Cours d'Analyse 3 et Géométrie 2 DEUG MP 2003/2004

Mohamed Boucetta et M'hamed Eddahbi

Université Cadi Ayyad, Faculté des Sciences et Techniques,

Département de Mathématiques et Informatique, B.P. 549,

Marrakech, Maroc. e–mail: boucetta ou eddahbi@fstg-marrakech.ac.ma

Table des matières

Chapitre 1

Espaces vectoriels normés

Dans ce chapitre, nous allons étudier les espaces vectoriels normés. Les résultats et notions de ce chapitre joueront un rôle crucial dans la suite de ce programme.

Dans tout ce chapitre, K désigne le corps des réels ou le corps des complexes: $K=\mathbb{R}$ ou $K=\mathbb{C}$.

1.1 Convexes dans un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel. Pour tous vecteurs $x, y \in E$ on appelle segment joignant x à y l'ensemble noté $[x, y]$ et défini par

$$[x, y] = \{(1-t)x + ty, \quad t \in [0, 1]\}.$$

Définition 1.1.1 *Une partie A d'un espace vectoriel est dite convexe si pour tout couple de vecteurs $x, y \in A$, $[x, y] \subset A$.*

Remarque.

$$A \quad \text{est} \quad \text{convexe} \iff \forall\, x, y \in A, \ \ \forall\, t \in [0, 1], \quad (1-t)x + ty \in A.$$

Il est claire que l'intersection d'une famille quelconque de convexes et encore un convexe.

1.1.1 Enveloppe convexe

Soit A une partie d'un espace vectoriel E. L'enveloppe convexe de A dans E est l'intersection de tous les convexes contenant A. On note $ec(A)$ l'enveloppe convexe de A. $ec(A)$ est le plus petit convexe contenant A.

Proposition 1.1.1 *Soit A une partie d'un espace vectoriel. On a*

$$ec(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \quad x_i \in A \right\}.$$

Preuve : On notera, provisoirement, L l'ensemble

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \quad x_i \in A \right\}.$$

Pour vérifier que $ec(A) = L$, on doit vérifier que L est un convexe qui contient A et qui est contenu dans tout convexe contenant A.

Il est clair que L est un convexe qui contient A.

Soit B un convexe contenant A. Nous allons montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, tout $(x_1, \ldots, x_m) \in A^m$ et toute famille de réels $(a_1, \ldots, a_m)$ positifs et tels que $\sum_{i=1}^{m} a_i = 1$,

$$a_1 x_1 + \cdots + a_m x_m \in B.$$

La démonstration se fera par récurrence sur m.

La propriété est claire pour $m=1$. Supposons la propriété vrai jusqu'à $m-1$. On peut supposer $a_1 \neq 1$. Par hypothèse de récurrence on a

$$z = \frac{a_2}{1-a_1}x_2 + \cdots + \frac{a_{m-1}}{1-a_1}x_{m-1} + \left(1 - \frac{a_2}{1-a_1} - \cdots - \frac{a_{m-1}}{1-a_1}\right)x_m \in B.$$

Par convexité de B, on a que $a_1x_1 + (1-a_1)z \in B$, soit

$$a_1x_1 + \cdots + a_mx_m \in B.$$

□

Théorème 1.1.1 ***(Carathéodory)*** *Soit E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel de dimension n. Soit A une partie de E. Alors*

$$ec(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_i, : \lambda_i > 0, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1, \quad x_i \in A, m \leq n+1 \right\}.$$

Preuve : Soit $z = \sum_{i=0}^{m} a_i x_i$ avec $(x_0, \ldots, x_m) \in A^{m+1}$, $(a_0, \ldots, a_m)$ une famille de réels strictement positifs et tels que $\sum_{i=0}^{m} a_i = 1$ et $m \geq n+1$. Nous allons montrer que z peut s'écrire comme combinaison convexe de m points au lieu de $m+1$.

Puisque $m > n$, la famille de vecteurs $(x_1 - x_0, \ldots, x_m - x_0)$ est linéairement dépendante et donc il existe $(b_1, \ldots, b_m)$ une famille de réels non tous nuls telle que $\sum_{i=1}^{m} b_i(x_i - x_0) = 0$, soit $\sum_{i=0}^{m} b_i x_i = 0$ avec $b_0 = -\sum_{i=1}^{m} b_i$. On a $\sum_{i=0}^{m} b_i = 0$. On peut supposer que l'un des b_i est strictement positif. Soit $t = \frac{a_k}{b_k} = \inf\{\frac{a_j}{b_j} : b_j > 0\}$. On pose $c_i = a_i - tb_i$ pour tout $i = 0, \ldots, m$. On a $c_k = 0$ et pour $j \neq k$, $c_j > 0$. D'un autre côté $z = \sum_{j=0}^{m} c_j x_j$. Ceci permet de conclure. □

1.2 Normes et distances sur un espace vectoriel

1.2.1 Définitions et exemples

Définition 1.2.1 *Soit E un K–espace vectoriel. On appelle norme sur E une application $\mathcal{N} : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant, pour tous vecteurs x, y de E et tout scalaire λ de K:*

1) $\mathcal{N}(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

2) $\mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda|\mathcal{N}(x)$;

3) $\mathcal{N}(x+y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$.

Le couple $(E, \mathcal{N})$ est appelé espace vectoriel normé.

La propriété 3) est appelée inégalité triangulaire et la proposition qui suit donne une seconde inégalité triangulaire.

Proposition 1.2.1 *Soit $(E, \mathcal{N})$ un espace vectoriel normé. Pour tout x et y de E, on a*

$$|\mathcal{N}(x) - \mathcal{N}(y)| \leq \mathcal{N}(x-y).$$

Preuve : En vertu de l'inégalité triangulaire on a

$$\mathcal{N}(x) \leq \mathcal{N}(x-y) + \mathcal{N}(y) \quad \text{et} \quad \mathcal{N}(y) \leq \mathcal{N}(y-x) + \mathcal{N}(x).$$

Ceci permet de conclure. □

1.2.2 Distance associée à une norme

Soit $(E, \mathcal{N})$ un espace vectoriel normé. L'application d définie par

$$d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+, \qquad (x, y) \longmapsto d_{\mathcal{N}}(x, y) = \mathcal{N}(x - y)$$

est appelée distance associée à la norme $\mathcal{N}$.

d vérifie les propriétés suivantes :

$\mathcal{D}_1$) Pour tous $x, y \in E$, $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$;

$\mathcal{D}_2$) Pour tous $x, y \in E$, $d(x, y) = d(y, x)$;

$\mathcal{D}_3$) Pour tous $x, y, z \in E$, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

La condition $\mathcal{D}_3$ est appelée inégalité triangulaire.

Remarque. Soit E un ensemble quelconque. Une application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés $\mathcal{D}_1$), $\mathcal{D}_2$) et $\mathcal{D}_3$) est appelée distance et le couple (E, d) est appelé espace métrique. La plupart des résultats de ce chapitre restent valable dans un espace métrique.

1.2.3 Normes équivalentes

On dit que deux normes $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ sur un espace vectoriel E sont équivalentes si il existe deux réels strictement positifs α et β tels que pour tout vecteur $x \in E$

$$\alpha \mathcal{N}_1(x) \leq \mathcal{N}_2(x) \leq \beta \mathcal{N}_1(x).$$

Remarque. Cette condition peut se traduire par le fait que les fonctions $\frac{\mathcal{N}_1}{\mathcal{N}_2}$ et $\frac{\mathcal{N}_2}{\mathcal{N}_1}$ définies sur $E \setminus O_E$ sont majorées.

1.3 Exemples classiques d'espaces vectoriels normés

1.3.1 Norme usuelle sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$

La norme usuelle sur $\mathbb{R}$ est la valeur absolue : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $x \mapsto |x|$.
La norme usuelle sur $\mathbb{C}$ est le module : $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $z \mapsto |z|$.

Norme classiques sur K^n

On note $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$. On défini trois normes sur K^n par

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \;\; \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Ces normes sont deux à deux équivalentes et les inégalités suivantes donnent les coefficients optimaux :

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_2 \leq n\, \|x\|_\infty .$$

1.3.2 Normes classiques sur l'espace vectoriel $K[X]$ des polynômes

On définit trois normes sur $K[X]$ en posant pour $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$

$$\|P\|_1 = \sum_{i=0}^{n} |a_i|, \; \|P\|_2 = \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|P\|_\infty = \sup_{0 \leq i \leq n} |a_i|.$$

On a $\|P\|_\infty \leq \|P\|_2 \leq \|P\|_1$, mais ces normes ne sont pas équivalentes. En effet, si $P_n = 1 + X + \cdots + X^n$, on a

$$\|P_n\|_1 = 1 + n, \; \|P_n\|_2 = \sqrt{n+1} \;\; \text{et} \;\; \|P_n\|_\infty = 1$$

et donc

$$\frac{\mathcal{N}_2}{\mathcal{N}_\infty}(P_n) = \frac{\mathcal{N}_1}{\mathcal{N}_2}(P_n) = \sqrt{n+1} \text{ et } \frac{\mathcal{N}_1}{\mathcal{N}_\infty}(P_n) = n + 1$$

et qui tendent vers l'infini quand n tend vers l'infini.

1.3.3 Normes classiques sur l'espace $\mathcal{C}([0,1],K)$ des fonctions continues à valeurs dans K

On définit trois normes sur $\mathcal{C}([0,1],K)$ en posant pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([0,1],K)$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt, \ \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

On a

$$\|f\|_1 \le \|f\|_2 \le \|f\|_\infty.$$

Mais ces normes ne sont pas équivalentes. Les fonctions

$$f \mapsto \frac{\|f\|_2}{\|f\|_1}, \ f \mapsto \frac{\|f\|_\infty}{\|f\|_2} \quad \text{et} \quad f \mapsto \frac{\|f\|_\infty}{\|f\|_1}$$

ne sont pas majorées ce qu'on peut vérifier en considérant la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(t) = t^n$. Le calcul donne

$$\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}, \ \|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad \text{et} \quad \|f_n\|_\infty = 1.$$

1.4 Produit d'espaces vectoriels normés

Soient $(E_1,\mathcal{N}_1)$ et $(E_2,\mathcal{N}_2)$ deux espaces vectoriels normés. On définit trois normes classiques sur l'espace produit $E_1 \times E_2$ par

$$\|(x_1,x_2)\|_1 = \mathcal{N}_1(x_1) + \mathcal{N}_2(x_2), \quad \|(x_1,x_2)\|_2 = \left(\mathcal{N}_1^2(x_1) + \mathcal{N}_2^2(x_2)\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|(x_1,x_2)\|_\infty = \sup(\mathcal{N}_1(x_1),\mathcal{N}_2(x_2)).$$

Ces normes sont deux à deux équivalentes.

L'équivalence de ces normes tient aux inégalités suivantes :

$$\|(x_1,x_2)\|_\infty \le \|(x_1,x_2)\|_2 \le \|(x_1,x_2)\|_1 \le \sqrt{2}\|(x_1,x_2)\|_2 \le 2\|(x_1,x_2)\|_\infty.$$

Remarque. 1) On définit de façon analogue des normes équivalentes sur un produit de n espaces vectoriels normés, en particulier sur E^n.

2) Désormais, tout produit d'espaces vectoriels normés sera muni de l'une de ces normes.

1.5 Topologie d'un espace vectoriel normé

1.5.1 Boules et sphères

Soit $(E,\mathcal{N})$ un espace vectoriel normé.

a) La boule ouverte de centre $a \in E$ et de rayon $r \in \mathbb{R}^+$ est

$$B(a,r) = \{x \in E : \mathcal{N}(x-a) < r\}.$$

b) La boule fermée de centre $a \in E$ et de rayon $r \in \mathbb{R}^+$ est

$$B_f(a,r) = \{x \in E : \mathcal{N}(x-a) \le r\}.$$

c) La sphère de centre $a \in E$ et de rayon $r \in \mathbb{R}^+$ est

$$S(a,r) = \{x \in E : \mathcal{N}(x-a) = r\}.$$

Remarque. Les boules ou sphères de centre 0_E et de rayon 1 sont appelées boules unité, sphères unité.

Exercice 1. Montrer que $B(a,r)$ et $B_f(a,r)$ sont convexes et que l'enveloppe convexe de $S(a,r)$ est $B_f(a,r)$.

Exercice 2. Soit K une partie convexe d'un $\mathbb{R}$–espace vectoriel E admettant 0_E comme centre de symétrie, ne contenant aucune droite, telle que toute droite passant par 0_E rencontre K en dehors de 0_E. Montrer que

$$\mathcal{N}(x) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}_+^* : \frac{x}{\lambda} \in \mathbf{K}\}$$

est une norme sur E et que pour cette norme $B(0_E,1) = \overset{\circ}{\mathbf{K}}$ et $B_f(0_E,1) = \overline{\mathbf{K}}$.

Définition 1.5.1 *Soit $(E,\mathcal{N})$ un espace vectoriel normé.*

a) On appelle voisinage d'un point a de E toute partie X de E contenant une boule ouverte de centre a. L'ensemble des voisinages de a est noté $\mathcal{V}(a)$.

b) On appelle ouvert de E toute partie X de E qui est voisinage de chacun de ses points.

c) On appelle fermé de E toute partie de E dont le complémentaire dans E est un ouvert de E.

Exemples: Montrer que $B(a,r)$ est un ouvert de E et que $B_f(a,r)$ est un fermé de E.

Remarque. 1)

$$U \in \mathcal{V}(a) \iff \exists\, r > 0, \quad B(a,r) \subset U.$$

2)

$$U \text{ ouvert de } \quad E \iff \forall\, a \in U\ \exists\, r > 0, \quad B(a,r) \subset U.$$

3) E et $\emptyset$ sont à la fois ouverts et fermés.

Exercice. Soit A une partie de E qui est à la fois ouverte et fermée. Montrer que $A = E$ ou $A = \emptyset$.

Proposition 1.5.1 *Soit $(E,\mathcal{N})$ un espace vectoriel normé.*

i) Une réunion quelconque de voisinages de a est un voisinage de a et une intersection finie de voisinage de a est un voisinage de a.

ii) Une réunion quelconque d'ouverts de E est un ouvert de E et une intersection finie d'ouverts de E est un ouvert de E.

iii) Une réunion fini de fermés E est un fermé de E et une intersection quelconque de fermés de E est fermé de E.

Preuve : i) Toute partie qui contient un voisinage de a est un voisinage de a. Ceci permet d'avoir la première assertion.

Soient $U_1,\ldots,U_n$ une famille finie de voisinages de a. Montrons que $\cap_{1\le i\le n} U_i$ est un voisinage de a.

Pour tout $1 \le i \le n$ il existe un $r_i > 0$ tel que $B(a,r_i) \subset U_i$. Soit $r = \inf(r_1,\ldots,r_n)$. On a clairement pour tout $1 \le i \le n$ $B(a,r) \subset B(a,r_i) \subset U_i$ et donc $B(a,r) \subset \cap_{1\le i\le n} U_i$. Donc $\cap_{1\le i\le n} U_i$ est un voisinage de a.

ii) se démontre de la même manière que i) et iii) se déduit de ii) par passage au complémentaire. □

Remarque. L'intersection d'une famille quelconque d'ouverts n'est pas toujours un ouvert comme l'indique le contre-exemple suivant :

- Dans $\mathbb{R}$ muni de sa norme usuelle, on considère la famille d'ouverts $O_n =]-\frac{1}{n},\frac{1}{n}[$. On a clairement $\cap_n O_n = 0$.

1.5.2 Intérieur et adhérence d'une partie

Soit $(E, \mathcal{N})$ un espace vectoriel normé. On appelle intérieur d'une partie A de E la réunion de tous les ouverts de E contenus dans A. On note A^ol'intérieur de A. C'est le plus grand ouvert de E inclus dans A.

On appelle adhérence d'une partie A de E l'intersection de tous les fermés de E contenant A. On note $\bar{A}$ l'adhérence de A. $\bar{A}$ est le plus petit fermé de E contenant A.

Une partie A de E est dite dense dans E si $\bar{A} = E$.

Proposition 1.5.2 *Soit $(E, \mathcal{N})$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
i) $x \in A^o$.
ii) Il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$.

Preuve : Supposons que $x \in A^o$. Puisque A^o est un ouvert, Il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A^o \subset A$

- Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$. Puisque $B(x, r)$ est un ouvert (voir T.D.) contenu dans A, $B(x, r)$ est contenu dans A^oet donc $x \in A^o$. □

Proposition 1.5.3 *Soit $(E, \mathcal{N})$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
i) $x \in \bar{A}$.
ii) Pour tout $r > 0$ $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.

Preuve : $i) \Longrightarrow ii)$ Supposons, au contraire, qu'il existe une boule $B(x, r)$ incluse dans $E \setminus A$. Alors A est incluse dans le fermé $E \setminus B(x, r)$, ce qui donne $x \notin \bar{A}$.

$ii) \Longrightarrow i)$ Par contraposition. Si $x \notin \bar{A}$, il existe un fermé F contenant A et pas x. Alors $E \setminus F$ est un ouvert contenant x et donc une boule $B(x, r)$ qui ne rencontre pas A. □

Proposition 1.5.4 *Soit E un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E. On a*
i) A est un ouvert si et seulement si $A = A^o$.
ii) A est un fermé si et seulement si $A = \bar{A}$.

Preuve : Evident. □

Proposition 1.5.5 *Soit E un espace vectoriel muni de deux normes équivalentes $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$. Soit A une partie de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
i) A est un ouvert de $(E, \mathcal{N}_1)$.
ii) A est un ouvert de $(E, \mathcal{N}_2)$.

Preuve : $i) \Longrightarrow ii)$. Puisque $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ sont équivalentes, il existe deux réels strictement positifs α et β tels que

$$\alpha \mathcal{N}_1 \leq \mathcal{N}_2 \leq \beta \mathcal{N}_1.$$

Soit $x \in A$. Il existe un $r > 0$ tel que $B^1(x, r) \subset A$. Or d'après l'inégalité ci-dessus on a $B^2(x, \alpha r) \subset B^1(x, r) \subset A$. Donc A est un ouvert de $(E, \mathcal{N}_2)$. La réciproque se démontre de la même manière. □

Remarque. Deux normes équivalentes définissent les mêmes ouverts et donc les mêmes fermés et toutes les autres notions faisant intervenir ouverts et fermés. On dira que deux normes équivalentes définissent la même topologie.

Exercices : Soit E un espace vectoriel normé.

1) Montrer que $B(a, r)$ est un ouvert, $B_f(a, r)$ est un fermé et que $\overline{B(a, r)} = B_f(a, r)$ et $B_f^o(a, r) = B(a, r)$.
2) Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\bar{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.
3) Soit A une partie non vide convexe de E. Montrer que A^oet $\bar{A}$ sont convexes.

1.6 Suites dans un espace vectoriel normé

Soit $(E,\mathcal{N})$ un espace vectoriel normé.

On appelle suite dans E toute application de $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$ dans E, où n_0 est fixé, souvent notée $(u_n)_{n\geq n_0}$ au lieu de $u : \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\} \longrightarrow E$ qui $n \mapsto u_n$. En général, on prend des suites définies à partir du rang 0.

1.6.1 Convergence et divergence d'une suite

1) On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un espace vectoriel normé $(E,\mathcal{N})$ converge vers un élément ℓ de E si et seulement si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \text{tel que} \quad \forall\, n \geq n_0\ \mathcal{N}(u_n - \ell) \leq \varepsilon.$$

2) On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un espace vectoriel normé $(E,\mathcal{N})$ diverge si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge vers aucun élément de E.

Proposition 1.6.1 ***Unicité de la limite, si elle existe***

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans un espace vectoriel normé $(E,\mathcal{N})$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite, alors cette limite est unique.

Preuve : Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_1 et converge vers ℓ_2 et que $\ell_1 \neq \ell_2$.

Notons $\varepsilon = \frac{1}{3}\mathcal{N}(\ell_1 - \ell_2)$. Il existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$n \geq n_1 \implies \mathcal{N}(u_n - \ell_1) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$n \geq n_2 \implies \mathcal{N}(u_n - \ell_2) \leq \frac{\varepsilon}{2}).$$

Notons $n_0 = \max(n_1, n_2)$. On a

$$\mathcal{N}(\ell_1 - \ell_2) \leq \mathcal{N}(\ell_1 - u_{n_0}) + \mathcal{N}(u_{n_0} - \ell_2) \leq \varepsilon = \frac{1}{3}\mathcal{N}(\ell_1 - \ell_2).$$

Ceci est une contradiction. □

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, on notera $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$.

1.6.2 Propriétés des suites convergentes

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans un espace vectoriel normé $(E,\mathcal{N})$. On dira que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si :

$$\exists\, A > 0,\ \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \mathcal{N}(u_n) \leq A.$$

Proposition 1.6.2 *Toute suite convergente est bornée.*

Preuve : Supposons que $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$. On a

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ n \geq n_0 \implies \mathcal{N}(u_n - \ell) \leq 1.$$

Donc, pour tout $n \geq n_0$

$$\mathcal{N}(u_n) \leq \mathcal{N}(u_n - \ell) + \mathcal{N}(\ell) \leq 1 + \mathcal{N}(\ell).$$

En notant $M = \max(\mathcal{N}(u_0), \ldots, \mathcal{N}(u_{n_0-1}), 1 + \mathcal{N}(\ell))$, on conclut

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \mathcal{N}(u_n) \leq M.$$

□

Remarque. Il existe des suites bornée divergentes, par exemple la suite de réels $((-1)^n)_n$.

Proposition 1.6.3 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'un espace vectoriel normé $(E,\mathcal{N})$, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans K, $\ell,\ell'\in E$, $\lambda\in K$. On a:*
1) $\lim_{n\to\infty} u_n=\ell \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\mathcal{N}(u_n)=\mathcal{N}(\ell)$.
2) $\lim_{n\to\infty} u_n=0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}\mathcal{N}(u_n)=0$.
3) $\lim_{n\to\infty} u_n=\ell$ *et* $\lim_{n\to\infty} v_n=\ell' \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}(u_n+v_n)=\ell+\ell'$.
4) $\lim_{n\to\infty} \lambda_n=0$ *et* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *bornée* $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\lambda_n u_n=0$
5) $\lim_{n\to\infty} u_n=0$ *et* $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *bornée* $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\lambda_n u_n=0$
6) $\lim_{n\to\infty} u_n=\ell$ *et* $\lim_{n\to\infty} \lambda_n=\lambda \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\lambda_n u_n=\lambda\ell$.

Preuve : 1) Découle de la deuxième inégalité triangulaire :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ \ |\mathcal{N}(u_n)-\mathcal{N}(\ell)|\le\mathcal{N}(u_n-\ell).$$

2) Immédiat.

3) Soit $\varepsilon>0$. Il existe n_1, $n_2\in\mathbb{N}$ tels que :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\qquad n\ge n_1\Longrightarrow\mathcal{N}(u_n-\ell)\le\frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\qquad n\ge n_2\Longrightarrow\mathcal{N}(v_n-\ell')\le\frac{\varepsilon}{2}.$$

En notant $n_0=\max(n_1,n_2)$, on a alors :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \ n\ge n_0\Longrightarrow\mathcal{N}(u_n+v_n-(\ell+\ell'))\le\mathcal{N}(u_n-\ell)+\mathcal{N}(v_n-\ell')\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Donc $\lim_{n\to\infty}(u_n+v_n)=\ell+\ell'$.

4) Il existe $M>0$ tel que : $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{N}(u_n)\le M$. Soit $\varepsilon>0$, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que:

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \ n\ge n_0\Longrightarrow|\lambda_n|\le\frac{\varepsilon}{M+1}.$$

Alors

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ \ n\ge n_0\Longrightarrow\mathcal{N}(\lambda_n u_n)=|\lambda_n|\mathcal{N}(u_n)\le\frac{\varepsilon}{M+1}M\le\varepsilon$$

et donc $\lim_{n\to\infty}\lambda_n u_n=0$.

5) Preuve analogue à celle de 4).

6) Notons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\alpha_n=\lambda_n-\lambda$ et $v_n=u_n-\ell$. On a $\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0$ et $\lim_{n\to\infty}v_n=0$. Or $\lambda_n u_n=(\lambda+\alpha_n)(\ell+v_n)=\lambda\ell+\lambda v_n+\alpha_n u_n$ et d'après 5) $\lim_{n\to\infty}\lambda v_n=0$ et d'après 4) $\lim_{n\to\infty}\alpha_n u_n=0$. On en déduit que $\lim_{n\to\infty}\lambda_n u_n=\lambda\ell$. $\square$

Proposition 1.6.4 ***Caractérisation de l'adhérence en terme de suites.***
Soit $(E,\mathcal{N})$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E. Soit $x\in E$. Pour que $x\in\bar{A}$, il faut et il suffit qu'il existe une suite d'éléments de A convergeant vers x.

Preuve : 1) Supposons que $x\in\bar{A}$. D'après la proposition **??**, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $B(x,\frac{1}{n})\cap A\ne\emptyset$. Il existe donc une suite (a_n) d'éléments de A telle que $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $\ \mathcal{N}(a_n-x)<\frac{1}{n}$, donc convergeant vers x.

2) Réciproquement, supposons qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite d'éléments de A convergeant vers x. Soit $r>0$. Il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que : $(n\ge n_0\Longrightarrow\mathcal{N}(a_n-x)\le\frac{r}{2}<r$. Donc $B(x,r)\cap A\ne\emptyset$. La proposition **??** permet de conclure. $\square$

Corollaire 1.6.1 *Une partie A d'un espace vectoriel normé est fermée si et seulement si toute suite à termes dans A convergeant dans E converge dans A.*

1.6.3 Valeurs d'adhérence d'une suite

Définition 1.6.1 *1) On appelle extractrice toute application $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante.*
2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans un espace vectoriel normé E. On appelle suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ où σ est une extractrice.

Remarque.
1) Pour toute extractrice σ, on a : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \sigma(n) \geq n$.
2) Si σ, ρ sont des extractrices, alors $\sigma \circ \rho$ est aussi une extractrice. Donc toute suite extraite d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est elle–même extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 1.6.5 *Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E converge vers un élément ℓ de E, alors toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ.*

Preuve : Supposons que $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$. Soit σ une extractrice. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad n \geq n_0 \Longrightarrow \mathcal{N}(u_n - \ell) \leq \varepsilon.$$

On a alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad n \geq n_0 \Longrightarrow \sigma(n) \geq \sigma(n_0) \geq n_0 \implies \mathcal{N}(u_{\sigma(n)} - \ell) \leq \varepsilon.$$

Donc $\lim_{n\to\infty} u_{\sigma(n)} = \ell$. □

textitRemarque. : La contraposée de cette proposition permet de montrer que certaines suites divergent. Par exemple la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge puisque les deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers deux limites différentes.

Exercice : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans un espace vectoriel normé. Pour que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, il faut et il suffit que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes les deux vers ℓ.

Définition 1.6.2 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans un espace vectoriel normé E et soit $a \in E$.*
On dit que a est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers a.

Remarque. : Toute suite ayant au moins deux valeurs d'adhérences distinctes est divergente.

Exercice : 1) Toute suite bornée admet une valeur d'adhérence.
2) Soit E un espace vectoriel muni de deux normes équivalentes $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'élément de E.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers ℓ pour $\mathcal{N}_1$ si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers ℓ pour $\mathcal{N}_2$.

1.7 Limites et continuité

Définition 1.7.1 *Soient $(E_1, \mathcal{N}_1)$ et $(E_2, \mathcal{N}_2)$ deux espaces vectoriels normés, soit $A \subset E_1$, soit $f : A \longrightarrow E_2$ une application, soit $a \in E_1$ et soit $b \in E_2$. On dit que f a pour limite b au point a, si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de point de A convergeant dans $(E_1, \mathcal{N}_1)$ vers a, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(E_2, \mathcal{N}_2)$ vers b.*

On remarquera que si f a pour limite b au point a, alors cette limite est unique d'après la proposition **??** et $b \in \overline{f(A)}$ d'après la proposition **??**. On note

$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

Proposition 1.7.1 *Soient $(E_1,\mathcal{N}_1)$ et $(E_2,\mathcal{N}_2)$ deux espaces vectoriels normés, soit $A \subset E_1$, soit $f : A \longrightarrow E_2$ une application, soit $a \in E_1$ et soit $b \in E_2$. Alors f admet b comme limite en a si, et seulement si,*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \eta > 0; \;\; \forall\, x \in A \quad d_{\mathcal{N}_1}(x,a) < \eta \implies d_{\mathcal{N}_2}(f(x),b) < \varepsilon.$$

Preuve : La condition est suffisante, car si elle est vérifiée, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de point de A convergeant dans $(E_1,\mathcal{N}_1)$ vers a. Si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe d'une part un $\eta > 0$ satisfaisant la condition, d'autre part un entier n_0 tel que

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \Longrightarrow d_{\mathcal{N}_1}(u_n,a) < \eta$$

de sorte que

$$n \geq n_0 \implies d_{\mathcal{N}_2}(f(u_n),b) < \varepsilon$$

ce qui montre que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(E_2,\mathcal{N}_2)$ vers b.

La condition est nécessaire : supposons qu'elle ne soit pas vérifiée. Sa négation s'écrit

$$\exists\, \varepsilon > 0 \;\; \forall\, \eta > 0; \; \exists\, x \in A \;\; d_{\mathcal{N}_1}(x,a) < \eta) \;; \;\; d_{\mathcal{N}_2}(f(x),b) \geq \varepsilon.$$

Soit ε_0 vérifiant cette propriété; choisissons arbitrairement $x_0 \in A$, puis, pour chaque entier $n > 0$, en appliquant la propriété à $\eta = \frac{1}{n}$, on obtient un $x_n \in A$ vérifiant $d_{\mathcal{N}_1}(x_n,a) < \frac{1}{n}$ et $d_{\mathcal{N}_2}(f(x_n),b) \geq \varepsilon_0$. Ceci donne une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A convergeant vers a et telle que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers b. $\square$

Définition 1.7.2 *Soient $(E_1,\mathcal{N}_1)$ et $(E_2,\mathcal{N}_2)$ deux espaces vectoriels normés, soit $A \subset E_1$ et soit $f : A \longrightarrow E_2$ une application.*
1) Si $a \in A$, on dit que f est continue au point a si f admet $f(a)$ pour limite au point a.
2) On dit que f est continue si elle est continue en tout point de A.

Remarque. : Soient $(E_1,\mathcal{N}_1)$ et $(E_2,\mathcal{N}_2)$ deux espaces vectoriels normés, soit $A \subset E_1$ et soit $f : A \longrightarrow E_2$ une application.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) f continue en $a \in A$.

ii) Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de point de A qui converge vers a dans $(E_1,\mathcal{N}_1)$, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$ dans $(E_2,\mathcal{N}_2)$.

iii)

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \eta > 0 \; \forall\, x \in A \text{ tel que } d_{\mathcal{N}_1}(x,a) < \eta \implies d_{\mathcal{N}_2}(f(x),f(a)) < \varepsilon.$$

Il résulte également des définitions qu'une application continue transforme les suites convergentes en suites convergentes.

Exemples. L'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0$$

n'est pas continue au point $(0,0)$ puisque la suite $(\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ converge vers $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ alors que $f(\frac{1}{n},\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$.

- Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et soit x_0 un point arbitraire fixé dans $[a,b]$.

Dans l'espace normé $(\mathcal{C}([a,b],K), \|\cdot\|_\infty)$, considérons l'application $v_{x_0} : \mathcal{C}([a,b],K) \longrightarrow K$ définie par $v_{x_0}(f) = f(x_0)$. Comme pour $f,g \in \mathcal{C}([a,b],K)$

$$|v_{x_0}(f) - v_{x_0}(g)| \leq \|f-g\|_\infty$$

on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$\|f-g\|_\infty < \varepsilon \Longrightarrow |v_{x_0}(f) - v_{x_0}(g)| < \varepsilon$$

ce qui montre que v_{x_0} est une application continue.

- Plaçons cette fois sur l'espace normé $(\mathcal{C}([a,b],K), \|\cdot\|_1)$. Dans cette situation v_{x_0} n'est plus continue: on définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} \left(\frac{x-a}{x_0-a}\right)^n & \text{si} \quad a \leq x \leq x_0 \\ \left(\frac{b-x}{b-x_0}\right)^n & \text{si} \quad x_0 < x \leq b. \end{cases}$$

Les $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont continues, et cette suite converge vers la fonction nulle dans $(\mathcal{C}([a,b],K), \|\cdot\|_1)$, alors que, pour tout n, $v_{x_0}(f_n) = 1$.

Ces exemples montrent qu'il est indispensable, avant de parler de continuité d'une application, de préciser quelle est la norme utilisée.

Proposition 1.7.2 *Soient $(E_i,\mathcal{N}_i)$ avec $i = 1,2,3$ trois espaces vectoriels normés. Soit $A \subset E_1$ et soit $B \subset E_2$. Soient $f : A \longrightarrow E_2$ et soit $g : B \longrightarrow E_3$ deux applications telles que $f(A) \subset B$. Si f est continue en $a \in A$ et g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a. Si f et g sont continues alors $g \circ f$ est continue.*

Preuve : Evidente. □

Proposition 1.7.3 *Soient $(E_i,\mathcal{N}_i)$ avec $i = 1,2$ deux espaces vectoriels normés. Soit $A \subset E_1$. Soient $f : A \longrightarrow E_2$ et soit $g : A \longrightarrow E_2$ deux applications continues en un point $a \in E_1$. Alors pour tous $\lambda, \mu \in K$, l'application $\lambda f + \mu g$ est continue en a.*

Preuve : Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de A qui converge vers a, les suites $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $f(a)$ et $g(a)$, et donc $(\lambda f(x_n) + \mu g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda f(a) + \mu g(a)$ d'après la proposition **??**. □

1.8 Ouvert relatif et fermé relatif

Soit $(E,\mathcal{N})$ un espace vectoriel normé et soit A une partie de E.

On dira que $C \subset A$ est un ouvert de A si il existe un ouvert O de E tel que $C = O \cap A$.

On dira que $C \subset A$ est un fermé de A si il existe un fermé F de E tel que $C = F \cap A$.

Il est facile de vérifier que :

C est un ouvert de A si, et seulement si pour tout $x \in C$ il existe un $r > 0$ tel que $B(x,r) \cap A \subset C$.

C est un fermé si pour toute suite de points C convergente converge dans C.

Proposition 1.8.1 *Soient $(E_i,\mathcal{N}_i)$ avec $i = 1,2$ deux espaces vectoriels normés. Soit $A \subset E_1$. Soit $f : A \longrightarrow E_2$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
$i)$ f est continue sur A.
$ii)$ Pour tout ouvert O de E_2, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de A.
$iii)$ Pour tout fermé F de E_2, $f^{-1}(F)$ est un fermé de A.

Preuve : $i) \Longrightarrow ii)$. Soit O un ouvert de E_2. Soit $x \in f^{-1}(O)$. Il existe un $r > 0$ tel que $B(f(x),r) \subset O$. Puisque f est continue en x, il existe un $\eta > 0$ tel que

$$\forall\, y \in A, \quad y \in B(x,\eta) \Longrightarrow f(x) \in B(f(x),r) \subset O.$$

Ceci donne que $B(x,\eta) \cap A \subset f^{-1}(O)$.

$ii) \Longleftrightarrow iii)$. Ceci se déduit par passage au complémentaire.

$ii) \Longrightarrow i)$. Soit $x \in A$ et soit $r > 0$. En exprimant le fait que $f^{-1}(B(f(x),r)$ est un ouvert de A, on obtient la continuité en x. □

Proposition 1.8.2 *Soit $(E,\mathcal{N})$ un espace vectoriel normé et soit A une partie non vide de E. Alors l'application $d_A : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$d_A(x) = d_{\mathcal{N}}(x, A) = \inf_{y\in A} d_{\mathcal{N}}(x, y)$$

vérifie

$$\forall\, x, y \in E \ \ |d_A(x) - d_A(y)| \leq d_{\mathcal{N}}(x, y)$$

et

$$\overline{A} = \{x \in E : d_{\mathcal{N}}(x, A) = 0\}.$$

En particulier d_A est continue.

Preuve : Si $x \in E$, $d_{\mathcal{N}}(x, A)$ est bien défini et $d_{\mathcal{N}}(x, A) \geq 0$.

Soient $x, y \in E$. On a pour tout $z \in A$, $d_{\mathcal{N}}(x, A) \leq d_{\mathcal{N}}(x, z) \leq d_{\mathcal{N}}(x, y) + d_{\mathcal{N}}(y, z)$ et donc $d_{\mathcal{N}}(x, A) \leq d_{\mathcal{N}}(x, y)+d_{\mathcal{N}}(y, A)$. En permutant x et y dans cette relation, on obtient l'inégalité recherchée. La continuité de d_A en résulte immédiatement.

La dernière égalité est claire. □

1.9 Application uniformément continues, applications Lipschitziennes

Définition 1.9.1 *Soient $(E_i,\mathcal{N}_i)$ avec $i = 1, 2$ deux espaces vectoriels normés. Soit $A \subset E_1$. Soit $f : A \longrightarrow E_2$ une application.*
i) On dit que f est uniformément continue sur A si

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \eta > 0\ \forall\, x,\ x' \in A\ \ d_{\mathcal{N}_1}(x, x') < \eta \Longrightarrow d_{\mathcal{N}_2}(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

ii) Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est k–Lipschitzienne sur A si

$$\forall\, x,\ x' \in A \quad d_{\mathcal{N}_2}(f(x), f(x')) \leq k d_{\mathcal{N}_1}(x, x').$$

ii) On dit que f est Lipschitzienne s'il existe un réel $k > 0$ tel que f soit k–Lipschitzienne.

Contrairement à la propriété "f est continue", qui peut être vérifiée point par point, les propriétés "f est uniformément continue" et f "est k–Lipschitzienne" concernent le comportement global de l'application sur A.

Il est facile de vérifier que si $f : A \longrightarrow E_2$ une application lipschitzienne sur A alors elle est uniformément continue sur A donc est continue sur A.

A l'occasion des exemples suivants, nous allons voir que les réciproques sont fausses en général.

Exemple 1 : L'application $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$. En effet, s'il existait $\eta > 0$ tel que $|x^2 - x'^2| < 1$ dès que $|x - x'| < \eta$, on aurait en prenant $\alpha = \frac{\eta}{2}$

$$\forall\ \ x \in \mathbb{R} \ \ 2\alpha x + \alpha^2 < 1$$

ce qui est impossible.

Exemple 2 : L'application $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$, mais non Lipschitzienne. On a

$$\forall\, x, x' \in \mathbb{R}_+ \ \ |\sqrt{x} - \sqrt{x'}| \leq \sqrt{|x - x'|}.$$

Mais l'existence d'un $k > 0$ tel que

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x'}| \leq k|x - x'|$$

pour tout couple (x, x') entraînerait en prenant $x' = 0$

$$\forall \ x > 0 \ \ \frac{1}{\sqrt{x}} \leq k$$

ce qui est impossible.

Exemple 3 : Soit $I \subset \mathbb{R}$, toute application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable et de dérivée bornée est Lipschitzienne.

Définition 1.9.2 *Soient $(E_i, \mathcal{N}_i)$ avec $i = 1, 2$ deux espaces vectoriels normés. Soit $A \subset E_1$ et soit $B \subset E_2$.*
i) Un homéomorphisme de A vers B est une application $f : A \longrightarrow B$ continue, bijective et dont l'application réciproque $f^{-1} : B \longrightarrow A$ est continue.
ii) On dit que A et B sont homéomorphes s'il existe un homéomorphisme entre A et B.

1.9.1 Applications linéaires continues

La continuité des applications linéaires fait l'objet d'une étude particulière, justifiée par la proposition suivante :

Proposition 1.9.1 *Soient $(E_i, \mathcal{N}_i)$ avec $i = 1, 2$ deux espaces vectoriels normés, et soit $u : E_1 \longrightarrow E_2$ une application linéaire. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1) u est continue en un point $x_0 \in E_1$.
2) u est continue en 0_{E_1}.
3) u est continue.
4) $u(B_f(O_{E_1}, 1))$ est borné dans E_2.
5) $\{\frac{\mathcal{N}_2(u(x))}{\mathcal{N}_1(x)} : x \in E_1 \setminus 0_{E_1}\}$ est majoré dans $\mathbb{R}$.
6) u est Lipschitzienne.
7) u est uniformément continue sur E_1.

Preuve : On va montrer que

$$1) \Longrightarrow 2) \Longrightarrow 5) \Longrightarrow 4) \Longrightarrow 6) \Longrightarrow 7) \Longrightarrow 3) \Longrightarrow 1).$$

1) $\Longrightarrow$ 2). Si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de E_1 convergeant vers 0_{E_1}, la suite $(x_0 + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0, et donc $(u(x_0 + y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $u(x_0)$. Mais $(u(x_0 + y_n) = u(x_0) + u(y_n)$. Par conséquent $(u(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0_{E_2}.
2) $\Longrightarrow$ 5). Il existe un $\eta > 0$ tel que $\mathcal{N}_2(u(y)) < 1$ dès que $\mathcal{N}_1(y) < \eta$. Or si $x \in E_1 \setminus \{0_{E_1}\}$ $y = \frac{\eta}{2N_1(x)}x$ vérifie cette condition de sorte que

$$\frac{\mathcal{N}_2(u(x))}{\mathcal{N}_1(x)} < \frac{2}{\eta}.$$

5) $\Longrightarrow$ 4). S'il existe k tel que

$$\frac{\mathcal{N}_2(u(x))}{\mathcal{N}_1(x)} \leq k$$

pour tout $x \neq 0_{E_1}$, on a pour tout $x \in B(0_{E_1}, 1)$

$$\mathcal{N}_2(u(x)) \leq kN_1(x) \leq k.$$

4) $\Longrightarrow$ 7). Si $\mathcal{N}_2(u(x)) \leq k$ dès que $\mathcal{N}_1(x) \leq 1$, on a pour tout y, $y_0 \in E_1$, $y \neq y_0$

$$k \geq \mathcal{N}_2\left(u(\frac{1}{\mathcal{N}_1(y - y_0)}(y - y_0))\right) = \frac{\mathcal{N}_2(u(y) - u(y_0))}{\mathcal{N}_1(y - y_0)}$$

qui montre que u est k–Lipschitzienne.

Les autres implications sont claires. □

Insistons, en particulier, sur les équivalences

u est continue $\Longleftrightarrow$ u est uniformément continue $\Longleftrightarrow$ u est Lipschitzienne pour les applications linéaires.

textitRemarque. : Soient $(E_1, \mathcal{N}_1)$ et $(E_1, \mathcal{N}_2)$ deux espace vectoriel normé. On notera $\mathcal{L}_c(E_1, E_2)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de $(E_1, \mathcal{N}_1)$ vers $(E_2, \mathcal{N}_2)$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E_1, E_2)$. L'inclusion est en général stricte.

Pour tout $u \in \mathcal{L}_c(E_1, E_2)$, on a

$$|||u||| = \sup_{\mathcal{N}_1(x) \leq 1} \mathcal{N}_2(u(x)) = \sup_{\mathcal{N}_1(x)=1} \mathcal{N}_2(u(x)) = \sup_{x \neq 0_{E_1}} \frac{\mathcal{N}_2(u(x))}{\mathcal{N}_1(x)}.$$

$||| \cdot |||$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E_1, E_2)$.

Exercice Etudier la continuité pour les trois normes usuelles de $\mathbb{R}[X]$ de l'application linéaire $\phi : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\phi(P) = P(1).$$

1.10 Compacité dans un espace vectoriel normé

Définition 1.10.1 *Soit $(E, \mathcal{N})$ un espace vectoriel normé et soit $A \subset E$. On dit que A est un compact de $(E, \mathcal{N})$ si et seulement si toute suite de points de A admet au moins une valeur d'adhérence dans A.*

Exemple : 1) Toute partie fini de E est un compact.

2) Tout intervalle fermé borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$ est compact. C'est une conséquence du théorème de Bolzano-Weierstrass: Toute suite bornée de $\mathbb{R}$ admet une valeur d'adhérence.

3) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente dans $(E, \mathcal{N})$ vers ℓ. Alors $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est une partie compacte de E.

Notons $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$; et soit $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de points de A.

1) S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\{p \in \mathbb{N} : u_p = x_n\}$ soit infini, alors x_n est une valeur d'adhérence de $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$.

2) De même, si $\{p \in \mathbb{N} : u_p = \ell\}$ soit infini, alors ℓ est une valeur d'adhérence de $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$.

3) Supposons que $\{p \in \mathbb{N} : u_p = \ell\}$ soit fini et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\{p \in \mathbb{N} : u_p = x_n\}$ soit fini.

Puisque $\{p \in \mathbb{N} : u_p = x_0\}$ et $\{p \in \mathbb{N} : u_p = \ell\}$ sont fini, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall\, p \geq p_0, \;\; (u_p \neq \ell \;\text{ et }\; u_p \neq x_0).$$

Puisque $\{p \in \mathbb{N} : u_p = x_1\}$ est fini, il existe $p_1 > p_0$ tel que : $u_p \neq x_1$.

En réitérant, on construit une suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers naturels strictement croissante telle que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\, \forall\, p \geq p_k, \;\; u_p \notin \{\ell, x_0, \ldots, x_k\}.$$

Montrons, maintenant que la suite $(u_{p_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall\, n \geq n_0, \;\; d_{\mathcal{N}}(x_n, \ell) \leq \varepsilon.$$

Soit $k \geq n_0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_{p_k} = x_n$. Par définition de p_k, on a $n \geq k + 1 \geq n_0$, d'où

$$d_{\mathcal{N}}(u_{p_k}, \ell) = d_{\mathcal{N}}(x_n, \ell) \leq \varepsilon.$$

Ceci permet de conclure.

Proposition 1.10.1 *Soit $(E, \mathcal{N})$ un espace vectoriel normé. Toute partie compacte de E est fermée et bornée dans E.*

Preuve : Soit A une partie compacte de E.

1) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de A convergeant vers un point $x \in E$. Puisque A est compacte, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence dans A qui est nécessairement égale à x et donc $x \in A$. A est donc fermée.

2) Raisonnons par l'absurde et supposons que A est non bornée; c'est à dire :

$$\forall\, c \in \mathbb{R}_+, \exists\, x \in A,\ \ \mathcal{N}(x) \geq c.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in A$ tel que $\mathcal{N}(x_n) \geq n$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de valeur d'adhérence ni dans A ni dans E. Contradiction.

Ainsi A est bornée. □

La réciproque est fausse comme l'indique le contre-exemple suivant :

Dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{C}), ||\cdot||_\infty)$ la sphère unité n'est pas compacte. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$f_n(t) = e^{2in\pi t}.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est clairement dans la sphère unité et la formule $|e^{i\alpha}-e^{i\beta}| = 2|\sin\frac{\beta-\alpha}{2}|$ donne $||f_q-f_p||_\infty = 2$ et donc aucune suite extraite de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger.

Proposition 1.10.2 *Soient $(E,\mathcal{N})$ un espace vectoriel normé A une partie compacte de E. Soit $B \subset A$, une partie fermée dans E. Alors B est un compact de $(E,\mathcal{N})$.*

Preuve : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de B. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence x dans A et puisque B est fermé et que x est limite de points de B, $x \in B$. B est donc compact. □

Proposition 1.10.3 *Soient $(E_1,\mathcal{N}_1)$ et $(E_2,\mathcal{N}_2)$ deux espace vectoriel normé. Pour toutes parties compactes A dans $(E_1,\mathcal{N}_1)$ et B dans $(E_2,\mathcal{N}_2)$, $A \times B$ est une partie compacte de $E_1 \times E_2$ muni de l'une des trois normes usuelles équivalentes.*

Preuve : Soit $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $A \times B$.

Puisque A est compact, il existe une extractrice σ et un élément $x \in A$ tels que $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

Puisque B est compact, la suite $(y_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence $y \in B$; il existe une extractrice ρ tel que la suite $(y_{\rho\circ\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y. Comme la suite $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, la suite extraite $(x_{\rho\circ\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers x. Finalement la suite $(x_{\rho\circ\sigma(n)}, y_{\rho\circ\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers (x,y). Donc $A\times B$ est un compact. □

Proposition 1.10.4 *Soient $(E_1,\mathcal{N}_1)$ et $(E_2,\mathcal{N}_2)$ deux espace vectoriel normé. Soit $A \subset E_1$ et soit $f : A \longrightarrow E_2$ une application continue. Si A est compact alors $f(A)$ est compact.*

Preuve : Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $f(A)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in A$ tel que $f(x_n) = y_n$.

Puisque A est compact, il existe une extractrice σ et un élément $x \in A$ tels que $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x. Puisque f est continue la suite $(y_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x) \in f(A)$. Donc $f(A)$ est compact. □

Corollaire 1.10.1 *1) Soit $(E,\mathcal{N})$ un espace vectoriel normé et soit $A \subset E$. Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une application. Si A est compact et f continue, alors f est bornée et atteint ses bornes.*
2) Soient $(E_1,\mathcal{N}_1)$ et $(E_2,\mathcal{N}_2)$ deux espace vectoriel normé. Soit $A \subset E_1$ et soit $f : A \longrightarrow E_2$ une application. Si A est compact et f continue alors l'application $\mathcal{N}_2(f) : A \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $x \mapsto \mathcal{N}_2(f(x))$ est bornée et atteint ses bornes.

Preuve : $f(A)$ est un fermé borné de $\mathbb{R}$. □

Théorème 1.10.1 ***Théorème de Heine*** *Soient $(E_1,\mathcal{N}_1)$ et $(E_2,\mathcal{N}_2)$ deux espace vectoriel normé et soit $A \subset E$. Soit $f : A \longrightarrow E_2$ une application. Si A est compact et si f est continue, alors f est uniformément continue.*

Preuve : Supposons A compacte et f continue.

Raisonnons par absurde; supposons f non uniformément continue, c'est à dire :

$$\exists\, \varepsilon > 0,\ \forall\, \eta > 0,\ \exists\, (x,x') \in A^2,\ \ (d_{\mathcal{N}_1}(x,x') \leq \eta \text{ et } \ d_{\mathcal{N}_2}(f(x),f(x')) > \varepsilon)\,.$$

En particulier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe $(x_n,x'_n) \in A^2$ tel que :

$$d_{\mathcal{N}_1}(x_n,x'_n) \leq \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad d_{\mathcal{N}_2}(f(x_n),f(x'_n)) > \varepsilon.$$

Puisque A est compact, A^2 est compact et donc la suite $(x_n,x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite extraite $(x_{\sigma(n)},x'_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $(x,x') \in A^2$. Comme, pour tout n de $\mathbb{N}^*$

$$d_{\mathcal{N}_2}(x,x') \leq d_{\mathcal{N}_1}(x,x_{\sigma(n)}) + d_{\mathcal{N}_1}(x_{\sigma(n)},x'_{\sigma(n)}) + d_{\mathcal{N}_1}(x'_{\sigma(n)},x'),$$

on déduit que $d_{\mathcal{N}_1}(x,x') = 0$ et donc $x = x'$.

Mais, puisque f est continue $d_{\mathcal{N}_2}(f(x_{\sigma(n)}),f(x'_{\sigma(n)}))$ converge vers 0 ce qui est en contradiction avec le fait que pour tout n de $\mathbb{N}^*$

$$d_{\mathcal{N}_2}(f(x_{\sigma(n)}),f(x'_{\sigma(n)})) > \varepsilon.$$

□

1.11 Complétude

Définition 1.11.1 *Soit (E,d) un espace métrique. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de E est une suite de Cauchy si*

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \ \textit{ tel que } \forall\, m,n \geq n_0 \ \textit{ on a } \ d(u_m,u_n) < \varepsilon.$$

Proposition 1.11.1 *Soit (E,d) un espace métrique. Toute suite convergente de E est de Cauchy.*

Preuve : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de E convergeant vers a. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, n \geq n_0,\ \ d(u_n,a) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors $d(u_n,u_m) \leq \varepsilon$ dès que m, $n \geq n_0$. □

Définition 1.11.2 *Soit (E,d) un espace métrique et soit $A \subset E$.*
i) On dit que (E,d) est complet si toute suite de Cauchy de E est convergente dans E.
ii) On dit que A est une partie complète si toute suite de Cauchy de points de A converge dans A.
Un espace vectoriel normé $(E,\mathcal{N})$ complet est appelé espace de Banach.
$(\mathbb{R},|\cdot|)$ est un espace de Banach.

Proposition 1.11.2 *Soit (E,d) un espace métrique. Si une suite de Cauchy dans E admet une valeur d'adhérence a, alors elle converge vers a.*

Preuve : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de points de E admettant a comme valeur d'adhérence. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathcal{N}$ tel que $d_{\mathcal{N}}(u_n,u_m) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ dès que $n,m \geq n_0$, d'autre part, il existe un entier $p \geq n_0$ tel que $d_{\mathcal{N}}(u_p,a) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On a donc $d_{\mathcal{N}}(u_n,a) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. □

Corollaire 1.11.1 *Toute partie compacte d'un espace vectoriel normé est complète.*

Proposition 1.11.3 *Soient $(E_1,\mathcal{N}_1)$ et $(E_2,\mathcal{N}_2)$ deux espace vectoriel normé. Soit $A \subset E_1$ une partie complète de E_1 et soit $B \subset E_2$ une partie complète de E_2. Alors $A \times B$ est une partie complète de $E_1 \times E_2$ muni de l'une des trois normes produit usuelles.*

Preuve : Evidente. □

K^n muni de l'une des trois normes produit usuelles est un espace de Banach.

Proposition 1.11.4 *Soit $(E,\mathcal{N})$ un espace vectoriel normé. Soit $A \subset E$.*
1) Si A est une partie complète alors A est une partie fermée.
2) Si $(E,\mathcal{N})$ est un espace de Banach, et si A est fermée alors A est complète.

Preuve : Evidente. □

Proposition 1.11.5 *Soient $(E_1,\mathcal{N}_1)$ et $(E_2,\mathcal{N}_2)$ deux espace vectoriel normés. Alors si $(E_2,\mathcal{N}_2)$ est un espace de Banach alors $\mathcal{L}_c(E_1,E_2)$ est un espace de Banach.*

Preuve : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de points de $\mathcal{L}_c(E_1,E_2)$, on a pour tout $x \in E_1$ et tout couple d'entier (n,m)

$$\mathcal{N}_2(u_m(x) - u_n(x)) \le |||u_n - u_m|||\mathcal{N}_1(x)$$

et par conséquent, la suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E_2; elle converge vers $u(x)$ et définit ainsi une application $u : E_1 \longrightarrow E_2$ qui est clairement linéaire.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n,\ m \ge n_0 \Longrightarrow |||u_n - u_m||| \le \varepsilon.$$

On en déduit d'une part que

$$\forall\, x \in E_1,\ \ \mathcal{N}_2(u(x) - u_{n_0}(x)) \le \mathcal{N}_1(x)\varepsilon$$

d'où

$$\forall\, x \in E_1 \diagdown \{0_{E_1}\},\ \ \frac{\mathcal{N}_2(u(x))}{\mathcal{N}_1(x)} \le |||u_{n_0}||| + \varepsilon$$

qui montre la continuité de u, d'autre part

$$\forall\, x \in E_1\ \forall\, n \ge n_0,\ \ \mathcal{N}_2(u(x) - u_n(x)) \le \mathcal{N}_1(x)\varepsilon$$

d'où

$$\forall\, n \ge n_0,\ \ |||u - u_n||| \le \varepsilon$$

qui montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers u dans $\mathcal{L}_c(E_1,E_2)$. □

Théorème 1.11.1 ***Théorème du point fixe***

Soit $(E,\mathcal{N})$ un espace vectoriel normé. Soit $A \subset E$ et soit $f : A \longrightarrow A$. Si A est complète et f k-Lipschitzienne avec $0 \le k < 1$, alors f admet un point fixe et un seul, et, pour tout $a \in A$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et $\forall\, n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers le point fixe.

Preuve : 1) Si $x, y \in A$ sont deux points fixes de f. On a

$$d_{\mathcal{N}}(x,y) = d_{\mathcal{N}}(f(x), f(y)) \le k d_{\mathcal{N}}(x,y)$$

et donc $x = y$.

2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie dans l'énoncé du théorème. Nous allons montrer que cette suite est du Cauchy. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d_{\mathcal{N}}(u_n, u_{n+1}) = d_{\mathcal{N}}(f(u_{n-1}), f(u_n)) \le k d_{\mathcal{N}}(u_{n-1}, u_n),$$

d'où, par récurrence : $d_{\mathcal{N}}(u_n, u_{n+1}) \leq k^n d(u_1, u_0)$.

Puis, pour tout $(p, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{N}}(u_p, u_{p+r}) &\leq \sum_{i=0}^{r-1} d_{\mathcal{N}}(u_{p+i}, u_{p+i-1}) \leq \sum_{i=0}^{r-1} k^{p+i} d_{\mathcal{N}}(u_1, u_0) \\ &= k^p \frac{1-k^r}{1-k} d_{\mathcal{N}}(u_1, u_0) \leq k^p \frac{d_{\mathcal{N}}(u_1, u_0)}{1-k}. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, puisque $\lim_{p \to +\infty} k^p \frac{d_{\mathcal{N}}(u_1,u_0)}{1-k} = 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, p \in \mathbb{N},\;\; p \geq n_0 \Longrightarrow k^p \frac{d_{\mathcal{N}}(u_1, u_0)}{1-k} \leq \varepsilon.$$

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Puisque A est complète, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ dans A. Puisque f est continue, on a nécessairement $f(\ell) = \ell$. □

1.12 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Contrairement aux espaces vectoriels normés de dimension infinie, les espaces vectoriels normés de dimension finie possèdent des propriétés remarquables que nous allons énumérer le long de cette section.

Théorème 1.12.1 *Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les parties fermées et bornées de $\mathbb{R}$.*

Preuve : On a vu que toute partie compact d'un espace vectoriel normé est fermée bornée.

Réciproquement, soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie bornée, toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de point de A admet une valeur d'adhérence a d'après le théorème de Bolzano–Weierstrass. Si de plus A est fermée, on a $a \in A$ et A est donc compact. □

Théorème 1.12.2 *Les compacts de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ sont les parties fermées et bornées. ($\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$) est supposé muni de l'une des trois normes usuelles, par exemple, la norme $||\cdot||_\infty$.*

Preuve : *a*) Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}^n$, il existe un réel $r > 0$ tel que $A \subset [-r, r]^n$. Le segment $[-r, r]$ est un compact de $\mathbb{R}$ et donc le pavé $[-r, r]^n$ est un compact de $\mathbb{R}^n$. Si de plus, A est fermée dans $\mathbb{R}^n$ donc dans $[-r, r]^n$ qui est compacte et donc A est compacte.

b) $\mathbb{C}^n$ s'identifie à $\mathbb{R}^{2n}$. □

Théorème 1.12.3 *Toutes les normes sur un K–espace vectoriel normé de dimension finie sont équivalentes.*

Preuve : Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base quelconque de E. Pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ dans E, on pose

$$\mathcal{N}_\infty(x) = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

$\mathcal{N}_\infty$ est une norme sur E.

L'équivalence des normes est une relation transitive, il suffit donc de comparer une norme quelconque $\mathcal{N}$ de E à la norme $\mathcal{N}_\infty$ pour conclure.

Soit $k = \sum_{i=1}^n \mathcal{N}(e_i) > 0$.

Pour tout vecteur x de E s'écrivant $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, on a

$$\mathcal{N}(x) \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \mathcal{N}(e_i) \leq k \mathcal{N}_\infty(x).$$

Cela prouve que l'application $\nu : K^n \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $(x_1, \ldots, x_n)$ associe $\mathcal{N}(x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i)$ est continue sur $(K^n, \mathcal{N}_\infty)$; elle est en fait k–Lipschitzienne.

Comme la sphère unité S de $(K^n, \mathcal{N}_\infty)$ est compacte, il existe α et γ tels que

$$\alpha = \inf_{x \in S} \nu(x) \quad \text{et} \quad \beta = \sup_{x \in S} \nu(x).$$

On en déduit que, pour tout $x \in E$,

$$\alpha \mathcal{N}_\infty(x) \leq \mathcal{N}(x) \leq \beta \mathcal{N}_\infty(x).$$

□

Théorème 1.12.4 *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, les parties compactes sont les parties fermées bornées.*

Preuve : Evidente. □

Proposition 1.12.1 *Soient $(E_1, \mathcal{N}_1)$ et $(E_2, \mathcal{N}_2)$ deux espace vectoriel normé. Si E_1 est de dimension finie, alors toute application linéaire $f : E_1 \longrightarrow E_2$ est continue. Ainsi $\mathcal{L}(E_1, E_2) = \mathcal{L}_c(E_1, E_2)$.*

Preuve : Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base quelconque de E_1.

Pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ de E_1,

$$\mathcal{N}_2(f(x)) \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \mathcal{N}_2(f(e_i)) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \mathcal{N}_2(f(e_i)) \right) \mathcal{N}_\infty(x) \leq C \mathcal{N}_1(x)$$

puisque $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_\infty$ sont équivalentes. On conclut que f est continue. □

Proposition 1.12.2 *Toute espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.*

Preuve : Evidente. □

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, la sphère unité est compacte, réciproquement :

Théorème 1.12.5 ***(Théorème de Riesz)***

Dans un espace vectoriel normé, la sphère unité est compacte si et seulement si l'espace est de dimension finie.

Preuve : Soit $(E, \mathcal{N})$ un espace vectoriel de dimension infinie. Nous allons montrer que sa sphère unité $S(0_E, 1)$ n'est pas compacte en construisons, point par point, une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $S(0_E, 1)$ telle que

$$\forall\, p \neq q, \;\; \mathcal{N}(u_p - u_q) \geq \frac{1}{2}.$$

Supposons déjà connue une famille $(u_1, \ldots, u_n)$ de $S(0_E, 1)$ vérifiant la propriété ci dessus.

Notons $F = vect(u_1, \ldots, u_n)$. F est de dimension finie et donc $S(0_E, 1)$ n'est pas incluse dans F.

Prenons alors un vecteur x dans $S(0_E, 1) \setminus F$, la distance $\delta = d_\mathcal{N}(x, F)$ n'est pas nulle, il existe alors un vecteur y de F tel que $\delta \leq d_\mathcal{N}(x, y) < \frac{3}{2}\delta$.

Choisissons comme point suivant $u_{n+1} = \frac{x-y}{\mathcal{N}(x-y)} \in S(0_E, 1)$.

Pour $k \in 1, \ldots, n$, la différence $u_{n+1} - u_k = \frac{x-z}{d_\mathcal{N}(x,y)}$ avec $z = y + d_\mathcal{N}(x, y) u_k \in F$ et $d_n(x, z) \geq \delta$.

Ainsi $\mathcal{N}(u_{n+1} - u_k) \geq \frac{2}{3} \geq \frac{1}{2}$, ce qui établit la construction de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. □

1.13 Espaces préhilbertiens

Définition 1.13.1 *a) Soit E un $\mathbb{R}$–espace vertoriel, on appelle produit scalaire sue E toute application $\phi : E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que:*
i) $\forall\,(x,y) \in E^2$, $\phi(x,y) = \phi(y,x)$.(ϕ est dite symétrique).
ii) $\forall\,\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall\,(x,y,z) \in E^3, \phi(x,\lambda y+z) = \lambda\phi(x,y) + \phi(x,z)$.
iii) $\forall\,x \in E$, $\phi(x,x) \geq 0$. (ϕ est positive.)
iv) $\forall\,x \in E$, $\phi(x,x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$. ($\phi$ est définie positive).
b) Si ϕ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$–espace vertoriel E, l'application $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \phi(x,x)$ est appelée la forme quadratique associée à ϕ.
c) On appelle espace préhilbertien réel tout couple (E,ϕ) où E est un $\mathbb{R}$–espace vertoriel et ϕ un produit scalaire sur E.

Exemples :

1) **Produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$**

Soient $x = (x_1,\dots,x_n)$ et $y = (y_1,\dots,y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Le produit scalaire usuel de x et y est définie par

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

2) **Produit scalaire canonique sur $M_{n,m}(\mathbb{R})$**

$M_{n,m}(\mathbb{R})$ est le $\mathbb{R}$–espace vectoriel des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour tout A, B dans $M_{n,m}(\mathbb{R})$, on pose

$$< A, B >= Tr({}^t AB).$$

3) **Produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$**

Pour tout $f,g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, on pose

$$< f, g >= \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

Proposition 1.13.1 *Soit E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel et soit ϕ un produit scalaire sur E et Φ la forme quadratique associée.*
1) $\forall\,(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\forall\,(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\forall\,(\mu_1,\dots,\mu_p) \in \mathbb{R}^p$, $\forall\,(x_1,\dots,x_n) \in E^n$, $\forall\,(y_1,\dots,y_p) \in E^p$

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \sum_{i=1}^{p} \mu_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \lambda_i \mu_j \phi(x_i, y_j).$$

2) $\forall\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall\,(x,y) \in E^2$

$$\Phi(\lambda x, \mu y) = \lambda^2\Phi(x) + 2\lambda\mu\phi(x,y) + \mu^2\Phi(y).$$

3) $\forall\,\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall\,x \in E$

$$\Phi(\lambda x) = \lambda^2\Phi(x).$$

4) $\forall\,(x,y) \in E^2$

$$\Phi(x+y) + \Phi(x-y) = 2(\Phi(x) + \Phi(y)).$$

Preuve : Laissé au lecteur. □

textitRemarque. Soit E un $\mathbb{R}$–espace vectoriel et soit ϕ un produit scalaire sur E et Q la forme quadratique associée. Pour tout $(x,y) \in E^2$, on a

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)) \quad \text{et} \quad \phi(x,y) = \frac{1}{4}(Q(x+y) - Q(x-y)).$$

Ces deux formules, appelées identités de polarisation, montrent que Q détermine entièrement ϕ.

Théorème 1.13.1 ***(Inégalité de Cauchy–Schwarz)***
Soit (E,ϕ) un espace préhilbertien et soit $(x,y)\in E^2$; on a

$$|\phi(x,y)|^2 \leq \phi(x,x)\phi(y,y).$$

$$|\phi(x,y)|^2 = \phi(x,x)\phi(y,y) \Longleftrightarrow \{x,y\} \quad \textit{lié}.$$

Preuve : On a, $\forall\ \lambda\in\mathbb{R}$; $Q(x+\lambda y)\geq 0$, d'où $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $Q(y)\lambda^2+2\phi(x,y)\lambda+Q(x)\geq 0$. Ceci permet de conclure. □

Théorème 1.13.2 ***(Inégalité de Minkowski)*** *Soit E un $\mathbb{R}$–espace vertoriel et soit ϕ un produit scalaire sur E et Q la forme quadratique associée. Pour tout $(x,y)\in E^2$, on a*

$$\sqrt{Q(x+y)} \leq \sqrt{Q(x)}+\sqrt{Q(y)}.$$

$$\sqrt{Q(x+y)} = \sqrt{Q(x)}+\sqrt{Q(y)} \Longleftrightarrow \exists\ \alpha\in\mathbb{R} \textit{ tel que } y=\alpha x).$$

Preuve : Un calcul direct. □

Définition 1.13.2 *Soit (E,ϕ) un espace préhilbertien. Soit Q la forme quadratique associée. L'application $||\cdot|| : E\longrightarrow\mathbb{R}$ qui à $x\mapsto\sqrt{Q(x)}$ est une norme sur E appelée norme euclidienne associé à ϕ.*

Chapitre 2

Calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$

2.1 Définitions de base

On rappelle qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable ou différentiable en un point $a \in \mathbb{R}$ si il existe un nombre $f'(a)$ tel que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a). \tag{2.1.1}$$

Cette équation n'a pas de sens dans le cas général d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, mais peut être reformulée pour qu'il puisse être généralisée. Soit $L : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application linéaire définie par $L(h) = f'(a)h$. L'équation (**??**) est équivalente à

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-L(h)}{h} = 0. \tag{2.1.2}$$

On peut reformuler la définition de la différentiabilité de la manière suivante :

Une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en un point $a \in \mathbb{R}$ si il existe une application linéaire $L : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-L(h)}{h} = 0.$$

Sous cette forme la définition a une généralisation à la dimension supérieure:

Définition 2.1.1 *Soient U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ et f une application de U dans $\mathbb{R}^m$. On dit que f est différentiable en un point $a \in U$ s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ telle que*

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h)-f(a)-L(h)\|_2}{\|h\|_2} = 0,$$

soit

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + o(h), \quad h \in U$$

où $o(h)$ est une fonction telle que $\lim_{h\to 0} \frac{\|o(h)\|_2}{\|h\|_2} = 0$, $o(0) = 0$ et $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $\|h\|_2$ est assez petit pour que $a+h \in U$.

L'application linéaire L sera noté $Df(a)$ ou $f'(a)$ et appelée différentielle de f en a.

$f'(a) \notin \mathbb{R}^m$ mais $f'(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. On note indifféremment $L(h)$, $f'(a)h$, $f'(a)(h)$ où $Df(a)(h)$ l'image de h par $f'(a)$.

Remarque : S'il existe une application linéaire continue, qui vérifie la définition précédente, elle est unique

En effet : supposons qu'il existe deux applications $L_1, L_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ telles que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h)-f(a)-L_i(h)\|_2}{\|h\|_2} = 0 \text{ pour } i = 1, 2.$$

Si $d(h) = f(a+h) - f(a)$, alors

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\|L_1(h) - L_2(h)\|_2}{\|h\|_2} &= \lim_{h\to 0} \frac{\|L_1(h) - d(h) + d(h) - L_2(h)\|_2}{\|h\|_2} \\
&\leq \lim_{h\to 0} \frac{\|L_1(h) - d(h)\|_2}{\|h\|_2} + \lim_{h\to 0} \frac{\|d(h) - L_2(h)\|_2}{\|h\|_2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Si $x \in \mathbb{R}$, alors $tx \to 0$ quand $t \to 0$. Donc pour $x \neq 0$, on a

$$0 = \lim_{t\to 0} \frac{\|L_1(tx) - L_2(tx)\|_2}{\|tx\|_2} = \frac{\|L_1(x) - L_2(x)\|_2}{\|x\|_2}.$$

On en déduit que $L_1(x) = L_2(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}^n$. □

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xy$. Montrons que f est différentiable en $a = (a_1, a_2)$ et que $Df(a)(h_1, h_2) = a_2 h_1 + a_1 h_2$.

Soit $h = (h_1, h_2)$ et prenons $||h|| = ||h||_1 = |h_1| + |h_2|$ dans $\mathbb{R}^2$ et $||h|| = |h|$ dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
f(a+h) &= f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) = (a_1 + h_1)(a_2 + h_2) \\
&= a_1 a_2 + a_1 h_1 + a_1 h_2 + h_1 h_2 = f(a_1, a_2) + L(h) + h_1 h_2.
\end{aligned}$$

$$\frac{|h_1 h_2|}{|h_1| + |h_2|} \leq \frac{|h_1| + |h_2|}{2} = \frac{||h||}{2},$$

donc $h_1 h_2 = o(h)$.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sin(x)$. Alors $Df(a,b)(x,y) = \cos(a)x$. En effet

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{\|f(a+h, b+k) - f(a,b) - Df(a,b)(h,k)\|_2}{(h^2+k^2)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{(h,k)\to 0} \frac{|\sin(a+h) - \sin(a) - \cos(a)h|}{(h^2+k^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Puisque $\sin'(a) = \cos(a)$, on a

$$\lim_{h\to 0} \frac{|\sin(a+h) - \sin(a) - \cos(a)h|}{|h|} = 0.$$

Puisque $(h^2+k^2)^{\frac{1}{2}} \geq |h|$, on a

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{|f(a+h, b+k)) - f(a,b) - Df(a,b)(h,k)|}{(h^2+k^2)^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

Il est souvent utile de considérer la matrice de $Df(a) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$. Cette $m \times n$ matrice est appelée la matrice Jacobienne de f en a et sera notée $f'(a)$.

Si $f(x,y) = \sin(x)$, alors $f'(a,b) = (\cos(a), 0)$.

Cas particulier : Si f est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ alors elle est différentiable et pour tout $a \in \mathbb{R}^n$ $f'(a) = f$. Dans ce cas la différentielle de f ne dépend pas de a.

Définition 2.1.2 *Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est continue en chaque point de l'ouvert U de $\mathbb{R}^n$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^0$ dans U.*
Si f est différentiable dans U ; et si en plus l'application $Df, f' : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ qui à chaque $x \in U$ fait associer $Df(x)$ est continue, on dit que f est continûment différentiable ou de classe $\mathcal{C}^1$ dans U.

2.2 Théorèmes de bases

Théorème 2.2.1 *Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est différentiable en un point $a \in \mathbb{R}^n$, et Si $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable en $f(a) \in \mathbb{R}^m$, alors $gof : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est différentiable en a, et*

$$D(gof)(a) = Dg(f(a))oDf(a).$$

Cette équation s'écrit aussi

$$(gof)'(a) = g'(f(a))of'(a).$$

Preuve : Soit $b = f(a)$, soit $L_1 = Df(a)$ et $L_2 = Dg(f(a))$. Si on pose

$$\begin{aligned} \phi_a(x) &= f(x) - f(a) - L_1(x-a), \\ \psi_b(y) &= g(y) - g(b) - L_2(y-b), \\ \rho(x) &= gof(x) - gof(a) - L_2oL_1(x-a), \end{aligned}$$

alors

$$\lim_{x \to a} \frac{|\phi_a(x)|}{|x-a|} = 0, \tag{2.2.3}$$

$$\lim_{y \to b} \frac{|\psi_b(y)|}{|y-b|} = 0, \tag{2.2.4}$$

et on doit montrer que

$$\lim_{x \to a} \frac{|\rho(x)|}{|x-a|} = 0.$$

Maintenant

$$\begin{aligned} \rho(x) &= g(f(x)) - g(b) - L_2(L_1(x-a)) \\ &= g(f(x)) - g(b) - L_2(f(x) - f(a) - \phi_a(x)) \\ &= [g(f(x)) - g(b) - L_2(f(x) - f(a))] + L_2(\phi_a(x)) \\ &= \psi_b(f(x)) + L_2(\phi_a(x)). \end{aligned}$$

On doit donc prouver

$$\lim_{x \to a} \frac{|\psi_b(f(x))|}{|x-a|} = 0, \tag{2.2.5}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{|L_2(\phi_a(x))|}{|x-a|} = 0. \tag{2.2.6}$$

(**??**) découle de (**??**) et du fait que L_2 est linéaire et continue.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après (**??**), il existe $\delta > 0$ tel que

$$|\psi_b(f(x)) < \varepsilon|f(x) - b| \qquad \text{si} \qquad |f(x) - b| < \delta$$

ce qui est vérifié si $|x - a| < \delta_1$, pour δ_1 bien choisi. Alors

$$\begin{aligned} |\psi_b(f(x))| &< \varepsilon|f(x) - b| \\ &= \varepsilon|\phi_a(x) + L_1(x-a)| \\ &\leq \varepsilon|\phi_a(x)| + \varepsilon M|x-a| \end{aligned}$$

pour un certain M. L'équation (**??**) en découle immédiatement. $\square$

Théorème 2.2.2 *1) Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une fonction constante alors*

$$Df(a) = 0$$

pour tout $a \in \mathbb{R}^n$.

2) Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire alors, pour tout $a \in \mathbb{R}^n$,

$$Df(a) = f.$$

3) Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, alors f est différentiable si et seulement si chaque composante de f est différentiable et

$$Df(a) = (Df_1(a), \dots, Df_m(a))$$

pour tout $a \in \mathbb{R}^n$.

$f'(a)$ est la $n \times m$–matrice dont la $i^{\text{ième}}$ colonne est la matrice $(f_i)'(a)$.

4) Soit $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $p(x, y) = xy$. On a

$$Dp(a, b)(x, y) = bx + ay.$$

Preuve : 1) Par définition nous pouvons écrire

$$\frac{\|f(a+h) - f(a)\|_2}{\|h\|_2} = 0,$$

D'où

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a)\|_2}{\|h\|_2} = 0$$

2)

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - f(h)\|_2}{\|h\|_2} = \lim_{h \to 0} \frac{\|f(a) + f(h) - f(a) - f(h)\|_2}{\|h\|_2} = 0.$$

3) Si chaque f_i est différentiable en a et si

$$L = (Df_1(a), \dots, Df_m(a))$$

on a

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - L(h)\|_2}{\|h\|_2} \leq \sum_{i=1}^{m} \lim_{h \to 0} \frac{|f_i(a+h) - f_i(a) - Df_i(a)(h)|}{|h|} = 0$$

Réciproquement, si f est différentiable en a, alors $f_i = p_i o f$ est différentiable.

4) Soit $L(x, y) = bx + ay$. Alors

$$\lim_{(h,k) \to 0} \frac{\|p(a+h, b+k) - p(a, b) - L(h, k)\|_2}{\|(h, k)\|_2} = \lim_{(h,k) \to 0} \frac{|hk|}{\|(h, k)\|_2}$$

Puisque $|hk| \leq h^2 + k^2$, nous avons

$$\frac{|hk|}{\|(h, k)\|_2} \leq \sqrt{h^2 + k^2},$$

ceci permet de conclure. □

Corollaire 2.2.1 *Si $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sont différentiables en a, alors*

$$\begin{aligned} D(f+g)(a) &= Df(a) + Dg(a), \\ D(f.g)(a) &= g(a)Df(a) + f(a)Dg(a). \end{aligned}$$

Si, en plus, $g(a) \neq 0$, alors

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{g(a)Df(a) - f(a)Dg(a)}{|g(a)|^2}.$$

2.3 Dérivées partielles

Définition 2.3.1 *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $1 \leq j \leq n$, si la limite*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_j + t, \ldots, a_n) - f(a)}{t},$$

existe elle sera notée $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, et sera appelée la $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle de f en a.

Remarque : Il est important de noter que $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ est la dérivée de la fonction $g_j(x) = f(a_1, \ldots, x, \ldots, a_n)$ au point a_j. Ceci signifie que $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ est la pente de la tangente au point $(a, f(a))$ à la courbe obtenue par l'intersection du graphe de f avec le plan $x_j = a_j$.

Le calcul de $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ se fait en considérant f comme variable de x_j avec toutes les autres variables comme des constantes.

Les dérivées partielles vont être utilisées pour déterminer la dérivée d'une application. Elles sont aussi utilisées pour trouver les minima et maxima d'une fonction.

Théorème 2.3.1 *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Si le maximum (ou le minimum de $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est atteint en un point $a \in \overset{o}{A}$ et si les dérivées partielles de f en a existent, alors, pour tout $1 \leq j \leq n$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0$.*

Preuve : Soit $g(x) = f(a_1, \ldots, x, \ldots, a_n)$. Clairement g_j admet un maximum ou minimum en a_j et g_j est définie en un intervalle ouvert contenant a_j, donc $g'_j(a_j) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0$. □

La réciproque de ce théorème est fausse, en général, même pour $n = 1$. Par exemple, $f(x) = x^3$.

En dimension supérieure, on a l'exemple spectaculaire suivant :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - y^2$. On a $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0) = 0$ parce que g_1 admet un minimum en 0 et $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0) = 0$ parce que g_2 admet un maximum en 0. Clairement $(0, 0)$ n'est ni un maximum relatif ni un minimum relatif de f.

Théorème 2.3.2 *Si $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ est différentiable en $a \in \mathbb{R}^n$, alors $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ existent pour tout $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$ et $f'(a)$ est la $m \times n$–matrice $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a))$.*

Preuve : On suppose d'abord que $m = 1$. On définit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ par $h(x) = (a_1, \ldots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \ldots, a_n)$ avec x dans la $j^{\text{ème}}$ place. Alors $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) = (foh)'(a_j)$. D'après le théorème **??**,

$$(foh)'(a_j) = f'(a).h'(a_j) = f'(a).(0, \ldots, 1, \ldots, 0)^t.$$

Ceci montre que $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ existe et que c'est la $j^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $f'(a)$.

Le théorème découle pour un m quelconque du fait que chaque f_j est différentiable et que la $j^{\text{ème}}$ ligne de $f'(a)$ est $(f_j)'(a)$. □

Il y a beaucoup d'exemples ou la réciproque de ce théorème est fausse. Néanmoins, cette réciproque est vraie si on ajoute une hypothèse suplimentaire.

Théorème 2.3.3 *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et soit $a \in \mathbb{R}^n$. Si les dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$ existent sur un ouvert contenant a et sont contniunes en a, alors $Df(a)$ existe a.*
Une telle fonction est dite continûment différentiable en a.

Preuve : On peut supposer que $m = 1$. Alors

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= f(a_1 + h_1, a_2, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n) \\ &\quad + f(a_1 + h_1, a_2 + h_2, a_3, \dots, a_n) - f(a_1 + h_1, a_2, \dots, a_n) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) - f(a_1 + h_1, \dots, a_{n-1}, a_n). \end{aligned}$$

On rappelle que $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$ est la dérivée de la fonction $g(x) = f(x, a_2, \dots, a_n)$ en a_1. En appliquant le théorème des accroissement fini à g, on obtient

$$f(a_1 + h_1, a_2, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}((b_1, a_2, \dots, a_n)),$$

avec b_1 entre a_1 et $a_1 + h_1$. De la même manière, le $i^{ème}$ terme de la somme ci–dessus est égale à

$$h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a_1 + h_1, \dots, a_{i-1} + h_{i-1}, b_i, \dots, a_n)) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(c_i).h_i$$

Alors

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{\left\| f(a+h) - f(a) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).h_i \right\|_2}{\|h\|_2} &= \lim_{h \to 0} \frac{\left\| \sum_{i=1}^n [\frac{\partial f}{\partial x_i}(c_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)].h_i \right\|_2}{\|h\|_2} \\ &\leq \lim_{h \to 0} \left| \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(c_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right] \right| \frac{|h_i|}{\|h\|_2} \\ &\leq \lim_{h \to 0} \left| \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(c_i) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right] \right| = 0 \end{aligned}$$

puisque $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est continue en a. □

Théorème 2.3.4 *Soient $g_1, \dots, g_m : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une famille de fonctions continûment différentiable en $a \in \mathbb{R}^n$ et soit $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable en $(g_1(a), \dots, g_m(a))$. On définit $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ par $F(x) = f(g_1(x), \dots, g_m(x))$. Alors*

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(g_1(a), \dots, g_m(a)) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a).$$

Preuve : La fonction F est la composée fog, où $g = (g_1, \dots, g_m)$. Puisque chaque g_i est continûment différentiable en a, il s'ensuit, d'après le théorème **??**, que g est différentiable en a. D'après le théorème **??**, on a

$$\begin{aligned} F'(a) &= f'(g(a)) \cdot g'(a) \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(g(a)), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(g(a)) \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mais $\frac{\partial F}{\partial x_i}(a)$ est la $i^{ème}$ ligne du premier membre de cette équation, tandis que $\sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j}(g_1(a), \dots, g_m(a)) \frac{\partial g_j}{\partial x_i}(a)$ est la $i^{ème}$ ligne du deuxième membre de cette équation. Ceci permet de conclure. □

Exemple : Soit $F:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y) = f(g(x,y),h(x),k(y)).$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(a,b) &= \frac{\partial f}{\partial x}(c).\frac{\partial g}{\partial x}(a,b) + \frac{\partial f}{\partial y}(c).h'(a),\\ \frac{\partial F}{\partial y}(a,b) &= \frac{\partial f}{\partial x}(c).\frac{\partial g}{\partial y}(a,b) + \frac{\partial f}{\partial z}(c).k'(b).\end{aligned}$$

avec $c = f(g(a,b),h(a),k(b))$.

2.4 Théorème d'inversion locale

Supposons que $f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continûment différentiable dans un ouvert contenant a et $f'(a) \neq 0$. Si $f'(a) > 0$, il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in I$. Alors f est strictement croissante sur I et donc bijective avec une fonction inverse f^{-1} définie sur un intervalle ouvert J contenant $f(a)$. En plus, f^{-1} est différentiable et, pour tout $y \in J$, on a

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f(y))}.$$

Un résultat analogue peut être obtenu en dimension supérieure.

2.4.1 Inégalité des accroissements finis

Lemme 2.4.1 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. et soit $f:U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ une application de classe $\mathcal{C}^k$ sur U, $k \geq 1$. Pour tout $x,y \in U$ tel que le segment (pavé) $[x,y]$ soit inclus dans U il existe un réel $M > 0$ tel que*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\,\|x - y\|.$$

Preuve : Soit $h = y - x$ et soit $\phi:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $t \longmapsto \phi(t) = f(x+th)$. ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et pour tout $t \in [0,1]$ $\phi'(t) = Df(x+th)(h)$. Puisque la fonction f est continûment différentiable alors ϕ' est continue sur $[0,1]$ et on a $f(y) - f(x) = \phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 \phi'(s)ds$. Or pour tout $t \in [0,1]$

$$\|\phi'(t)\| \leq \|Df(x+th)\|\,\|h\|.$$

Soit $M = \sup_{t\in[0,1]} ||Df(x+th)||$. D'où

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leq M\,\|h\|.$$

□

2.4.2 Difféomorphisme

Définition 2.4.1 *Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé E, soit V un ouvert d'un espace vectorielle normé F, On dit qu'une application $f:U \longrightarrow V$ est un $\mathcal{C}^1$–difféomorphisme de U dans V si f est une bijection et si f et f^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$.*
Si f et f^{-1} sont de classe ($\mathcal{C}^p$ $1 \leq p \leq \infty$) on parle de $\mathcal{C}^p$–difféomorphisme.

Remarque : Si $U \neq \emptyset$ et si $f:U \longrightarrow V$ est un $\mathcal{C}^1$–difféomorphisme alors E et F sont isomorphes. En particulier si les dimensions sont finies il sont égaux.
En effet $f^{-1}of = Ed_U$ et $fof^{-1} = Id_V$. Soit $x \in U$, $Df^{-1}(f(x))oDf(x) = Id_E$ et $Df(f^{-1}(x))oDf^{-1}(x) = Id_F$. Donc E et F sont isomorphes.

Théorème 2.4.1 ***Théorème d'inversion locale***

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Pour un point a de U, les propriétés suivantes sont équivalentes :
i) $Df(a)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
ii) Il existe un voisinage ouvert I de a $I \subset U$ et un voisinage J de $f(a)$ tels que $f : I \longrightarrow J$ soit un $\mathcal{C}^1$–difféomorphisme. En outre si $y = f(x) \in J$ alors $Df^{-1}(y) = [Df(x)]^{-1}$.

Remarque : Il est clair que la condition i) est équivalente à $\det(f'(a)) \neq 0$.

Preuve : La nécessité : ii) $\Longrightarrow$ i) En effet s'il existe $g : J \longrightarrow I$ tel que $gof = Id_I$ et $fog = Id_J$ alors $Dg(f(a))oDf(a) = Ed_{\mathbb{R}^n}$ et $D(fog)(b) = Ed_{\mathbb{R}^n}$ où $g(b) = a$. Donc $Df(a)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

La suffisance : Cette partie sera faite par étapes

1^o étape : Puis que l'application $Df(a)^{-1}$ et les translations sont des $\mathcal{C}^1$–difféomorphismes on peut supposer que $a = 0$ et $f(a) = 0$, et $Df(a) = Id_{\mathbb{R}^n}$. En effet il suffit de remplacer $f(x)$ par $h(x) = Df(a)^{-1}[f(a + x) - f(a)]$. Etudier h au voisinage de 0 revient à étuider f au voisinage de a.

2^o étape : Posons $g(x) = x - f(x)$ on a $g(0) = 0$ et $Dg(0) \equiv 0$. La continuité de Dg en 0 entraîne que pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ il existe $r > 0$ tel que pour tout x dans $B(0, 2r)$, $||Dg(x)|| < \frac{1}{2}$. Le théorème des accroissement fini appliqué à g sur la boule convexe $B(0, 2r)$ nous donne $||g(x) - g(y)|| \leq \frac{1}{2}||x - y||$. D'où $g(B(0, 2r)) \subset B(0, r)$. Soit $y \in B(0, r)$, montrons qu'il existe un unique $x \in B(0, 2r)$ tel que $f(x) = y$ cela revient à montrer que $h(x) = x$ où h est définie par $h(x) = y + g(x)$. Si $x \in B(0, 2r)$ alors $||h(x)|| \leq ||y|| + ||g(x)|| \leq 2r$. Donc h est une application de $B_f(0, 2r)$ dans $B_f(0, 2r)$ et est contractante de rapport $\frac{1}{2}$ de $B(0, 2r)$ dans lui même qui est complet. Le théorème du point fixe assure l'existence d'un seul point fixe $x \in B(0, 2r)$ tel que $h(x) = x$ i.e. $f(x) = y$. Par conséquent l'application $f^{-1} : J = B(0, r) \to B(0, 2r) = I$ existe.

3^o étape : Vérifiant que f^{-1} est 2–lipschitzienne.
Soient $(x, y) \in B(0, r)$ d'après la 2^o étape il existe $(u, v) \in B(0, 2r)$ tels que $x = f(u)$ et $y = f(v)$ d'où

$$\begin{aligned} ||u - v|| &= ||g(u) + f(u) - g(v) - f(v)|| \\ &\leq \frac{1}{2}||u - v|| + ||f(u) - f(v)||. \end{aligned}$$

i.e.

$$||f^{-1}(x) - f^{-1}(y)|| \leq 2||x - y||.$$

Ceci montre que f^{-1} est continue.

4^o étape : Il reste maintenant à montrer que f^{-1} est différentiable. Soit $x \in V$ et soit $L = Df(x)$. On va montrer que f^{-1} est différentiable en $y = f(x)$ dont la différentielle est L^{-1}. On pose

$$f(x + h) = f(x) + L(h) + \mathcal{E}(h),$$

avec

$$\lim_{h \to 0} \frac{||\mathcal{E}(h)||}{||h||} = 0.$$

Donc

$$L^{-1}(f(x + h) - f(x)) = h + L^{-1}(\mathcal{E}(h)).$$

Puisque chaque $y + k \in W$ est de la forme $f(x + h)$, cette relation s'écrit

$$f^{-1}(y + k) = f^{-1}(y) + L^{-1}(k) - L^{-1}(\mathcal{E}(f^{-1}(y + k) - f^{-1}(y))),$$

il suffit, alors, de montrer que

$$\lim_{k \to 0} \frac{||L^{-1}(\mathcal{E}(f^{-1}(y + k) - f^{-1}(y)))||}{||k||} = 0.$$

Puisque L^{-1} est continue, il suffit de montrer que

$$\lim_{k\to 0} \frac{||\mathcal{E}(f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y))||}{||k||} = 0.$$

Maintenant

$$\frac{||\mathcal{E}(f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y))||}{||k||} = \frac{||\mathcal{E}(f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y))||}{||f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y)||} \cdot \frac{||f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y)||}{||k||}.$$

Puisque f^{-1} est continue, $f^{-1}(y+k) \to f^{-1}(y)$ quand $k \to 0$. Donc le premier facteur tend vers 0. Puisque, en vertu du fait que f^{-1} est 2–lipschitzienne le second facteur est inférieur à 2, le produit tend vers 0. □

2.5 Théorème des fonctions implicites

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Si on choisit (a, b) dans $\mathbb{R}^2$ tel que $f(a, b) = 0$ et $|a| \neq 1$, il y a un intervalle ouvert A contenant a et un intervalle ouvert contenant b vérifiant la propriété suivante: si $x \in A$, il existe un unique $y \in B$ tel que $f(x, y) = 0$. On peut alors définir une fonction $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ par la condition

$$g(x) \in B \text{ et } f(x, g(x)) = 0.$$

Si $b > 0$, alors $g(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Il existe un autre b_1 tel que $f(a, b_1) = 0$. Il existe aussi un intervalle B_1 contenant b_1 tel que pour $x \in A$, on a $f(x, g_1(x)) = 0$ pour un unique $g_1(x) \in B_1$ (ici $g_1(x) = -\sqrt{1-x^2}$). g et g_1 sont toutes les deux différentiables. Ces deux fonctions sont dites définies implicitement par l'équation $f(x, y) = 0$.

Si on choisit $a = 1$ ou -1, il est impossible de trouver de telles fonctions. On voudrait avoir un critère pour pouvoir décider, en général, quand de telles fonctions existent.

En général, on se pose le problème suivant :

Si $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(a_1, \ldots, a_n, b) = 0$, est ce que on peut trouver, pour chaque $(x_1, \ldots, x_n)$ au voisinage de $(a_1, \ldots, a_n)$, un unique y au voisinage de b tel que $f(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$?

Plus généralement : si

$$f_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{pour } i = 1, \ldots, m$$

et

$$f_i(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) = 0 \text{ pour } i = 1, \ldots, m,$$

est ce que on peut trouver, pour chaque $(x_1, \ldots, x_n)$ au voisinage $(a_1, \ldots, a_n)$, un unique $(y_1, \ldots, y_m)$ au voisinage de $(b_1, \ldots, b_m)$ qui vérifie

$$f_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0 \text{ pour } i = 1, \ldots, m$$

La réponse est donnée par le théorème suivant

Théorème 2.5.1 ***Théorème des fonctions implicites***

Soit $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ continûment différentiable sur un ouvert contenant (a, b) tel que $f(a, b) = 0$. Soit M la matrice carré d'ordre m définie par

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{n+j}}(a, b)\right), \quad 1 \leq i, j \leq m.$$

Si $\det(M) \neq 0$, alors il existe un ouvert $A \subset \mathbb{R}^n$ contenant a et un ouvert $B \subset \mathbb{R}^m$ contenant b, vérifiant la propriété suivante : pour tout $x \in A$ il existe un unique $g(x) \in B$ tel que $f(x, g(x)) = 0$. En plus la fonction g est différentiable.

Preuve : On définit $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ par $F(x,y) = (x, f(x,y))$. Alors $\det(F'(a,b)) = \det(M) \neq 0$. D'après le théorème **??**, il existe un ouvert $W \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ contenant $F(a,b) = (a,0)$ et un ouvert de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ contenant (a,b) et qu'on peut prendre de la forme $A \times B$, tels que $F : A \times B \longrightarrow W$ a un inverse différentiable $h : W \longrightarrow A \times B$. Clairement h est de la forme $h(x,y) = (x, k(x,y))$. Il est facile de vérifier que

$$f(x, k(x,0)) = 0.$$

Ceci achève la preuve du théorème. □

Puisque la fonction g définie dans le théorème est différentiable, il est facile de calculer sa différentielle. En effet, on a, pour tout $1 \leq i \leq m$ et tout $x \in A$,

$$f_i(x, g(x)) = 0.$$

En différentiant, on obtient

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x, g(x)) + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_{n+k}}(x, g(x)) \frac{\partial g_k}{\partial x_j}(x) = 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Cette équation s'écrit

$$M \cdot \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_j}(x), \ldots, \frac{\partial g_m}{\partial x_j}(x) \right) = - \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x, g(x)), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x, g(x)) \right).$$

Cette équation peut être résolue puisque M est inversible.

2.6 Différentielles d'ordre supérieur

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$. Les dérivées partielles d'ordre supérieur peuvent être définis par les relations de récurrence:

$$\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_p}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_p}} \right).$$

Il peut exister a priori n^p dérivées partielles d'ordre p au point a, notées $\frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_p}}(a)$ obtenues en donnant aux p indices $i_1, \ldots, i_p$ toutes les valeurs possibles de 1 à n; mais nous allons voir que ces dérivées partielles ne sont pas toutes distinctes.

Théorème 2.6.1 ***Lemme de Schwarz***

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que, pour tout $1 \leq i, j \leq n$, les fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existent dans un voisinage de a et sont continues en a. Alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

Preuve : L'outil est le théorème des accroissement finis. Il suffit de considérer les deux variables de dérivation, les autres étant fixé dans la définition de dérivées partielles. On peut donc se restreindre à une application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit

$$A = f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2 + h_2) + f(a_1, a_2).$$

i) A est l'accroissement de la fonction $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\alpha(x) = f(x, a_2 + h_2) - f(x, a_2)$ entre a_1 et $a_1 + h_1$.

En appliquant le théorème des accroissement finis à α puis à $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, on obtient deux nombres réels $0 < \theta_1 < 1$ et $0 < v_1 < 1$, tels que

$$\begin{aligned} A &= \alpha(a_1 + h_1) - \alpha(a_1) = h_1 \alpha'(a_1 + \theta_1 h_1) \\ &= h_1 \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2) \right] \\ &= h_1 h_2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + v_1 h_2) \right). \end{aligned}$$

ii) Nous pouvons aussi considérer la quantité A comme un accroissement de la fonction $\beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\beta(x) = f(a_1 + h_1, x) - f(a_1, x)$ entre a_2 et $a_2 + h_2$.

Un raisonnement analogue au précédent fournit deux nombres réels $0 < \theta_2 < 1$ et $0 < v_2 < 1$, tels que

$$A = h_1 h_2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1 + v_2 h_1, a_2 + \theta_2 h_2) \right).$$

En égalant ces deux valeurs et on divisant par $h_1 h_2$, on obtient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1 + \theta_1 h_1, a_2 + v_1 h_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1 + v_2 h_1, a_2 + \theta_2 h_2).$$

Il reste à passer à la limite et utiliser la continuité en a. □

Définition 2.6.1 *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dira que f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur U si les dérivées partielles d'ordre p de f existent et sont continues sur U.*

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{p+1}$. Soit $a \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $h = (h_1, \ldots, h_n)$ dans $\mathbb{R}^n$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$D^k f_a(h) = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{n} h_{i_1} \cdots h_{i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}}(a).$$

Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(t) = f(a + th).$$

g est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ et on peut lui appliquer la formule de Mac–Laurin, il existe donc un $0 < \theta < 1$ tel que

$$g(1) = g(0) + \sum_{k=1}^{p} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + \frac{g^{(p+1)}(\theta)}{(p+1)!}.$$

Il est facile de vérifier que, pour k,

$$g^k(0) = D^k f_a(h).$$

En déduit le théorème suivant :

Théorème 2.6.2 ***Formule de Taylor–Young***

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ sur un ouvert U contenant a et admettant des dérivées partielles d'ordre $p + 1$ sur U. Alors, il existe un $0 < \theta < 1$ tel que, pour tout $h = (h_1, \ldots, h_n)$ voisin de 0, on a

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} D^k f_a(h) + \frac{1}{(p+1)!} D^{p+1} f_{a+\theta h}(h).$$

2.7 Extremum et différentiabilité

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Nous avons vu dans le théorème **??** que si f atteint un extremum en un point a de U et si les dérivées partielles de f en a existent alors ces derniers s'annulent tous en a. La réciproque est fausse, comme nous l'avons vu.

Définition 2.7.1 *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Soit a un élément de U. On dira que a est un point critique de f si $Df(a) = 0$.*

Avant de donner une condition suffisante pour qu'un point réalise un extremum. On va faire quelques rappel.

On considère $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel. Pour toute n–matrice carré symétrique A, on définit une 2–forme bilinéaire symétrique par

$$B_A(x, y) = \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle.$$

La forme quadratique associée à B_A est définie par

$$Q_A(x) = B_A(x,x) = \langle Ax, x\rangle .$$

On dira que B_A ou Q_A est définie positive (resp. définie négative) si pour tout $x \neq 0$, $Q_A(x) > 0$ (resp. $Q_A(x) < 0$).

Il est connu que toute n–matrice symétrique A a toutes ses valeurs propres réels, donc A est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres.

Proposition 2.7.1 *Soit A une n–matrice symétrique et soit Q_A la forme quadratique associée. Alors Q_A est définie positive (resp. définie négative) si, et seulement si toutes les valeurs propres de A sont strictement positifs (resp. strictement négatifs).*

Preuve : La condition est nécessaire : Soit λ une valeur propre de A et soit x un vecteur propre non nul de A. Puisque Q_A est définie positif, on a

$$\langle Ax, x\rangle = \lambda \langle x, x\rangle > 0.$$

Ce qui entraîne que $\lambda > 0$.

La condition est suffisante : Supposons que toutes les valeurs propres de A sont strictement positifs. Soient $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres de A. Pour tout $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ non nul, on a

$$Q_A(x) = \langle Ax, x\rangle = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2 > 0.$$

$\square$

Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $a \in U$, on appelle hessienne de f en a la n–matrice symétrique

$$Hess(f)_a = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right), 1 \leq i,j \leq n.$$

On notera $Q(f)_a$ la forme quadratique associée. On a

$$\begin{aligned} Q(f)_a(h) &= \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \\ &= \sum_{j=1}^{n} h_j^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a). \end{aligned}$$

Théorème 2.7.1 *Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in U$ un point critique de f i.e. $Df(a) = 0$.*

Si $Q(f)_a$ est une forme quadratique définie positive (resp. définie négative) alors f admet un minimum (resp. maximum) relatif en a.

Preuve : La formule de Taylor–Young s'écrit

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} Q(f)_a(h) + |h|^2 \varepsilon(h)$$

avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Cette formule peut s'écrire aussi

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} ||h||^2 \left(Q(f)_a\left(\frac{h}{||h||}\right) + 2\varepsilon(h)\right).$$

Supposons $Q(f)_a$ est définie positive.

Quand h décrit $\mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, $\frac{h}{||h||}$ décrit la sphère unité S. Puisque S est compacte et puisque $Q(f)_a$ est continue, alors il existe un $v \in S$ tel que

$$Q(f)_a(v) = \inf_{h \in S} Q(f)_a(h) = m > 0.$$

De $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$, on déduit l'existence de $r > 0$ tel que si $|h| < r$ entraîne que $2|\varepsilon(h)| < m$.

Donc pour tout $|h| < r$ et $h \neq 0$

$$f(a+h) - f(a) > 0$$

ce qui assure la conclusion. □

Remarque : Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in U$ un point critique de f i.e. $Df(a) = 0$.

Si les valeurs propres de $Hess(f)_a$ sont tous strictement positifs alors f admet un minimum relatif en a.

Si les valeurs propres de $Hess(f)_a$ sont tous strictement négatifs alors f admet un maximum relatif en a.

Si $n = 2$, on a

$$Hess(f)_a = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{pmatrix}.$$

On pose

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a);\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) \text{ et } t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a).$$

Soient λ_1 et λ_2 les valeurs propres de $Hess(f)_a$. On a

$$\lambda_1 \lambda_2 = rt - s^2\ ;\ \ \lambda_1 + \lambda_2 = r + t.$$

Proposition 2.7.2 *Soient $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et $(a,b) \in U$ un point critique de f.*
Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$ f présente un minimum en (a,b)
Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$ f présente un maximum en (a,b).
Si $rt - s^2 < 0$ (a,b) est un point col de f, c'est à dire que f ne présente en (a,b) ni maximum ni un minimum.

Définition 2.7.2 *On dit que U est **étoilé** lorsqu'il existe $x_0 \in U$ tel que, pour tout x de U, le segment $[x_0, x] \subset U$.*

Proposition 2.7.3 *Soit U un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$ et soit f une application de U dans $\mathbb{R}^m$. f est constante sur U si et seulement si $Df(x)$ est nulle pour tout $x \in U$.*

Preuve : La condition nécessaire est évidente, alors la condition suffisante est une conséquence immédiate du lemme des accroissements.

Exemple : Soient $x, y \in \mathbb{R}^2$ tels que $xy \neq 1$. Montrer que

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

Chapitre 3

Les séries numériques

3.1 Définition des séries numériques

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}})$ une suite de nombres réels ou complexes. On définit la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}})$ par

$$S_n = u_0 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Définition 3.1.1 *a) La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}})$ s'appelle série de terme général u_n, ou série $\sum_n u_n$.*
b) Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}})$ converge vers S, on dit que la série $\sum_n u_n$ est convergente de somme

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

c) Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}})$ diverge, on dit que la série $\sum_n u_n$ est divergente.

Exemples :
1) La série de terme général $u_n = 1$ est divergente car $S_n = n$ tend vers $+\infty$.
2) La série de terme général $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ converge. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ tend vers 1 ; on a donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

3) La série de terme général $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ diverge. Car, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sqrt{n+1} - 1$ tend vers l'infini.
4) La série de terme général $u_n = \ln(\frac{n^2-1}{n^2})$ converge. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \ln(\frac{n+1}{n}) - \ln 2$, qui a pour limite $-\ln 2$.

Proposition 3.1.1 ***(Condition nécessaire de convergence)***
Le terme général d'une une série convergente tend vers 0 lorsque n tend vers ∞.

$$\textit{i.e. si la série } \sum_n u_n \textit{ est convergente alors } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Preuve : Soit $\sum_n u_n$ une série convergente et soit S_n la somme de ses n premier termes, alors $u_n = S_n - S_{n-1}$ tends vers zéro.. □

La condition $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ est une condition nécessaire de convergence d'une série numérique. Ce n'est pas une condition suffisante, comme on le verra ultérieurement.

Si $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, la série $\sum_n u_n$ diverge. On dira qu'elle diverge grossièrement.

Exemple :

1) La série géométrique $\sum_n a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$. En effet, si $|a| \geq 1$, le terme général ne tend pas vers 0 et la série diverge grossièrement. Si $|a| < 1$, un calcul classique donne

$$S_n = 1 + a + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

qui a pour limite $\frac{1}{1-a}$. Ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, \qquad \text{si} \qquad |a| < 1.$$

2) La série $\sum_n n \ln(1 + \frac{1}{n})$ diverge grossièrement.

3.2 Critère de Cauchy

La série $\sum_n u_n$ converge si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, i.e.:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0 \text{ et } \forall\, m \geq 0, \text{ on a } |u_n + \cdots + u_{n+m}| < \varepsilon.$$

Exemple : La série $\sum_n \frac{1}{n}$ diverge. La suite des sommes partielles n'est pas de Cauchy car, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}.$$

On peut égalment noter que

$$\ln(k+1) - \ln k = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$$

d'où

$$\ln(n+1) \leq S_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} S_n = \infty.$$

La série $\sum_n \frac{1}{n}$ est un exemple de série divergente dont le terme général tend vers 0.

3.3 Opérations sur les séries

Si les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ convergent, il en est de même pour les série $\sum_n (u_n + v_n)$ et $\sum_n (\lambda u_n)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Leurs sommes vérifient :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda u_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n.$$

Remarques :

1) Si la série $\sum_n u_n$ converge et la série $\sum_n v_n$ diverge, la série $\sum_n (u_n + v_n)$ diverge.

2) Si la série $\sum_n u_n$ diverge et la série $\sum_n v_n$ diverge, il existe des exemples pour les quels :

La série $\sum_n (u_n + v_n)$ converge, ($u_n = \frac{1}{n}$, $v_n = \frac{-1}{n+1}$.)

La série $\sum_n (u_n + v_n)$ diverge, $u_n = 1$, $v_n = 1$).

3.4 Séries alternées

Définition 3.4.1 *Une série $\sum_n u_n$ à termes réels est alternée si, pour tout n, u_n et u_{n+1} sont de signes contraires.*

Théorème 3.4.1 ***(Théorème de Leibniz)***
Une série alternée $\sum_n u_n$, telle que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ soit décroissante et tende vers 0 est convergente.

Preuve: Supposons $u_0 \geq 0$, c'est à dire $u_n = (-1)^n|u_n|$. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles, nous avons

$$\begin{aligned} S_{2n} - S_{2n-2} &= |u_{2n}| - |u_{2n-1}| < 0 \\ S_{2n+1} - S_{2n-1} &= -|u_{2n+1}| + |u_{2n}| > 0 \end{aligned}$$

et de $\lim_{n\to\infty}(S_{2n+1} - S_{2n}) = -\lim_{n\to\infty}|u_{2n+1}| = 0$, on déduit que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, ce qui entraîne la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc de la série $\sum_n u_n$. $\square$

Exemple :
1) La série $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ converge.
2) La série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ est une série alternée divergente. (voir la suite).

3.5 Séries à termes positifs

3.5.1 Critère de comparaison

Si la série $\sum_n u_n$ est à termes positifs, la suite des sommes partielles est croissante. Donc la série $\sum_n u_n$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Il en découle :

Proposition 3.5.1 *Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries telles que $0 \leq u_n \leq v_n$, pour tout $n \geq n_0$.*
Si la série $\sum_n v_n$ converge alors la série $\sum_n u_n$ converge.
Si la série $\sum_n u_n$ diverge alors la série $\sum_n v_n$ diverge.

Preuve : Les deux affirmations de l'énoncé étant équivalentes, il suffit de démontrer la première. Supposons donc la convergence de la série $\sum_n u_n$; par hypothèse, si $n \geq n_0$ alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \;\leq\; \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} v_k \;\leq\; \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{\infty} v_k.$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série $\sum_n u_n$ est croissante majorée donc convergente. $\square$

Exemple : La série $\sum_n \frac{3^n-8}{4^n+n^2}$ converge. On remarque d'abord que u_n est positif pour $n \geq 2$. La convergence se déduit de la majoration $u_n \leq (\frac{3}{4})^n$.

Proposition 3.5.2 *Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries à termes strictement positifs telles que, pour tout $n \geq n_0$,*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Si la série $\sum_n v_n$ converge alors la série $\sum_n u_n$ converge.
Si la série $\sum_n u_n$ diverge alors la série $\sum_n v_n$ diverge.

Preuve : De l'inégalité $0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$, on déduit que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n$ est décroissante, donc majorée par $\frac{u_{n_0}}{v_{n_0}}$ et le résultat provient de la proposition **??**. $\square$.

Proposition 3.5.3 *Soient $\sum_n u_n$ et $\sum_n v_n$ deux séries telles que $u_n \geq 0$ et $v_n > 0$ pour tout $n \geq 0$ et*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \ell.$$

1) Si $\ell > 0$ et fini alors les deux séries sont de même nature.
2) Si $\ell = 0$ et si la série $\sum_n v_n$ converge alors la série $\sum_n u_n$ converge.
3) Si $\ell = +\infty$ et si la série $\sum_n v_n$ diverge alors la série $\sum_n u_n$ diverge.

Preuve : On a nécessairement $\ell \geq 0$.

1) Si $\ell > 0$ et fini, pour $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$, il existe un n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$,

$$\frac{\ell}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3\ell}{2}$$

et la proposition permet de conclure.

2) Si $\ell = 0$, pour $\varepsilon = 1$, il existe un n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$,

$$0 \leq \frac{u_n}{v_n} \leq 1$$

et la proposition **??** permet de conclure.

3) Si $\ell = +\infty$. Il existe un n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$,

$$1 \leq \frac{u_n}{v_n}$$

et la proposition **??** permet de conclure. □

Remarques :

1) Si $\ell = 1$, les deux suites sont équivalentes. Ainsi deux séries équivalentes à termes positifs ou négatifs sont de même nature.

L'hypothèse sur le signe n'est pas superflue: les deux séries $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ sont équivalentes et sont de nature différentes.

Exemple: La série $\sum_n \frac{1}{n+\ln n}$ diverge car équivalente à la série $\sum_n \frac{1}{n}$.

3.5.2 Comparaison avec une intégrale

Théorème 3.5.1 *Soit $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, positive et décroissante. Alors la série $\sum_n f(n)$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ sont de même nature.*

Preuve: Supposons $a \leq 1$ pour simplifier. Pour tout $t \in [k, k+1]$ nous avons

$$f(k+1) \leq f(t) \leq f(k) \quad \text{et} \quad f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k)$$

par conséquent

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \leq \int_1^n f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Notons par $S_n^f = \sum_{k=1}^n f(k)$, donc

$$S_n^f - f(1) \leq \int_1^n f(t)dt \leq S_n^f \iff \int_1^n f(t)dt \leq S_n^f \leq f(1) + \int_1^n f(t)dt.$$

Ceci permet de conclure. □

Exemples :

1) La série de Riemann $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2) La série de Bertrand $\sum_n \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $(\alpha > 1)$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$.

3.5.3 Règle de d'Alembert

Appliquons la proposition **??** lorsque $\sum_n v_n$ est une série géométrique :
1) S'il existe ℓ tel que $0 < \ell < 1$, et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell$ pour $n \geq n_0$, alors la série $\sum_n u_n$ converge.
2) Si, pour $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors la série $\sum_n u_n$ diverge.

Théorème 3.5.2 ***(Règle de d'Alembert)***
Si $u_n \geq 0$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, on a :
1) Si $\ell < 1$, alors la série $\sum_n u_n$ converge.
2) Si $\ell > 1$, alors la série $\sum_n u_n$ diverge.

Preuve : Si $\ell < 1$, on choisit un ε assez petit tel que $\ell + \varepsilon < 1$. Par hypothèse, il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell + \varepsilon < 1.$$

La remarque au début de ce paragraphe implique la convergence de la série $\sum_n u_n$.
Le raisonnement est analogue lorsque $\ell > 1$, à partir du choix d'un nombre ε tel que $\ell - \varepsilon > 1$. □

Remarque : Le cas $\ell = 1$ ne permet pas de conclure en général, comme le montre les exemples $\sum_n \frac{1}{n}$ et $\sum_n \frac{1}{n^2}$. Notons ce pendant que si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers 1 par valeurs supérieurs, alors la série $\sum_n u_n$ diverge, (car, à partir d'un certain rang, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$).

Exemples :
1) La série $\sum_n \frac{n!}{n^n}$ converge. En effet, on trouve $\frac{1}{e}$ comme limite de

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

2) La série $\sum_n \frac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.

3.5.4 Règle de Cauchy

Appliquons le critère de comparaison lorsque $\sum_n v_n$ est une série géométrique :
1) S'il existe ℓ tel que $0 < \ell < 1$, et $\sqrt[n]{u_n} \leq \ell$ pour $n \geq n_0$, alors la série $\sum_n u_n$ converge.
2) Si, pour $n \geq n_0$, $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$, alors la série $\sum_n u_n$ diverge.
Comme précédemment, on déduit :

Théorème 3.5.3 ***(Règle de Cauchy)***
Si $u_n \geq 0$ et $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell$, on a :
1) Si $\ell < 1$, la série $\sum_n u_n$ converge;
2) Si $\ell > 1$ la série $\sum_n u_n$ diverge.

Preuve : Si $\ell < 1$, on choisit un ε assez petit tel que $\ell + \varepsilon < 1$. Par hypothèse, il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on a :

$$u_n \leq (\ell + \varepsilon)^n .$$

Pour $\ell > 1$, à partir du choix d'un nombre ε tel que $\ell - \varepsilon > 1$ il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on a :

$$u_n \geq (\ell - \varepsilon)^n .$$

La proposition **??** donne le résultat dans les deux cas. □

Remarque : Le cas $\ell = 1$ est indécidable, sauf si $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ tend vers 1 par valeurs supérieures.

Exemple : La série $\sum_n \frac{n^\alpha}{2^n}$ converge. C'est une conséquence de la règle de Cauchy. Nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2} < 1.$$

La série de terme général $(1+\frac{1}{n})^n$ est divergente, car $\lim_{n\to\infty} u_n = e \neq 0$. On constate aussi que $\sqrt[n]{u_n}$ est toujours supérieur à 1.

Remarque : La règle de Cauchy est plus forte que la règle de d'Alembert.

Soient a et b deux réels vérifiant $a > 1$, $0 < b < 1$ et $ab < 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_{2n} = a^n b^n$ et $u_{2n+1} = a^{n+1}b^n$.

La règle de Cauchy permet de prouver la convergence de la série $\sum_n u_n$ alors que la règle de d'Alembert n'aboutit pas.

3.5.5 Comparaison avec une série de Riemann

Appliquons la proposition **??** lorsque $v_n = \frac{1}{n^\alpha}$.

Proposition 3.5.4 *Si $u_n \geq 0$ et $\lim_{n\to\infty} n^\alpha u_n = \ell$, on a :*
1) Si $\alpha > 1$ et si ℓ est fini, alors la série $\sum_n u_n$ converge.
2) Si $\alpha \leq 1$ et $\ell > 0$ (éventuellment infini), alors la série $\sum_n u_n$ diverge.

Exemple: La série $\sum_n \frac{n}{e^{\sqrt{n}}}$ converge. Car

$$\lim_{n\to\infty} n^2 u_n = 0.$$

3.6 Convergence absolue

Définition 3.6.1 *Une série $\sum_n u_n$, à termes réels ou complexes, converge absolument si la série $[|u_n|]$ converge.*

Théorème 3.6.1 *Une série absolument convergente est convergente.*

Preuve : A partir du critère de Cauchy, ce résultat est une conséquence directe de l'inégalité :

$$|u_n + \cdots + u_{n+m}| \leq |u_n| + \cdots + |u_{n+m}|.$$

Ainsi le théorème en découle. □

Exemple : La série $\sum_n \frac{\sin n}{n^2}$ est absolument convergente.

La série $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$ converge et ne converge pas absolument. C'est une série semi–convergente.

3.7 Critère d'Abel

Théorème 3.7.1 ***(Critère d'Abel)***

Soit une série de terme général $u_n = a_n v_n$, où a_n et v_n sont réels ou complexes et vérifient :
(1) *il existe une constante M telle que, pour tout p et tout n, on ait $|\sum_{k=n}^{n+p} v_k| \leq M$,*
(2) *La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.*
(3) *La série de terme général $|a_n - a_{n+1}|$ converge,*
Alors la série $\sum_n u_n$ converge.

Corollaire 3.7.1 *Soit une série de terme général $u_n = a_n v_n$, où a_n est réel et v_n sont réels ou complexes et vérifient :*
(1) il existe une constante M telle que, pour tout p et tout n, on ait $|\sum_{k=n}^{n+p} v_k| \leq M$,
(2) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de nombres réels positifs, de limite 0,
Alors la série $\sum_n u_n$ est convergente.

Preuve du corollaire : Avec les hypothèses, on a $|a_{n+1} - a_n| = a_n - a_{n+1}$. Ainsi la suite $\sum_{k=0}^{n} |a_{k+1} - a_k| = a_0 - a_{n+1}$ a pour limite a_0 quand n tends vers l'infini. □

Preuve du critère d'Abel : Posons

$$S_{n,p} = v_n + \cdots + v_{n+p} \quad \text{et} \quad s_{n,p} = a_n v_n + \cdots + a_{n+p} v_{n+p}.$$

Nous avons

$$v_n = S_{n,0};\ v_{n+1} = S_{n,1} - S_{n,0}; \cdots ; v_{n+p} = S_{n,p} - S_{n,p-1}.$$

et

$$\begin{aligned} s_{n,p} &= a_n S_{n,0} + a_{n+1}(S_{n,1} - S_{n,0}) + \cdots + a_{n,p}(S_{n,p} - S_{n,p-1}) \\ &= S_{n,0}(a_n - a_{n+1}) + S_{n,1}(a_{n+1} - a_{n+2}) + \cdots + S_{n,p-1}(a_{n+p-1} - a_{n+p}) + a_{n+p} S_{n,p}. \end{aligned}$$

On en déduit, avec l'hypothèse (1) :

$$|s_{n,p}| \leq M(|a_n - a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p-1} - a_{n+p}|) + M|a_{n+p}|.$$

Avec les hypothèses (2) et (3), cette dernière expression peut être rendue arbitrairement petite; le critère de Cauchy entraîne la convergence de la série $\sum_n u_n$. □

Exemple : La série $\sum_n \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge.
Il suffit de vérifier l'hypothèse 1) du corollaire :

$$\left| e^{in\theta} + \ldots + e^{i(n+p)\theta} \right| = |e^{in\theta}| \frac{|1 - e^{i(p+1)\theta}|}{|1 - e^{i\theta}|} \leq \frac{2}{|1 - e^{i\theta}|}.$$

On peut, maintenant, montrer que la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ est divergente. On a

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)^{-1} \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right). \end{aligned}$$

La série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est semi–convergente, la série $\sum_n \frac{1}{n}$ est divergente et la série $\sum_n O(n^{-\frac{3}{2}})$ est absolument convergente. D'où la divergence de la série $\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$. □

Chapitre 4

Suites et séries de fonctions

Dans ce chapitre K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

4.1 Suites de fonctions

4.1.1 convergence simple d'une suite de fonctions

Définition 4.1.1 *Soit $A \subset K$ et soit $f_n : A \longrightarrow K$ une suite de fonctions. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f : A \longrightarrow K$ si pour tout $x \in A$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.*

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f : A \longrightarrow K$ si pour tout $x \in A$

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\; \forall\, n \geq n_0 \text{ on a } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{4.1.1}$$

où n_0 dépend de x.

Exemples :

1) Considérons $A = [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$. Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \in [0, 1[$ et $f(1) = 1$.

2) Soit $A = \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = n^2x$ si $|x| \leq \frac{1}{n}$ et $f_n(x) = \frac{1}{x}$ sinon. Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Proposition 4.1.1 *Soit $A \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions croissantes (resp. décroissantes) qui converge simplement vers $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors f est croissante (resp. décroissante).*

Preuve : Evidente. $\square$

Remarques :

1) Si pour tout entier n, l'application f_n est bornée et si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f, alors f n'est pas nécessairement bornée comme le montre l'exemple 2).

2) Si pour tout entier n, l'application f_n est continue et si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f, alors f n'est pas nécessairement continue comme le montre les exemples 1) et 2).

4.1.2 Convergence uniforme

4.1.3 Définitions

Définition 4.1.2 *Soit $A \subset K$ et soit $f_n : A \longrightarrow K$ une suite de fonctions. On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f : A \longrightarrow K$ si*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f : A \longrightarrow K$ si

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\, \forall\, n \geq n_0\, \forall\, x \in A\ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{4.1.2}$$

Il est claire que la convergence uniforme entraîne la convergence simple.

Proposition 4.1.2 ***(Critère de Cauchy uniforme)*** *Soit $A \subset K$ et soit $f_n : A \longrightarrow K$ une suite de fonctions. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f : A \longrightarrow K$ si et seulement si*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall\, p, q \geq n_0\, \forall\, x \in A\ \ |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon. \tag{4.1.3}$$

Preuve : La condition est nécessaire car

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq |f_p(x) - f(x)| + |f(x) - f_q(x)|.$$

La condition est suffisante : La condition entraîne que, pour chaque $x \in A$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et donc convergente vers $f(x)$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, q, p \geq n_0\, \forall\, x \in A \ \text{ on a }\ |f(x) - f_q(x)| \leq |f(x) - f_p(x)| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, pour chaque $x \in A$, il existe un $p \geq n_0$ tel que

$$|f(x) - f_p(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ceci permet de conclure. □

Exemples :

1) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par: $f_n : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f_n = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si} \quad x \in [0, n] \\ 0 & \text{si} \quad x > n \end{cases}$$

converge uniformément vers l'application $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-x}$.

2) Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$ une application continue. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions polynômes dits polynômes de Bernstein

$$B_n(f) : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}, x \mapsto \sum_{k=0}^{n} C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1 - x)^{n-k}.$$

Alors la suite de fonctions $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

3) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie dans l'exemple 1. Cette suite ne converge pas uniformément vers f sur $[0, 1]$. En revanche, pour tout $\delta \in [0, 1[$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, \delta]$.

4) La suite $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$ converge simplement vers la fonction nulle et on a

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = \frac{n^{\alpha-1}}{e}.$$

Ainsi la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle si et seulement si $\alpha < 1$.

5) La suite $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$, mais, on a, pour tout n,

$$f_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{4}}.$$

La convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

4.1.4 Propriétés des suites de fonctions convergeant uniformément

Théorème 4.1.1 *Soit $A \subset K$ et soit $a \in \overline{A}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définie sur A et qui converge uniformément vers une fonction $f : A \longrightarrow K$. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\lim_{x\to a} f_n(x) = \ell_n.$$

Alors, on a

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to\infty} \ell_n.$$

Cette relation peut s'écrire

$$\lim_{x\to a}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to a} f_n(x).$$

Preuve : Commençons par montrer que la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Soit $\varepsilon > 0$, on a

$$|\ell_p - \ell_q| \le |\ell_p - f_p(x)| + |f_p(x) - f_q(x)| + |f_q(x) - \ell_q|.$$

Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p, q \ge n_0$, on a

$$|f_p(x) - f_q(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'un autre côté, pour chaque $p \in \mathbb{N}$, il existe un $x \in A$ tel que

$$|\ell_p - f_p(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ceci permet de montrer que la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Montrons, maintenant, que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $x \in A$,

$$|f_{n_0} - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ et } |\ell - \ell_{n_0}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'un autre côté, il existe $\eta > 0$ tel que

$$|x - a| < \eta \Longrightarrow |f_{n_0}(x) - \ell_{n_0}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On déduit de ce qui précède que, pour $|x - a| < \frac{\varepsilon}{3}$

$$|f(x) - \ell| \le |f_{n_0} - f(x)| + |f_{n_0}(x) - \ell_{n_0}| + |\ell - \ell_{n_0}| < \varepsilon.$$

Ceci permet de conclure. □

Théorème 4.1.2 *Toute limite uniforme de fonctions continues est continue.*

Preuve : Ceci est un corollaire du théorème précédent. □

Théorème 4.1.3 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ qui converge uniformément vers f, alors*

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)dt.$$

Soit

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(t)dt.$$

Preuve : Ceci découle de la relation suivante :

$$\left| \int_a^b f(t)dt - \int_a^b f_n(t)dt \right| \leq (b-a) \left\| f_n - f \right\|_\infty .$$

□

Théorème 4.1.4 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Supposons qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente. Supposons de plus que la suite $(f_n)'_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $g : [a,b] \longrightarrow K$. Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f et on a $f' = g$.*
Ceci peut s'écrire $(\lim_{n\to\infty} f_n)' = \lim_{n\to\infty} f_n'$.

Preuve : Le théorème découle de la relation suivante et du théorème précédent :

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n'(t)dt.$$

□

On énonce sans démonstration les deux théorèmes de Dini.

Théorème 4.1.5 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions réelles définies et continues sur $[a,b]$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, alors la convergence est uniforme.*

Théorème 4.1.6 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions croissantes réelles définies et continues sur $[a,b]$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, alors la convergence est uniforme.*

4.2 Séries de fonctions

Soit $A \subset K$ et soit $(u_n(.))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de $A \longrightarrow K$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in A$,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n u_k(x).$$

Définition 4.2.1 *On dit que la série de fonctions $\sum_n u_n(.)$ converge simplement (resp. uniformément) si la suite de fonction $(S_n(.))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement (resp. uniformément). Soit $S(.)$ la somme de la série. On a*

$$S(x) = \sum_{k=0}^\infty u_k(x).$$

Conditions équivalentes de convergence uniforme :

a) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0\ \forall\, x \in A\ |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.
b) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0\ \sup_{x\in A} |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.
c) $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |S_n(x) - S(x)| = \lim_{n\to\infty} ||S_n - S||_\infty = 0$.
d) Critère de Cauchy :
$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, n \geq n_0)\ \forall\, p \geq 1\ \forall\, x \in A\ |\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)| < \varepsilon$.

Définition 4.2.2 *On dit qu'une série de fonctions $\sum_n u_n(.)$ converge normalement sur A si la série de terme positifs $\sum_n \sup_{x\in A} |u_n(x)|$ est convergente.*

Théorème 4.2.1 *Toute série normalement convergente sur A y est uniformément convergente.*

Preuve : Evidente

4.2.1 Propriétés des séries de fonctions

Puisque les séries de fonctions sont des cas particuliers de suites de fonctions, les théorèmes peuvent être formulés de la manière suivante :

Théorème 4.2.2 *Soit $\sum_n u_n(.)$ une série d'applications continues convergeant uniformément sur A, alors la somme de la série est continue sur A.*

Théorème 4.2.3 *Soit $\sum_n u_n(.)$ une série d'applications continues convergeant uniformément sur $[a,b]$. Alors on peut intégrer terme à terme, c'est à dire*

$$\forall\, x \in [a,b] \quad \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^x u_k(t)dt = \int_a^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \right) dt.$$

Théorème 4.2.4 *Soit $\sum_n u_n(.)$ une série d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ telle que :*

a) Il existe $t_0 \in [a,b]$ tel que la série numérique $\sum_n u_n(t_0)$ converge.

b) La série d'application $\sum_n u'_n(.)$ converge uniformément sur $[a,b]$.

Alors la somme de la série $\sum_n u_n(.)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et on peut dériver terme à terme, c'est à dire :

$$\forall\, x \in [a,b] \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x) \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} u'_k(x).$$

4.3 Les séries entières

4.3.1 Convergence d'une série entière

Définition 4.3.1 *Une série entière est une série de fonctions de la forme $\sum_n a_n z^n$, où (a_n) est une suite réelle ou complexe et $z \in \mathbb{C}$. Sa somme si elle existe, est notée $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.*

Pour étudier la convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$ nous emploierons une méthode directe, fondée sur le lemme suivant:

Lemme 4.3.1 ***(Lemme d'Abel)*** *Si, pour un $z_0 \in \mathbb{C}$ donné, la suite $(|a_n z_0^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Alors*
1) Pour tout z tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum_n a_n z^n$ converge absolument.
2) Pour tout r tel que $0 < r < |z_0|$ la série $\sum_n a_n z^n$ est normalement convergente dans $D(0,r)$.

Preuve : Soit M un majorant de la suite $(|a_n z^n|)_{n\in\mathbb{N}}$. On a

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n| |\frac{z}{z_0}|^n \leq M |\frac{z}{z_0}|^n.$$

Le critère de comparaison permet de conclure. □

Remarque : L'hypothèse du lemme d'Abel est vérifiée si la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, donc en particulier si la série $\sum_n a_n z_0^n$ converge.

Définition 4.3.2 *Le rayon de convergence R de la série entière $\sum_n a_n z^n$ est la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ de l'ensemble $\mathbf{I}$ des nombres réels positifs r tel que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.*

$$R \;=\; \sup \mathbf{I} = \sup\{r > 0 : \ \textit{la suite } (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \ \ \textit{soit bornée} \ \}$$

L'existence de cette borne résulte du fait que l'ensemble $\mathbf{I}$ est non vide, puisqu'il contient la valeur $r = 0$.

Théorème 4.3.1 *Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$ $(0 \leq R \leq +\infty)$.*
i) Si $R = 0$, cette série ne converge que pour $z = 0$.
ii) Si $R = +\infty$, cette série converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$, cette convergence étant normale, donc uniforme, sur toute partie bornée de $\mathbb{C}$.
iii) Si R est un nombre fini non nul, la série $\sum_n a_n z^n$ est absolument convergente pour $|z| < R$, et divergente pour $|z| > R$; de plus cette série converge normalement (donc uniformément) dans le disque fermé $D_f(0, r)$, quel que soit $r < R$.

Preuve : Soit $\mathbf{I}$ l'ensemble des nombre $r \geq 0$ tels que la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.

Pour que la série $\sum_n a_n z^n$ soit convergente, il est nécessaire que la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, donc que $|z| \in \mathbf{I}$, ce qui exige que $|z| \leq R$. Pour $|z| > R$ la série $\sum_n a_n z^n$ est donc divergente.

ii) Supposons $R > 0$ et $|z| < R$ $(R \leq +\infty)$. Par définition de la borne supérieure, il existe alors un nombre $r \in \mathbf{I}$ tel que $r > |z|$; et le lemme d'Abel montre que la série $\sum_n a_n z^n$ est absolument convergente.

iii) Supposons toujours $R > 0$, soit r donné, tel que $0 < r < R$. Il existe alors un nombre $\rho \in \mathbf{I}$ vérifiant $\rho > r$. La suite $(a_n \rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, le lemme d'Abel montre que la série $\sum_n a_n z^n$ est normalement convergente dans tout disque $D_f(0, k\rho)$, avec $k < 1$; en prenant $k = \frac{r}{\rho}$, on voit que la série $\sum_n a_n z^n$ est normalement dans le disque $D_f(0, r)$. Ceci achève la preuve du théorème. $\square$

Définition 4.3.3 *Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$. Si $R \neq 0$, le disque ouvert $D(0, R)$ est appelé le disque de convergence de cette série; et l'intervalle ouvert $]-R, R[$ est appelé l'intervalle de convergence de cette série.*

Le théorème ci–dessus peut donc s'énoncer en disant qu'une série entière est absolument convergente en tout point de son disque de convergence, divergente à l'extérieur de ce disque, et normalement convergente sur tout disque concentrique au disque de convergence et de rayon strictement plus petit.

La notion d'intervalle de convergence intervient lorsqu'on se limite aux valeurs réelles de la variables: c'est le plus grand intervalle ouvert de centre 0 sur lequel la série soit convergente.

Remarque : Si R est fini, on ne sait pas à priori si la série $\sum_n a_n z^n$ converge sur son cercle de convergence, défini $|z| = R$. Les exemples qui suivent montrent qu'il existe des séries convergentes (ou divergentes) en tout point de ce cercle, ou une partie de ce cercle.

Détermination pratique du rayon de convergence

Proposition 4.3.1 *a) Si $\lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \ell$ existe, alors $R = \dfrac{1}{\ell}$ (Règle de d'Alembert).*

b) Si $\lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \ell$ existe, alors $R = \dfrac{1}{\ell}$ (Règle de Cauchy).

Preuve : Ces résultats sont des conséquences des règles de d'Alembert et de Cauchy. $\square$

Exemples :

1) La série entière $\sum_n \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini.

2) La série entière $\sum_n \frac{z^n}{n^2}$ a un rayon de convergence égal à 1.

On constate que si $|z| = 1$, il y a convergence absolue et donc convergence sur le cercle de convergence.

3) La série entière $\sum_n n! z^n$ a un rayon de convergence nul.

4) La série entière $\sum_n \frac{z^n}{n}$ a un rayon de convergence égal à 1.

Lorsque $|z| = 1$, on pose $z = e^{i\theta}$; il y a convergence si θ est différent de $2k\pi$.

Remarque : 1) Le rayon de convergence existe toujours alors que les limites de la proposition peuvent ne pas exister.

2) On ne peut rien conclure quant à la nature de la série entière sur le bord du disque de convergence, comme le montrent les exemples suivants $\sum_n z^n$, $\sum_n \frac{z^n}{n}$ et $\sum_n \frac{z^n}{n^2}$.

3) Les règles de d'Alembert ou de Cauchy ne s'appliquent pas toujours (considérer la série $\sum_n z^{2n}$).

4.3.2 Opérations sur les séries entières

Proposition 4.3.2 *Soit $\sum_n a_n z^n$ et soit $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_1 et R_2 respectivement, notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum_n (a_n + b_n) z^n$. Alors :*
1) Si $R_1 \neq R_2$, on a $R = \inf(R_1, R_2)$.
2) Si $R_1 = R_2$, on a $R \geq R_1$.

Preuve : 1) Supposons que $R_1 = \inf(R_1, R_2)$. Si $|z| < R_1$, les deux séries sont absolument convergentes et leur somme l'est égalment. Si $R_1 < |z| < R_2$, alors la série $\sum_n a_n z^n$ diverge et la série $\sum_n b_n z^n$ converge et donc leur somme diverge.

2) Cette assertion est évidente. □

Exemple : Soit $u_n(z) = 2^n z^n$ et $v_n(z) = (1 - 2^n) z^n$, on pose $w_n(z) = u_n(z) + v_n(z)$. Un calcul montre que les rayons de convergence de $\sum_n u_n(z)$ et $\sum_n v_n(z)$ sont égaux à $\frac{1}{2}$. Quant à la série $\sum_n w_n(z)$, elle a pour rayon de convergence 1.

4.3.3 Fonctions définies par une série entière

Proposition 4.3.3 *Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R, alors les séries $\sum_n n a_n z^{n-1}$ et $\sum_n a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$ ont même rayon de convergence.*

Preuve : Soit $|z| < R$ et soit z_0 tel que $|z| < |z_0| < R$. La suite $(a_n z_0^n)$, étant de limite nulle, est bornée et il existe M tel que $|a_n z_0^n| \leq M$, pour tout n.

1) Soit $z \neq 0$ tel que $|z| < R$, z fixé. On a :

$$\left|n a_n z^{n-1}\right| = \left|n a_n \frac{z_0^n z^n}{z_0^n z}\right| \leq n \frac{M}{|z_0^n|} \frac{|z|^n}{|z|} = \frac{nM}{|z|} \left|\frac{z}{z_0}\right|^n .$$

D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_n n |\frac{z}{z_0}|^n$ converge. La convergence de la série $\sum_n n a_n z^{n-1}$ découle maintenant du critère de comparaison.
Si $|z| > R$, alors la série $\sum_n a_n z^n$ diverge car son terme général ne tend pas vers zéro, ainsi la suite $(n a_n z^n)_{n \geq 1}$ ne tend pas vers 0 et, a fortiori, la suite $(n a_n z^{n-1})_{n \geq 1}$ ne tend pas vers zéro non plus.

2) Le résultat s'obtient en appliquant la première partie à la série $\sum_n a_n \frac{z^{n+1}}{n+1}$. □

4.3.4 Fonctions réelles définies par des séries entières

Théorème 4.3.2 *Soit $[a_n z^n]$ une série entière de rayon de convergence R. La somme*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

existe pour tout $x \in]-R, R[$ et vérifie:
1) f est continue et dérivable sur $]-R, R[$ et $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$;
2) f est indéfiniment dérivable et, pour tout $x \in]-R, R[$ et tout $p \in \mathbb{N}$,

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-p+1) a_n x^{n-p}$$

4) Si $|x| < R$, $\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$.
Les séries primitives et dérivées ont pour rayon de convergence R.

Preuve : C'est une conséquence directe des théorèmes de convergence normale et de la proposition ci–dessus. □

Exemples :

1) Le rayon de convergence de la série entière $\sum_n x^n$ est 1. On a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \text{pour} \quad |x| < 1.$$

Le théorème implique alors

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \text{pour} \quad |x| < 1.$$

2) Le rayon de convergence de la série entière $\sum_n \frac{x^n}{n!}$ est infini et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f^{'}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x).$$

De $f(0) = 1$ et de l'équation différentielle ci–dessus, on déduit que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

4.3.5 Fonctions complexes définies par des séries entières

Théorème 4.3.3 *Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. La somme*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

est définie pour tout z dans le disque de convergence $D(0,R)$ et on a :
1) f est continue sur $D(0,R)$;
2) f est holomorphe sur $D(0,R)$ et on a

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1};$$

3) f est indéfiniment holomorphe sur $D(0,R)$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-p+1) a_n z^{n-p}.$$

Preuve : 1) Découle du fait que la série converge uniformément sur tout compact dans $D(0,R)$.

2) Pour $|z_0| < R$, $|z| < R$ et $z \neq z_0$, on a

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(z)$$

avec

$$v_n(z) = a_n \sum_{k=1}^{n} z^{n-k} z_0^{k-1}.$$

Le point z_0 étant fixé, nous allons faire tendre z vers z_0 en utilisant le fait que les fonctions polynômes v_n sont définies et continues au point z_0, et vérifient

$$v_n(z_0) = n a_n z_0^{n-1}.$$

Le point z_0 vérifiant $|z_0| < R$, choisissons r tel que $|z_0| < r < R$. Pour $|z| \leq r$, on a

$$|v_n(z)| \leq |a_n| \sum_{k=1}^{n} r^{n-k} r^{k-1} = n|a_n| r^{n-1}.$$

D'après la proposition précédente, la série numérique $\sum_n n|a_n|r^{n-1}$ est convergente. La série $\sum_n v_n(z)$ est donc normalement convergente dans le disque $D_f(0,r)$, sa somme $\phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(z)$ est une fonction continue de z sur ce disque. Or pour $z \neq z_0$, on a

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \phi(z).$$

Le point z_0 étant intérieur au disque $D_f(0,r)$, on en déduit que le rapport $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ tend vers $\phi(z_0)$ quand z tend vers z_0. En d'autre termes, la dérivée $f'(z_0)$ existe, et on a

$$f'(z_0) = \phi(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_0^{n-1}$$

pour tout point z_0 du disque de convergence.

3) Se fait par récurrence. □

4.3.6 Développement d'une fonction en série entière

Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Le problème est de déterminer une série entière dont la somme est égale à f sur I. Si ce problème a une solution, nous disons que f est développable en série entière sur I.

Théorème 4.3.4 ***(Condition nécessaire)*** *Si f est développable en série entière dans $]-h,h[$, alors $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $]-h,h[$ et $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. En particulier, s'il existe, le développement en série entière est unique.*

Preuve : Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, le coefficient a_0 est égal à $f(0)$. Appliquons maintenant le théorème de dérivation pour obtenir $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. On en déduit $a_1 = f'(0)$ et, par récurrence, la formule annoncé. □

A toute fonction $\mathcal{C}^\infty$, $f :]-h,h[\longrightarrow \mathbb{R}$, on associe la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. La question de départ devient :

i) La série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ converge–t–elle ?

ii) Sa somme est–elle égale à f sur $]-h,h[$?

Théorème 4.3.5 ***(Condition suffisante)*** *Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-h,h[$ et s'il existe une constante K telle que $|f^{(n)}(x)| \leq K$, pour tout n et tout $x \in]-h,h[$, alors*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n,$$

pour tout $x \in]-h,h[$.

Preuve : Les hypothèses permettent d'écrire la formule de Taylor à n'importe quel ordre. Pour $x \in]-h,h[$, il existe donc $0 < \theta < 1$, tel que

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \cdots + x^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x).$$

Par hypothèse, le reste $|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x)|$ est majoré par $|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}| M$. Cette dernière expression tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, d'où

$$\lim_{N \to \infty} \left| f(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) \right| = 0.$$

□

Exemples :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \ (R=1)\,, \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ (R=\infty)\,, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \ (R=1) \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \ (R=\infty)\,, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ (R=\infty)\,, \\
\cosh x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \ R=\infty, \quad \sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \ R=\infty, \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \ R=1, \ \alpha \notin \mathbb{N}
\end{aligned}$$

4.3.7 Problème fonctionnels

Les séries entières permettent de résoudre des problèmes fonctionnels ; il s'agit d'équation dont l'inconnue est une fonction. Ce paragraphe est constitué d'exemples illustrant cette situation.

$$\int_0^x e^{-t^2} dt$$

La fonction e^{-t^2} n'a pas de primitive s'exprimant avec les fonctions usuelles ; on cherche donc à l'exprimer sous forme de série entière. Soit

$$e^{-t^2} = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{n!}$$

avec un rayon de convergence infini. Alors, pour tout x, on a

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)}.$$

Cette équation présente également l'avantage de pouvoir calculer des valeurs approchées.

4.3.8 Equations différentielles

Parmi les problèmes fonctionnels, les équations différentielles jouent un rôle important. Commençons par un exemple, l'équation

$$xy'' + (2\alpha+1)y' + xy = 0$$

dont on cherche une solution sous forme d'une série entière pour $x > 0$ et où $\alpha \in [0, \infty[$ est une constante. Posons $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\beta = (2\alpha+1)$, et détaillons

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccccccc}
xy'' & = & 0 & + & 2a_2 x & + & 6a_3 x^2 & + & \cdots & + & (n+1)na_{n+1}x^n & + & \cdots \\
\beta y' & = & \beta a_1 & + & 2\beta a_2 x & + & 3\beta a_3 x^2 & + & \cdots & + & (n+1)\beta a_{n+1} x^n & + & \cdots \\
xy & = & 0 & + & a_0 x & + & a_1 x^2 & + & \cdots & + & a_{n-1} x^n & + & \cdots
\end{array} \right.$$

On en déduit

$$a_1 = 0, \ 2a_2(2\alpha+2) + a_0 = 0 \text{ et } (n+1)(n+2\alpha+1)a_{n+1} = -a_{n-1}$$

d'où

$$a_{2p+1} = 0 \ \text{ et } \ a_{2p} = \frac{(-1)^p a_0}{4^p (p!)(p+\alpha)(p+\alpha-1)\cdots(\alpha+1)}.$$

La solution s'exprime donc

$$y = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p a_0}{4^p (p!)(p+\alpha)(p+\alpha-1)\cdots(\alpha+1)} x^{2p}$$

avec un rayon de convergence infini.

4.4 Les séries de Fourier

4.4.1 Séries trigonométriques

Définition 4.4.1 *On appelle série trigonométrique une série de fonctions réelles $\sum_{n\geq 0} u_n(x)$ définies par*

$$u_n(x) = a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x),$$

$n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{R}$, $b_n \in \mathbb{R}$, $b_0 = 0$. *La somme*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x),$$

si elle existe, a pour période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Si la série trigonométrique converge sur $E \subset [0, T]$, elle converge aussi dans $E^{(n)} = E + nT \subset [nT, (n+1)T]$, obtenu, à partir de E, par une translation de nT.

Expression complexe : Le but est d'écrire $a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$ sous la forme $c_n e^{in\omega x} + c_{-n} e^{-in\omega x}$. Supposons $n > 0$; à partir de

$$\cos(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} \; ; \; \sin(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i}$$

on obtient deux nombres complexes conjugués

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n).$$

Réciproquement, à tout couple de nombres complexes conjugués, (c_n, c_{-n}), on associe deux nombres réels vérifiant les égalités ci–dessus et définis par

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

On a $a_0 = c_0$ et $b_0 = 0$. La somme de la série se note donc indifféremment

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}.$$

4.4.2 Convergence d'une série trigonométrique réelle

Théorème 4.4.1 *Si les séries numériques $\sum_n |a_n|$ et $\sum_n |b_n|$ convergent, la série trigonométrique $\sum_n (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$ convergent normalement sur $\mathbb{R}$.*

Preuve : Si les séries numériques $\sum_n |a_n|$ et $\sum_n |b_n|$ convergent, la convergence normale sur $\mathbb{R}$ découle de l'inégalité

$$|a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)| \leq |a_n| + |b_n|.$$

□

Corollaire 4.4.1 *1) Si les séries numériques $\sum_n |a_n|$ et $\sum_n |b_n|$ convergent, la somme $S(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.*

2) Si les séries numériques $\sum_n n|a_n|$ et $\sum_n n|b_n|$ convergent, la somme $S(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-na_n\omega \sin(n\omega x) + nb_n\omega \cos(n\omega x).$$

4.4.3 Relation entre coefficients et somme

L'égalité $a_n = \frac{f^{(n)}}{n!}$ relie coefficients et somme d'une série entière $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$. Dans ce paragraphe, nous montrons que les coefficients d'une série trigonométrique $\sum_n (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$ peuvent également être déterminés par sa somme. Commençons par remarquer :

Proposition 4.4.1 *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique de période T, continue par morceaux, alors*

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_b^{b+T} f(t)dt$$

pour tout a et tout b.

Preuve : La règle de Chasles

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^{b+T} f(t)dt + \int_{b+T}^{a+T} f(t)dt$$

et le changement de variable $t \mapsto t - T$ entraînent que

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{a+T}^{b+T} f(t)dt.$$

□

En conséquence, lorsque l'on intègre une fonction f, périodique de période T sur un intervalle d'amplitude T, l'intégrale ne dépend pas de l'intervalle choisi.

Théorème 4.4.2 *Pour toute série trigonométrique $\sum_n (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$ convergeant normalement sur $\mathbb{R}$, de somme S, on a*

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T S(x)dx\ ; \quad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T S(x)\cos n\omega x dx, \quad n > 0, \\ b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T S(x)\sin n\omega x dx, \quad n > 0. \end{aligned}$$

En notation complexe, ces égalités deviennent

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T S(x)e^{-in\omega x}dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Preuve : De $S(x) = a_0 + \sum_{n\geq 1}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$, on déduit , pour tout entier p fixé

$$S(x)\cos(p\omega x) = a_0\cos(p\omega x) + \sum_{n=1}^\infty a_n \cos(n\omega x)\cos p\omega x + b_n \sin(n\omega x)\cos p\omega x.$$

Le membre de droite étant une série convergeant normalement sur $\mathbb{R}$, nous pouvons intégrer terme à terme

$$\begin{aligned} \int_0^T S(x)\cos(p\omega x)dx &= \int_0^T a_0\cos(p\omega x)dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^\infty a_n \int_0^T \cos(n\omega x)\cos(p\omega x)dx \\ &\quad + b_n \int_0^T \sin(n\omega x)\cos p\omega x dx. \end{aligned}$$

Les égalités

$$\begin{aligned}\cos(p\omega x)\cos(q\omega x) &= \frac{1}{2}\cos(p+q)\omega x + \frac{1}{2}\cos(p-q)\omega x\\ \sin(p\omega x)\cos(q\omega x) &= \frac{1}{2}\sin(p+q)\omega x + \frac{1}{2}\sin(p-q)\omega x\end{aligned}$$

impliquent

$$\int_0^T \cos(p\omega x)\cos(q\omega x) = 0 \qquad \text{si} \qquad p \neq q\ ;$$

$$\int_0^T \cos^2(p\omega x)dx = \frac{T}{2} \qquad \text{si} \qquad p > 0\ ;$$

$$\int_0^T \sin(p\omega x)\cos(q\omega x)dx = 0 \qquad \forall\, p, q.$$

Ceci permet de conclure. Le résultat pour b_p s'obtient de façon similaire. □

4.4.4 Développement d'une fonction en série de Fourier

Série de Fourier associée à une fonction

Avec les résultats de la première section, on sait que si une fonction périodique f de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, s'écrit sous la forme

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x)),$$

avec convergence normale de la série trigonométrique, alors les coefficients a_n et b_n sont reliés à f. A la fonction f, nous pouvons donc associer une série trigonométrique $\sum_n(a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x))$; cherchons à déterminer la somme de cette série, lorsqu'elle existe.

Définition 4.4.2 *Soit f une fonction continue par morceaux sur tout intervalle fermé borné, périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$,, la série de Fourier associé à f est la série trigonométrique $\sum_n(a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x))$, définie par*

$$a_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx;$$

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)\,dx, \ \ n > 0;$$

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(n\omega x)\,dx, \ \ n > 0.$$

En notation complexe, la série $\sum_n c_n(f)e^{in\omega x}$, $n \in \mathbb{Z}$, est définie par

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-in\omega x}dx.$$

Déterminons quelques séries de Fourier particulières avant d'étudier leurs propriétés.

Remarque : Si f est paire, alors $b_n(f) = 0$; de même, si f est impaire, $a_n(f) = 0$.

Exemples : 1) Série de Fourier de la fonction périodique de période 1, égale à x sur $]0, 1]$.

Un calcul direct et des intégrations par parties donnent :

$$a_0 = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2};\ a_n = 2\int_0^1 x\cos(2\pi nx)dx = 0;\ b_n = 2\int_0^1 x\sin(2\pi nx)dx = -\frac{1}{n\pi};$$

la série de Fourier associée est

$$\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi nx}{n\pi}.$$

2) Série de Fourier de la fonction périodique de période 2π ; égale à 0 sur $]-\pi, 0]$ et à x^2 sur $[0, \pi[$. Comme ci–dessus, on obtient

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{6} \; ; \; a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = (-1)^n \frac{2}{n^2} \; ;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin(nx) dx = (-1)^n \left(\frac{2}{\pi n^3} - \frac{\pi}{n} \right) - \frac{2}{\pi n^3}.$$

4.4.5 Propriétés des coefficients de la série de Fourier

La somme d'une série trigonométrique présentant généralement des discontinuités, la propriété de classe $\mathcal{C}^1$ doit être généralisée :

Définition 4.4.3 *Une fonction réelle, définie sur $I \subset \mathbb{R}$, est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux si, pour tout intervalle fermé borné $[a, b]$, il existe une suite finie $a_0 = a < a_1 < \ldots < a_k = b$, telle que :*
1) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a_i, a_{i+1}[$, $i = 0, \ldots, k-1$.
2) $\lim_{h\to 0, h>0} f(a_i + h)$ et $\lim_{h\to 0, h>0} f'(a_i + h)$ existent pour $i = 0, \ldots, k-1$; notons les respectivement $f(a_i + 0)$ et $f'(a_i + 0)$.
3) $\lim_{h\to 0, h<0} f(a_i + h)$ et $\lim_{h\to 0, h>0} f'(a_i + h)$ existent pour $i = 0, \ldots, k-1$; notons les respectivement $f(a_i - 0)$ et $f'(a_i - 0)$.

Remarquons que la dérivée d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a, b]$ est bornée sur $[a, b]$. Nous regroupons les principales propriétés des coefficients d'une série de Fourier dans le même énoncé :

Théorème 4.4.3 *Considérons une fonction f, continue par morceaux, périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ et sa série de Fourier associée $\sum_n (a_n(f) \cos(n\omega x) + b_n(f) \sin(n\omega x))$. Les propriétés suivantes sont vérifiées :*
1) Les séries $\sum_n a_n(f)^2$ et $\sum_n b_n(f)^2$ convergentes, donc les suites $(a_n(f))$ et $(b_n(f))$ ont pour limite 0;
2) Si f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, les coefficients de f et de sa dérivée, f', sont reliés par

$$c_n(f') = in\omega c_n(f) \; ; \; a_n(f') = n\omega b_n(f) \; ; \; b_n(f') = -n\omega a_n(f).$$

3) Si f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, les séries $\sum_n (na_n(f))^2$ et $\sum_n (nb_n(f))^2$ sont convergentes.

Preuve : Notons $P_n(f)(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(f) \cos(k\omega t)$. On a

$$\int_0^T P_n(f)^2(t) dt = \frac{T}{2} \sum_{k=1}^{n} a_k(f)^2.$$

Intéressons–nous maintenant à la valeur de $\int_0^T P_n(f)(t)[f(t) - P_n(f)(t)]dt$; en développant le premier facteur, $P_n(f)(t)$, dans le produit $P_n(f)(t)[f(t) - P_n(f)(t)]$, on obtient une somme de termes de la forme $a_p(f) \cos(p\omega t)[f(t) - P_n(f)(t)]$, avec $1 \leq p \leq n$. Le calcul

$$\begin{aligned} \int_0^T (\cos p\omega t)[f(t) - P_n(f)(t)]dt &= \int_0^T f(t) \cos(p\omega t)\, dt - \sum_{k=1}^{n} \int_0^T a_k(f) \cos(p\omega t) \cos(k\omega t)\, dt \\ &= \frac{T}{2} - \sum_{k=1}^{n} \int_0^T a_k(f) \cos(p\omega t) \cos(k\omega t)\, dt = 0 \end{aligned}$$

implique

$$\int_0^T P_n(f)(t)[f(t) - P_n(f)(t)]dt = 0.$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned}
\int_0^T f(t)^2 dt &= \int_0^T [f(t) - P_n(f)(t) + P_n(f)(t)]^2 dt \\
&= 2\int_0^T P_n(f)(t)[f(t) - P_n(f)(t)]dt + \int_0^T [f(t) - P_n(f)(t)]^2 dt + \int_0^T P_n(f)(t)^2 dt \\
&= \int_0^T [f(t) - P_n(f)(t)]^2 dt + \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k(f)^2 \\
&\geq \frac{T}{2}\sum_{k=1}^{n} [a_k(f)]^2
\end{aligned}$$

Ainsi, la série $\sum_{n\geq 0}(a_n(f))^2$ converge.

2) En admettant la validité de la formule d'intégration par partie dans le cas où l'une des fonctions est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux (voir lemme suivant) on a

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}dt = \frac{1}{T}\left\{\left[f(t)\frac{e^{-in\omega t}}{-in\omega}\right]_T - \int_0^T \frac{f'(t)e^{-in\omega t}}{-in\omega}dt\right\} \\
&= \frac{1}{in\omega}c_n(f').
\end{aligned}$$

La propriété 3) est une conséquence immédiate des propriétés 1) et 2). □

4.4.6 Théorème de Dirichlet

Théorème 4.4.4 *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, périodique de période T, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x) = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)).$$

En particulier, si f est de plus continue en x, on a

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\cos(n\omega x) + b_n(f)\sin(n\omega x) = f(x).$$

Remarque : Il existe des fonctions continues dont la série de Fourier associée diverge pour certain valeurs de x.

Preuve : Nous utilisons la notation complexe et choisissons le cas particulier $T = 2\pi$ pour des facilités d'écriture. Notons $S_p(x) = \sum_{-p}^{p} c_n(f)e^{inx}$ la somme partielle de la série de Fourier, en un point x fixé.

Calcul de $S_p(x) - \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$.

Notons $\phi_p(x) = \sum_{-p}^{p} e^{inx}$; la fonction $\phi_p(x)$ est paire et vérifie :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \phi_p(x)dx = 2\pi \ ; \ \int_{-\pi}^{0} \phi_p(x)dx = \pi \ ; \ \int_0^{\pi} \phi_p(x)dx = \pi.$$

Le calcul de la somme partielle $S_p(x)$

$$\begin{aligned} S_p(x) &= \sum_{n=-p}^{n=p} e^{inx}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sum_{n=-p}^{n=p} e^{in(x-t)}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\phi_p(x-t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{a-\pi}^{a+\pi} f(t)\phi_p(x-t)dt \ \forall\ a \\ & \frac{1}{2\pi}\int_{a-x-\pi}^{a-x+\pi} f(t+x)\phi_p(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\phi_p(t)dt \ \text{ pour } a = x \end{aligned}$$

permet d'écrire

$$\begin{aligned} S_p(x) - \frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0)) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\phi_p(t)dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x+0)\phi_p(t)dt \\ &\quad -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-0)\phi_p(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(f(t+x)-f(x+0))\phi_p(t)dt \\ &\quad +\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}(f(t+x)-f(x-0))\phi_p(t)dt. \end{aligned}$$

Il reste à établir que chacune de ces deux intégrales tend vers 0. Les deux preuves étant similaires, nous nous contentons de montrer

$$\lim_{p\to\infty}\int_0^{\pi}\left[f(t+x)-f(x+0)\right]\phi_p(t)dt = 0.$$

Développons $\phi_p(t)$:

$$\begin{aligned} \phi_p(t) &= e^{-ipt}\frac{1-e^{i(2p+1)t}}{1-e^{it}} = \frac{e^{-ipt}-e^{i(p+1)t}}{1-e^{it}} \\ &= \frac{e^{-i\frac{t}{2}}}{e^{-i\frac{t}{2}}}\frac{e^{-ipt}-e^{i(p+1)t}}{1-e^{it}} = \frac{\sin\left(\frac{2p+1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} \end{aligned}$$

Choisissons α, $0<\alpha<\pi$, tel que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]x, x+\alpha[$ et décomposons $\int_0^{\pi} = \int_0^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\pi}$.

Notons M la borne supérieure de f' sur $[0,\alpha]$ et remarquons $t \le \pi\sin\frac{t}{2}$, pour tout $t\in[0,\pi]$. Nous appliquons le théorème des accroissements finis à f sur $[x, x+t]$:

$$\left|\int_0^{\alpha}(f(t+x)-f(x+0))\phi_p(t)dt\right| = \left|\int_0^{\alpha}\frac{tf'(x+\theta t)\sin\left(\frac{2p+1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}dt\right| \le M\pi\alpha.$$

Ainsi, $\int_0^{\alpha}$ peut être rendue arbitrairement petit en choisissant bien α.

La majoration de la deuxième intégrale par un nombre arbitrairement petit est une conséquence du lemme suivant car la fonction $t\mapsto \frac{f(x+t)-f(x+0)}{\sin\frac{t}{2}}$ est $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[\alpha,\pi]$. $\square$

Lemme 4.4.1 *Toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a,b]$ vérifie*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b (f(x)\cos nx)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b (f(x)\sin nx)\,dx = 0.$$

Preuve : Effectuons une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\sin nx dx &= \sum_{i=0}^{k-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\sin(nx)dx \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{k-1}(f(a_i+0)\cos(na_i) - f(a_{i+1}-0)\cos(na_{i+1})) \\
&\quad + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{k-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x)\cos(nx)dx.
\end{aligned}$$

Il suffit maintenant de constater que cette dernière expression tend vers 0 lorsque $n \to \infty$. □

4.4.7 Convergence normale d'une série de Fourier

Théorème 4.4.5 ***(Identité de Parseval)*** *Soit f une fonction continue, périodique, dont la série de Fourier associée converge normalement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme f, alors*

$$2a_0(f)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n(f)^2 + b_n(f)^2\right) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)^2 dx.$$

Preuve : Partons de l'égalité

$$f(x)^2 = a_0(f)f(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n(f)f(x)\cos(n\omega x) + b_n(f)f(x)\sin(n\omega x)).$$

L'hypothèse de converge normale permet de permuter les signes $\sum$ et $\int_0^T$ et d'obtenir

$$\begin{aligned}
\int_0^T f(x)^2 dx &= \int_0^T a_0(f)f(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)dx \\
&\quad + b_n(f)\int_0^T f(x)\sin(n\omega x)dx \\
&= Ta_0(f)^2 + \frac{T}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n(f)^2 + b_n(f)^2\right).
\end{aligned}$$

□

Le résultat suivant fournit une classe de fonctions f dont la série de Fourier associée converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Théorème 4.4.6 *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, périodique, alors la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est égale à f.*

Preuve : De l'inégalité

$$\left(n|a_n(f)| - \frac{1}{n}\right)^2 \geq 0,$$

nous déduisons

$$|a_n(f)| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + (na_n(f))^2\right).$$

Les deux séries $\sum_n \frac{1}{n^2}$ et $\sum_n (na_n(f))^2$, étant convergentes, la série $\sum_n a_n(f)$ est absolument convergente. Ceci permet de conclure. □

Exemples: 1) Série de Fourier de la fonction périodique de période 2π, égale à 0 sur $]-\pi,0]$ et à x^2 sur $[0,\pi[$.
La fonction étant évidemment $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on peut lui appliquer le théorème de Dirichlet et déterminer des somme partielles :
Pour $x=0$. La fonction étant continue en 0, on a $0=\frac{\pi^2}{6}-2(1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots)$ et

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

Pour $x=\pi$. La fonction considérée n'est pas continue en π, donc

$$\frac{\pi^2}{2}=\frac{1}{2}\{f(\pi+0)+f(\pi-0)\}=\frac{\pi^2}{6}+2\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots\right)$$

et

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

2) Série de Fourier de la fonction périodique de période 2π, égale à $|x|$ sur $]-\pi,\pi]$.
Par parité de la fonction f, les coefficients b_n sont nuls. Pour les coefficients a_n, on obtient

$$a_0=\frac{\pi}{2}; a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}t\cos(nt)\,dt=\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n-1}{n^2},$$

d'où $a_{2n}=0$ et $a_{2n+1}=\frac{-4}{\pi(2n+1)^2}$, $n\geq 1$. La fonction étudiée étant $\mathcal{C}^1$ par morceaux, le théorème de Dirichlet s'applique, si $|x|<\pi$, on a

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n\geq 0}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}.$$

En particulier, pour $x=0$, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

L'identité de Parseval se réduit à

$$\frac{\pi^2}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(2n+1)^4}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)^2dt=\frac{2\pi^2}{3},$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}.$$

De

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}=\frac{15}{16}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4},$$

nous déduisons

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

Chapitre 5

Intégrales dépendant d'un paramètre

Dans ce chapitre $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

5.1 Intégrales dépendant d'un paramètre sur un fermé borné

Dans cette section, (a, b) désigne un couple de réels tel que $a < b$, $m \in \mathbb{N}^*$, A une partie de $\mathbb{R}^m$ et $f : A \times [a, b] \longrightarrow K$ une application.

Si, pour chaque $x \in A$, l'application $f(x, .) : [a, b] \longrightarrow K$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux, on peut considérer l'application $F : A \longrightarrow K$ définie par :

$$\forall\, x \in A,\ F(x) = \int_a^b f(x, t)dt.$$

Le but de ce paragraphe est de dégager les propriétés de F à partir de celles de f.

5.1.1 Continuité

Théorème 5.1.1 ***(Continuité sous le signe*** $\int_a^b$***)*** *Si $f : A \times [a, b] \longrightarrow K$ est continue sur $A \times [a, b]$, alors l'application $F : A \longrightarrow K$ définie par :*

$$\forall\ x \in A,\ F(x) = \int_a^b f(x, t)dt$$

est continue sur A.

Preuve : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans A, convergeant vers un élément x de A. La partie $C = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est un compact de A, donc $C \times [a, b]$ est un compact de $A \times [a, b]$, et f, qui est continue sur ce compact y est uniformément continue.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall\ ((c, t), (c', t')) \in (C \times [a, b])^2,\ \|(c, t) - (c', t')\|_1 \leq \eta \Longrightarrow \|f(c, t) - f(c', t')\| < \varepsilon,$$

où $\|\cdot\|_1$ est la norme sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, (x, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R},\ \|(x, t)\|_1 = \|x\| + |t|.$$

Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall\, n \geq N,\ \ \|x_n - x\| \leq \eta.$$

On a alors :

$$\forall\, n \geq N,\ \forall\, t \in [a, b],\ \ \|(x_n, t) - (x, t)\|_1 \leq \eta,$$

donc

$$\forall\, n \geq N,\ \forall\, t \in [a,b],\ \ \|f(x_n,t) - f(x,t)\| < \varepsilon,$$

d'où, par intégration

$$\forall\, n \geq N,\ \ \|F(x) - F(x)\| < (b-a)\varepsilon,$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x).$$

□

Exemples : 1) **Convolution des fonctions continues et T–périodiques**

Soient $T > 0$, $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ continues et T–périodiques, $f * g$ la convolée de f et g, c'est à dire l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ (f * g)(x) = \int_0^T f(t)g(x-t)dt.$$

$f * g$ est T–périodique et, d'après le théorème précédent, elle est continue.

2) L'application $x \mapsto \int_0^1 \frac{\ln(1+|x-t|)}{1+t^2}dt$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Nous allons généraliser le résultat du théorème précédent en faisant varier a et b.

Proposition 5.1.1 *Soit I in intervalle de $\mathbb{R}$, $f : A \times I \longrightarrow K$ une application continue. Alors, l'application $\phi : A \times I \times I \longrightarrow K$ définie par*

$$\forall\, (x,u,v) \in A \times I \times I,\ \ \phi(x,u,v) = \int_u^v f(x,t)dt$$

est continue sur $A \times I \times I$.

Preuve : Remarquons d'abord que, pour tout a de I

$$\forall\, (x,u,v) \in A \times I \times I,\ \ \phi(x,u,v) = \int_a^v f(x,t)dt - \int_a^u f(x,t)dt.$$

Il suffit donc de prouver la continuité de $\phi_a : A \times I \longrightarrow K$ définie par

$$\forall\, (x,u,) \in A \times I,\ \ \phi_a(x,u) = \int_a^u f(x,t)dt.$$

Pour $(x,u,) \in A \times I$ fixé tel que $u \neq a$, le changement de variable $s = \frac{t-a}{u-a}$ donne

$$\phi_a(x,u) = (u-a)\int_0^1 f(x, a + s(u-a))ds,$$

et cette formule est, d'autre part, triviale lorsque $u = a$. Le théorème précédent permet de conclure. □

5.1.2 Dérivation

Dans cette section A désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 5.1.2 ***(Dérivation sous le signe $\int_a^b$)***

Si f est continue sur $A \times [a,b]$ et si $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue sur $A \times [a,b]$, alors l'application $F : A \longrightarrow K$ définie par :

$$\forall\, x \in A,\ \ F(x) = \int_a^b f(x,t)dt$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et

$$\forall\, x \in A,\ \ F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

Preuve : Notons $g : A \longrightarrow K$ l'application définie par

$$\forall\, x \in A, \;\; g(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

Soit $x_0 \in A$ et $A_0 = (-x_0) + A$, qui est un intervalle translaté de A, et $T : A_0 \times [a,b] \longrightarrow K$ l'application définie par

$$\forall\, (h,t) \in A_0 \times [a,b], \;\; T(h,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{h}(f(x_0+h,t) - f(x_0,t)) & \text{si} \quad h \neq 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,t) & \text{si} \quad h = 0 \end{cases}$$

Puisque, pour tout t de $[a,b]$, $f(.,t) : A \longrightarrow K$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A, on a, pour tout (h,t) de $A_0 \times [a,b]$

$$f(x_0+h,t) - f(x_0,t) = \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dx = h \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+hy,t)dy,$$

à laide du changement de variable $y = \frac{1}{h}(x - x_0)$ lorsque $h \neq 0$, et de manière triviale si $h = 0$. Il en résulte que

$$\forall \;\, (h,t) \in A_0 \times [a,b], \qquad T(h,t) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+hy,t)dy.$$

D'après le théorème **??**, l'application T est continue sur $A_0 \times [a,b]$. Toujours d'après le théorème **??**, l'application $\rho : A_0 \longrightarrow K$ définie par $\rho(h) = \int_a^b T(h,t)dt$ est continue sur A_0. En particulier

$$\lim_{h \to 0} \rho(h) = \rho(0).$$

Mais, pour tout h de $A_0 \setminus \{0\}$

$$\rho(h) = \int_a^b \frac{1}{h}(f(x_0+h,t) - f(x_0,t))dt = \frac{1}{h}(F(x_0+h) - F(x_0)),$$

et

$$\rho(0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)dt.$$

Ceci montre que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = g(x_0)$.

Enfin, toujours d'après le théorème **??**, puisque $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $A \times [a,b]$, g est continue sur A. Ceci achève le théorème. □

Remarque : Extension aux fonctions de plusieurs variables

La preuve précédente peut aisément être adaptée pour montrer le résultat plus général suivant :

Théorème 5.1.3 *Soient $m \in \mathbb{N}^*$, U un ouvert de $\mathbb{R}^m$, $f : U \times [a,b] \longrightarrow K$ une application.*

Si f est continue sur $U \times [a,b]$, si pour chaque $i \in \{1,\ldots,m\}$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ existe et est continue sur $U \times [a,b]$, alors l'application $F : U \longrightarrow K$ définie par

$$\forall\, (x_1,\ldots,x_m) \in U, \;\; F(x_1,\ldots,x_m) = \int_a^b f(x_1,\ldots,x_m,t)dt$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et $\forall\, i \in \{1,\ldots,m\}$, $\forall\, x_1,\ldots,x_m \in U$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_m) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_m,t)dt.$$

Corollaire 5.1.1 *Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $f, \frac{\partial f}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ existent et sont continues sur $U \times [a,b]$, alors F est de classe C^n sur U et, pour tout $i \in \mathbb{N}$ tel que $i \leq n$*

$$\forall\, x \in U, \;\; F^{(i)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)dt.$$

Exemples : 1) Calculer, pour $x \in]1, +\infty[$, $\int_0^\pi \ln(x + \cos t)dt$.

Les hypothèses du théorème **??** sont vérifiées donc l'application $F :]1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_0^\pi \ln(x + \cos t)dt$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et

$$\forall\, x \in]1, +\infty[, \quad F'(x) = \int_0^\pi \frac{dt}{x + \cos t}.$$

Le changement de variable $u = \tan \frac{t}{2}$ donne

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(x+1) + (x-1)u^2} = \frac{\pi}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, x \in]1, +\infty[, \quad F(x) = \pi \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) + c.$$

D'autre part

$$\forall\, x \in]1, +\infty[, \quad F(x) = \pi \ln x + \int_0^\pi \ln\left(1 + \frac{1}{x}\cos t\right) dt.$$

L'application $G : [0, 1[\times [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, $(y, t) \mapsto \ln(1 + y \cos t)$ est continue, donc l'application $g : [0, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, y \in [0, 1[, \quad g(y) = \int_0^\pi G(y, t)dt$$

est continue.

En particulier $\lim_{y \to 0^+} g(y) = 0$. On donc

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) - \pi \ln x = 0$$

et on déduit que $c = -\pi \ln 2$, et finalement

$$\forall\, x \in]1, +\infty[, \quad \int_0^\pi \ln(x + \cos t)dt = \pi \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{2}.$$

5.1.3 Intégration

Théorème 5.1.4 ***(Intégration sous le signe intégrale $\int_a^b$)***

Si $f : A \times [a, b] \longrightarrow K$ continue sur $A \times [a, b]$, alors l'application $F : A \longrightarrow K$ définie par

$$\forall\, x \in A, \quad F(x) = \int_a^b f(x, t)dt$$

est continue sur A et, pour tout $(c, d) \in A^2$

$$\int_c^d F(x)dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, t)dx\right) dt.$$

Preuve : La continuité de F est acquise par le théorème **??**.

Notons $G : A \times [a, b] \longrightarrow K$ l'application définie par

$$\forall\, (d, t) \in A \times [a, b], \quad G(d, t) = \int_c^d f(x, t)dx,$$

c étant fixé dans A.

Puisque f est continue, G est continue. De plus, $\frac{\partial G}{\partial d}$ existe et vaut f, donc continue. D'après le théorème **??**, l'application $H : A \longrightarrow K$ définie par

$$\forall\, d \in A,\ \ H(d) = \int_a^b G(d,t)dt$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et

$$\forall\, d \in A,\ \ H'(d) = F(d).$$

Comme $H(c) = 0$, on conclut

$$\forall\, d \in A,\ \ H(d) = H(c) + \int_c^d H'(x)dx = \int_c^d F(x)dx.$$

$\square$

5.2 Intégrales généralisées dépendant d'un paramètre

Nous allons généraliser l'étude de la section précédente au cas de fonction intégrables sur un intervalle quelconque.

5.2.1 Continuité

Dans cette section, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}^*$, A une partie de $\mathbb{R}^m$ et $f : A \times I \longrightarrow K$ une application.

Si, pour chaque x de A, l'application $f(x,.) : I \longrightarrow K$ est continue par morceaux et intégrable sur I, on peut considérer l'application $F : A \longrightarrow K$ définie par

$$\forall\, x \in A,\ \ F(x) = \int_I f(x,t)dt.$$

Le but de cette section est de dégager les propriétés de F à partir de celle de f. Pour cela, on aura besoin de la définition suivante :

Définition 5.2.1 *On dit qu'une application $f : A \times I \longrightarrow K$ vérifie l'hypothèse de domination locale sur $A \times I$ si et seulement si, pour toute partie compacte C incluse dans A, il existe une application $\phi_C : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, positive et intégrable sur I, telle que*

$$\forall\, (x,t) \in C \times I,\ \ |f(x,t)| \leq \phi_C(t).$$

Théorème 5.2.1 ***(Continuité sous le signe $\int_I$)*** *Si $f : A \times [a,b] \longrightarrow K$ est continue sur $A \times I$ et vérifie l'hypothèse de domination locale sur $A \times I$, alors, pour tout $x \in A$, $f(x,.)$ est intégrable sur I et l'application $F : A \longrightarrow K$ définie par :*

$$\forall\, x \in A,\ \ F(x) = \int_I f(x,t)dt$$

est continue sur A.

5.2.2 Dérivation

Théorème 5.2.2 ***(Dérivation sous le signe $\int_I$)***

Si f est continue sur $A \times I$ et vérifie l'hypothèse de domination locale sur $A \times I$; si $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $A \times I$ et vérifie l'hypothèse de domination locale sur $A \times I$, alors, pour tout $x \in A$ $f(x,.)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,.)$ sont intégrables sur I et l'application $F : A \longrightarrow K$ définie par :

$$\forall\, x \in A,\ \ F(x) = \int_I f(x,t)dt$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et

$$\forall\, x \in A,\ \ F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

Exemples : 1) L'application $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{x+|t|}dt$ est continue sur $]0,+\infty[$. En effet, l'application $f :]0,+\infty[\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $(x,t) \mapsto \frac{e^{-t^2}}{x+|t|}$ est continue et vérifie l'hypothèse de domination locale sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ puisque, pour toute partie compacte C incluse dans A, il existe $a > 0$ tel que $C \subset [a,+\infty[$ et, en notant $\phi_C : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui $t \mapsto \frac{e^{-t^2}}{a+|t|}$, ϕ_C est continue et positive, intégrable sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall\, (x,t) \in C \times \mathbb{R},\ \ |f(x,t)| \leq \phi_C(t).$$

2) La fonction Γ d'Euler.

Proposition 5.2.1 *Pour tout x de $]0,+\infty[$, l'application qui à $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. On appelle Γ d'Euler l'application*

$$\begin{array}{rccc} \Gamma : &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt \end{array}$$

Preuve : Notons $f :]0,+\infty[\times]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $(x,t) \longmapsto t^{x-1}e^{-t}$.

Pour tout $x \in]0,+\infty[$ fixé, l'application $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$, positive et intégrable sur $]0,+\infty[$. □

Proposition 5.2.2

$$\begin{array}{rcl} \forall\, x & \in &]0,+\infty[,\ \ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \\ \forall\, n & \in & \mathbb{N},\ \ \Gamma(n+1) = n!. \end{array}$$

Preuve : Soit $(\varepsilon, T) \in]0,1] \times [1,+\infty[$. On a, par une intégration par parties

$$\int_\varepsilon^T t^x e^{-t}dt = \varepsilon^x e^{-\varepsilon} - T^x e^{-T} + x\int_\varepsilon^T t^{x-1}e^{-t}dt.$$

On en déduit, en passant aux limites que

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

La deuxième égalité se vérifie par récurrence.. □

Proposition 5.2.3 *La fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ et*

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in]0,+\infty[,\ \ \Gamma^{(k)} = \int_0^{+\infty} \ln(t)^k t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Preuve : Notons $f :]0,+\infty[\times]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ qui à $(x,t) \mapsto t^{x-1}e^{-t}$. Il est clair que f, $\frac{\partial f}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^k f}{\partial x^k}, \ldots$ existent et sont continues sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, et que

$$\forall\, k \in \mathbb{N},\ \forall\, (x,t) \in]0,+\infty[\times]0,+\infty[,\ \ \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = (\ln(t))^k t^{x-1}e^{-t}.$$

Soit C un compact inclut dans $]0,+\infty[$. Il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$0 < a \leq 1 \leq b \ \text{ et } \ C \in [a,b].$$

Notons pour $k \in \mathbb{N}$, $\phi_{C,k} :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall\ t \in], +\infty[, \ \ \phi_{C,k}(t) = |\ln(t)|^k \max(t^{a-1}, t^{b-1})e^{-t}.$$

Il est clair que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\phi_{C,k}$ est continue, positive et intégrable sur $]0, +\infty[$, et

$$\forall\ (x,t) \in C\times]0, +\infty[, \ \ \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \phi_{C,k}(t).$$

Ainsi, pour tout k de $\mathbb{N}$, $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ existe et continue sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, et vérifie l'hypothèse de domination locale sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$. Le résultat découle du théorème. $\square$