{si} \quad (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \textbf{si} \quad (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Nous allons étudier la différentiablité de f **en** $(0,0)$**. Commençons par calculer** $\frac{\partial f}{\partial x}$ **et** $\frac{\partial f}{\partial y}$ **en** $(0,0)$**. Nous avons**

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{0}{h} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\longrightarrow 0} \frac{0}{h} = 0. \end{aligned}$$

On a

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{|f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^4y^4}{x^2+y^2}.$$

Or $x^2y^2 \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)^2$ **et donc**

$$0 \leq \frac{x^4y^4}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{4}(x^2+y^2)^3.$$

De cette inégalité, on déduit aisément que

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^4y^4}{x^2+y^2} = 0,$$

et finalement, f **est différentiable en** $(0,0)$**.**

Jusqu'à la fin de cette section, les fonctions de deux variables considérées sont définies sur des ouverts. Comme pour les fonctions d'une seule variable, on a les propositions suivantes.

Proposition 50 *Si f est différentiable en u_0 alors f est continue en u_0.*

Proposition 51 *Soient f et g deux fonctions différentiables en u_0 et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :*

1. *$f + \alpha g$ est différentiable en u_0 et on a*

$$\begin{aligned} \frac{\partial (f+\alpha g)}{\partial x}(u_0) &= \frac{\partial f}{\partial x}(u_0) + \alpha \frac{\partial g}{\partial x}(u_0), \\ \frac{\partial (f+\alpha g)}{\partial y}(u_0) &= \frac{\partial f}{\partial y}(u_0) + \alpha \frac{\partial g}{\partial y}(u_0). \end{aligned}$$

2. *fg est différentiable en u_0 et on a*

$$\begin{aligned} \frac{\partial (fg)}{\partial x}(u_0) &= g(u_0)\frac{\partial f}{\partial x}(u_0) + f(u_0)\frac{\partial g}{\partial x}(u_0), \\ \frac{\partial (fg)}{\partial y}(u_0) &= g(u_0)\frac{\partial f}{\partial y}(u_0) + f(u_0)\frac{\partial g}{\partial y}(u_0). \end{aligned}$$

3. *Si en plus, $g(u_0) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ est différentiable en u_0 et on a*

$$\begin{aligned} \frac{\partial (f/g)}{\partial x}(u_0) &= \frac{1}{g^2(u_0)}\left(g(u_0)\frac{\partial f}{\partial x}(u_0) - f(u_0)\frac{\partial g}{\partial x}(u_0)\right), \\ \frac{\partial (f/g)}{\partial y}(u_0) &= \frac{1}{g^2(u_0)}\left(g(u_0)\frac{\partial f}{\partial y}(u_0) - f(u_0)\frac{\partial g}{\partial y}(u_0)\right). \end{aligned}$$

Proposition 52 *Soit $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant $f(u_0)$. Si f est différentiable en u_0 et ϕ est dérivable en $f(u_0)$ alors $\phi \circ f$ est différentiable en u_0 est on a*

$$\frac{\partial (\phi\circ f)}{\partial x}(u_0) = \phi'(f(u_0))\frac{\partial f}{\partial x}(u_0) \quad \textit{et} \quad \frac{\partial (\phi\circ f)}{\partial y}(u_0) = \phi'(f(u_0))\frac{\partial f}{\partial y}(u_0).$$

Proposition 53 *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $t_0 \in I$ et soit $x, y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $(x(t_0), y(t_0)) \in \Omega$. Si x et y sont dérivables en t_0 et f différentiable en $(x(t_0), y(t_0))$ alors $F(t) = f(x(t), y(t))$ est dérivable en t_0 et on a*

$$F'(t_0) = x'(t_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0)) + y'(t_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0)).$$

En pratique, toutes le fonctions obtenues à partir des fonctions usuelles d'une variable par somme, produit, quotient et composition sont différentiables. Le calcul des dérivées partielles est simple et se ramène au calcul des dérivées de fonctions d'une seule variables. Par exemple, pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ on dérive $f(x,y)$ par rapport à x en considérant y comme une constante et de même pour calculer $\frac{\partial f}{\partial y}$ on dérive $f(x,y)$ par rapport à y en considérant x comme une constante.

Exemple - Calculons les dérivées partielles des fonctions suivantes :

$$f(x,y) = e^{x^2y},\ g(x,y) = \frac{y}{x+\sin(xy)}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2xye^{x^2y}, & \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2e^{x^2y},\\
\frac{\partial g}{\partial x} &= -\frac{y(1+y\cos(xy))}{(x+\sin(xy))^2}, & \frac{\partial g}{\partial y} &= \frac{x+\sin(xy)-yx\cos(xy)}{(x+\sin(xy))^2}.
\end{aligned}$$

Nous allons finir cette section par donner deux interprétations de la différentiablité, l'une analytique et l'autre géométrique. Soit $f:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 30 (**Existence du développement limité à l'ordre 1 d'une fonction différentiable**) *Si f est différentiable en u_0 alors f admet un développement limité d'ordre 1 en $u_0 = (x_0, y_0)$, c'est-à-dire,*

$$f(x,y) = f(u_0) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(u_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(u_0) + o_{u_0}(\|(x-x_0, y-y_0)\|).$$

Exemple - En utilisant le théorème 30, nous allons calculer

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{e^{\sin(xy)}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

On considère la fonction $f(x,y) = e^{\sin(xy)}$. Cette fonction est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos(xy)e^{\sin(xy)} \quad \textbf{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(xy)e^{\sin(xy)}.$$

D'après le théorème 30, f admet un développement limité à l'ordre 1 en $(0,0)$ donné par

$$f(x,y) = f(0,0) + x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) + o_{(0,0)}(\sqrt{x^2+y^2}),$$

soit

$$e^{\sin(xy)} = 1 + o_{(0,0)}(\sqrt{x^2+y^2}).$$

Alors

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{e^{\sin(xy)}-1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{o_{(0,0)}(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Comme pour une fonction d'une seule variable où la dérivée est la direction de la droite tangente, on a une interprétation analogue pour les fonctions de deux variables.

Proposition 54 *Soit $S_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z = f(x,y)\}$ la surface associée à une fonction f différentiable en u_0. Alors le plan tangent à S_f au point $(u_0, f(u_0))$ est le plan d'équation*

$$z = f(u_0) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(u_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(u_0),$$

avec $u_0 = (x_0, y_0)$.

Exemple- Le plan tangent en $(0,0)$ à la surface $\{(x,y,z), z = \sin(x+y)\}$ est le plan $z = x+y$.

Définition 38 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $u_0 \in \Omega$. Une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe C^1 en u_0 si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues en u_0.*
On note $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^1 en tout point de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ est stable par l'addition, la multiplication et le passage à l'inverse.

Exemple- On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y^4}{\sqrt{x^2+y^2}} & \textbf{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \textbf{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Cette fonction est clairement différentiable en tout point $(x,y) \neq (0,0)$ et un calcul direct donne

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x^3y^4(3x^2+4y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \textbf{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^4y^3(4x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

D'un autre côté, nous avons vu dans la section 10.4 que f est différentiable en $(0,0)$ et que $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Nous allons montrer maintenant que les dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$. La continuité est

évidente en tout point $(x,y) \neq (0,0)$, montrons qu'elles sont continues en $(0,0)$. Pour cela, utilisons les coordonnées polaires et posons $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. On a alors

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| &= r^6\left|\cos^3\theta\sin^4\theta(3\cos^2\theta+4\sin^2\theta)\right| \leq 7r^6,\\
\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| &= r^6\left|\sin^3\theta\cos^4\theta(3\sin^2\theta+4\cos^2\theta)\right| \leq 7r^6.
\end{aligned}$$

De ces inégalités, on déduit que

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Ceci montre que les dérivées partielles sont continues en $(0,0)$ et donc sur $\mathbb{R}^2$ et, finalement, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Le théorème fondamentale suivant fournit un critère simple de différentiabilité.

Théorème 31 *Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 en $u_0 \in \Omega$. Alors f est différentiable en u_0.*

10.5 Fonctions de classe C^2 et lemme de Schwarz

Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent. Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ admet des dérivées partielles on pose alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

On définit d'une manière analogue $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Ces fonctions sont appelées **dérivées partielles seconde** de f.

Exemples -

1. **Nous allons calculer les dérivées partielles seconde en $(0,0)$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par**

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x+y^2} & \textbf{si} \quad (x,y) \neq (0,0),\\ 0 & \textbf{si} \quad (x,y) = (0,0).\end{cases}$$

On a, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^2+2xy^2}{(x+y^2)^2} \quad \textbf{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2x^2y}{(x+y^2)^2}.$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x}{x}=1,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{f(0,x)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{0}{x}=0.\end{aligned}$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1-1}{x}=0,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,x)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{0-1}{x}=\pm\infty,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{0}{x}=0,\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,x)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{0}{x}=0.\end{aligned}$$

On remarque que $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ existe alors que $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ n'existe pas.

2. **On considère la fonction $f(x,y)=xye^{xy}$. On a**

$$\frac{\partial f}{\partial x}=(y+xy^2)e^{xy}\quad \textbf{et}\quad \frac{\partial f}{\partial y}=(x+yx^2)e^{xy}.$$

On déduit alors que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= (2y^2+xy^3)e^{xy}, & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}&=(1+3xy+x^2y^2)e^{xy},\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= (2x^2+yx^3)e^{xy}, & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}&=(1+3xy+x^2y^2)e^{xy}.\end{aligned}$$

On remarque que $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$. Ceci n'est pas un hasard comme on le verra bientôt.

Définition 39 *On dira que $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ est de classe C^2 en $u_0\in\Omega$ si les dérivées partielles seconde en u_0 existent et sont continues en u_0.*
On note $\mathcal{C}^2(\Omega,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^2 en tout point de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$\mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$ est stable par l'addition, la multiplication et le passage à l'inverse.

On peut maintenant énoncer le Lemme de Schwarz.

Théorème 32 **(Lemme de Schwarz)** *Soit $f:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe C^2 en u_0. Alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(u_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(u_0).$$

La contraposée du Lemme de Schwarz peut être utilisée pour montrer que certaines fonctions ne sont pas de classe C^2 comme le montre l'exemple suivant.

Exemple - On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \textbf{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \textbf{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

On a, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} \quad \textbf{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{xy^2(y^2+3x^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{0}{x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(0,x)-f(0,0)}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{0}{x} = 0. \end{aligned}$$

Nous allons montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$. Ces fonctions sont continues pour tout $(x,y) \neq (0,0)$. Etudions la continuité en $(0,0)$. Pour cela, nous allons calculer les limites en $(0,0)$ de ces deux fonctions. Posons $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. On a alors

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| &= r\left|\sin^3\theta(\sin^2\theta - \cos^2\theta)\right| \leq 2r, \\ \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| &= r\left|\cos\theta\sin^2\theta(\sin^2\theta + 3\cos^2\theta)\right| \leq 4r. \end{aligned}$$

De ces inégalités, on déduit que

$$\lim_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Ceci montre que les dérivées partielles sont continues en $(0,0)$ et donc sur $\mathbb{R}^2$ et, finalement, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Maintenant,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) &= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,x) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x}{x} = 1, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) &= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{0}{x} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ et donc, en vertu du Lemme de Schwarz, f n'est pas de classe C^2 en $(0,0)$.

10.6 Extremums des fonctions de deux variables

10.6.1 Extremums des fonctions différentiables

Définition 40 *Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur une partie Ω de $\mathbb{R}^2$.*

1. *On dira f présente un maximum local (resp. minimum local) en $u_0 \in \Omega$ s'il existe une boule ouverte $B(u_0, r)$ tel que, pour tout $(x, y) \in B(u_0, r) \cap \Omega$, $f(x, y) \leq f(u_0)$ (resp. $f(x, y) \geq f(u_0)$).*
2. *On dira f présente un maximum global (resp. minimum global) en $u_0 \in \Omega$ si pour tout $(x, y) \in \Omega$, $f(x, y) \leq f(u_0)$ (resp. $f(x, y) \geq f(u_0)$).*

Un extremum est soit un minimum soit un maximum.

Exemple -

1. **La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^2 + y^2$ présente un minimum global en $(0, 0)$. En effet, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) \geq f(0, 0)$.**
2. **La fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$ présente un maximum global en $(0, 0)$. En effet, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) \leq f(0, 0)$.**

Dans la pratique, on a besoin parfois de montrer qu'une fonction ne présente pas d'extremum en un point donné. Pour cela, on utilise le critère suivant.

Proposition 55 *Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $u_0 \in \Omega$. S'il existe deux suites $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ de Ω qui convergent vers u_0 et telles que, pour tout $n \geq n_0$,*

$$f(u_n) < f(u_0) < f(v_n),$$

alors f ne présente pas d'extremum en u_0.

Proposition 56 *Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur une partie Ω de $\mathbb{R}^2$. Si f est de classe C^1 et présente un extremum en $u_0 \in \Omega$ et s'il existe $r > 0$ tel que $B(u_0, r) \subset \Omega$ alors $\frac{\partial f}{\partial x}(u_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(u_0) = 0$.*

Remarque - La réciproque est fausse comme le prouve le contre-exemple suivant. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - y^2$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}((0, 0)) = \frac{\partial f}{\partial y}((0, 0)) = 0$$

mais f ne présente pas d'extremum en $(0, 0)$. Pour montrer cela, nous allons utiliser la proposition 55. En effet, les deux suites $\left((0, \frac{1}{n})\right)_{n \geq 1}$ et $\left((\frac{1}{n}, 0)\right)_{n \geq 1}$ convergent vers $(0, 0)$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$f(0, \frac{1}{n}) < f(0, 0) < f(\frac{1}{n}, 0).$$

10.6.2 Algorithme d'étude des extremums des fonctions de classe C^2

L'étude des extremums des fonctions de classes C^2 est basée sur le théorème suivant.

Théorème 33 (**Développement limité d'ordre 2**) *Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur un ouvert Ω et soit $u_0 \in \Omega$. Alors, pour $h = (h_1, h_2)$, on a*

$$\begin{aligned} f(u_0 + h) &= f(u_0) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(u_0) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(u_0) + \frac{1}{2} h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u_0) \\ &\quad + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u_0) + \frac{1}{2} h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u_0) + o_{(0,0)}\left(h_1^2 + h_2^2\right). \end{aligned}$$

Nous allons introduire les **notations de Monge** et donner l'algorithme d'étude des points critiques d'une fonction de classe C^2. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur un ouvert Ω et soit $u_0 \in \Omega$. On pose

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}(u_0),\ q = \frac{\partial f}{\partial y}(u_0),\ r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u_0),\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u_0) \text{ et } t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u_0).$$

Théorème 34 *Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 sur un ouvert Ω et soit $u_0 \in \Omega$. Si u_0 est un point critique de f, c'est-à-dire, $p = q = 0$ alors :*

1. *Si $\Delta = rt - s^2 < 0$ alors $f(u_0)$ n'est ni un minimum local ni un maximum local ;*
2. *Si $\Delta = rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ alors $f(u_0)$ est un minimum local.*
3. *Si $\Delta = rt - s^2 > 0$ et $r < 0$ alors $f(u_0)$ est un maximum local.*

Remarque - Si $\Delta = rt - s^2 = 0$, on ne peut rien conclure et il faut essayer d'utiliser d'autres méthodes pour étudier le point critique en question.

Exemples -

1. **Nous allons étudier les extremums de la fonction**

$$f(x, y) = 2x^2 y + 2x^2 + y.$$

La fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Le point (x, y) est un point critique de f si et seulement si :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4xy + 4x = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x^2 + 1 = 0. \end{cases} \tag{10.4}$$

Comme la deuxième équation n'admet pas de solutions, on déduit que f n'a pas de point critique et donc n'admet pas d'extremum.

2. Nous allons étudier les extremums de la fonction

$$f(x,y) = xy^2(1+x+3y).$$

La fonction f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. Le point (x,y) est un point critique de f si et seulement si :

$$\begin{cases} y^2(1+2x+3y) = 0, \\ xy(2+2x+9y) = 0. \end{cases} \tag{10.5}$$

Cette équation est équivalente à

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R}, \\ y = 0. \end{cases} \quad \textbf{ou} \quad \begin{cases} y = -\frac{1}{3}, \\ x = 0. \end{cases} \quad \textbf{ou} \quad \begin{cases} 1+2x+3y = 0, \\ 2+2x+9y = 0. \end{cases}$$

On déduit que les points critiques sont $(x_0, 0)$, $(0, -\frac{1}{3})$ et $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{6})$. Etudions la nature de chacun des points critiques en utilisant l'algorithme décrit dans le théorème 34. On a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^2, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = y(2+4x+9y), \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x(1+x+9y).$$

- **Nature du point critique $(x_0, 0)$. On a**

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,0) = 0, \ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,0) = 0, \ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,0) = 2x_0(1+x_0)$$

et $\Delta = rt - s^2 = 0$. Cette méthode ne permet pas de conclure. Nous allons étudier la nature de ce point autrement. On a $f(x_0, 0) = 0$ et

$$f(x,y) - f(x_0,0) = xy^2(x+1+3y)$$

(a) Si $x_0 = 0$, les deux suites $\left((\frac{3}{n}, -\frac{1}{n})\right)_{n\geq 1}$ et $\left((-\frac{3}{n}, \frac{1}{n})\right)_{n\geq 1}$ convergent vers $(0,0)$ mais

$$f(-\frac{3}{n}, \frac{1}{n}) < f(0,0) < f(\frac{3}{n}, -\frac{1}{n})$$

et donc, en vertu de la proposition 55, $f(0,0)$ n'est pas un extremum local.

(b) Si $x_0 \neq 0$, les deux suites $\left((x_0 + \frac{x_0}{n}, -\frac{x_0}{3n})\right)_{n\geq 1}$ et $\left((x_0 - \frac{x_0}{n}, \frac{x_0}{3n})\right)_{n\geq 1}$ convergent vers $(x_0, 0)$ mais

$$f(x_0 + \frac{x_0}{n}, -\frac{x_0}{3n}) f(x_0 - \frac{x_0}{n}, \frac{x_0}{3n}) < 0$$

et donc, en vertu de la proposition 55, $f(x_0, 0)$ n'est pas un extremum local.

• **Nature du point critique** $(0,-\frac{1}{3})$**. On a**

$$r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-\frac{1}{3})=\frac{2}{9},\ s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,-\frac{1}{3})=\frac{1}{3},\ t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,-\frac{1}{3})=0$$

et $\Delta=rt-s^2<0$ **et donc** $f(0,-\frac{1}{3})$ **n'est pas un extremum local.**
• **Nature du point critique** $(-\frac{1}{4},-\frac{1}{6})$**. On a**

$$r=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\frac{1}{4},-\frac{1}{6})=\frac{1}{18},\ s=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-\frac{1}{4},-\frac{1}{6})=\frac{1}{12},\ t=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-\frac{1}{4},-\frac{1}{6})=\frac{3}{8}$$

et $\Delta=rt-s^2>0$ **et** $r>0$ **donc** $f(-\frac{1}{4},-\frac{1}{6})$ **est un minimum local.**

10.7 Exercices corrigés

Exercice 106 *Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x+y)^2}.$$

1. *Montrer que* $\lim\limits_{y\longrightarrow 0}\left(\lim\limits_{x\longrightarrow 0} f(x,y)\right) = \lim\limits_{x\longrightarrow 0}\left(\lim\limits_{y\longrightarrow 0} f(x,y)\right) = 0.$
2. *Montrer que* $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)$ *n'existe pas.*

Solution -

1. On a

$$\lim_{x\longrightarrow 0} f(x,y) = \frac{0}{y^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{y\longrightarrow 0} f(x,y) = \frac{0}{x^2} = 0,$$

   et donc

$$\lim_{y\longrightarrow 0}\left(\lim_{x\longrightarrow 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\longrightarrow 0}\left(\lim_{y\longrightarrow 0} f(x,y)\right) = 0.$$

2. Nous allons utiliser la contraposée de la proposition 46 pour montrer que cette limite n'existe pas. Considérons les deux suites $\left((\frac{1}{n},0)\right)_{n\geq 1}$ et $\left((\frac{1}{n},-\frac{1}{n})\right)_{n\geq 1}$. Ces deux suites convergent vers $(0,0)$ alors que

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f(\frac{1}{n},0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\longrightarrow+\infty} f(\frac{1}{n},-\frac{1}{n}) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^4}} = 1.$$

   En conclusion, $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

Exercice 107 *Etudier l'existence des limites suivantes :*

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{xy^2}{x+y}, \quad \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{|x|-|y|}{x^2+y^2},$$
$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^2+y^2}, \quad \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{\ln(e^x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Solution -

1. On peut supposer que $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$. Ainsi $x^2 + y^2 < x + y$ et donc
$$0 \leq \left|\frac{xy^2}{x+y}\right| \leq \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right|.$$
En prenant $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, on déduit de l'inégalité ci-dessus que
$$0 \leq \left|\frac{xy^2}{x+y}\right| \leq |r\cos\theta\sin^2\theta| \leq r = \sqrt{x^2+y^2}.$$
De cette inégalité, on déduit que
$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{xy^2}{x+y} = 0.$$

2. Nous allons utiliser la contraposée de la proposition 46 pour montrer que cette limite n'existe pas. Considérons la suite $((x_n, y_n))_{n\geq 0}$ définie par $x_n = \frac{1}{n}$ et $y_n = 0$ pour tout $n \geq 1$. Cette suite converge vers $(0,0)$ alors que
$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{|x_n| - |y_n|}{x_n^2 + y_n^2} = \lim_{n\longrightarrow+\infty} n = +\infty.$$
En conclusion, $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{|x| - |y|}{x^2+y^2}$ n'existe pas.

3. En prenant $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, on a
$$0 \leq \left|\frac{x^3y^2}{x^2+y^2}\right| \leq |r^3\cos^3\theta\sin^2\theta| \leq r^3 = (x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}.$$
De cette inégalité, on déduit que
$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^2+y^2} = 0.$$

4. Nous allons utiliser la contraposée de la proposition 46 pour montrer que cette limite n'existe pas. Considérons les deux suites $((a_n, b_n))_{n\geq 1}$ et $((c_n, d_n))_{n\geq 1}$ définies par $a_n = \frac{1}{n}$, $c_n = -\frac{1}{n}$ et $b_n = d_n = 0$. Ces deux suites convergent vers $(0,0)$ alors que
$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\ln(e^{a_n} + b_n)}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{a_n}{|a_n|} = 1,\\ \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\ln(e^{c_n} + d_n)}{\sqrt{c_n^2 + d_n^2}} &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{c_n}{|c_n|} = -1.\end{aligned}$$

En conclusion, $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \dfrac{\ln(e^x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ n'existe pas.

Exercice 108 *Etudier la continuité des fonctions suivantes définies sur* $\mathbb{R}^2$ *:*

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$
2. $g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$
3. $h(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Solution -

1. Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y)$ est le quotient de deux fonctions continues donc elle est continue en vertu de la proposition 47. Etudions maintenant la continuité de f en $(0,0)$. Pour cela, calculons $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)$. Considérons les deux suites $((a_n,b_n))_{n\geq1}$ et $((c_n,d_n))_{n\geq1}$ définies par $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$, $c_n = \frac{1}{n}$ et $d_n = 0$. Ces deux suites convergent vers $(0,0)$ alors que

$$\begin{aligned} \lim_{n\longrightarrow+\infty} f(a_n,b_n) &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{a_n b_n}{a_n^2+b_n^2} = \frac{1}{2}, \\ \lim_{n\longrightarrow+\infty} f(c_n,d_n) &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{c_n d_n}{c_n^2+d_n^2} = 0. \end{aligned}$$

   En vertu de la proposition 46, $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas et donc f n'est pas continue en $(0,0)$.
   En conclusion, f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, $g(x,y)$ est le quotient de deux fonctions continues donc elle est continue en vertu de la proposition 47. Etudions maintenant la continuité de g en $(0,0)$. Pour cela, calculons $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} g(x,y)$. Posons $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Alors

$$0 \leq \left| \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \right| = r|\cos^3\theta + \sin^3\theta| \leq 2r = 2\sqrt{x^2+y^2}.$$

De cette inégalité, on déduit que

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} g(x,y) = 0 = g(0,0),$$

et donc g est continue en $(0,0)$.
En conclusion, g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

3. Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, $h(x,y)$ est le quotient de deux fonctions continues donc elle est continue en vertu de la proposition 47. Etudions maintenant la continuité de h en $(0,0)$. Pour cela, calculons $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} h(x,y)$.
Considérons les deux suites $((a_n,b_n))_{n\geq 1}$ et $((c_n,d_n))_{n\geq 1}$ définies par $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$, $c_n = \frac{1}{n}$ et $d_n = 0$. Ces deux suites convergent vers $(0,0)$ alors que

$$\begin{aligned}\lim_{n\longrightarrow+\infty} f(a_n,b_n) &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n^2}}-1}{\frac{2}{n^2}} = \frac{1}{2},\\ \lim_{n\longrightarrow+\infty} f(c_n,d_n) &= \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{0}{c_n^2} = 0.\end{aligned}$$

En vertu de la proposition 46, $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} h(x,y)$ n'existe pas et donc h n'est pas continue en $(0,0)$.
En conclusion, h est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Exercice 109 *Soit* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Solution -

Remarquons d'abord que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de deux fonctions différentiables et, pour tout $(x,y) \neq (0,0)$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{y(x^2+y^2)\cos(xy) - 2x\sin(xy)}{(x^2+y^2)^2},\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{x(x^2+y^2)\cos(xy) - 2y\sin(xy)}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

Maintenant, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0,\\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{f(0,x)-f(0,0)}{x}=0,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x}=0,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,x)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}=0,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,x)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\frac{x^3}{x^4}}{x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1}{x^2}=+\infty,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\frac{x^3}{x^4}}{x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1}{x^2}=+\infty.
\end{aligned}$$

Exercice 110 *Soit $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{|x|^3y}{x^2+y^4} & si\quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & si\quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1. *Montrer que, pour tout $(x,y)\neq(0,0)$, $|f(x,y)|\leq(x^2+y^4)^{\frac{3}{4}}$.*
2. *Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.*
3. *Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.*
4. *Montrer que, pour tout $(x,y)\neq(0,0)$, $\frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq|x|$.*
5. *Etudier la différentiabilité de f en $(0,0)$.*

Solution -

1. Nous allons procéder par équivalence. On a

$$|f(x,y)|\leq(x^2+y^4)^{\frac{3}{4}}\ \Leftrightarrow\ |x|^3|y|\leq(x^2+y^4)^{\frac{7}{4}}\Leftrightarrow x^{12}y^4\leq(x^2+y^4)^7.$$

Or, d'après la formule du binôme de Newton,

$$(x^2+y^4)^7=x^{14}+7x^{12}y^4+\sum_{k=2}^{7}C_k^7x^{4(7-k)}y^{2k}$$

et donc

$$(x^2+y^4)^7 - x^{12}y^4 = x^{14} + 6x^{12}y^4 + \sum_{k=2}^{7} C_k^7 x^{4(7-k)} y^{2k} \geq 0,$$

ce qui permet de conclure.

2. Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, $f(x,y)$ est le quotient de deux fonctions continues donc elle est continue en vertu de la proposition 47. Etudions maintenant la continuité de f en $(0,0)$. Pour cela, calculons $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)$. Or, l'inégalité établie dans 1. permet de conclure que

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0),$$

ce qui montre que f est continue en $(0,0)$.
En conclusion, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

3. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0,\\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{f(0,x)-f(0,0)}{x} = 0.
\end{aligned}$$

4. Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{|f(x,y)|}{|x|\sqrt{x^2+y^2}} &= \frac{|x|^3|y|}{\sqrt{x^2}\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^4)}\\
&= \frac{|x||y|}{\sqrt{x^4+x^2y^2}} \times \frac{x^2}{x^2+y^2}.
\end{aligned}$$

Or, les inégalités

$$x^2y^2 \leq x^4 + x^2y^2 \quad \text{et} \quad x^2 \leq x^2+y^2$$

impliquent

$$0 \leq \frac{|x||y|}{\sqrt{x^4+x^2y^2}} \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$$

et par suite

$$0 \leq \frac{|f(x,y)|}{|x|\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1.$$

En multipliant les deux membres de cette inégalité par $|x|$, on déduit que

$$0 \leq \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x|.$$

5. La fonction f est différentiable en $(0,0)$ si et seulement si
$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{|f(x,y)-f(0,0)-x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$
Or, puisque $f(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$, on déduit que
$$\frac{|f(x,y)-f(0,0)-x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$
Maintenant, d'après l'inégalité établie dans 4., on a
$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$
et donc f est différentiable en $(0,0)$.

Exercice 111 *Soit* $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ *définie par*
$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

1. *Montrer que* f *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.
2. *Calculer* $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
3. *Montrer que* f *n'est pas différentiable en* $(0,0)$.

Solution -

1. Pour tout $(x,y)\neq(0,0)$, $f(x,y)$ est le quotient de deux fonctions continues donc elle est continue en vertu de la proposition 47. Etudions maintenant la continuité de f en $(0,0)$. Pour cela, calculons $\lim\limits_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)$. Posons $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$. Alors
$$0\leq\left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right|=r|\cos^3\theta-\sin^3\theta|\leq 2r=2\sqrt{x^2+y^2}.$$
De cette inégalité, on déduit que
$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0),$$
et donc f est continue en $(0,0)$.
En conclusion, f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x}{x}=1,\\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{f(0,x)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{-x}{x}=-1.
\end{aligned}$$

3. La fonction f est différentiable en $(0,0)$ si et seulement si

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{|f(x,y)-f(0,0)-x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)|}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

Or, puisque $f(0,0)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=1$, on déduit que

$$\begin{aligned}
\frac{|f(x,y)-f(0,0)-x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)|}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \frac{|f(x,y)-x+y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\\
&= \frac{|yx^2-xy^2|}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

Nous allons montrer que la limite en $(0,0)$ de cette quantité n'existe pas. Considérons les deux suites $((a_n,b_n))_{n\geq 1}$ et $((c_n,d_n))_{n\geq 1}$ définies par $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=-\frac{1}{n}$, $c_n=\frac{1}{n}$ et $d_n=0$. Ces deux suites convergent vers $(0,0)$ alors que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{|b_na_n^2-a_nb_n^2|}{(a_n^2+b_n^2)^{\frac{3}{2}}} &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{2a_n^3}{2\sqrt{2}a_n^3}=\frac{\sqrt{2}}{2},\\
\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{|d_nc_n^2-c_nd_n^2|}{(c_n^2+d_n^2)^{\frac{3}{2}}} &= 0.
\end{aligned}$$

En vertu de la proposition 46, $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)}\frac{|yx^2-xy^2|}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ n'existe pas et donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 112 *Soit* $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1. *Montrer que* f *est de classe* C^1.

2. *Calculer* $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.
3. *Que peut-on conclure ?*

Solution -

1. Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f est le quotient de deux fonctions de classe C^1 et donc elle est de classe C^1. Montrons que f est de classe C^1 en $(0,0)$. Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} - xy\frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(0,x)-f(0,0)}{x} = 0. \end{aligned}$$

2. Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont le quotient de fonctions continues donc elles sont continues en vertu de la proposition 47. Etudions maintenant la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$. Pour cela calculons $\lim\limits_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\lim\limits_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Posons $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Alors

$$\begin{aligned} 0 \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| &= \left|r\sin\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + 4r\cos^2\theta\sin^3\theta\right| \\ &\leq 6r = 6\sqrt{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

De cette égalité on déduit que

$$\lim_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0),$$

et donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$. Un calcul analogue montre que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0,0)$.
En conclusion, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

3. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) &= \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x} = 0,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) &= \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,x)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = 0,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) &= \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,x)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{-x}{x} = -1,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) &= \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = \lim_{x\longrightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.
\end{aligned}$$

4. Puisque $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$, on peut conclure grâce au lemme de Schwarz (*cf.* Théorème 32) que f n'est pas classe C^2 en $(0,0)$.

Exercice 113 *1. Donner une développement limité à l'ordre 1 en* $(1,1)$ *de* $f(x,y) = x^2 e^{xy}$ *et en déduire une valeur approchée de* $f(1,001, 1,001)$.

2. Donner une développement limité à l'ordre 1 en $(2,1)$ *de* $g(x,y) = \sqrt{xy + \dfrac{x}{y}}$ *et en déduire une valeur approchée de* $g(2,001, 1,001)$.

Solution -

1. La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$ en vertu du théorème 31. En particulier, d'après le théorème 30, f admet un développement limité d'ordre 1 en $(1,1)$ donné par

$$f(1+h, 1+k) = f(1,1) + h\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) + k\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) + o_{(0,0)}\left(\sqrt{h^2+k^2}\right).$$

Or

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (2x + x^2 y)e^{xy} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 y e^{xy}.$$

Donc

$$f(1,1) = e, \ \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 3e \ \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = e,$$

et par suite

$$f(1+h, 1+k) = e + 3he + ke + o_{(0,0)}\left(\sqrt{h^2+k^2}\right).$$

Puisque $f(1,001, 1,001) = f(1+0,001, 1+0,001)$, on déduit que

$$f(1,001, 1,001) \simeq 0,005e.$$

2. La fonction g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et donc différentiable sur $\mathbb{R}^2$ en vertu du théorème 31. En particulier, d'après le théorème 30, g admet un développement limité d'ordre 1 en $(2,1)$ donné par

$$g(2+h,1+k) = g(2,1) + h\frac{\partial g}{\partial x}(2,1) + k\frac{\partial g}{\partial y}(2,1) + o_{(0,0)}\left(\sqrt{h^2+k^2}\right).$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= \frac{1}{2}(y+\frac{1}{y})\left(xy+\frac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{2}}, \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= \frac{1}{2}(x-\frac{x}{y^2})\left(xy+\frac{x}{y}\right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Donc

$$g(2,1) = 2,\ \frac{\partial g}{\partial x}(2,1) = \frac{1}{2} \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y}(1,1) = 0,$$

et par suite

$$g(2+h,1+k) = 2 + \frac{h}{2} + o_{(0,0)}\left(\sqrt{h^2+k^2}\right).$$

Puisque $g(2,001,1,001) = g(2+0,001,1+0,001)$, on déduit que

$$g(2+0,001,1+0,001) \simeq 2,0005.$$

Exercice 114 *1. Soit $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de la fonction*

$$g(x,y) = \phi(x^2 - xe^{xy}).$$

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Calculer la dérivée première et la dérivée seconde de

$$u(t) = f(e^t, t^2 - 2t).$$

3. Soit $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction classe C^2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de la fonction

$$h(x,y) = F(x+y, e^{xy}).$$

Solution - Nous allons utiliser les propositions 52 et 53.

1. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= (2x-(1+xy)e^{xy})\phi'(x^2-xe^{xy}),\\
\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= -x^2e^{xy}\phi'(x^2-xe^{xy}),\\
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) &= (2-2y-xy^2)\phi'(x^2-xe^{xy})\\
&\quad +(2x-(1+xy)e^{xy})^2\phi''(x^2-xe^{xy}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) &= -x^3e^{xy}\phi'(x^2-xe^{xy})+x^4e^{2xy}\phi''(x^2-xe^{xy}),\\
\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}(x,y) &= -(2x+x^2y)e^{xy}\phi'(x^2-xe^{xy})\\
&\quad -x^2e^{xy}(2x-(1+xy)e^{xy})\phi''(x^2-xe^{xy}),\\
\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x}(x,y) &= -(2x+x^2y)e^{xy}\phi'(x^2-xe^{xy})\\
&\quad -x^2e^{xy}(2x-(1+xy)e^{xy})\phi''(x^2-xe^{xy}).
\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
u'(t) &= e^t\frac{\partial f}{\partial x}(e^t,t^2-2t)+(2t-2)\frac{\partial f}{\partial y}(e^t,t^2-2t),\\
u''(t) &= e^t\frac{\partial f}{\partial x}(e^t,t^2-2t)+e^{2t}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(e^t,t^2-2t)\\
&\quad +2e^t(t-1)\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(e^t,t^2-2t)+2\frac{\partial f}{\partial y}(e^t,t^2-2t)\\
&\quad +2e^t(t-1)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(e^t,t^2-2t)+4(t-1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(e^t,t^2-2t).
\end{aligned}$$

3. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x+y,e^{xy})+ye^{xy}\frac{\partial F}{\partial y}(x+y,e^{xy}),\\
\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial F}{\partial x}(x+y,e^{xy})+xe^{xy}\frac{\partial F}{\partial y}(x+y,e^{xy}),\\
\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x+y,e^{xy})+ye^{xy}\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}(x+y,e^{xy})\\
&\quad +y^2e^{xy}\frac{\partial F}{\partial y}(x+y,e^{xy})+ye^{xy}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x+y,e^{xy})\\
&\quad +y^2e^{2xy}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x+y,e^{xy}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x+y,e^{xy}) + xe^{xy}\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}(x+y,e^{xy}) \\
&\quad + x^2e^{xy}\frac{\partial F}{\partial y}(x+y,e^{xy}) + xe^{xy}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x+y,e^{xy}) \\
&\quad + x^2e^{2xy}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x+y,e^{xy}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}(x,y) &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x+y,e^{xy}) + ye^{xy}\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}(x+y,e^{xy}) \\
&\quad + (1+xy)e^{xy}\frac{\partial F}{\partial y}(x+y,e^{xy}) + xe^{xy}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x+y,e^{xy}) \\
&\quad + xye^{2xy}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x+y,e^{xy}), \\
\frac{\partial^2 h}{\partial y\partial x}(x,y) &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x+y,e^{xy}) + xe^{xy}\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}(x+y,e^{xy}) \\
&\quad + (1+xy)e^{xy}\frac{\partial F}{\partial y}(x+y,e^{xy}) + ye^{xy}\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(x+y,e^{xy}) \\
&\quad + xye^{2xy}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x+y,e^{xy}).
\end{aligned}$$

Exercice 115 *Ecrire le développement limité à l'ordre 2 au point* $(0,0)$ *de la fonction* $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}\cos(xy)$ *et en déduire*

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{e^{-x^2-y^2}\cos(xy)-1}{x^2+y^2}.$$

Solution - On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -2xe^{-x^2-y^2}\cos(xy) - ye^{-x^2-y^2}\sin(xy), \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= -2ye^{-x^2-y^2}\cos(xy) - xe^{-x^2-y^2}\sin(xy), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= -(2+y^2-4x^2)e^{-x^2-y^2}\cos(xy) + 4xye^{-x^2-y^2}\sin(xy) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= -(2+x^2-4y^2)e^{-x^2-y^2}\cos(xy) + 4xye^{-x^2-y^2}\sin(xy), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) &= 3xye^{-x^2-y^2}\cos(xy) + (2x^2+2y^2-1)e^{-x^2-y^2}\sin(xy).
\end{aligned}$$

Ainsi
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = -2.$$
D'après le théorème 33, on a
$$f(x,y) = 1 - x^2 - x^2 + o_{(0,0)}(x^2 + y^2).$$
Il en résulte que
$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{e^{-x^2-y^2}\cos(xy) - 1}{x^2 + y^2} = -1.$$

Exercice 116 *Montrer que* $(-1,-1)$ *est un point critique de*
$$f(x,y) = xe^y + ye^x$$
et déterminer sa nature.

Solution -
La fonction f est de classe C^2 et
$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y + ye^x \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + e^x,$$
et donc
$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1,-1) = \frac{\partial f}{\partial y}(-1,-1) = e^{-1} - e^{-1} = 0.$$
Donc $(-1,-1)$ est un point critique de f.
Pour étudier la nature de ce point critique, nous allons utiliser l'algorithme d'étude des extremums des fonctions de classe C^2 (*cf.* Théorème 34). On a
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ye^x, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = xe^y \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^y + e^x,$$
et donc
$$\begin{aligned} r &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = -e^{-1}, \\ t &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,-1) = -e^{-1}, \\ s &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1,-1) = 2e^{-1}, \end{aligned}$$

et donc $rt - s^2 = e^{-2} - 4e^{-2} = -3e^{-2} < 0$.
En conclusion, $f(-1,-1)$ n'est ni un minimum local ni un maximum local.

Exercice 117 *Montrer que $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$ admet trois points critiques et étudier leur nature.*

Solution -
Le point (a,b) est un point critique de f si et seulement si

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0,$$

soit

$$a^3 - b = 0 \quad \text{et} \quad b^3 - a = 0.$$

En remplaçant dans la première équation, on obtient $b^9 = b$ et donc $b = 0$, $b = 1$ ou $b = -1$. On déduit alors que les points critiques de f sont $(0,0)$, $(1,1)$ et $(-1,-1)$. Pour étudier la nature de ces points critiques nous allons utiliser le théorème 34. Pour cela remarquons que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -4 \ \text{ et } \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2.$$

1. Nature de $(0,0)$. Avec les notations de Monge, on a

$$r = 0, \ s = -4 \text{ et } t = 0.$$

   Donc $\Delta = rt - s^2 = -16 < 0$ et donc $f(0,0)$ n'est ni un minimum local ni un maximum local.
2. Nature de $(1,1)$. Avec les notations de Monge, on a

$$r = 12, \ s = -4 \text{ et } t = 12.$$

   Donc $\Delta = rt - s^2 = 128 > 0$ et $r > 0$ donc $f(1,1)$ est un minimum local.
3. Nature de $(-1,-1)$. Avec les notations de Monge, on a

$$r = 12, \ s = -4 \text{ et } t = 12.$$

   Donc $\Delta = rt - s^2 = 128 > 0$ et $r > 0$ donc $f(-1,-1)$ est un minimum local.

Chapitre 11

Fonctions de deux variables réelles II

Ce chapitre est la suite du chapitre 10 et sera consacré à l'étude de certaines notions mathématiques souvent utilisées en physique. On introduira la notion de changement de variables, les champs de vecteurs et les formes différentielles de degré 1. Les théorèmes d'inversion locale et globale seront énoncés. Ce sont des outils puissants faciles à mettre en œuvre pour construire des changements de variables. Celles-ci sont très utilisées dans la résolution de certaines équations aux dérivées partielles.

11.1 Changement de variables et théorème d'inversion locale

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $u_0 \in \Omega$. Une application $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (g_1(x, y), g_2(x, y))$ est dite différentiable (resp. de classe C^1) en u_0 si g_1 et g_2 sont différentiables (resp. de classe C^1) en u_0.
On note $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ l'ensemble des fonctions de classe C^1 en tout point de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Définition 41 *Soit $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (g_1(x, y), g_2(x, y))$ une application différentiable en $(x_0, y_0) \in \Omega$.*

1. *La matrice Jacobienne de g en (x_0, y_0) est la matrice carrée*

$$J(g, (x_0, y_0)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

2. Le Jacobien de g en (x_0, y_0) est le déterminant

$$\mathcal{J}(g,(x_0,y_0)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x_0,y_0) \end{vmatrix}.$$

Exemple - On considère l'application $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $u(x,y) = (e^{xy}, \sin(x+y))$. Cette application est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et on a

$$\begin{aligned} J(u,(0,\pi)) &= \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{J}(u,(0,\pi)) &= -\pi. \end{aligned}$$

Proposition 57 *Soit $g : \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ avec $g = (u,v)$ et $f : \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $g(\Omega_1) \subset \Omega_2$. Si g est différentiable en $u_0 = (x_0,y_0)$ et f est différentiable en $(u(x_0,y_0), v(x_0,y_0))$ alors $F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ est différentiable en (x_0,y_0) et on a*

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(u_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(u_0)\frac{\partial f}{\partial u}(u(x_0,y_0),v(x_0,y_0)) + \frac{\partial v}{\partial x}(u_0)\frac{\partial f}{\partial v}(u(x_0,y_0),v(x_0,y_0)), \\ \frac{\partial F}{\partial x}(u_0) &= \frac{\partial u}{\partial y}(u_0)\frac{\partial f}{\partial u}(u(x_0,y_0),v(x_0,y_0)) + \frac{\partial v}{\partial y}(u_0)\frac{\partial f}{\partial v}(u(x_0,y_0),v(x_0,y_0)). \end{aligned}$$

Remarque - Ces formules peuvent s'écrire à la manière des physiciens

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v} \quad \textbf{et} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial v},$$

ou encore matriciellement

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} \\ \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix},$$

où la matrice carrée est la transposée de la matrice Jacobienne.

Exemple - (Passage en coordonnées polaires).
Soit $\alpha > 0$ et $f : B((0,0),\alpha) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Pour tout $(r,\theta) \in]-\alpha,\alpha[\times\mathbb{R}$, posons

$$F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Alors F est différentiable sur $]-\alpha,\alpha[\times\mathbb{R}$ et, pour tout $(r,\theta)\in]-\alpha,\alpha[\times\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) &= \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta),\\ \frac{\partial F}{\partial \theta}(r,\theta) &= -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta).\end{aligned}$$

Proposition 58 *Soient $g_1:\Omega_1\longrightarrow\mathbb{R}^2$ et $g_2:\Omega_2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ telles que $g_1(\Omega_1)\subset\Omega_2$. Si g_1 est différentiable en u_0 et g_2 différentiable en $g_1(u_0)$ alors $g_2\circ g_1$ est différentiable en u_0 et on a*

$$J(g_2\circ g_1,u_0)=J(g_2,g_1(u_0))J(g_1,u_0).$$

Définition 42 *Soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et $g:\Omega_1\longrightarrow\Omega_2$ une application. On dira que g est un changement de variables si g est bijective, de classe C^1 et son application inverse $g^{-1}:\Omega_2\longrightarrow\Omega_1$ est de classe C^1.*

Exemple - On considère l'application $g:]0,+\infty[\times]0,\pi[\longrightarrow\mathbb{R}\times]0,+\infty[$ définie par

$$g(r,\theta)=(r\cos\theta,r\sin\theta).$$

Cette application est de classe C^1 et c'est une bijection car son application inverse $g^{-1}:\mathbb{R}\times]0,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[\times]0,\pi[$ est donnée par

$$g^{-1}(x,y)=(\sqrt{x^2+y^2},\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)).$$

Comme g^{-1} est de classe C^1, on déduit que g est un changement de variables.

La composition de deux changements de variables est encore un changement de variables et si $g:\Omega_1\longrightarrow\Omega_2$ un changement de variables, on déduit de la proposition 58 que

$$J(g^{-1},g(u))=(J(g,u))^{-1}, \tag{11.1}$$

où $u\in\Omega_1$ et $(J(g,u))^{-1}$ est la matrice inverse de $J(g,u)$.

Le théorème d'inversion locale est un outil pour construire des changements de variables. C'est l'un des théorèmes importants en mathématique. Son importance réside dans la simplicité de ces hypothèses (être de classe C^1 et un Jacobien non nul) alors que ses conclusions sont puissantes.

Théorème 35 (**Théorème d'inversion locale**) *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 et $u_0 \in \Omega$ tels que $\mathcal{J}(g, u_0) \neq 0$. Alors il existe un ouvert Ω_1 contenu dans Ω tel que :*

1. *$u_0 \in \Omega_1$ et $\Omega_2 = g(\Omega_1)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$,*
2. *$g : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ est un changement de variables,*
3. *la matrice Jacobienne de $g^{-1} : \Omega_2 \longrightarrow \Omega_1$ est donnée par la formule*

$$J(g^{-1}, g(u)) = (J(g, u))^{-1},$$

où $u \in \Omega_1$ et $(J(g, u))^{-1}$ est la matrice inverse de $J(g, u)$.

Rappel - Rappelons que si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice carrée telle que son déterminant $|A| = ad - bc \neq 0$ alors A est inversible et son inverse est donnée par

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Exemple - On considère $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$g(x, y) = (e^x - e^y, ye^x).$$

Cette application est de classe C^1. Il est extrêmement difficile de construire à la main un ouvert de $\mathbb{R}^2$ sur lequel g est un changement de variables. Nous allons utiliser le théorème d'inversion locale pour montrer qu'un tel ouvert existe.
La fonction g est de classe C^1, $g(0, 0) = (0, 0)$ et on a

$$J(g, (x, y)) = \begin{pmatrix} e^x & -e^y \\ ye^x & e^x \end{pmatrix}.$$

En particulier, $\mathcal{J}(g, (0, 0)) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Donc, d'après le théorème d'inversion locale, il existe un ouvert Ω_1 de $\mathbb{R}^2$ contenant $(0, 0)$ tel que $\Omega_2 = g(\Omega_1)$ est un ouvert et $g : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ est un changement de variables. Notons $g = (u, v)$ les nouveaux variables. Bien que le calcul explicite de $g^{-1} = (x, y)$ est impossible, le théorème d'inversion locale permet le calcul de $\frac{\partial x}{\partial u}$ $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$ et $\frac{\partial y}{\partial v}$. En effet, on a en vertu du théorème d'inversion locale

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{1}{e^{2x} + ye^{x+y}} \begin{pmatrix} e^x & e^y \\ -ye^x & e^x \end{pmatrix}.$$

Par exemple, puisque $g(0,0)=(0,0)$, on déduit que

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(0,0) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(0,0) \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(0,0) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Théorème 36 (**Théorème d'inversion globale**) *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $g:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1, injective et pour tout $u\in\Omega$ tels que $\mathcal{J}(g,u)\neq 0$. Alors :*

1. *$g(\Omega)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$,*
2. *$g:\Omega\longrightarrow g(\Omega)$ est un changement de variables,*
3. *la matrice Jacobienne de $g^{-1}: g(\Omega)\longrightarrow\Omega$ est donnée par la formule*

$$J(g^{-1},g(u)) = (J(g,u))^{-1},$$

où $u\in\Omega_1$ et $(J(g,u))^{-1}$ est la matrice inverse de $J(g,u)$.

Ce théorème est souvent utilisé dans la résolution d'équations différentielles aux dérivées partielles grâce aux changements de variables.

Exemple - On considère l'ouvert $\Omega=]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ et on cherche les fonctions $f\in C^1(\Omega,\mathbb{R})$ tel que

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}-2f+2=0. \tag{E}$$

Nous allons résoudre (E) grâce au changement de variables $(u,v)=(xy,\frac{y}{x})$. Commençons par montrer que c'est un changement de variables en utilisant le théorème d'inversion globale. L'application (u,v) est de classe C^1 sur Ω et

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = \frac{2y}{x}\neq 0,$$

pour tout $(x,y)\in\Omega$. Vérifions maintenant que (u,v) est injective. Soient (x_1,y_1) et (x_2,y_2) dans Ω tels que $u(x_1,y_1)=u(x_2,y_2)$ et $v(x_1,y_1)=v(x_2,y_2)$ soit

$$\begin{cases} x_1y_1 = x_2y_2, \\ \frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}. \end{cases}$$

Ces deux équations entraînent, particulier que $\frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2}{y_1}$, soit $y_1^2 = y_2^2$. Comme y_1 et y_2 sont tous les deux positifs, on déduit que $y_1 = y_2$ et par suite $x_1 = x_2$. Ceci achève de montrer que (u, v) est injective. Finalement, en vertu du théorème d'inversion globale (u, v) est un changement de variables. Définissons alors l'application g sur l'image de Ω par $g(u, v) = f(x, y)$. En vertu de la proposition 57, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial v}.$$

Ainsi

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} - 2f + 2 = 2u\frac{\partial g}{\partial u} - 2g + 2.$$

Il en résulte que f est solution de (E) si et seulement si g est solution de l'équation différentielle

$$u\frac{\partial g}{\partial u} - g + 1 = 0. \tag{E'}$$

Pour v fixé, posons $g_v(u) = g(u, v)$. Ainsi g_v est solution de l'équation différentielle du premier ordre

$$xy' - y = -1. \tag{E''}$$

Cherchons les solutions de cette équation sur $]0, +\infty[$. On voit que $y_0 = 1$ est solution de (E''). Alors que les solutions de l'équation sans second membre sont $y = cx$. On déduit alors que les solutions de (E'') sont de la forme $cx + 1$. Ainsi les solutions de (E') sont $g(u, v) = c(v)u + 1$ où c est une fonction de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. Finalement, les solutions de (E) sont de la forme

$$f(x, y) = c\left(\frac{y}{x}\right)xy + 1, \quad \text{où} \quad c \in C^1(]0, +\infty[, \mathbb{R}).$$

11.2 Champs de vecteurs et formes différentielles de degré 1

Définition 43 *1. Un champ de vecteurs sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ est une application $\overrightarrow{F} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (P(x, y), Q(x, y))$. Le champ de vecteurs $\overrightarrow{F}$ sera dit continu (resp. de classe C^k) si P et Q sont continues (resp. de classe C^k).*

2. *Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur un ouvert Ω. Le gradient de f est le champ de vecteur noté ∇f et défini par*

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

On rencontre les champs de vecteurs un peu partout en physique : le champ électrique $\overrightarrow{E}$ et le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ sont les plus connus. En mécanique des fluides, on associe à tout point d'un écoulement stationnaire plan la vitesse du fluide en ce point et on obtient ainsi un champ de vecteurs.

Définition 44 *Soit $\overrightarrow{F} = (P, Q)$ un champ de vecteurs sur un ouvert Ω. On dit que $\overrightarrow{F}$ est un champ de gradient ou que $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel s'il existe $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ tel que $\overrightarrow{F} = \nabla f$.*
Une telle fonction f est appelée **un** *potentiel de $\overrightarrow{F}$.*

Exemples -

1. **En physique, le champ électrique $\overrightarrow{E}$ dérive du potentiel électrique V selon la formule $\overrightarrow{E} = -\nabla V$.**
2. **Le champ de vecteurs $\overrightarrow{F}(x, y) = (ye^{xy}, xe^{xy})$ dérive du potentiel $f(x, y) = e^{xy} + k$ où k est une constante.**

Proposition 59 *Soit $\overrightarrow{F} = (P, Q)$ une champ de vecteurs de classe C^1 sur un ouvert Ω. Si $\overrightarrow{F}$ est un champ de gradient alors*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Exemple - Le champ de vecteurs $\overrightarrow{F} = (xe^y, e^y)$ ne dérive pas d'un potentiel, car si on note (P, Q) ses composantes, on a $\frac{\partial P}{\partial y} = xe^y$ et $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ et qui sont clairement différentes.

La condition $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ n'est pas suffisante pour assurer que $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel comme on le verra plus tard. Néanmoins, pour certains ouverts qu'on va définir maintenant, cette condition est suffisante.

Définition 45 *Un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ est dit étoilé s'il existe un point $A \in \Omega$ tel que pour tout point $M \in \Omega$ le segment $[A, M] \subset \Omega$, où $[A, M] = \{(1 - t)A + tM, t \in [0, 1]\}$.*

Exemples -

1. **Un ouvert étoilé est un ouvert dont tous les points sont accessibles, sans sortir de l'ouvert, en ligne droite à partir d'un point fixé.**
2. **Tout ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$ est étoilé, c'est le cas des boules ouvertes, des demi-plans ouverts, des rectangles ouverts etc...**

Le théorème suivant est difficile et important.

Théorème 37 (**Théorème de Poincaré**) *Soit $\overrightarrow{F} = (P, Q)$ un champ de vecteurs de classe C^1 sur un ouvert étoilé Ω. Alors $\overrightarrow{F}$ est un champ de gradient si et seulement si*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Exemple - On considère le champ de vecteurs

$$\overrightarrow{F} = (P, Q) = (\frac{y}{(x+y)^2}, -\frac{x}{(x+y)^2})$$

défini sur l'ouvert $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y > 0\}$. Nous allons montrer que $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel. En effet,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{(x+y)^2 - 2y(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{x-y}{(x+y)^3}, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= -\frac{(x+y)^2 - 2x(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{x-y}{(x+y)^3}, \end{aligned}$$

et ainsi $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. D'un autre côté, Ω est un demi-plan ouvert de $\mathbb{R}^2$ et donc convexe et par suite étoilé. D'après le théorème de Poincaré, $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel. Cherchons maintenant un potentiel f de $\overrightarrow{F}$. La relation $\nabla f = \overrightarrow{F}$ est équivalente à

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{(x+y)^2} \quad \textbf{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{(x+y)^2}.$$

De la deuxième relation, on déduit que

$$f(x, y) = \frac{x}{x+y} + c(x).$$

En remplaçant dans la première relation, on déduit que $c'(x) = 0$ et donc c est une constante. On déduit alors que les potentiels de $\overrightarrow{F}$ sont de la forme $f(x, y) = \frac{x}{x+y} + c$, où c est une constante.

La notion de forme différentielle sur $\mathbb{R}^2$ est la notion duale de la notion de champ de vecteurs. Nous nous contentons dans ce paragraphe de reécrire le paragraphe précédent d'une autre manière.

Définition 46 *1. Une forme différentielle sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ est une expression de la forme*

$$\omega = Pdx + Qdy,$$

où $P, Q : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions. La forme différentielle ω sera dite continue (resp. de classe C^k) si P et Q sont continues (resp. de classe C^k).

2. Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur un ouvert Ω. La différentielle de f est la forme différentielle noté df et définie par

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Remarque - Une forme différentielle $\omega = Pdx+Qdy$ est en fait une application qui à tout point $u \in \Omega$ associe une application linéaire $\omega(u) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\omega(u)(x, y) = P(u)x + Q(u)y.$$

Définition 47 *Soit $\omega = Pdx + Qdy$ une forme différentielle sur un ouvert Ω. On dit que ω est exacte s'il existe $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ tel que $\omega = df$.*
Une telle fonction f est appelée **une** *primitive de ω.*

Proposition 60 *Soit $\omega = Pdx + Qdy$ une forme différentielle de classe C^1 sur un ouvert Ω. Si ω est exacte alors*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Définition 48 *On dira que $\omega = Pdx + Qdy$ est fermée si*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

D'après la proposition 60, toute forme différentielle exacte est fermée. Le théorème de Poincaré pour les formes différentielle affirme que la réciproque est vraie sur les ouverts étoilés.

Théorème 38 (**Théorème de Poincaré**) *Soit $\omega = Pdx + Qdy$ une forme différentielle de classe C^1 sur un ouvert Ω* **étoilé**. *Alors on a l'équivalence*

$$\omega \quad \text{est exacte} \quad \Leftrightarrow \quad \omega \quad \text{est fermée.}$$

11.2.1 Intégrale curviligne et circulation

On appelle **chemin** dans $\mathbb{R}^2$ toute application $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Un **lacet** est un chemin $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tel que $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Définition 49 *Soit $\omega = Pdx + Qdy$ une forme différentielle continue sur un ouvert Ω et $\gamma = (x,y) \in C^1([a,b],\mathbb{R}^2)$ tel que $\gamma([a,b]) \subset \Omega$. On appelle intégrale curviligne de ω le long de γ le nombre réel*

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \left(P(\gamma(t))x'(t) + Q(\gamma(t))y'(t)\right) dt.$$

Exemple - On considère la forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\omega = ydx - xdy$$

et $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ défini par $\gamma(t) = (e^t, e^{-t})$. Alors

$$\int_\gamma \omega \quad = \quad \int_0^1 (e^{-t}e^t - e^t(-e^{-t}))dt = 2.$$

Proposition 61 *Soit f une fonction différentiable sur un ouvert Ω et $\gamma \in C^1([a,b],\mathbb{R}^2)$. Alors*

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)),$$

en particulier, si γ est un lacet alors

$$\int_\gamma df = 0.$$

Cette proposition peut être exprimée en disant que l'intégrale curviligne d'une forme exacte ne dépend pas du chemin suivi (elle ne dépend que des extrémités). Cette proposition va nous permettre de donner un exemple montrant que la réciproque de la proposition 60 est fausse.

Exemple - On considère la forme différentielle $\omega = Pdx + Qdy$ avec

$$P(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} \quad \textbf{et} \quad Q(x,y) = -\frac{x}{x^2+y^2}.$$

définie sur l'ouvert $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Il est facile de vérifier que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Néanmoins, nous allons montrer que ω n'est pas exacte sur Ω. Pour cela, considérons le lacet $\gamma : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ défini par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. On a

$$\int_\gamma \omega \quad = \quad \int_0^{2\pi} \left(-\sin^2 t - \cos^2 t\right) dt = -2\pi \neq 0.$$

Donc, en vertu du la proposition 61, ω ne peut pas être exacte.

Dans la définition qui suit, on note $d\overrightarrow{\ell} = (dx, dy)$ ce qui représente pour le physicien une variation infinitésimale du vecteur position.

Définition 50 *Soit $\overrightarrow{F} = (P, Q)$ un champ de vecteurs continu sur un ouvert Ω et $\gamma = (x, y) \in C^1([a, b], \mathbb{R}^2)$ tel que $\gamma([a, b]) \subset \Omega$. On appelle circulation de $\overrightarrow{F}$ le long de γ le réel*

$$\int_\gamma \overrightarrow{F}.d\overrightarrow{\ell} = \int_\gamma (Pdx + Qdy).$$

Remarques -

1. **Nous avons vu que la donnée d'un champ de vecteurs $\overrightarrow{F} = (P, Q)$ est équivalent à la donnée de la forme différentielle $Pdx + Qdy$. La définition précédente exprime le fait que la circulation de $\overrightarrow{F}$ le long de γ est exactement l'intégrale curviligne de la forme différentielle associée le long du même chemin.**
2. **En physique, la circulation d'un champ de vecteurs est liée à la notion de travail : Si $\overrightarrow{F}$ est une force, le travail W le long de γ d'un objet ponctuel sur lequel $\overrightarrow{F}$ s'exerce est $W = \int_\gamma \overrightarrow{F}.d\overrightarrow{\ell}$.**

La proposition suivante est une reformulation de la proposition 61.

Proposition 62 *Si $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel f alors*

$$\int_\gamma \overrightarrow{F}.d\overrightarrow{\ell} = f(\gamma(a)) - f(\gamma(b)),$$

en particulier, si γ est un lacet alors

$$\int_\gamma \overrightarrow{F}.d\overrightarrow{\ell} = 0.$$

11.3 Exercices corrigés

Exercice 118 *Soit $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Dans chacun des cas suivants, montrer que g est un changement de variables de Ω sur $g(\Omega)$, déterminer $g(\Omega)$ calculer g^{-1} et vérifier que $J(g^{-1}, g(x,y)) = (J(g,(x,y)))^{-1}$:*

1. $g(x,y) = (x+2y, x-2y)$, $\Omega = \mathbb{R}^2$.
2. $g(x,y) = (e^{x+y}, e^{x-y})$, $\Omega = \mathbb{R}^2$.
3. $g(x,y) = (\ln(x+2y), e^{x+y})$, $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x+2y > 0\}$.

Solution -

1. L'application g est de classe C^1 et c'est une application linéaire dont le déterminant est
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$
Ainsi g est une bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculons g^{-1}. Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$,
$$g(x,y) = (u,v) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+2y = u, \\ x-2y = v. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}(u+v), \\ y = \frac{1}{4}(u-v). \end{array} \right.$$
Donc
$$g^{-1}(u,v) = (\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{4}(u-v)).$$
En conclusion, g est un changement de variables de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$.
D'un autre côté,
$$J(g^{-1}, g(x,y)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J(g,(x,y)) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$
et donc, il est claire que
$$J(g^{-1}, g(x,y)) = (J(g,(x,y)))^{-1}.$$

2. Nous allons montrer que g est un changement de variables de $\mathbb{R}^2$ sur $\Omega' = \{(x,y), x > 0, y > 0\}$. Pour tout $(u,v) \in \Omega'$, on a
$$g(x,y) = (u,v) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} e^{x+y} = u, \\ e^{x-y} = v. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y = \ln u, \\ x-y = \ln v. \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}(\ln u + \ln v), \\ y = \frac{1}{2}(\ln u - \ln v). \end{array} \right.$$

Il en résulte que g est bijective et

$$g^{-1}(u,v) = (\frac{1}{2}(\ln u + \ln v), \frac{1}{2}(\ln u - \ln v)).$$

Ainsi g réalise une bijection de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ sur Ω' et g^{-1} est aussi de classe C^1 et donc g est un changement de variables.
Posons $(u,v) = g(x,y)$. On a

$$\begin{aligned} J(g,(x,y)) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} \\ \\ e^{x-y} & -e^{x-y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & u \\ \\ v & -v \end{pmatrix}, \\ J(g^{-1},(u,v)) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2u} & \frac{1}{2v} \\ \\ \frac{1}{2u} & -\frac{1}{2v} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il est claire que $J(g,(x,y))J(g^{-1},(u,v)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc

$$J(g^{-1},(u,v)) = \left(J(g,(x,y))\right)^{-1}.$$

3. Nous allons montrer que g est un changement de variables de Ω sur $\Omega' = \{(x,y), y > 0\}$. Pour tout $(u,v) \in \Omega'$, on a

$$g(x,y) = (u,v) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \ln(x+2y) = u, \\ e^{x+y} = v. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x+2y = e^u, \\ x+y = \ln v. \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 2\ln v - e^u, \\ y = e^u - \ln v. \end{array} \right.$$

Il en résulte que g est bijective et

$$g^{-1}(u,v) = (2\ln v - e^u, e^u - \ln v).$$

Ainsi g réalise une bijection de classe C^1 de Ω sur Ω' et g^{-1} est aussi de classe C^1 et donc g est un changement de variables.
Posons $(u,v) = g(x,y)$. On a

$$\begin{aligned} J(g,(x,y)) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x+2y} & \frac{2}{x+2y} \\ \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{e^u} & \frac{2}{e^u} \\ \\ v & v \end{pmatrix}, \\ J(g^{-1},(u,v)) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^u & \frac{2}{v} \\ \\ e^u & -\frac{1}{v} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il est claire que $J(g,(x,y))J(g^{-1},(u,v)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc

$$J(g^{-1},(u,v)) = (J(g,(x,y)))^{-1}.$$

Exercice 119 *On considère les ouverts de* $\mathbb{R}^2$ *définis par*

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0, x < y\}, \\ \Omega_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0, y^2 - 4x > 0\}, \end{aligned}$$

et on définit $g : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ *par* $g(x,y) = (xy, x+y)$.

1. *Montrer que* g *est un changement de variables et calculer* g^{-1}.
2. *Vérifier que* $J(g^{-1}, g(x,y)) = (J(g,(x,y)))^{-1}$.

Solution -

1. Soit $(u,v) \in \Omega_2$, c'est-à-dire, $u > 0$, $v > 0$ et $v^2 - 4u > 0$. On a

$$g(x,y) = (u,v) \Leftrightarrow \begin{cases} xy = u, \\ x + y = v. \end{cases}.$$

Donc x, y sont solutions de l'équation du second degré

$$X^2 - vX + u = 0.$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = v^2 - 4u > 0$ et donc les solutions sont $\alpha_1 = \frac{v+\sqrt{v^2-4u}}{2}$ et $\alpha_2 = \frac{v-\sqrt{v^2-4u}}{2}$. On a clairement, $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 > 0$ car $u > 0$ et $v > 0$, en plus $\alpha_1 > \alpha_2$, donc

$$g(x,y) = (u,v) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{v-\sqrt{v^2-4u}}{2}, \\ y = \frac{v+\sqrt{v^2-4u}}{2}. \end{cases}.$$

Il en résulte que g est bijective et

$$g^{-1}(u,v) = (\frac{v - \sqrt{v^2-4u}}{2}, \frac{v + \sqrt{v^2-4u}}{2}).$$

Ainsi g réalise une bijection de classe C^1 de Ω_1 sur Ω_2 et g^{-1} est aussi de classe C^1 et donc g est un changement de variables.

2. Posons $(u,v)=g(x,y)$. On a

$$\begin{aligned}
J(g,(x,y)) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{v+\sqrt{v^2-4u}}{2} & \frac{v-\sqrt{v^2-4u}}{2} \\ \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \\
J(g^{-1},(u,v)) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{v^2-4u}} & \frac{1}{2}-\frac{v}{2\sqrt{v^2-4u}} \\ \\ \frac{1}{\sqrt{v^2-4u}} & \frac{1}{2}+\frac{v}{2\sqrt{v^2-4u}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Il est claire que $J(g,(x,y))J(g^{-1},(u,v)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et donc

$$J(g^{-1},(u,v)) = \left(J(g,(x,y))\right)^{-1}.$$

Exercice 120 *On considère l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=2e^{x+y}f. \qquad (E)$$

1. *Montrer que $f_0(x,y)=e^{e^{x+y}}$ est une solution de (E).*
2. *Montrer que $(u,v)=(e^{x+y},e^{x-y})$ est un changement de variables sur $\mathbb{R}^2$.*
3. *Pour tout $f\in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, on définit la fonction g par $g(u,v)=f(x,y)$. Montrer que f est solution de (E) si et seulement si g vérifie*

$$\frac{\partial g}{\partial u}=g. \qquad (E')$$

4. *Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E).*

Solution -

1. On a

$$\frac{\partial f_0}{\partial x}(x,y)=e^{x+y}e^{e^{x+y}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_0}{\partial y}(x,y)=e^{x+y}e^{e^{x+y}},$$

et donc

$$\frac{\partial f_0}{\partial x}+\frac{\partial f_0}{\partial y}=e^{x+y}e^{e^{x+y}}+e^{x+y}e^{e^{x+y}}=2e^{x+y}f_0(x,y).$$

Ainsi f_0 est solution de (E).

2. Nous avons vu dans l'exercice 118 que $(u,v) = (e^{x+y}, e^{x-y})$ est un changement de variables sur $\mathbb{R}^2$.
3. De la relation $f(x,y) = g(u,v)$ et de la proposition 57, on déduit que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial v} = u\frac{\partial g}{\partial u} + v\frac{\partial g}{\partial v}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v} = u\frac{\partial g}{\partial u} - v\frac{\partial g}{\partial v}. \end{aligned}$$

Donc f est solution de (E) si et seulement si

$$u\frac{\partial g}{\partial u} + v\frac{\partial g}{\partial v} + u\frac{\partial g}{\partial u} - v\frac{\partial g}{\partial v} = 2ug,$$

soit

$$\frac{\partial g}{\partial u} = g.$$

4. Les solutions de (E') sont $g(u,v) = h(v)e^u$ et donc l'ensemble des solutions de (E) sont les fonctions f de la forme

$$f(x,y) = h(e^{x-y})e^{x+y}$$

où $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1.

Exercice 121 *Soient a, λ, ω des constantes réels $(a \neq 0)$.*

1. *Montrer que la fonction $u(x,t) = \sin(a\lambda t + \omega)\sin(\lambda x)$ est solution de l'équation de la corde vibrante*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (E)$$

2. *Soient ϕ et ψ deux fonctions deux fois dérivables. Montrer que la fonction $u(x,t) = \phi(x - at) + \psi(x + at)$ est solution de (E).*
3. *Transformer l'équation (E) en utilisant le changement de variables $(\alpha, \beta) = (x - at, x + at)$. En déduire la solution générale de (E).*

Solution -

1. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= a\lambda\cos(a\lambda t+\omega)\sin(\lambda x), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \lambda\sin(a\lambda t+\omega)\cos(\lambda x),\\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -a^2\lambda^2\sin(a\lambda t+\omega)\sin(\lambda x), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\lambda^2\sin(a\lambda t+\omega)\sin(\lambda x),
\end{aligned}$$

   et donc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

   Ainsi u vérifie (E).

2. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= -a\phi'(x-at)+a\psi'(x+at), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \phi'(x-at)+\psi'(x+at),\\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2\phi''(x-at)+a^2\psi''(x+at), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \phi''(x-at)+\psi''(x+at),
\end{aligned}$$

   et donc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

   Ainsi u vérifie (E).

3. L'application $(x,y)\mapsto(\alpha,\beta)=(x-at,x+at)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dont le déterminant est donné par

$$\begin{vmatrix} 1 & -a \\ 1 & a \end{vmatrix} = 2a^2 \neq 0,$$

   et donc c'est une bijection de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$. Comme elle est de classe C^1 et son inverse et de classe C^1 alors c'est un changement de variables. Posons $u(x,t)=v(\alpha,\beta)$. D'après la proposition 57, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial \alpha}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial \alpha}+\frac{\partial \beta}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial \beta} = -a\frac{\partial v}{\partial \alpha}+a\frac{\partial v}{\partial \beta},\\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial \alpha}+\frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial \beta} = \frac{\partial v}{\partial \alpha}+\frac{\partial v}{\partial \beta},\\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2}-a^2\frac{\partial^2 v}{\partial \beta\partial \alpha}-a^2\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha\partial \beta}+a^2\frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2}\\
&= a^2\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2}-2a^2\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha\partial \beta}+a^2\frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} \qquad \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha\partial \beta}=\frac{\partial^2 v}{\partial \beta\partial \alpha}\right),\\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2}+2\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha\partial \beta}+\frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi u est solution de (E) si et seulement si

$$a^2\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2} - 2a^2\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta} + a^2\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2}\right),$$

soit, puisque $a \neq 0$,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta} = 0.$$

Ainsi $\frac{\partial v}{\partial\beta} = h(\beta)$ et donc $v(\alpha,\beta) = \int h(\beta)d\beta + k(\alpha)$. En conclusion, les solutions de la corde vibrante (E) sont les fonctions de la forme

$$u(x,t) = \phi(x-at) + \psi(x+at),$$

où $\phi, \psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe C^2.

Exercice 122 *Soit* $\Omega = \{(x,y), x > 0, y > 0\}$ *et* $h : \Omega \longrightarrow \Omega$ *l'application définie par* $h(x,y) = (xy, \frac{y}{x})$.

1. *Montrer que* h *est un changement de variables et calculer* h^{-1}.
2. *On considère l'équation aux dérivées partielles*
$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy, \tag{E}$$
où $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$.
3. *On considère la fonction* $g = f \circ h^{-1}$. *Montrer que* f *est solution de* (E) *si et seulement si* g *vérifie une équation aux dérivées partielles que l'on déterminera.*
4. *Résoudre* (E).

Solution -

1. Nous allons montrer que h est un changement de variables de Ω sur Ω. Pour tout $(u,v) \in \Omega$, on a
$$h(x,y) = (u,v) \Leftrightarrow \begin{cases} xy = u, \\ \frac{y}{x} = v. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{u}{v}, \\ y = xv. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{u}{v}}, \\ y = v\sqrt{\frac{u}{v}}. \end{cases}$$
Il en résulte que h est une bijective de Ω sur Ω et, pour tout $(u,v) \in \Omega$
$$h^{-1}(u,v) = (\sqrt{\frac{u}{v}}, v\sqrt{\frac{u}{v}}).$$
Ainsi g réalise une bijection de classe C^1 de Ω sur Ω et h^{-1} est aussi de classe C^1 et donc h est un changement de variables.

2. On pose $g(u,v) = f(x,y)$. De la proposition 57, on déduit que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial v} = y\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial g}{\partial v} = v\sqrt{\frac{u}{v}}\frac{\partial g}{\partial u} - v\sqrt{\frac{v}{u}}\frac{\partial g}{\partial v}, \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v} = x\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial v} = \sqrt{\frac{u}{v}}\frac{\partial g}{\partial u} + \sqrt{\frac{v}{u}}\frac{\partial g}{\partial v}.
\end{aligned}$$

   Ainsi f est solution de (E) si et seulement si

$$\sqrt{\frac{u}{v}}\left(v\sqrt{\frac{u}{v}}\frac{\partial g}{\partial u} - v\sqrt{\frac{v}{u}}\frac{\partial g}{\partial v}\right) + v\sqrt{\frac{u}{v}}\left(\sqrt{\frac{u}{v}}\frac{\partial g}{\partial u} + \sqrt{\frac{v}{u}}\frac{\partial g}{\partial v}\right) = 2u,$$

   soit

$$2u\frac{\partial g}{\partial u} = 2u,$$

   et puisque $u > 0$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = 1. \tag{E'}$$

3. Dans la question précédente, nous avons vu que $f(x,y) = g(u,v)$ satisfait (E) si et seulement si g satisfait (E'). Or les solutions de (E') sont de la forme $g(u,v) = u + \phi(v)$ et donc les solutions de (E) sont de la forme

$$f(x,y) = xy + \phi\left(\frac{y}{x}\right),$$

   où $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1.

Exercice 123 *En utilisant le changement de variables* $(u,v) = (x+y, x-y)$ *transformer l'équation*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

et déduire sa solution générale.

Solution -

L'application $(x,y) \mapsto (u,v) = (x+y, x-y)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dont le déterminant est donné par

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0,$$

et donc c'est une bijection de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$. Comme elle est de classe C^1 et son inverse et de classe C^1 alors c'est un changement de variables.
Posons $f(x,y) = g(u,v)$. D'après la proposition 57, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v},\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial v},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}.
\end{aligned}$$

Nous avons la relation $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u} = \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$ puisque les fonctions sont de classe C^2 (*cf.* Lemme de Schwarz Théorème 32). Ainsi f est solution de (E) si et seulement si

$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right) - 2\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right) = 0,$$

soit

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v^2} = 0.$$

Ainsi $g(u,v) = v\phi(u) + \psi(u)$. En conclusion, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$f(x,y) = (x-y)\phi(x+y) + \psi(x+y),$$

où $\phi, \psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe C^1.

Exercice 124 *Soit* $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ *avec*

$$P(x,y) = \frac{(3x^2 - y^2)(x^2+y^2)}{x^2 y} \quad \textit{et} \quad Q(x,y) = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2+y^2)}{xy^2}$$

définis sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0,\ y > 0\}$.

1. *Montrer que* ω *est exacte sur* D.
2. *Déterminer* u *telle que* $du = \omega$.

3. Calculer $\int_\Gamma \omega$ *avec* $\Gamma(t) = (\cos^2 t, 1 + \sin^2 t)$ *pour* $0 \leq t \leq 2\pi$.

Solution -

1. On commence d'abord par développer P et Q. On obtient

$$P = \frac{3x^2}{y} + 2y - \frac{y^3}{x^2} \quad \text{et} \quad Q = \frac{3y^2}{x} + 2x - \frac{x^3}{y^2}.$$

Le domaine D étant convexe, ω est exacte si et seulement si elle est fermée. Or, un calcul direct donne

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \;=\; \frac{\partial P}{\partial y} = -3\left(\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}\right) + 2,$$

et donc ω est fermée et par suite exacte en vertu du théorème de Poincaré (*cf.* Théorème 38).

2. L'équation $du = \omega$ est équivalente à

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3x^2}{y} + 2y - \frac{y^3}{x^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3y^2}{x} + 2x - \frac{x^3}{y^2}. \end{cases}$$

On déduit de la première équation que

$$u(x, y) = \frac{x^3}{y} + 2xy + \frac{y^3}{x} + h(y).$$

En remplaçant dans la deuxième équation on déduit que $h'(y) = 0$ et donc les primitives de ω sont

$$u(x, y) = \frac{x^3}{y} + 2xy + \frac{y^3}{x} + c.$$

3. On a, d'après la proposition 61,

$$\int_\Gamma \omega \;=\; \int_\Gamma du = u(\Gamma(2\pi)) - u(\Gamma(0)) = u(1, 1) - u(1, 1) = 0.$$

Exercice 125 *On considère les deux formes différentielles définies sur* $\mathbb{R}^2$ *par*

$$\omega_1 = y^2 dx + x^2 dy \quad \text{et} \quad \omega_2 = 2x(y - 1)dx - (x^2 - 1)dy.$$

1. ω_1 et ω_2 sont-elles fermées ? exactes ?

2. Montrer qu'il existe une fonction ϕ définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ telle que $\omega_\phi = \phi(x+y)\omega_1$ soit exacte sur $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0,\ y > 0\}$ et calculer les primitives de ω_ϕ dans ce cas.

3. Montrer qu'il existe une fonction ψ définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ telle que $\omega_\psi = \psi(x)\omega_2$ soit exacte sur $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 1\}$ et calculer les primitives de ω_ψ dans ce cas.

Solution -

1. On écrit

$$\omega_1 = P_1(x,y)dx + Q_1(x,y)dy \quad \text{et} \quad \omega_2 = P_2(x,y)dx + Q_2(x,y)dy.$$

On a

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial Q_1}{\partial x} = 2x \quad \text{et} \quad \frac{\partial P_2}{\partial y} = 2x \neq \frac{\partial Q_2}{\partial x} = -2x,$$

et donc ω_1 et ω_2 ne sont pas fermées et, à fortiori, ne sont pas exactes, en vertu de la proposition 60.

2. Puisque le domaine de D_1 de ω_ϕ est convexe, en vertu du théorème de Poincaré (*cf.* Théorème 38), ω_ϕ est exacte si et seulement si elle est fermée, c'est-à-dire,

$$\frac{\partial(y^2\phi(x+y))}{\partial y} = \frac{\partial(x^2\phi(x+y))}{\partial x}.$$

Cette équation est équivalente à

$$(y^2 - x^2)\phi'(x+y) + 2(y-x)\phi(x+y) = 0. \tag{E}$$

En particulier, ϕ vérifie cette équation si ϕ vérifie

$$(y+x)\phi'(x+y) + 2\phi(x+y) = 0.$$

On considère l'équation différentielle du premier ordre linéaire

$$xy' + 2y = 0.$$

D'après le théorème 28, les solutions de cette équation sur $]0,+\infty[$ sont de la forme

$$y(x) = Ce^{-A(x)}$$

où $A(x) = \int \frac{2}{x}dx = \ln x^2$, ainsi $y(x) = \frac{C}{x^2}$. En conclusion, $\phi :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(u) = \frac{1}{u^2}$$

vérifie (E) et donc

$$\omega_\phi = \frac{1}{(x+y)^2}\left(y^2dx + x^2dy\right)$$

est exacte sur D_1.
Cherchons les primitives de ω_ϕ. La relation $df = \omega_\phi$ est équivalente à

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2}{(y+x)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{(y+x)^2}. \end{cases}$$

On déduit de la première équation que

$$f(x,y) = -\frac{y^2}{y+x} + h(y),$$

et donc

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y^2+2xy}{(x+y)^2} + h'(y).$$

En remplaçant dans la deuxième équation, on obtient

$$h'(y) = \frac{x^2+2xy+y^2}{(x+y)^2} = 1,$$

et finalement,

$$f(x,y) = -\frac{y^2}{y+x} + y + k = \frac{xy}{x+y} + k,$$

où k est une constante.

3. Puisque le domaine de D_2 de ω_ψ est convexe, en vertu du théorème de Poincaré (*cf.* Théorème 38), ω_ψ est exacte si et seulement si elle est fermée, c'est-à-dire,

$$\frac{\partial(2x(y-1)\psi(x))}{\partial y} = -\frac{\partial((x^2-1)\psi(x))}{\partial x}.$$

Cette équation est équivalente à

$$(x^2-1)\psi'(x) + 4x\psi(x) = 0. \qquad (E')$$

On considère l'équation différentielle du premier ordre linéaire

$$(x^2-1)y' + 4xy = 0.$$

D'après le théorème 28, les solutions de cette équation sur $]1,+\infty[$ sont de la forme

$$y(x) = Ce^{-A(x)}$$

où $A(x) = \int \frac{4x}{x^2-1}dx = 2\ln(x^2-1)$, ainsi $y(x) = \frac{C}{(x^2-1)^2}$. En conclusion, $\psi :]1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\psi(x) = \frac{1}{(x^2-1)^2}$$

vérifie (E') et donc

$$\omega_\psi = \frac{2x(y-1)}{(x^2-1)^2}dx - \frac{1}{x^2-1}dy$$

est exacte sur D_2.
Cherchons les primitives de ω_ψ. La relation $df = \omega_\psi$ est équivalente à

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x(y-1)}{(x^2-1)^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{x^2-1}. \end{cases}$$

On déduit de la deuxième équation que

$$f(x,y) = -\frac{y}{x^2-1} + h(x),$$

et donc

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2-1)^2} + h'(x).$$

En remplaçant dans la deuxième équation, on obtient

$$h'(x) = -\frac{2x}{(x^2-1)^2},$$

et finalement,

$$f(x,y) = -\frac{y}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-1} + k = \frac{1-y}{x^2-1} + k,$$

où k est une constante.

Exercice 126 *1. Calculer l'intégrale curviligne* $\int_\gamma \omega$ *avec* γ *est le partour du triangle* ABC *avec* $A=(0,0)$*,* $B=(1,0)$ *et* $C=(0,1)$ *et*

$$\omega = (x^2+y^2)dx + (x^2-y^2)dy.$$

2. Calculer la circulation du champ de vecteur

$$\overrightarrow{V} = (\frac{x}{x^2+y^2+1}, \frac{y}{x^2+y^2+1})$$

le long du cercle d'équation $x^2+y^2-2x=1$ *.*

3. Calculer l'intégrale curviligne $\int_\gamma (y^2dx+x^2dy)$ *dans laquelle* γ *représente l'arc d'ellipse défini par* $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x^2+4y^2-4=0, y>0\}$*.*

Solution -

1. Le chemin γ est la réunion de trois segments $[A,B]$, $[B,C]$ et $[C,A]$ dont les paramétrisations respectives sont données par

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= (1-t)A+tB=(t,0), \quad \gamma_2(t)=(1-t)B+tC=(1-t,t), \\ \gamma_3(t) &= (1-t)C+tA=(0,1-t). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_\gamma \omega &= \int_{\gamma_1}\omega + \int_{\gamma_2}\omega + \int_{\gamma_3}\omega \\ &= \int_0^1 t^2dt + \int_0^1 (-(1-t)^2-t^2+(1-t)^2-t^2)dt + \int_0^1 (1-t)^2dt \\ &= \int_0^1 (-t^2+(1-t)^2)dt = -\left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}(t-1)^3\right]_0^1 = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

2. Commençons par trouver une paramétrisation du cercle d'équation $x^2+y^2-2x=1$. Cette équation s'écrit aussi

$$(x-1)^2+y^2=2,$$

et donc une paramétrisation de ce cercle est donnée par

$$\gamma(t) = (\sqrt{2}\cos t+1, \sqrt{2}\sin t), \quad t\in[0,2\pi].$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \overrightarrow{V}.d\overrightarrow{\ell} &= \int_\gamma \left(\frac{x}{x^2+y^2+1}dx + \frac{y}{x^2+y^2+1}dy\right) \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{-\sqrt{2}(\sqrt{2}\cos t+1)\sin t + 2\sin t\cos t}{(\sqrt{2}\cos t+1)^2 + 2\sin^2 t + 1}dt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{-\sqrt{2}\sin t}{\sqrt{2}\cos t + 2}dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln(\sqrt{2}\cos t + 2)\right]_0^{2\pi} = 0.
\end{aligned}$$

3. Une paramétrisation de γ est donnée par

$$\gamma(t) = (2\cos t, \sin t), \qquad t \in [0, \pi].$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_\gamma (y^2dx + x^2dy) &= \int_0^\pi (-2\sin^2 t\sin t dt + 4\cos^2 t\cos t dt) \\
&= \int_0^\pi (4\cos^3 t - 2\sin^3 t)dt.
\end{aligned}$$

Nous allons utiliser la formule de Moivre et celle du binôme de Newton pour linéariser $\cos^3 t$ et $\sin^3 t$. D'après la formules de Moivre, on a

$$\cos t = \frac{1}{2}(e^{\imath t} + e^{-\imath t}) \quad \text{et} \quad \sin t = \frac{1}{2\imath}(e^{\imath t} - e^{-\imath t}).$$

Maintenant à l'aide de la formule du binôme de Newton, on a

$$\begin{aligned}
\cos^3 t &= \frac{1}{8}(e^{3\imath t} + 3e^{\imath t} + 3e^{-\imath t} + e^{-3\imath t}) = \frac{1}{4}\cos(3t) + \frac{3}{4}\cos t, \\
\sin^3 t &= -\frac{1}{8\imath}(e^{3\imath t} - 3e^{\imath t} + 3e^{-\imath t} - e^{-3\imath t}) = -\frac{1}{4}\sin(3t) + \frac{3}{4}\sin t.
\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned}
\int_\gamma (y^2dx + x^2dy) &= \left[\frac{1}{3}\sin(3t) + 3\sin t - \frac{1}{6}\cos(3t) + \frac{3}{2}\cos t\right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{6} - \frac{3}{2} + \frac{1}{6} - \frac{3}{2} = -\frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Chapitre 12

Intégrales doubles

L'objectif de ce chapitre est de définir l'intégrale d'une fonction de deux variables $f(x, y)$ continue sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ et de donner des méthodes de calculs. L'intégrale de f sur D qu'on notera $\int\int_D f(x, y)dxdy$ dépendra de f est surtout de la forme du domaine D. Elle mesurera le volume algébrique situé entre le plan xy et la surface $S_f = \{(x, y, z), z = f(x, y), (x, y) \in D\}$. En particulier, si $f(x, y) = 1$, $\int\int_D dxdy$ est l'aire de D.

12.1 Intégrale double d'une fonction continue sur un domaine simple

Théorème 39 (**Théorème de Fubini**) *Soit f une fonction continue sur une partie $D \subset \mathbb{R}^2$. On suppose qu'il existe $a < b$, $c < d$, u_1, u_2 deux fonctions continues sur $[a, b]$ et deux fonctions v_1, v_2 continues sur $[c, d]$ tels que*

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, u_1(x) \leq y \leq u_1(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, c \leq y \leq d, v_1(y) \leq x \leq v_1(y)\}. \end{aligned}$$

Alors

$$\int_a^b \left(\int_{u_1(x)}^{u_2(x)} f(x, y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_{v_1(y)}^{v_2(y)} f(x, y)dx \right) dy.$$

Une partie $D \subset \mathbb{R}^2$ est dite x-**simple** (resp. y-**simple**) si $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, u_1(x) \leq y \leq u_1(x)\}$ u_1 et u_2 continues sur $[a, b]$ (resp. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, c \leq y \leq d, v_1(y) \leq x \leq v_1(y)\}$ avec v_1 et v_2 continues sur $[c, d]$). Une partie est dite **simple** si elle est soit x-simple soit y-simple.

Exemple -

1. **Tout rectangle $[a,b] \times [c,d]$ est à la fois x-simple et y-simple et le théorème de Fubini affirme que, pour toute fonction continue sur $[a,b] \times [c,d]$,**

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy.$$

2. **Soit $D = \{(x,y), x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$. Ce domaine simple car**

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \in [0,1], 0 \leq y \leq 1-x\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y \in [0,1], 0 \leq x \leq 1-y\}. \end{aligned}$$

Il est alors légitime de poser la définition suivante.

Définition 51 *1. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un domaine x-simple*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b, u_1(x) \leq y \leq u_1(x)\}.$$

L'intégrale de f sur D est la quantité

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{u_1(x)}^{u_2(x)} f(x,y)dy \right) dx.$$

2. Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un domaine y-simple

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, c \leq y \leq d, v_1(y) \leq x \leq v_1(y)\}.$$

L'intégrale de f sur D est la quantité

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{v_1(y)}^{v_2(y)} f(x,y)dx \right) dy.$$

3. L'aire d'une domaine simple D est la quantité

$$\mathcal{A}(D) = \int\int_D dxdy.$$

Exemples -

1.

$$\begin{aligned}
\int\int_{[0,1]\times[1,2]}(x^2+xy+y^2)dxdy &= \int_0^1\left(\int_1^2(x^2+xy+y^2)dy\right)dx\\
&= \int_0^1\left[x^2y+\frac{1}{2}xy^2+\frac{1}{3}y^3\right]_1^2dx\\
&= \int_0^1(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{3})dx\\
&= \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{4}x^2+\frac{7}{3}x\right]_0^1\\
&= \frac{41}{12}.
\end{aligned}$$

2. Calculons $\int\int_D f(x,y)dxdy$ **avec** $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/0\leq x\leq 1, x^2\leq y\leq x^2+1\}$ **et** $f(x,y)=x-y$**. On a**

$$\begin{aligned}
\int\int_D f(x,y)dxdy &= \int_0^1\left(\int_{x^2}^{x^2+1}(x-y)dy\right)dx\\
&= \int_0^1\left(x[y]_{x^2}^{x^2+1}-\frac{1}{2}[y^2]_{x^2}^{x^2+1}\right)dx\\
&= \int_0^1\left(x-\frac{1}{2}((x^2+1)^2-x^4)\right)dx\\
&= \int_0^1(x-x^2-\frac{1}{2})dx\\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

3. Calculons l'aire de $D=\{(x,y), x\geq 0, y\geq 0, x+y\leq 1\}$**. On remarque d'abord que**

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\in[0,1], 0\leq y\leq 1-x\},$$

et donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(D) &= \int_0^1\left(\int_0^{1-x}dy\right)dx\\
&= \int_0^1(1-x)dx=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

La proposition suivante résume les propriétés de l'intégrale d'une fonction sur un domaine simple.

Proposition 63 *1. Si D_1 et D_2 sont deux domaine simples et disjoints et f continue sur $D_1 \cup D_2$ alors*

$$\int\int_{D_1 \cup D_2} f(x,y)dxdy = \int\int_{D_1} f(x,y)dxdy + \int\int_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

2. Si f est continue sur D et $f \geq 0$ alors $\int\int_D f(x,y)dxdy \geq 0$.

3. Si f et g sont continues sur D et $f \geq g$ alors

$$\int\int_D f(x,y)dxdy \geq \int\int_D g(x,y)dxdy.$$

4. Si f et g sont continues sur D et si $a, b \in \mathbb{R}$ alors

$$\int\int_D (af + bg)dxdy = a\int\int_D f(x,y)dxdy + b\int\int_D g(x,y)dxdy.$$

5. Pour toute fonction continue sur D, on a

$$\left|\int\int_D f(x,y)dxdy\right| \leq \int\int_D |f(x,y)|dxdy.$$

12.2 Formule de changement de variables

Théorème 40 *Soit $\phi : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$, $(u,v) \mapsto (x,y)$ un changement de variable entre deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un domaine simple contenu dans Ω_2. Alors*

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_{\phi^{-1}(D)} f \circ \phi(u,v)|\mathcal{J}(\phi,(u,v))|dudv,$$

où $\mathcal{J}(\phi,(u,v))$ est le Jacobien donné par

$$\mathcal{J}(\phi,(u,v)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Remarque - La formule de changement de variables s'écrit dans le cas des coordonnées polaires $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$,

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

où $\Delta = \{(r,\theta)/(r\cos\theta, r\sin\theta) \in D\}$.

Exemple - Calculons l'intégrale $\int\int_D e^{-x^2-y^2}dxdy$ **où** D **est le disque fermé de centre** $(0,0)$ **et de rayon** R**. Le passage en coordonnées polaires donne**

$$\begin{aligned} \int\int_D e^{-x^2-y^2}dxdy &= \int\int_{[0,R]\times[0,2\pi]} e^{-r^2}rdrd\theta, \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R re^{-r^2}dr\right)d\theta \\ &= 2\pi[-\frac{1}{2}e^{-r^2}]_0^R \\ &= \pi(1-e^{-R^2}). \end{aligned}$$

12.3 Exercices corrigés

Exercice 127 *Calculer les intégrales doubles suivantes :*

1. $\displaystyle\int\int_D (2x+y^2)dxdy,\ D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, 0\le x\le 9-y^2, -3\le y\le 3\}.$
2. $\displaystyle\int\int_D e^x\frac{\sin y}{y}dxdy,\ D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, \ln y\le x\le \ln(2y), \tfrac{\pi}{2}\le y\le \pi\}.$
3. $\displaystyle\int\int_D 2xydxdy$, *D est le domaine compris entre les courbes* $y=x^2$ *et* $x=y^2$.

Solution -

1. On a

$$\begin{aligned}
\int\int_D (2x+y^2)dxdy &= \int_{-3}^{3}\left(\int_0^{9-y^2}(2x+y^2)dx\right)dy\\
&= \int_{-3}^{3}\left[x^2+y^2x\right]_0^{9-y^2}dy\\
&= \int_{-3}^{3}(9-y^2)^2+y^2(9-y^2)dy\\
&= -9\int_{-3}^{3}(y^2-9)dy\\
&= -9\left[\frac{1}{3}y^3-9y\right]_{-3}^{3}=324.
\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}
\int\int_D e^x\frac{\sin y}{y}dxdy &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\int_{\ln y}^{\ln(2y)}e^x\frac{\sin y}{y}dx\right)dy\\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin y}{y}\left[e^x\right]_{\ln y}^{\ln(2y)}dy\\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin y dy\\
&= -\left[\cos y\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=1.
\end{aligned}$$

3. On commence par remarquer que D est simple et on a

$$D=\{x,y)\in\mathbb{R}^2, 0\le x\le 1, x^2\le y\le\sqrt{x}\}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\int\int_D 2xydxdy &= \int_0^1\left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} 2xydy\right)dx = \int_0^1 \left[xy^2\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx\\ &= \int_0^1 (x^2-x^5)dx = \frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Exercice 128 *Calculer l'aire du domaine compris entre les courbes :*

1. $y = x^2+9$, $y = x^2-9$, $x=-1$, $x=1$.
2. $x = y^2-4$, $x = 4-y^2$.
3. $y = x+2$, $y = 4-x$, $y = 0$.
4. $y = e^{2x}$, $y = 0$, $y = -2x$, $x = 3$.

Solution -

1. On a $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, -1\le x\le 1, x^2-9\le y\le x^2+9\}$ et donc

$$\mathcal{A}(D) = \int\int_D dxdy = \int_{-1}^1\left(\int_{x^2-9}^{x^2+9} dy\right)dx = \int_{-1}^1 18dx = 36.$$

2. Les deux courbes $x = y^2-4$ et $x = 4-y^2$ s'intersectent aux points $(0,-2)$ et $(0,2)$ et donc

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, -2\le y\le 2, y^2-4\le x\le 4-y^2\right\}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(D) &= \int\int_D dxdy = \int_{-2}^2\left(\int_{y^2-4}^{4-y^2} dx\right)dy = \int_{-2}^2 (8-2y^2)dy\\ &= \left[8y-\frac{2}{3}y^3\right]_{-2}^2 = \frac{64}{3}.\end{aligned}$$

3. En faisant la représentation graphique des droites $y=0$, $y=x+2$ et $y=4-x$, on remarque que $D = D_1\cup D_2$ avec

$$\begin{aligned}D_1 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, -2\le x\le 1, 0\le y\le x+2\},\\ D_2 &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2, 1\le x\le 4, 0\le y\le 4-x\}.\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(D_1) &= \int\int_{D_1} dxdy = \int_{-2}^{1} \left(\int_0^{x+2} dy \right) dx = \int_{-2}^{1} (x+2)dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}, \\
\mathcal{A}(D_2) &= \int\int_{D_2} dxdy = \int_{1}^{4} \left(\int_0^{4-x} dy \right) dx = \int_{1}^{4} (4-x)dx \\
&= \left[4x - \frac{1}{2}x^2 \right]_{1}^{4} = \frac{9}{2}.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathcal{A}(D) = \mathcal{A}(D_1) + \mathcal{A}(D_2) = 9.$$

4. En faisant la représentation graphique des droites $y = e^{2x}$, $y = -2x$, $y = 0$ et $x = 3$, on remarque que $D = D_1 \cup D_2$ avec

$$\begin{aligned}
D_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \alpha \leq x \leq 0, -2x \leq y \leq e^{2x}\} \\
D_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq e^{2x}\},
\end{aligned}$$

où α est la solution de l'équation $e^{2x} = -2x$. On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(D_1) &= \int\int_{D_1} dxdy = \int_{\alpha}^{0} \left(\int_{-2x}^{e^{2x}} dy \right) dx = \int_{\alpha}^{0} (e^{2x} + 2x)dx \\
&= \left[\frac{1}{2}e^{2x} + x^2 \right]_{\alpha}^{0} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{2\alpha} - \alpha^2 = \frac{1}{2} + \alpha - \alpha^2, \\
\mathcal{A}(D_2) &= \int\int_{D_2} dxdy = \int_{0}^{3} \left(\int_0^{e^{2x}} dy \right) dx = \int_{0}^{3} e^{2x}dx \\
&= \left[\frac{1}{2}e^{2x} \right]_{0}^{3} = \frac{1}{2}e^6.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathcal{A}(D) = \mathcal{A}(D_1) + \mathcal{A}(D_2) = \frac{1}{2} + \alpha - \alpha^2 + \frac{1}{2}e^6.$$

Malheureusement, on ne peux pas calculer α explicitement.

Exercice 129

Calculer les intégrales doubles suivantes :

1. *$\int\int_D (x-y)dxdy$ où D est la partie du plan délimitée par les droites $x=0$, $y=x+2$ et $y=-x$.*
2. *$\int\int_D xydxdy$ où D est la partie du plan délimitée par les courbes $y=x^2$ et $y=x^3$.*
3. *$\int\int_D (4-x^2-y^2)dxdy$ où $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, 0\leq x, 0\leq y, x^2+y^2\leq 1\}$.*

Solution -

1. Le domaine D est le triangle formé par les points $O=(0,0)$, $B=(-1,1)$ et $C=(0,2)$, c'est-à-dire,
$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, -1\leq x\leq 0, -x\leq y\leq x+2\}.$$
On alors
$$\begin{aligned}\int\int_D (x-y)dxdy &= \int_{-1}^{0}\left(\int_{-x}^{x+2}(x-y)dy\right)dx \\ &= \int_{-1}^{0}\left[xy-\frac{1}{2}y^2\right]_{-x}^{x+2}dx \\ &= \int_{-1}^{0}\left(x(x+2)-\frac{1}{2}(x+2)^2+x^2+\frac{1}{2}x^2\right)dx \\ &= \int_{-1}^{0}\left(2x^2-2\right)dx=\left[\frac{2}{3}x^3-2x\right]_{-1}^{0}=-\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

2. On a $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2, 0\leq x\leq 1, x^3\leq y\leq x^2\}$ et ainsi
$$\begin{aligned}\int\int_D xydxdy &= \int_0^1\left(\int_{x^3}^{x^2}xydy\right)dx=\int_0^1\left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{x^3}^{x^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1(x^5-x^7)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{48}.\end{aligned}$$

3. On effectue le changement de variables $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$. Dans ce changement de variables le domaine D est transformé en $D'=[0,1]\times[0,\pi/2]$. On a alors, d'après la formule de changement de variables (*cf.* Théorème 40),
$$\begin{aligned}\int\int_D (4-x^2-y^2)dxdy &= \int\int_{D'}(4-r^2)rdrd\theta \\ &= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^1(4r-r^3)dr\right)d\theta=\frac{7}{8}\pi.\end{aligned}$$

Exercice 130 *Calculer* $\int\int_D (x+4y)dxdy$ *où* D *est le parallélogramme délimité par les droites* $x+y=1$, $x+y=2$, $x-2y=0$ *et* $x-2y=3$.

Solution - On effectue le changement de variables linéaire $(u,v) = (x+y, x-2y)$. Le Jacobien de ce changement de variables est

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} \right)^{-1} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right)^{-1} = -\frac{1}{3}.$$

Le domaine D est transformé en $D' = [1,2] \times [0,3]$. On déduit alors, d'après la formule de changement de variables (*cf.* Théorème 40),

$$\begin{aligned} \int\int_D (x+4y)dxdy &= \frac{1}{9}\int\int_{D'} (2u+v+4(u-v))dudv \\ &= \frac{1}{9}\int\int_{D'} (6u-3v)dudv \\ &= \frac{1}{3}\int_1^2 \left(\int_0^3 (2u-v)dv \right) du \\ &= \frac{1}{3}\int_1^2 \left[2uv - \frac{1}{2}v^2 \right]_0^3 du \\ &= \frac{1}{3}\int_1^2 (6u - \frac{9}{2}) = \frac{1}{3}\left[3u^2 - \frac{9}{2}u \right]_1^2 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 131 *Calculer* $\int\int_D (x^2+y)dxdy$ *où* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Solution -

On effectue le changement de variables $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Dans ce changement de variables le domaine D est transformé en $D' = [1,2] \times [0, 2\pi]$.

On a alors, d'après la formule de changement de variables (*cf.* Théorème 40),

$$\begin{aligned}
\int\int_D (x^2+y)dxdy &= \int\int_{D'} (r^2\cos^2\theta + r\sin\theta) r dr d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 (r^3\cos^2\theta + r^2\sin\theta)dr\right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{4}r^4\cos^2\theta + \frac{1}{3}r^3\sin\theta\right]_1^2 d\theta \\
&= \frac{15}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2\theta)}{2} d\theta + \frac{7}{3}\int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta \\
&= \frac{15}{4}\pi.
\end{aligned}$$

Exercice 132 *En effectuant le changement de variables* $(x,y) = (u^2v, uv^2)$, *calculer* $\displaystyle\int\int_D e^{\frac{x^3+y^3}{xy}} dxdy$, *où*

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y^2 - 8x \leq 0 \text{ et } x^2 - 8y \leq 0\right\}.$$

Solution -

Le Jacobien de ce changement de variables est

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2uv & u^2 \\ v^2 & 2uv \end{vmatrix} = 3u^2v^2.$$

On a

$$\left\{\begin{array}{l} y^2 - 8x \leq 0 \\ x^2 - 8y \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u^2v(v^3-8) \leq 0 \\ v^2u(u^3-8) \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \leq v \leq 2 \\ 0 \leq u \leq 2 \end{array}\right.$$

car $x \geq 0$ et $y \geq 0$ ce qui entraîne que $u \geq 0$ et $v \geq 0$. Ainsi le transformé de D est $D' = [0,2] \times [0,2]$. On a alors, d'après la formule de changement de variables (*cf.* Théorème 40),

$$\begin{aligned}
\int\int_D e^{\frac{x^3+y^3}{xy}} dxdy &= 3\int\int_{D'} u^2v^2e^{u^3+v^3} dudv \\
&= 3\left(\int_0^2 u^2e^{u^3}du\right)\left(\int_0^2 v^2e^{v^3}du\right) \\
&= 3\left(\left[\frac{1}{3}e^{u^3}\right]_0^2\right)^2 = \frac{1}{3}(e^8-1)^2.
\end{aligned}$$

Exercice 133 *Soient* $R > 0$, $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2+y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\}$ *et* $K_R = [0,R] \times [0,R]$. *Montrer que*

$$\int\int_{D_R} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \int\int_{K_R} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \int\int_{D_{2R}} e^{-x^2-y^2} dxdy$$

et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Solution - L'inégalité est une conséquence des inclusions

$$D_R \subset K_R \subset D_{2R}.$$

En effectuons le changement de variables $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, on déduit, d'après la formule du changement de variable (*cf.* Théorème 40), que

$$\begin{aligned} \int\int_{D_R} e^{-x^2-y^2} dxdy &= \int\int_{[0,R]\times[0,\frac{\pi}{2}]} e^{-r^2} r dr d\theta = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^R \\ &= \frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}). \end{aligned}$$

On déduit alors que

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}) \leq \int\int_{K_R} e^{-x^2-y^2} dxdy \leq \frac{\pi}{4}(1-e^{-4R^2}).$$

En faisant tendre R vers $+\infty$, on déduit alors que

$$\lim_{R\longrightarrow+\infty} \int\int_{K_R} e^{-x^2-y^2} dxdy = \frac{\pi}{4}.$$

Or, d'après le théorème de Fubini,

$$\int\int_{K_R} e^{-x^2-y^2} dxdy = \int_0^R \left(\int_0^R e^{-x^2-y^2} dx\right) dy = \left(\int_0^R e^{-x^2} dx\right)^2.$$

Des deux relations précédentes, on déduit finalement que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

12.4 Examen 1

Examen 1

Durée 3h

Exercice 1

Soit $I = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x + \frac{1}{2x} \leq 2\}$.

1. Montrer que I est la réunion de deux intervalles.
2. Déterminer quand ils existent, l'ensemble des minorants, l'ensemble des majorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément et le plus petit élément de I.

Exercice 2

Considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = \frac{x^9}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$$

et on définit la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ par $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \geq 0$.

1. Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$.
2. Monter que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à $x^3 - 3x + 1 = 0$ et en déduire que α est l'unique solution de $f(x) = x$ sur $[0, \frac{1}{2}]$.
3. Montrer que $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$ et que f est croissante sur $\mathbb{R}^+$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
4. Montrer que $f(\frac{1}{2}) < \frac{1}{2}$ et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq x_n < \frac{1}{2}$.
5. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers α.

Exercice 3

Montrer que la fonction $f : [-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$$

est bijective de $[-1, +\infty[$ sur $f([-1, +\infty[)$, déterminer $f([-1, +\infty[)$ et calculer f^{-1}.

Exercice 4

Soient $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continue sur $[a, b]$ ($a < b$) et dérivable sur $]a, b[$. On suppose que pour tout $x \in]a, b[$, $g'(x) \neq 0$.

1. Montrer que pour tout $x \in]a, b[$, $g(x) \neq g(a)$. (On pourra faire un raisonnement par absurde).
2. Posons $p = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ et définissons $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ par
$$h(x) = f(x) - pg(x).$$
Montrer que h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et en déduire qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
3. On suppose que $\lim\limits_{x \longrightarrow b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, où $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que
$$\lim_{x \longrightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \ell.$$
4. Application : Calculer la limite suivante :
$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Exercice 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt$.

1. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.
2. Calculer I_n.
3. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k + 1} C_n^k$ où $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

Exercice 6

On se propose de trouver toutes les solutions définies sur $]0, +\infty[$ de l'équation différentielle
$$y' - \frac{y}{x} - y^2 = -9x^2. \qquad (E)$$

1. Déterminer $a \in]0, +\infty[$ tel que $y_0(x) = ax$ soit une solution particulière de (E).
2. On pose $y = y_0 - \frac{1}{z}$. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z vérifie l'équation différentielle

$$z' + (6x + \frac{1}{x})z = 1. \tag{E_1}$$

3. Résoudre (E_1) sur $]0, +\infty[$.
4. Déterminer toutes les solutions de (E) définies sur $]0, +\infty[$.

12.5 Examen 2

Examen 2

Durée 3h

Exercice 1

Etudier la nature de l'intégrales généralisée $\int_0^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{t^2})dt$ et donner sa valeur.

Exercice 2

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.
3. f est-elle de classe C^2 en $(0,0)$?

Exercice 3

1. Montrer que l'application $h :]0,+\infty[\times]0,+\infty[\longrightarrow]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ définie par
$$h(x,y) = (u,v) = (xy, \frac{x}{y})$$
est un changement de variables et calculer h^{-1}.
2. En utilisant le changement de variable $(u,v) = (xy, \frac{x}{y})$ trouver toutes les fonctions f de classe C^2 sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles
$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \qquad (E)$$

Exercice 4

Soit $\omega = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ avec

$$P(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad Q(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} + ye^{-y}$$

définie sur $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

1. Montrer que ω est fermée sur D.
2. Montrer que ω est exacte sur D.
3. Calculer $\displaystyle\int_\Gamma \omega$ avec $\Gamma(t) = (\cos^2 t, 1+\sin^2 t)$ pour $0 \leq t \leq 2\pi$.

Exercice 5

Calculer $\int\int_D \sqrt{xy}e^{-x-y}dxdy$ où

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x, 0 \leq y, x+y \leq a\}$$

avec $a > 0$. (On pourra utiliser le changement de variables $x = tu$ et $y = (1-t)u$).

12.6 Solution examen 1

Solution exercice 1.

1. On a
$$-2 < x + \frac{1}{2x} \leq 2 \Leftrightarrow (x + \frac{1}{2x} + 2 > 0) \quad \text{et} \quad (x + \frac{1}{2x} - 2 \leq 0).$$
Or
$$(x + \frac{1}{2x} + 2 > 0) \Leftrightarrow \frac{2x^2 + 4x + 1}{2x} > 0.$$
Le discriminant du numérateur est $\Delta = 8$ et donc les racines sont $\frac{-2-\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{-2+\sqrt{2}}{2}$ et donc
$$(x + \frac{1}{2x} + 2 > 0) \Leftrightarrow x \in]\frac{-2-\sqrt{2}}{2}, \frac{-2+\sqrt{2}}{2}[\cup]0, +\infty[.$$
Un calcul analogue donne
$$(x+\frac{1}{2x}-2 \leq 0) \Leftrightarrow \frac{2x^2 - 4x + 1}{2x} \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup[\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}].$$
Finalement,
$$I =]\frac{-2-\sqrt{2}}{2}, \frac{-2+\sqrt{2}}{2}[\cup[\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{2+\sqrt{2}}{2}].$$

2. Notons $\mathcal{M}$ et $\mathfrak{M}$ respectivement l'ensemble des majorants et l'ensemble des minorant de I. Alors
$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= [\frac{2+\sqrt{2}}{2}, +\infty[, \\ \mathfrak{M} &=]-\infty, \frac{-2-\sqrt{2}}{2}], \\ \sup I &= \max I = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \inf I = \frac{-2-\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$
et puisque $\inf I \notin I$, I n'admet pas de plus petit élément.

Solution exercice 2.

1. La fonction g, $x \mapsto x^3 - 3x + 1$, est continue sur $[0, \frac{1}{2}]$ et
$$g(0) = 1 > 0, \quad g(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{8} < 0.$$
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (*cf.* Corollaire 2), il existe un $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que $g(\alpha) = 0$. D'un autre côté, pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$,
$$g'(x) = 3(x^2 - 1) < 0.$$
Donc g est strictement décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et donc bijective en vertu du théorème 8. Ainsi la solution de l'équation $g(x) = 0$ sur $[0, \frac{1}{2}]$ est unique.
2. On a
$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9} = x \Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 = 0$$
et donc d'après la question précédente α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur $[0, \frac{1}{2}]$.
3. Si $x \geq 0$ alors $\frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9} \geq 0$ et donc $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$. D'un autre côté, pour tout $x \geq 0$, on a
$$f'(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{2}{2} > 0$$
et donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Montrons maintenant que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Pour cela, nous allons montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$x_{n+1} \geq x_n \geq 0.$$
Pour $n = 0$, on a $x_0 = 0$ et $x_1 = f(0) = \frac{1}{9} \geq x_0 \geq 0$. Supposons que
$$x_{n+1} \geq x_n \geq 0.$$
Puisque f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on déduit que
$$f(x_{n+1}) \geq f(x_n) \geq f(0)$$
soit
$$x_{n+2} \geq x_{n+1} \geq 0,$$
ce qui permet de conclure.

4. On
$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{9}(\frac{1}{8} + 3 + 1) = \frac{11}{24} < \frac{1}{2}.$$
Nous allons utiliser un raisonnement par récurrence. Pour $n = 0$, on a clairement $0 \leq x_0 < \frac{1}{2}$. Supposons que
$$0 \leq x_n < \frac{1}{2}.$$
Puisque f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on déduit que
$$f(0) \leq f(x_n) \leq f(\frac{1}{2}) < \frac{1}{2}$$
ce qui montre la double inégalité souhaitée et achève la récurrence.
5. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée et donc, d'après le théorème 2, elle est convergente vers un réel ℓ. Puisque $0 \leq x_n < \frac{1}{2}$, on déduit que, d'après la proposition 10, on a
$$0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}.$$
En passant à la limite dans la relation $x_{n+1} = f(x_n)$ et en utilisant le fait que f est continue, on déduit que $\ell = f(\ell)$ et ainsi $\ell = \alpha$.

Solution exercice 3.

Remarquons d'abord que le discriminant de $x^2 + 2x + 2$ est $\Delta = -4 < 0$ et donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 2x + 2 > 0$ et ainsi f est bien définie.

Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a
$$f'(x) = -\frac{1}{2}(2x+2)(x^2+2x+2)^{-\frac{3}{2}} < 0$$
et donc f est strictement décroissante sur $[-1, +\infty[$. D'un autre côté, f est continue et donc, en vertu du théorème 8, f réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ sur $f([-1, +\infty[)$. Or
$$f(-1) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0$$
et ainsi $f([-1, +\infty[) =]0, 1]$.
Calculons f^{-1}. Pour $x \in]0, 1]$, la relation $f(y) = x$ est équivalente à
$$\frac{1}{\sqrt{y^2 + 2y + 2}} = x,$$

soit
$$y^2 + 2y + 2 - \frac{1}{x^2} = 0.$$
Considérons cette équation comme une équation du second degrés en y. Son discriminant est
$$\Delta = 4 - 8 + \frac{4}{x^2} = \frac{4}{x^2} - 4 = \frac{4(1-x^2)}{x^2} \geq 0 \quad (x \in]0,1]).$$
Ainsi
$$y = -1 + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \quad \text{ou} \quad y = -1 - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$
Comme la deuxième valeur de y est strictement inférieure à -1, on déduit finalement que $f^{-1} :]0,1] \longrightarrow [-1, +\infty[$ est donnée par
$$f^{-1}(x) = -1 + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Solution exercice 4.

1. Raisonnons par absurde et supposons qu'il existe $x_0 \in]a,b[$ tel que $g(x_0) = g(a)$. La fonction g étant continue sur $[a, x_0]$ et dérivable sur $]a, x_0[$ et puisque $g(a) = g(x_0)$, d'après le théorème de Rolle (*cf.* Théorème 14), il existe $c \in]a, x_0[$ tel que $g'(c) = 0$ ce qui constitue une contradiction puisque pour tout $x \in]a,b[$, $g'(x) \neq 0$.
2. La fonction h est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et
$$\begin{aligned} h(a) &= f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(a) \\ &= \frac{f(a)(g(b)-g(a)) - (f(b)-f(a))g(a)}{g(b)-g(a)} \\ &= \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b)-g(a)}, \\ h(b) &= f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(b) \\ &= \frac{f(b)(g(b)-g(a)) - (f(b)-f(a))g(b)}{g(b)-g(a)} \\ &= \frac{f(a)g(b) - f(b)g(a)}{g(b)-g(a)}. \end{aligned}$$

Ainsi $h(a) = h(b)$ et donc h vérifie les hypothèses du théorème de Rolle. Il existe donc $c \in]a, b[$ tel que

$$h'(c) = f'(c) - pg'(c) = 0.$$

Cette relation est équivalente à

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Ce qui permet de conclure.

3. Nous allons utiliser la caractérisation des limites par les suites (*cf.* Proposition 12). Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $]a, b[$ qui converge vers b. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $c_n \in]b_n, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(b_n)}{g(b) - g(b_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}.$$

La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers b et puisque $\lim\limits_{x \longrightarrow b^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ on déduit, d'après la proposition 12, que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \ell.$$

Donc

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{f(b_n) - f(b)}{g(b_n) - g(b)} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \ell.$$

Et encore la proposition 12 permet de déduire que

$$\lim_{x \longrightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{g(x) - g(b)} = \ell.$$

4. On a

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{\arccos' x}{(\sqrt{1 - x^2})'} = \lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{1}{x} = 1.$$

Donc d'après ce qui précède

$$\lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{\arccos x}{\sqrt{1 - x^2}} = \lim_{x \longrightarrow 1^-} \frac{\arccos x - \arccos 1}{\sqrt{1 - x^2} - \sqrt{1 - 1^2}} = 1.$$

Solution exercice 5.

1. Nous allons utiliser une intégration par parties.

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \left[t(1-t^2)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 t(-2t)(n+1)(1-t^2)^n dt \\ &= 2(n+1)\int_0^1 t^2(1-t^2)^n dt \\ &= 2(n+1)\int_0^1 (t^2-1)(1-t^2)^n dt + 2(n+1)\int_0^1 (1-t^2)^n dt \\ &= -2(n+1)I_{n+1} + 2(n+1)I_n. \end{aligned}$$

De cette relation on déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+3} I_n.$$

2. De la relation précédente, on déduit par récurrence que

$$I_n = \frac{2^n n!}{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n+1)}$$

puisuqe $I_0 = 1$.

3. D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$(1-t^2)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k t^{2k}.$$

En intégrant cette relation entre 0 et 1, on déduit que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k = I_n = \frac{2^n n!}{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2n+1)}.$$

Solution exercice 6.

1. y_0 est solution de (E) si et seulement si

$$a - a - a^2x^2 = -9x^2$$

soit $a^2 = 9$ et donc $a = 3$.

2. On a $y = y_0 - \frac{1}{z}$ est solution de (E) si et seulement si
$$3 + \frac{z'}{z^2} - \frac{3x - \frac{1}{z}}{x} - (3x - \frac{1}{z})^2 = -9x^2.$$
En développant cette équation et en multipliant par z^2, on obtient
$$z' + (6x + \frac{1}{x})z = 1.$$

3. (E_1) est une équation différentielle du premier ordre linéaire et donc, d'après le théorème 28, les solutions de (E_1) sur $]0, +\infty[$ sont de la forme
$$z(x) = Ce^{-A(x)} + z_0$$
où
$$A(x) = \int (6x + \frac{1}{x})dx = 3x^2 + \ln x,$$
et z_0 est une solution particulière. Cherchons z_0 par la méthode de variation de la constante, c'est-à-dire,
$$z_0(x) = C(x)e^{-A(x)} = C(x)\frac{1}{x}e^{-3x^2}.$$
Donc z_0 est solution de (E_1) si et seulement si
$$C'(x)\frac{1}{x}e^{-3x^2} + (-\frac{1}{x^2} - 6x)e^{-3x^2} + (6x + \frac{1}{x})C(x)\frac{1}{x}e^{-3x^2} = 1,$$
soit
$$C'(x) = xe^{3x^2},$$
et donc $C(x) = \frac{1}{6}e^{3x^2}$ et
$$z_0(x) = \frac{1}{6x}.$$
En conclusion, l'ensemble $\mathcal{S}_1$ des solutions de (E_1) sur $]0, +\infty[$ est donné par
$$\mathcal{S}_1 = \left\{ \frac{C}{x}e^{-3x^2} + \frac{1}{6x}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. On déduit de ce qui précède que l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) sur $]0, +\infty[$ est donné par
$$\mathcal{S} = \left\{ 3x - \frac{6x}{Ce^{-3x^2} + 6}, C \in \mathbb{R} \right\}.$$

12.7 Solution examen 2

Solution exercice 1.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{t^2})dt$ converge si et seulement si les deux intégrales $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+\frac{1}{t^2})dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{t^2})dt$ convergent.

La fonction $t \mapsto \ln(1+\frac{1}{t^2})$ est continue et positive sur $[0,1]$ et

$$\ln(1+\frac{1}{t^2}) = \ln(1+t^2) - 2\ln t \sim_0 -2\ln t.$$

Donc, d'après la proposition 41, les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+\frac{1}{t^2})dt$ et $\displaystyle -2\int_0^1 \ln t dt$ ont la même nature. Or

$$\int_0^1 \ln t dt = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \int_x^1 \ln t dt = \lim_{x \longrightarrow 0^+} [t\ln t - t]_x^1 = -1.$$

Donc $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+\frac{1}{t^2})dt$ est convergente.
La fonction $t \mapsto \ln(1+\frac{1}{t^2})$ est continue et positive sur $[1,+\infty[$ et

$$\ln(1+\frac{1}{t^2}) \sim_{+\infty} \frac{1}{t^2}.$$

Donc, d'après la proposition 41, les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{t^2})dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ ont la même nature. Or cette intégrale est une intégrale de Riemann convergente (voir (8.3)) et donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{t^2})dt$ est convergente. En conclusion, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{t^2})dt$ est convergente. Pour calculer cette intégrale, nous allons calculer une primitive de $\ln(1+\frac{1}{t^2})$ grâce à un intégration par parties. On a

$$\begin{aligned}\int \ln(1+\frac{1}{t^2})dt &= t\ln(1+\frac{1}{t^2}) - \int t\left(-\frac{2}{t^3}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{t^2}}dt \\ &= t\ln(1+\frac{1}{t^2}) + \int \frac{2dt}{1+t^2} = t\ln(1+\frac{1}{t^2}) + 2\arctan t + k.\end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{t \longrightarrow +\infty} t\ln(1+\frac{1}{t^2}) = \lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{t}{t^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \longrightarrow 0^+} t\ln(1+\frac{1}{t^2}) = 0$$

on déduit que

$$\int_0^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{t^2})dt = \pi.$$

Solution exercice 2.

1. Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f est le quotient de deux fonctions de classe C^1 et donc elle est de classe C^1. Montrons que f est de classe C^1 en $(0,0)$. Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y^3 \frac{((x^2+y^2) - x(2x))}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x \frac{3y^2(x^2+y^2) - 2y^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{xy^2(y^2+3x^2)}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{f(0,x) - f(0,0)}{x} = 0.
\end{aligned}$$

2. Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont le quotient de fonctions continues donc elles sont continues en vertu de la proposition 47. Etudions maintenant la continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$. Pour cela calculons $\displaystyle\lim_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\displaystyle\lim_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Posons $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$. Alors

$$0 \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right| = r \left| \sin^3\theta(\sin^2\theta - \cos^2\theta) \right| \leq 2r = 2\sqrt{x^2+y^2}.$$

De cette égalité on déduit que

$$\lim_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0),$$

et donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0,0)$. Un calcul analogue montre que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue en $(0,0)$.
En conclusion, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

3. On a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x}=0,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,x)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}=0,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,x)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x}{x}=1,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x}=0.
\end{aligned}$$

4. Puisque $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$, on peut conclure grâce au lemme de Schwarz (*cf.* Théorème 32) que f n'est pas classe C^2 en $(0,0)$.

Solution exercice 3.

1. Notons $\Omega =]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. Pour tout $(u,v)\in\Omega$, on a

$$h(x,y)=(u,v)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} xy=u,\\ \frac{x}{y}=v.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x^2=uv,\\ y=\frac{x}{v}.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x=\sqrt{uv},\\ y=\sqrt{\frac{u}{v}}.\end{array}\right.$$

Il en résulte que h est une bijective de Ω sur Ω et, pour tout $(u,v)\in\Omega$

$$h^{-1}(u,v)=(\sqrt{uv},\sqrt{\frac{u}{v}}).$$

Ainsi g réalise une bijection de classe C^1 de Ω sur Ω et h^{-1} est aussi de classe C^1 et donc h est un changement de variables.

2. On pose $g(u,v)=f(x,y)$. De la proposition 57, on déduit que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial v}=y\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{1}{y}\frac{\partial g}{\partial v}\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v}=x\frac{\partial g}{\partial u}-\frac{x}{y^2}\frac{\partial g}{\partial v},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= y\left(y\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}\right)+\frac{1}{y}\left(y\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\frac{1}{y}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)\\
&= y^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= x\left(x\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}-\frac{x}{y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v\partial u}\right)-\frac{x}{y^2}\left(x\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}-\frac{x}{y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)\\
&= x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}-\frac{2x^2}{y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\frac{x^2}{y^4}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}.
\end{aligned}$$

Ainsi f est solution de (E) si et seulement si

$$x^2\left(y^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)-y^2\left(x^2\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}-\frac{2x^2}{y^2}\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}+\frac{x^2}{y^4}\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}\right)=0$$

soit

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}=0.$$

Les solutions de cette équation sont de la forme $g(u,v)=f_1(u)+f_2(v)$ où f_1,f_2 deux fonctions réelles de classe C^2.
En conclusion, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$f(x,y)=f_1(xy)+f_2\left(\frac{x}{y}\right),$$

où f_1,f_2 deux fonctions réelles de classe C^2.

Solution exercice 4.

1. On a
$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$
et donc ω est fermée.
2. Le domaine D n'étant pas étoilé, on ne peut pas utiliser le théorème de Poincaré (*cf.* Théorème 38) pour affirmer que ω est exacte. Nous allons

alors utiliser la définition d'une forme exacte et montrer que ω admet une primitive.
La relation $df = \omega$ est équivalente à

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{x}{x^2+y^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{y}{x^2+y^2} + ye^{-y}. \end{cases}$$

On déduit de la première équation que

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + h(y),$$

et donc

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} + h'(y).$$

En remplaçant dans la deuxième équation, on obtient

$$h'(y) = ye^{-y}.$$

Maintenant une intégration par parties donne

$$\int ye^{-y}dy = -ye^{-y} + \int e^{-y}dy = -ye^{-y} - e^{-y}.$$

Finalement,

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - ye^{-y} - e^{-y}$$

est une primitive de ω sur D et donc ω est exacte sur D.

3. D'après la proposition 61,

$$\int_\Gamma \omega \quad = \quad \int_\Gamma df = f(\Gamma(2\pi)) - f(\Gamma(0)) = f(1,1) - f(1,1) = 0.$$

Solution exercice 5.

Le Jacobien du changement de variables $(x,y) = (tu, (1-t)u)$ est donné par

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & t \\ -u & 1-t \end{vmatrix} = u.$$

Le domaine D est transformé en

$$D' = \left\{(t,u) \in \mathbb{R}^2, tu \geq 0, (1-t)u \geq 0, u \leq a\right\} = [0,1] \times [0,a].$$

On déduit alors, d'après la formule de changement de variables (*cf.* Théorème 40),

$$\begin{aligned}
\int\int_D \sqrt{xy}e^{-x-y}dxdy &= \int\int_{D'} \sqrt{t(1-t)}u^2e^{-u}dudt \\
&= \left(\int_0^1 \sqrt{t(1-t)}dt\right)\left(\int_0^a u^2e^{-u}du\right)
\end{aligned}$$

Calculons ces deux intégrales. On a

$$\sqrt{t(1-t)} = \frac{1}{2}\sqrt{1-(2t-1)^2}.$$

En effectuant le changement de variable $\sin u = 2t-1$, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{1-(2t-1)^2}dt &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos u|(\frac{1}{2}\cos u)du = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 udu \\
&= \frac{1}{4}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos 2u + 1)du = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\sin 2u + u\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{4}\pi.
\end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^1 \sqrt{t(1-t)}dt = \frac{1}{8}\pi.$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned}
\int_0^a u^2e^{-u}du &= \left[-u^2e^{-u}\right]_0^a + 2\int_0^a ue^{-u}du \\
&= -a^2e^{-a} + 2\left[-ue^{-u}\right]_0^a + 2\int_0^a e^{-u}du \\
&= -a^2e^{-a} - 2ae^{-a} - 2e^{-a} + 2.
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\int\int_D \sqrt{xy}e^{-x-y}dxdy = \frac{1}{8}\pi\left(-a^2e^{-a} - 2ae^{-a} - 2e^{-a} + 2\right).$$

Index