UNIVERSITÉ CADI AYYAD
FACULTÉ DES SCIENCES
SEMLALIA - MARRAKECH

UNIVERSITE CADI AYYAD
MARRAKECH
جامعة القاضي عياض
مراكش

N° d'ordre : 17

THÈSE

présentée à la Faculté pour obtenir le grade de

DOCTEUR

CED : Sciences et Techniques
Spécialité : Mathématiques

Intitulée

Géométrie riemannienne des variétés de Poisson

par

Zouhair SAASSAI

Soutenue le 26 octobre 2013 devant la commission d'examen :

Abdelhak Abouqateb	Université Cadi Ayyad	Président
Aissa Wade	Université d'État de Pennsylvanie	Rapporteuse
Aziz El Kacimi	Université de Valenciennes	Rapporteur
Aziz Ikemakhen	Université Cadi Ayyad	Rapporteur
Bouchra Gmira	Université Abdelmalek Essaadi	Examinatrice
Mohamed Boucetta	Université Cadi Ayyad	Directeur

FICHE PRÉSENTATIVE DE LA THÈSE

- Nom et Prénom de l'auteur : SAASSAI ZOUHAIR.
- Intitulé du travail : *Géométrie riemannienne des variétés de Poisson*.
- Encadrant : BOUCETTA MOHAMED (PES), Équipe « Géométrie, Topologie et Applications », FST de Marrakech, Université Cadi Ayyad.
- Lieux de réalisation du travail : Au sein de l'Équipe « Géométrie, Topologie et Applications », FST de Marrakech, Université Cadi Ayyad.
- Période de réalisation du travail de thèse : 5 ans.
- Rapporteurs autres que l'encadrant :
  - Aissa Wade (Associate Professor), Université d'État de Pennsylvanie, États-Unis.
  - El Kacimi Alaoui aziz (Professeur des universités), Université de Valenciennes, France.
  - Ikemakhen Aziz (PES), Université Cadi Ayyad, Maroc.
- Ce travail a donné lieu à :
  - COMMUNICATION

    Titre : *« Une classe de structures de Poisson compatibles avec la structure de Poisson canonique sur le fibré cotangent »*. Journées GGTM-CIMPA : « Géométrie, Topologie et Systèmes dynamiques », Université Hassan II, Casablanca, 26-28 octobre 2011.
    `http://www.ggtm.univcasa.ma/journees-Casa.php`.
  - PUBLICATIONS

    [1] *A class of Poisson structures compatible with the canonical Poisson structure on the cotangent bundle* (avec M. Boucetta), **C. R. Acad. Sci. Paris**, Ser. I 349 (2011) 331-335.

    [2] *On the local structure of noncommutative deformations* (avec M. Boucetta), **Journal of Geometry and Physics**, Vol. 82 (2014) 64-74.

بسم الله الرحمن الرحيم

بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

﴿ ٱلْحَمْدُ لِلَّهِ ٱلَّذِى هَدَىٰنَا لِهَٰذَا وَمَا كُنَّا لِنَهْتَدِىَ لَوْلَآ أَنْ هَدَىٰنَا ٱللَّهُ ﴾

« Louange à Dieu qui nous a guidés à ceci. Nous n'aurions pas été guidés, si Dieu ne nous avait pas guidés » Le Saint Coran, sourate 7, verset 43.

À mes parents, mes frères et ma soeur

À mon épouse

Remerciements

Je tiens vivement à remercier mon directeur de thèse *Mohamed Boucetta* pour avoir dirigé ma thèse avec patience et pour m'avoir fait confiance malgré les connaissances faibles que j'avais en octobre 2008 sur la géométrie de Poisson. Pendant ces cinq ans, j'ai pu apprendre et profiter considérablement de son expérience et de son culture mathématique. Je lui suis très reconnaissant pour les qualités scientifiques et pédagogiques de son encadrement. Je le remercie particulièrement pour avoir su me guider pour mener à bien ce travail, tout en me laissant une grande autonomie. Merci bien !

Je suis reconnaissant envers tous ceux qui ont manifesté leur intérêt pour ce travail et qui ont pris de leur temps pour lire ces pages. À ce titre, je voudrais exprimer mes sincères remerciements particulièrement à mes rapporteurs, *Aissa wade*, *Aziz El Kacimi* et *Aziz Ikemakhen*. Leurs remarques, commentaires et suggestions ont grandement contribué à améliorer la qualité de ce mémoire. Je les remercie aussi pour avoir accepté d'être membres du jury. Je remercie également *Abdelhak Abouqateb*, d'une part, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury ; d'autre part, pour son sourire permanent et pour la sympathie que j'ai trouvé auprès de lui. Ma gratitude va aussi à *Bouchra Gmira* pour s'être intéressée à mon travail en acceptant de faire partie du jury.

Je dois un grand merci aux organisateurs de « Poisson 2012 : Summer School and Conference » pour m'avoir donné l'opportunité d'y participer. Lors de cette conférence, j'ai pu mener plusieurs discussions avec *Eli Hawkins* ; je l'en remercie vivement. Je remercie également *Hamid Abchir* pour son accueil chaleureux lors des Journées de géométrie, topologie et systèmes dynamiques à Casablanca, et lors de l'école CIMPA « Géométrie symplectique et topologie géométrique » à Meknès.

Je mesure la chance que j'ai eu d'avoir participé (en tant que vacataire) à l'enseignement des travaux dirigés de mathématiques au sein de la faculté des sciences et techniques de Marrakech. À ce propos, je voudrais remercier le chef et l'ex-chef du département de mathématiques, *Noureddine Alaa* et *Rachid Khiri*, pour leur confiance en moi.

J'adresse mes plus tendres remerciements à mes très chers parents, Lhaja *Asma* et Lhaj *Omar*, qui m'ont toujours été d'un grand réconfort et sans qui je ne serais jamais arrivé jusqu'ici. J'aimerais aussi exprimer ma profonde gratitude envers ma soeur et amie *Soukaina*, ainsi que mes frères *Soufian* et *Ayoub*.

Enfin, ce travail n'aurait pu aboutir sans le dévouement inconditionnel de mon épouse *Amal*, qui m'a accompagné, soutenu et encouragé indéfectiblement tout au long de cette thèse. Son amour infini m'a toujours été une source de motivation. Qu'elle trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Résumé

Le point de départ de cette thèse est l'étude des interactions entre la géométrie riemannienne et la géométrie de Poisson. On s'intéresse particulièrement à deux situations, relativement indépendantes, qui apparaissent naturellement dans ce contexte.

Dans la première partie de cette thèse, on étudie une classe de structures de Poisson définies naturellement sur le fibré cotangent de toute variété de Poisson (M, π) munie d'une métrique riemannienne g. Le résultat principal de cette partie énonce qu'une telle structure de Poisson est compatible avec la structure de Poisson canonique du fibré cotangent si et seulement si π est parallèle par rapport à la connexion de Levi-Civita ∇ associée à g. En exploitant ceci, on exprime, dans le cas particulier où $M = G$ est un groupe de Lie et π et g sont invariants à gauche, la condition $\nabla\pi = 0$ au niveau de l'algèbre de Lie de G, $\mathfrak{g} = T_eG$, et l'on établit dans ce cas que $\mathfrak{g}$ se décompose en somme directe d'une sous-algèbre de Lie kählerienne et d'une sous-algèbre de Lie euclidienne vérifiant certaines conditions de compatibilité.

Dans la deuxième partie de cette thèse, on résout le problème inverse d'un résultat de M. Boucetta fournissant un modèle de variétés munies d'une structure de Poisson et d'une métrique riemannienne vérifiant les conditions de compatibilité, introduites par E. Hawkins, nécessaires à l'existence d'une déformation non commutative issue d'un triplet spectral décrivant la métrique. On montre qu'étant donné une variété de Poisson (M, π) munie d'une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion contravariante sans torsion ni courbure $\mathcal{D}$, il existe un tenseur $\mathbf{T}$ tel que $\mathcal{D}\mathbf{T}$ est le tenseur de métacourbure introduit par Hawkins. On calcule $\mathbf{T}$ et le tenseur de métacourbure dans ce cas, et l'on montre que si $\mathbf{T} = 0$ alors, autour de tout point régulier, π et $\mathcal{D}$ sont définies de manière naturelle par l'action d'une algèbre de Lie et une solution de l'équation de Yang-Baxter classique. De plus, si $\mathcal{D}$ est la connexion de Levi-Civita contravariante associée à π et une métrique riemannienne, l'action peut être choisie de telle sorte qu'elle préserve la métrique.

Mots clés : Structures de Poisson compatibles, connexion contravariante, métacourbure.

Abstract

The starting point of this thesis is the study of the interplay between the Riemannian geometry and Poisson geometry. We are particularly interested in two situations, relatively independent, which arise naturally in this context.

In the first part of this thesis, we study a class of Poisson structures defined naturally on the cotangent bundle of any Poisson manifold (M, π) endowed with a Riemannian metric g. The main result of this part expresses that such a Poisson structure is compatible with the canonical Poisson structure of the cotangent bundle if and only if π is parallel with respect to the Levi-Civita connection ∇ associated to g. Using

this, we express, in the particular case where $M = G$ is a Lie group and π and g are left-invariant, the condition $\nabla\pi = 0$ at the level of the Lie algebra of G, $\mathfrak{g} = T_eG$, and we then show that in this case $\mathfrak{g}$ splits into a direct sum of a Kähler Lie sub-algebra and a Euclidean sub-algebra verifying some compatibility conditions.

In the second part of this thesis, we solve the inverse problem of a result by M. Boucetta providing a model of manifolds endowed with a Poisson structure and a Riemannian metric verifying the compatibility conditions, introduced by E. Hawkins, necessary to the existence of a noncommutative deformation coming from a spectral triple describing the metric. We show that given a Poisson manifold (M, π) endowed with a flat, torsion-free, contravariant $\mathcal{F}^{reg}$-connection, there exists a tensor $\mathbf{T}$ such that $\mathcal{D}\mathbf{T}$ is the metacurvature tensor introduced by Hawkins. We compute $\mathbf{T}$ and the metacurvature tensor in this case, and show that if $\mathbf{T} = 0$ then, near any regular point, π and $\mathcal{D}$ are defined in a natural way by a Lie algebra action and a solution of the classical Yang-Baxter equation. Moreover, when $\mathcal{D}$ is the contravariant Levi-Civita connection associated to π and a Riemannian metric, the action can be chosen in such a way that it preserves the metric.

Keywords: Compatible Poisson structures, contravariant connection , metacurvature.

Table des matières

Introduction **xiii**

Notations **xix**

Rappel **xxi**

1 Introduction à la géométrie de Poisson **1**
1.1 Qu'est ce qu'une variété de Poisson ? 2
1.1.1 Crochets de Poisson 2
1.1.2 Tenseurs de Poisson 5
1.2 Feuilles symplectiques et structure locale des variétés de Poisson . . . 11
1.2.1 Définitions et vocabulaire 11
1.2.2 Le théorème de Weinstein 13
1.2.3 Feuilles symplectiques 16
1.3 Calcul de Poisson 17
1.3.1 Algébroïdes de Lie 17
1.3.2 Le fibré cotangent d'une variété de Poisson est un algébroïde de Lie 18
1.3.3 Connexions Contravariantes 24
1.4 Structures de Poisson invariantes à gauche sur un groupe de Lie 27

2 Structures bi-hamiltoniennes sur le fibré cotangent d'une variété de Riemann-Poisson **33**
2.1 Tenseur de Poisson dual d'un algébroïde de Lie 34
2.2 Structures bi-hamiltoniennes sur le fibré cotangent 37
2.2.1 Cas d'une variété munie d'un (1,1)-tenseur 37
2.2.2 Cas d'une variété de Riemann-Poisson 39
2.3 Groupes de Lie munis d'une métrique invariante à gauche et d'un tenseur de Poisson invariant à gauche parallèle 42

3 Géométrie des variétés de Riemann-Poisson plates et métaplates **47**
3.1 Qu'est ce que la métacourbure ? 47

3.1.1 Le crochet de Hawkins 47
3.1.2 La métacourbure 52
3.1.3 Le tenseur **T** 54
3.2 Calcul des tenseurs $\mathcal{M}$ et **T** 55
3.2.1 Cas symplectique 62
3.2.2 Cas d'une variété de Riemann-Poisson 63
3.3 Résultat principal 64

Bibliographie **69**

Introduction

Le point de départ de cette thèse est l'étude des interactions entre la géométrie riemannienne et la géométrie de Poisson telles qu'elles apparaissent dans [5], [7], [8], [9], [25]. Plus précisément, on s'est intéressé aux deux situations suivantes relativement indépendantes.

Partie I

Dans la première partie de cette thèse, on s'est intéressé à une classe de structures de Poisson définies naturellement sur le fibré cotangent de toute variété lisse équipée d'un tenseur de Poisson et d'une métrique riemannienne. On appellera un tel triplet *variété de Riemann-Poisson*.
Étant donné une variété de Riemann-Poisson (M, π, g), le tenseur de Poisson π définit sur T^*M une structure d'algébroïde de Lie dont l'application d'ancrage est définie par

$$\beta\big(\pi_\sharp(\alpha)\big) = \pi(\alpha, \beta) \quad \forall\, \alpha, \beta \in \Omega^1(M),$$

et dont le crochet de Lie est donné par

$$[\alpha, \beta]_\pi = \mathcal{L}_{\pi_\sharp(\alpha)}\beta - \mathcal{L}_{\pi_\sharp(\beta)}\alpha - d\big(\pi(\alpha, \beta)\big).$$

Il est connu (voir, e.g., [36]) que sur le fibré dual $\mathcal{A}^*$ d'un algébroïde de Lie $(\mathcal{A}, [\ ,\ ], \#)$ est définie une structure de Poisson (linéaire). Notons Π (resp. Π_0) le tenseur de Poisson défini sur TM (resp. T^*M), dual de l'algébroïde de Lie $(T^*M, [\ ,\ ]_\pi, \pi_\sharp)$ (resp. $(TM, [\ ,\ ], \mathrm{Id}_{TM})$ [1]). Grâce à la métrique g, le fibré tangent s'identifie au fibré cotangent via l'isomorphisme musical $\#_g^{-1} : TM \to T^*M$. Ceci permet de définir un tenseur de Poisson Π^g sur T^*M, en prenant Π^g comme étant l'image de Π par $\#_g^{-1}$. Par ailleurs, le (1,1)-tenseur $J = \pi_\sharp \circ \#_g^{-1}$ reliant π à g définit, d'après [48], un champ de bivecteurs Π_J sur T^*M, qui est de Poisson et compatible avec Π_0 si la torsion de Nijenhuis de J est nulle.

1. Ici $[\ ,\ ]$ désigne le crochet de Lie usuel des champs de vecteurs et Id_{TM} dénote l'application identique de TM.

On est donc devant la situation suivante. Sur le fibré cotangent de M sont définis : le tenseur de Poisson *canonique* Π_0, le tenseur de Poisson Π^g et le champ de bivecteurs Π_J. On peut alors se poser les deux questions naturelles suivantes :

1. *Quand Π^g est-il compatible avec Π_0 ?*
2. *Quelle relation y-a-t-il entre Π^g et Π_J ?*

On démontre le théorème suivant :

Théorème 0.1. *Les assertions suivantes sont équivalentes* :

1) Π^g *est compatible avec* Π_0.

2) $\Pi^g = \Pi_J$.

3) π *est parallèle par rapport à la connexion de Levi-Civita de* g.

Si de plus π est symplectique, alors 1), 2) *ou* 3) *est satisfaite si et seulement si J est sans torsion de Nijenhuis.*

Une conséquence immédiate du théorème 0.1 est l'existence sur le fibré cotangent de toute variété kählérienne d'une structure de Poisson compatible avec sa structure de Poisson canonique.

Dans le cas d'un groupe de Lie connexe G muni d'une métrique riemannienne g et d'une structure de Poisson π invariantes à gauche, on exprime grâce au théorème 0.1 et sa preuve, la condition $\nabla\pi = 0$ au niveau de l'algèbre de Lie de G. Ceci nous permet d'établir le théorème suivant.

Théorème 0.2. *Si π est parallèle par rapport à la connexion de Levi-Civita de g, alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G se décompose en somme directe d'espaces vectoriels, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h}$, d'une sous-algèbre de Lie kählérienne $(\mathfrak{k}, \langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{k}}, I)$ et d'une sous-algèbre de Lie euclidienne $(\mathfrak{h}, \langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{h}})$. En outre, il existe deux représentations d'algèbres de Lie $\rho_{\mathfrak{k}} : \mathfrak{k} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{h})$ et $\rho_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{k})$ telles que, pour tous $u \in \mathfrak{k}$ et $v \in \mathfrak{h}$, $\rho_{\mathfrak{k}}(u)$ et $\rho_{\mathfrak{h}}(v)$ sont antisymétriques par rapport à $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{h}}$ et $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{k}}$, respectivement, et $\rho_{\mathfrak{h}}(v)$ commute avec I.*

Partie II

Le problème mathématique traité dans la deuxième partie de cette thèse trouve son origine dans un travail récent d'E. Hawkins [24, 25]. Animé par des motivations physiques, Hawkins a étudié les déformations non commutatives de l'algèbre extérieure des formes différentielles d'une variété lisse M. Il a montré que s'il existe une déformation non commutative de $\Omega^*(M)$, alors il existe sur $\Omega^*(M)$ un crochet de Poisson gradué différentiel $\{\ ,\ \}$ de degré 0, appelé par Hawkins *crochet de Poisson généralisé*. Celui-ci est entièrement déterminé par un tenseur de Poisson π et une connexion contravariante $\mathcal{D}$ sans torsion ni courbure via :

$$\pi(df, dg) := \{f, g\}\,; \quad \mathcal{D}_{df}\alpha := \{f, \alpha\}\,. \tag{1}$$

Inversement, étant donné un tenseur de Poisson π et une connexion contravariante $\mathcal{D}$ sans torsion ni courbure, les formules (1) s'étendent pour définir sur $\Omega^*(M)$ un unique crochet $\{\ ,\ \}$ ayant toutes les propriétés d'un crochet de Poisson gradué différentiel de degré 0, à l'exception de l'identité de Jacobi graduée. Hawkins a mis en évidence un (2,3)-tenseur $\mathcal{M}$, appelé *métacourbure* de $\mathcal{D}$, vérifiant

$$\mathcal{M}(df,\alpha,\beta) = \{f,\{\alpha,\beta\}\} - \{\{f,\alpha\},\beta\} - \{\alpha,\{f,\beta\}\}\,, \tag{2}$$

et a montré que l'identité de Jacobi est équivalente à ce que $\mathcal{M}$ soit identiquement nul. Sur un autre registre, Hawkins a montré que, sur une variété riemannienne (M,g), si une déformation non commutative de l'algèbre $\Omega^*(M)$ provient d'un triplet spectral [2] décrivant la métrique, alors le tenseur de Poisson π associé à la déformation et la métrique g satisfont les conditions de compatibilité suivantes :

(H_1) *Platitude* : la connexion de Levi-Civita contravariante $\mathcal{D}$ associée à (π,g) est plate ;

(H_2) *Métaplatitude* : la métacourbure de $\mathcal{D}$ est identiquement nulle ;

(H_3) *Unimodularité* : le tenseur de Poisson π est compatible avec le volume riemannien μ, i.e.,
$$d(i_\pi\mu) = 0.$$

La connexion de Levi-Civita contravariante $\mathcal{D}$ associée au couple (π,g) est l'analogue contravariant de la connexion de Levi-Civita classique ; elle a été introduite dans [5].
Le résultat principal de Hawkins ([25, théorème 6.6 et aussi lemme 6.5]) énonce que si (M,π,g) est une variété de Riemann-Poisson vérifiant (H_1), (H_2) et (H_3) avec M compacte, alors π s'écrit au voisinage de tout point régulier $x_0 \in M$ de rang $2r$ sous la frome

$$\pi = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}\, X_i \wedge X_j \tag{3}$$

où la matrice (a_{ij}) est constante et inversible et $\{X_1,\ldots,X_{2r}\}$ est une famille libre de champs de Killing qui commutent deux à deux. (Bien que la conclusion de ce résultat soit simple, sa démonstration est par contre difficile !)

D'un autre côté, M. Boucetta a montré dans [6] que si $\zeta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}^1(M)$ est une action d'une algèbre de Lie de dimension finie sur une variété lisse M et $r \in \wedge^2\mathfrak{g}$ est une solution de l'équation de Yang-Baxter classique, alors :

(a) L'application $\mathcal{D}^r : \Omega^1(M)\times\Omega^1(M) \to \Omega^1(M)$ définie par

$$\mathcal{D}^r_\alpha\beta = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\,\alpha\big(\zeta(u_i)\big)\,\mathcal{L}_{\zeta(u_j)}\beta\,, \tag{4}$$

où $\{u_1,\ldots,u_n\}$ est une base quelconque de $\mathfrak{g}$ et a_{ij} sont les composantes de r dans cette base, dépend uniquement de r et ζ et définit une connexion contravariante sans torsion ni courbure relativement au tenseur de Poisson $\pi^r := \zeta(r)$.

2. Voir, e.g., [22] pour une discussion détaillée au sujet de triplets spectraux.

(b) Si g est une métrique riemannienne sur M telle que, pour tout $u \in \mathrm{Im}\, r$, $\zeta(u)$ est un champ de Killing alors $\mathcal{D}^r$ n'est rien d'autre que la connexion de Levi-Civita contravariante associée à (π^r, g).

(c) Si les sous-algèbres d'isotropie de la restriction de ζ à $\mathrm{Im}\, r$ sont triviales, la métacourbure de $\mathcal{D}^r$ est nulle.

Dans ce contexte, on peut réexprmier (3) en disant qu'il existe une action libre $\zeta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}^1(U)$ d'une algèbre de Lie abélienne de dimension finie $\mathfrak{g}$ sur un voisinage ouvert U de x_0 préservant g, et une solution $r \in \wedge^2\mathfrak{g}$ de l'équation de Yang-Baxter classique telles que $\pi = \pi^r$. De plus, comme ζ préserve g alros $\mathcal{D} = \mathcal{D}^r$ (d'après (b)). Il en résulte que $\mathcal{D}$ est une connexion de Poisson, i.e. $\mathcal{D}\pi = 0$, et est donc, d'après [7], une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion.

Étant donné une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion contravariante sans torsion ni courbure sur une variété de Poisson, on montre qu'il existe sur l'ouvert dense des points réguliers un tenseur $\mathbf{T}$ de type (2,2), symétrique par rapport aux indices contravariants et antisymétrique par rapport aux indices covariants, vérifiant

(i) $\mathcal{D}\mathbf{T} = \mathcal{M}$ (métacourbure de $\mathcal{D}$) ;

(ii) $\mathbf{T}$ est identiquement nul si et seulement si la différentielle extérieure de toute 1-forme $\mathcal{D}$-parallèle est aussi $\mathcal{D}$-parallèle.

En regardant de plus près la démonstration de (c), on remarque qu'afin d'établir que $\mathcal{M} = 0$ Boucetta a montré que $\mathcal{D}^r$ est une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion et que toute 1-forme $\mathcal{D}^r$-parallèle est de différentielle $\mathcal{D}^r$-parallèle aussi. Ainsi (c) peut être reformulé comme suit :

(c') *Si les sous-algèbres d'isotropie de la restriction de ζ à* $\mathrm{Im}\, r$ *sont triviales,* $\mathcal{D}^r$ *est une* $\mathcal{F}^{reg}$*-connexion et* $\mathbf{T} = 0$ *(et donc* $\mathcal{M} = 0$*).*

À noter que dans le cas étudié par Hawkins $\mathbf{T}$ est identiquement nul puisque comme l'on a vu plus haut l'action ζ est libre. Il est alors naturel d'étudier le problème suivant, inverse du résultat de Boucetta : *Étant donné une variété de Riemann-Poisson* (M, π, g) *dont la connexion de Levi-Civita contravariante est une* $\mathcal{F}^{reg}$*-connexion plate et telle que* $\mathbf{T} = 0$*, existe-t-il une action libre d'une algèbre de Lie de dimension finie* $\mathfrak{g}$ *préservant* g *et une solution* $r \in \wedge^2\mathfrak{g}$ *de l'équation de Yang-Baxter classique telles que* $\pi = \pi^r$ *et* $\mathcal{D} = \mathcal{D}^r$ *?*

Le théorème suivant, résultat principal de la deuxième partie de cette thèse, répond positivement à cette question dans un cadre plus général.

Théorème 0.3. *Soit* $(M, \pi, \mathcal{D})$ *une variété de Poisson munie d'une connexion contravariante sans torsion ni courbure.*

(1) *Si* $\mathcal{D}$ *est une* $\mathcal{F}^{reg}$*-connexion et* $\mathbf{T} = 0$*, alors pour tout point régulier* x_0 *de rang* $2r$ *il existe une action libre* $\zeta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(U)$ *d'une algèbre de Lie réelle* $\mathfrak{g}$ *de dimension* $2r$ *sur un voisinage ouvert* U *de* x_0 *et une solution inversible* $r \in \wedge^2\mathfrak{g}$ *de l'équation de Yang-Baxter classique telles que* $\pi = \pi^r$ *et* $\mathcal{D} = \mathcal{D}^r$.

(2) *Si de plus* $\mathcal{D}$ *est la connexion de Levi-Civita contravariante associée à* π *et une métrique riemannienne* g*, alors* ζ *peut être choisie de telle sorte que ses champs fondamentaux soient de Killing.*

Ce résultat est un pas de plus vers la déscription locale des variétés de Riemann-Poisson vérifiant (H_1) et (H_2). La structure locale de ces variétés reste encore un problème ouvert et est un bon thème de recherche futur. Par ailleurs, une application possible du théorème 0.3 peut être d'établir une démonstration simple du théorème 6.6 de [25], résultat principal de Hawkins. L'idée est de montrer comme l'on a pu constater plus haut (mais sans utiliser le théorème 6.6 de [25] lui-même) que sous les hypothèses de Hawkins la connexion de Levi-Civita contravariante est une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion et que $\mathbf{T} = 0$. Ceci constituera la suite logique de cette thèse.

Cette thèse consiste en trois chapitres. Le premier est une introduction succincte à la géométrie de Poisson. On y donne les notions de base ainsi que quelques résultats fondamentaux en géométrie de Poisson, notamment le théorème de Weinstein, le feuilletage symplectique, le calcul de Poisson : algébroïde de Lie sur le fibré cotangent d'une variété de Poisson, connexions contravariante, etc. Le deuxième est consacré aux démonstrations des théorème 0.1 et 0.2. Dans le troisième, on expose de manière détaillée la notion de métacourbure, on définit le tenseur $\mathbf{T}$ et on établit une formule pour le tenseur de métacourbure (et pour $\mathbf{T}$ également) dans le cas d'une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion (voir les théorèmes 3.15 et 3.16), généralisant ainsi une formule de Hawkins. Chemin faisant, on démontre quelques lemmes importants préparant la preuve du théorème 0.3.

Notations

Toutes les structures qui apparaissent dans ce texte (variétés, fibrés, tenseurs, etc...) sont supposées lisses, i.e., de classe C^∞.

Tout au long de ce texte on utilise les notations suivantes :

M	variété lisse de dimension d
TM	fibré tangent de M
T^*M	fibré cotangent de M
$\Gamma(\mathcal{V})$	espace des sections d'un fibré vectoriel $\mathcal{V}$ sur M
$\mathfrak{X}^k(M) := \Gamma\big(\bigwedge^k TM\big)$	espace des champs de k-vecteurs sur M
$\Omega^k(M) := \Gamma\big(\bigwedge^k T^*M\big)$	espace des k-formes différentielles sur M
$\mathfrak{X}^0(M) = \Omega^0(M) = C^\infty(M)$	espace des fonctions lisses sur M à valeurs réelles
$\mathfrak{X}^*(M) := \bigoplus_{k=0}^d \mathfrak{X}^k(M)$	espace des champs de multivecteurs sur M
$\Omega^*(M) := \bigoplus_{k=0}^d \Omega^k(M)$	espace des formes différentielles sur M
$\lvert\omega\rvert$	degré d'une forme différentielle ω
$d\omega$	différentielle extérieure de ω
$X(f) = X \cdot f = df(X)$	dérivée de f dans la direction de X
F_*	application linéaire tangente de F
i_X, i_α	produit intérieur par X, α
$\mathcal{L}_X$	dérivée de Lie dans la direction de X
Φ_X^t	flot local de X
X_f	champ hamiltonien d'une fonction f
$\displaystyle\oint_{i_1,\ldots,i_s}$	somme circulaire sur $i_1, \ldots, i_s$
δ_{ij}	symbole de Kronecker

Rappel

On rappelle ici les formules utiles suivantes.

1. Formule de Cartan pour la différentielle : pour toute $\omega \in \Omega^n(M)$, et tous $X_1, \dots, X_{n+1} \in \mathfrak{X}^1(M)$,

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i-1} X_i \cdot \omega\big(X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_{n+1}\big) \\ &+ \sum_{1 \le i < j \le n+1} (-1)^{i+j} \omega\big([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_{n+1}\big) , \end{aligned} \tag{5}$$

   où le chapeau $\widehat{\ }$ signifie que le terme correspondant est omis.

2. Dérivée de Lie : pour toute $\omega \in \Omega^n(M)$, et tous $X, X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{X}^1(M)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \omega(X_1, \dots, X_n) &= X \cdot \omega(X_1, \dots, X_n) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n} \omega(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_n) , \end{aligned} \tag{6}$$

   et pour tous $P \in \mathfrak{X}^n(M)$, $X \in \mathfrak{X}^1(M)$, et toutes $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Omega^1(M)$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X P(\alpha_1, \dots, \alpha_n) &= X \cdot P(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n} P(\alpha_1, \dots, \mathcal{L}_X \alpha_i, \dots, \alpha_n) . \end{aligned} \tag{7}$$

3. Formule de Cartan pour la dérivée de Lie : pour toute $\omega \in \Omega^n(M)$, et tout $X \in \mathfrak{X}^1(M)$,

$$\mathcal{L}_X \omega = i_X(d\omega) + d(i_X \omega) . \tag{8}$$

Chapitre 1

Introduction à la géométrie de Poisson

La géométrie de Poisson trouve son origine dans la formulation mathématique de la mécanique hamiltonienne. Bien que les structures de Poisson remontent au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, notamment, avec les travaux de Poisson et Hamilton sur l'équation de mouvement, et ceux de Sophus Lie sur la géométrie des E.D.P, la théorie mathématique des variétés de Poisson n'a fait ses débuts qu'aux années quatre-vingts avec les travaux de Lichnerowicz, Weinstein, etc. Depuis, la théorie s'est développée rapidement, stimulée par des connexions avec d'autres domaines des mathématiques et de la physique mathématique, y compris la géométrie différentielle, la théorie de Lie, la théorie de quantification, la géométrie non commutative, la théorie des représentations, les groupes quantiques, les systèmes intégrables, la mécanique classique/quantique, la théorie des cordes, etc.

L'objectif de ce chapitre est d'introduire le lecteur au domaine de la géométrie de Poisson, et ce, en présentant quelques aspects fondamentaux du sujet. Pour un traitement détaillé du thème on pourra consulter [32, 19, 51]. Le lecteur désirant avoir un aperçu d'ensemble rapide sur la géométrie de Poisson pourra se référer à [53].

Dans la première section, on définit ce qu'est une variété de Poisson et on explicite quelques exemples. La deuxième section porte sur le théorème de Weinstein, qui permet de décrire l'aspect local d'une structure de Poisson. Il permet aussi de montrer que toute variété de Poisson est une réunion disjointe de sous-variétés symplectiques immergées dites feuilles symplectiques. La troisième section est consacrée au calcul de Poisson. On y verra que le fibré cotangent de toute variété de Poisson jouit naturellement d'une structure d'algébroïde de Lie, ce qui donne naissance à une version contravariante du calcul de Cartan. La dernière section porte sur les structures de Poisson invariantes à gauche sur un groupe de Lie.

1.1 Qu'est ce qu'une variété de Poisson ?

1.1.1 Crochets de Poisson

Définition 1.1. On appelle ***crochet de Poisson*** sur une variété M la donnée d'une application

$$C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)\,, \text{ notée } (f,g) \mapsto \{f,g\}\,,$$

qui est $\mathbb{R}$-bilinéaire et vérifiant les propriétés suivantes : pour toutes $f,g,h \in C^\infty(M)$,

(1) $\{f,g\} = -\{g,f\}$ (antisymétrie)

(2) $\{f,gh\} = \{f,g\}h + g\{f,h\}$ (règle de Leibniz)

(3) $\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0$ (identité de Jacobi).

Munie d'un tel crochet, M est appelée ***variété de Poisson***.

Remarques 1.2.

(a) Un crochet de Poisson n'est rien d'autre qu'un crochet de Lie sur l'espace des fonctions lisses sur M, vérifiant en plus la règle de Leibniz.

(b) Par antisymétrie, le crochet de Poisson satisfait également la règle de Leibniz suivante :

$$\{fg,h\} = f\{g,h\} + g\{f,h\}\,. \tag{1.1}$$

Exemple 1.3 (Structures de Poisson triviales)**.** Toute variété M peut être équipée d'une structure de Poisson triviale via $\{f,g\} = 0 \ \forall\, f,g \in C^\infty(M)$.

Exemple 1.4 (Variétés symplectiques)**.** On rappelle qu'une *variété symplectique* est une variété M munie d'une 2-forme différentielle ω, fermée (i.e. $d\omega = 0$) et non dégénérée, i.e., l'homomorphisme $\omega^\flat : TM \to T^*M$ qui à $v \mapsto \omega(v,.)$ est un isomorphisme. Étant donné une variété symplectique (M,ω), on définit, pour toutes $f,g \in C^\infty(M)$,

$$\{f,g\} := \omega(X_f, X_g) = X_f(g) = -X_g(f), \tag{1.2}$$

où X_f est le *champ hamiltonien* de f relativement à ω défini par

$$X_f = -\omega^\sharp(df). \tag{1.3}$$

Ici $\omega^\sharp$ dénote l'inverse de $\omega^\flat$. L'application $\{\ ,\ \}$ ainsi définie est un crochet de Poisson ; en effet, $\{\ ,\ \}$ est clairement $\mathbb{R}$-bilinéaire, antisymétrique et vérifie la règle de

Leibniz. En utilisant la formule de Cartan (5), on obtient, pour toutes $f, g, h \in C^\infty(M)$:

$$\begin{aligned}
d\omega(X_f, X_g, X_h) &= X_f(\omega(X_g, X_h)) + X_g(\omega(X_h, X_f)) + X_h(\omega(X_f, X_g)) \\
&\quad - \omega([X_f, X_g], X_h) - \omega([X_g, X_h], X_f) - \omega([X_h, X_f], X_g) \\
&= X_f\{g, h\} + X_g\{h, f\} + X_h\{f, g\} \\
&\quad - [X_f, X_g](h) - [X_g, X_h](f) - [X_h, X_f](g) \\
&= X_f\{g, h\} + X_g\{h, f\} + X_h\{f, g\} \\
&\quad - X_f(X_g(h)) + X_g(X_f(h)) - X_g(X_h(f)) \\
&\quad + X_h(X_g(f)) - X_h(X_f(g)) + X_f(X_h(g)) \\
&= -(\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\}), \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

ce qui montre, par fermeture de ω, que $\{\ ,\ \}$ satisfait l'identité de Jacobi .

L'exemple suivant montre qu'un crochet de Poisson n'est généralement pas *symplectique*, c'est-à-dire qu'il ne provient pas en général d'une forme symplectique via (1.2).

Exemple 1.5 (Crochet de Poisson classique sur $\mathbb{R}^n$)**.** Prenons $M = \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ avec coordonnées globales $(q_1, \ldots, q_r, p_1, \ldots, p_r, z_1, \ldots, z_s)$, où r et s sont des entiers naturels tels que $2r + s = n$, et définissons, pour toutes $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right). \qquad (1.5)$$

► **Exercice 1.6.** Vérifier que (1.5) définit un crochet de Poisson et montrer qu'il est symplectique si et seulement si s est nul.

Le crochet ci-dessus est appelé *crochet de Poisson classique*, et a été défini originalement par Siméon Denis Poisson lui-même [42] afin d'étudier l'équation de mouvement dans la mécanique céleste.

Soit $(M, \{\ ,\ \})$ une variété de Poisson. En vertu de la règle de Leibniz, pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$, l'application $g \mapsto \{f, g\}$ est une dérivation de $C^\infty(M)$. Il existe donc un champ de vecteurs unique X_f tel que, pour toute $g \in C^\infty(M)$,

$$\{f, g\} = X_f(g) = dg(X_f). \qquad (1.6)$$

Le champ de vecteurs X_f est appelé ***champ hamiltonien*** [1] de f. Lorsque $X_f = 0$, on dit que f est une ***fonction de Casimir***.

1. Noter que si $\{\ ,\ \}$ est symplectique les formules (1.3) et (1.6) définissent le même champ de vecteurs.

Par bilinéarité du crochet de Poisson, on a

$$X_{tf+sg} = t\,X_f + s\,X_g \quad \forall\, t, s \in \mathbb{R},$$

ce qui montre que l'ensemble des champs hamiltoniens est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{X}^1(M)$.
L'identité de Jacobi implique que, pour toutes $f, g, h \in C^\infty(M)$,

$$\begin{aligned}[X_f, X_g](h) &= X_f(X_g(h)) - X_g(X_f(h)) \\ &= \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\} \\ &= \{\{f, g\}, h\} \\ &= X_{\{f,g\}}(h),\end{aligned}$$

soit

$$[X_f, X_g] = X_{\{f,g\}}\,. \tag{1.7}$$

En d'autres termes, l'application $f \mapsto X_f$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie de $(C^\infty(M), \{\ ,\ \})$ dans $\mathfrak{X}^1(M)$. L'espace des champ hamiltoniens est, en particulier, une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{X}^1(M)$.

D'un autre côté, par antisymétrie du crochet de Poisson et (1.6), on a

$$\{f, g\} = -df(X_g) = dg(X_f),$$

ce qui montre que la valeur en un point $x \in M$ du crochet de Poisson de deux fonctions f et g ne dépend que des valeurs de df et dg en x. Il existe donc une unique section π de $\bigwedge^2 T^*M$ telle que, pour tout $x \in M$,

$$\pi_x(d_x f, d_x g) = \{f, g\}(x) \quad \forall\, f, g \in C^\infty(M).$$

En coordonnées locales $(U; x_1, \ldots, x_d)$, π s'écrit

$$\pi = \frac{1}{2}\sum_{i,j} \pi_{ij}\, \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{i<j} \pi_{ij}\, \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}\,, \tag{1.8}$$

où $\pi_{ij} = \pi(dx_i, dx_j) = \{x_i, x_j\}$ qui sont lisses sur U. Il en résulte que π est un champ de bivecteurs lisse sur M. De plus, π est l'unique champ de bivecteurs sur M vérifiant

$$\{f, g\} = \pi(df, dg) \quad \forall\, f, g \in C^\infty(M). \tag{1.9}$$

On appelle π le *tenseur de Poisson* de la variété de Poisson $(M, \{\ ,\ \})$.
Le crochet de Poisson est donné donc localement, d'après (1.8) et (1.9), par :

$$\{f, g\} = \sum_{ij} \pi_{ij}\, \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} = \sum_{i<j} \pi_{ij} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial g}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} \right), \tag{1.10}$$

et

$$X_f = \sum_{j=1}^{d} \left(\sum_{i=1}^{d} \pi_{ij}\, \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{1.11}$$

est l'expression locale du champ hamiltonien d'une fonction f.

1.1.2 *Tenseurs de Poisson*

Inversement, étant donné un champ de bivecteurs π sur une variété M, on peut définir une application

$$C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M), \quad (f, g) \mapsto \{f, g\}_\pi := \pi(df, dg),$$

qui est $\mathbb{R}$-bilinéaire, antisymétrique et vérifiant la règle de Leibniz. En général, $\{\ ,\ \}_\pi$ n'est pas un crochet de Poisson, puisque l'identité de Jacobi peut ne pas être satisfaite, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 1.7. Prenons $M = \mathbb{R}^3$ et $\pi = \frac{\partial}{\partial x} \wedge (\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z})$. Alors $\{x, y\}_\pi = 1$, $\{x, z\}_\pi = x$, et $\{y, z\}_\pi = 0$. Donc, $\{x, \{y, z\}\}_\pi + \{y, \{z, x\}\}_\pi + \{z, \{x, y\}\}_\pi = 1 \neq 0$.

D'où la définition suivante :

Définition 1.8. On appelle ***tenseur de Poisson*** sur une variété M un champ de bivecteurs $\pi \in \mathfrak{X}^2(M)$ dont le crochet associé $\{f, g\}_\pi := \pi(df, dg)$ est de Poisson, c'est-à-dire tel que $\{\ ,\ \}$ vérifie l'identité de Jacobi.

Exemple 1.9. Avec les notations de l'exemple 1.4, si ω est une 2-forme non dégénérée sur une variété M, $\omega^\flat$ réalise une identification entre TM et T^*M ; on peut donc définir un champ de bivecteurs π sur M, en posant, pour tous covecteurs $a, b \in T^*M$:

$$\pi(a, b) := a\left(\omega^\sharp(b)\right) = -b\left(\omega^\sharp(a)\right).$$

D'après (1.4), π est un tenseur de Poisson si et seulement si $d\omega = 0$.

La proposition suivante est maintenant évidente.

Proposition 1.10. *La donnée d'un tenseur de Poisson sur une variété M est équivalente à la donnée d'un crochet de Poisson sur $C^\infty(M)$.*

Autrement dit, une variété de Poisson est une variété équipée d'un crochet de Poisson, ou de manière équivalente, d'un tenseur de Poisson. Nous verrons plus loin que l'on peut caractériser les tenseurs de Poisson sans faire appel à l'identité de Jacobi. L'outil principal pour ce faire sera le crochet de Schouten-Nijenhuis défini dans le paragraphe suivant.

Le Crochet de Schouten-Nijenhuis

Le crochet de Schouten-Nijenhuis est une extension graduée naturelle du crochet de Lie des champs de vecteurs aux champs de multivecteurs.

Soit M une variété. Notons $\langle\ ,\ \rangle$ le couplage de dualité entre $T_x M$ et T_x^*M, c'est-à-dire,

$$\langle a, v\rangle = \langle v, a\rangle := a(v) \quad \forall\, a \in T_x^*M,\ v \in T_x M.$$

Ce couplage s'étend, de manière naturelle, en un couplage de $\Omega^*(M)$ avec $\mathfrak{X}^*(M)$ comme suit : d'abord, si f et g sont deux fonctions sur M, on prend $\langle f, g\rangle$ égal à fg.

Ensuite, si α et X sont, respectivement, une 1-forme et un champ de vecteurs sur M, $\langle \alpha, X\rangle$ sera l'élément de $C^\infty(M)$ donné, pour tout $x \in M$, par :

$$\langle \alpha, X\rangle(x) = \langle X, \alpha\rangle(x) := \langle \alpha(x), X(x)\rangle.$$

Si maintenant $\eta \in \Omega^q(M)$ et $P \in \mathfrak{X}^p(M)$ avec η et P décomposables, i.e.,

$$\eta = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_q \qquad \text{et} \qquad P = X_1 \wedge \cdots \wedge X_p\,,$$

où $\alpha_i \in \Omega^1(M)$ et $X_j \in \mathfrak{X}^1(M)$, on définit

$$\langle \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_q, X_1 \wedge \cdots \wedge X_p\rangle := \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq q\,, \\ \det\big(\langle \alpha_i, X_j\rangle\big) & \text{si } p = q\,. \end{cases} \tag{1.12}$$

La valeur en un point $x \in M$ de $\langle \eta, P\rangle$ ne dépend que des valeurs de η et P en x. Comme tout champ de multivecteurs et toute forme différentielle sur M, s'écrivent localement comme sommes finies de champs de multivecteurs et de formes différentielles décomposables, le couplage (1.12) s'étend, de manière unique, en un couplage $C^\infty(M)$-bilinéaire sur $\Omega^*(M) \times \mathfrak{X}^*(M)$ tout entier.
Avec cette définition du couplage $\langle\ ,\ \rangle$, on a

$$\begin{aligned} \langle \eta, X_1 \wedge \cdots \wedge X_q\rangle &= \eta(X_1, \ldots, X_q), \\ \langle \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p, P\rangle &= P(\alpha_1, \ldots, \alpha_p), \end{aligned}$$

pour tous champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_q$, toutes 1-formes $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, toute q-forme η et tout champ de p-vecteurs P.
Le couplage $\langle\ ,\ \rangle$ permet de définir, pour tout $P \in \mathfrak{X}^p(M)$, une application $C^\infty(M)$-linéaire, $i_P : \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$, dite *produit intérieur* par P, en posant, pour toute k-forme différentielle ω et tout champ de $(k-p)$-vecteurs R,

$$\langle i_P\omega, R\rangle = \langle \omega, P \wedge R\rangle \tag{1.13}$$

si $k \geq p$; $i_P\omega = 0$ sinon. Quand P est un champ de vecteurs X, i_X n'est rien d'autre que le produit intérieur usuel par X.
On vérifie immédiatement que

$$i_{P\wedge Q} = i_Q \circ i_P = (-1)^{pq}\, i_P \circ i_Q\,, \tag{1.14}$$

pour tous champ de multivecteurs P et Q.
Le couplage $\langle\ ,\ \rangle$ permet aussi d'exprimer la dérivée de Lie $\mathcal{L}_X\eta$ d'une forme $\eta \in \Omega^q(M)$ par

$$\langle \mathcal{L}_X\eta, Q\rangle = X \cdot \langle \eta, Q\rangle - \langle \eta, \mathcal{L}_X Q\rangle \quad \forall\, Q \in \mathfrak{X}^q(M). \tag{1.15}$$

En vertu de la formule de Cartan (5), on peut réécrire cette équation sous la forme :

$$\begin{aligned} \langle \eta, \mathcal{L}_X Q\rangle &= X \cdot \langle \eta, Q\rangle - \langle \mathcal{L}_X\eta, Q\rangle \\ &= \langle d(i_Q\eta), X\rangle - \langle i_X(d\eta) + d(i_X\eta), Q\rangle, \end{aligned}$$

soit

$$\langle \eta, \mathcal{L}_X Q\rangle = \langle d(i_Q\eta), X\rangle - \langle d(i_X\eta), Q\rangle - \langle d\eta, X\wedge Q\rangle. \tag{1.16}$$

L'avantage de cette équation est le fait que son membre droit a toujours un sens quand on remplace X par un champ de multivecteurs quelconque. Ceci permet d'étendre la dérivé de Lie $\mathcal{L}_X Q$ (et donc le crochet de Lie des champs de vecteurs) en un crochet gradué sur les champs de multivecteurs, dit crochet de Schouten-Nijenhuis, de la manière suivante [41, 34] : pour tous $P \in \mathfrak{X}^p(M)$ et $Q \in \mathfrak{X}^q(M)$, le *crochet de Schouten-Nijenhuis* de P et Q est le champs de $(p+q-1)$-vecteurs, noté $[P, Q]$, donné par

$$\begin{aligned}\langle \eta, [P,Q]\rangle = (-1)^{(p-1)(q-1)}&\langle d(i_Q\eta), P\rangle \\ &-\langle d(i_P\eta), Q\rangle + (-1)^p\langle d\eta, P\wedge Q\rangle,\end{aligned} \tag{1.17}$$

pour toute $(p+q-1)$-forme η.

Théorème 1.11 ([44, 41])**.** *Le crochet de Schouten-Nijenhuis est $\mathbb{R}$-bilinéaire et satisfait les propriétés suivantes* :

(a) *Pour tous $f \in C^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ et $P \in \mathfrak{X}^p(M)$,*

$$[f, P] = -i_{df}P\,, \qquad [X, P] = \mathcal{L}_X P\,. \tag{1.18}$$

(b) *L'antisymétrie graduée : pour tous $P \in \mathfrak{X}^p(M)$ et $Q \in \mathfrak{X}^q(M)$,*

$$[P, Q] = -(-1)^{(p-1)(q-1)}[Q, P]\,. \tag{1.19}$$

(c) *La règle de Leibniz graduée : pour tous $P \in \mathfrak{X}^p(M)$, $Q \in \mathfrak{X}^q(M)$ et $R \in \mathfrak{X}^r(M)$,*

$$[P\,, Q\wedge R] = [P, Q]\wedge R + (-1)^{(p-1)q} Q\wedge [P, R]\,, \tag{1.20}$$

$$[P\wedge Q\,, R] = P\wedge [Q, R] + (-1)^{(r-1)q}[P, R]\wedge Q\,. \tag{1.21}$$

(d) *L'identité de Jacobi graduée :*

$$\begin{aligned}(-1)^{(p-1)(r-1)}[P,[Q,R]] + (-1)^{(q-1)(p-1)}&[Q,[R,P]] \\ +(-1)^{(r-1)(q-1)}&[R,[P,Q]] = 0\,.\end{aligned} \tag{1.22}$$

Preuve. La première égalité de (a) est immédiate, la deuxième n'est autre que (1.16) ; quant à (b), elle est évidente.
Pour montrer (c), il suffit de montrer (1.20), puisque (1.21) s'en déduit par antisymétrie. Si $q = 0$, i.e., $Q = f \in C^\infty(M)$, un calcul direct donne

$$[P, f\,R] = (-1)^{(p-1)(r-1)} R\wedge (i_{df}P) + f\,[P, R]\,,$$

soit en utilisant (1.18) et (1.19),

$$[P, f\,R] = [P, f]\wedge R + f[P, R]\,, \tag{$*$}$$

ce qui établit (1.20) dans ce cas.
Si $q = 1$, i.e., $Q = X$ est un champ de vecteurs, alors en utilisant la formule de Cartan (8), on calcule

$$\begin{aligned}
&\langle \eta, [P, X \wedge R] \rangle \\
&\quad = (-1)^{(p-1)r} \langle d(i_{X\wedge R}\eta), P\rangle - \langle d(i_P\eta), X \wedge R\rangle + (-1)^p \langle d\eta, P \wedge X \wedge R\rangle \\
&\quad = (-1)^{(p-1)r} \langle d(i_R(i_X\eta)), P\rangle - \langle i_X(d(i_P\eta)), R\rangle + \langle i_X(d\eta), P \wedge R\rangle \\
&\quad = (-1)^{(p-1)r} \langle d(i_R(i_X\eta)), P\rangle - \langle \mathcal{L}_X(i_P\eta) - (-1)^p\, d(i_P(i_X\eta)), R\rangle \\
&\qquad + \langle \mathcal{L}_X\eta - d(i_X\eta), P \wedge R\rangle \\
&\quad = (-1)^{(p-1)} \langle i_X\eta, [P, R]\rangle - \langle \mathcal{L}_X(i_P\eta), R\rangle + \langle \mathcal{L}_X\eta, P \wedge R\rangle \\
&\quad = (-1)^{(p-1)} \langle \eta, X \wedge [P, R]\rangle + \langle i_P\eta, \mathcal{L}_X R\rangle - \langle \eta, \mathcal{L}_X(P \wedge R)\rangle \\
&\quad = \langle \eta, (-1)^{(p-1)} X \wedge [P, R] - (\mathcal{L}_X P) \wedge R\rangle\,,
\end{aligned}$$

soit en utilisant (1.18) et (1.19),

$$[P, X \wedge R] = [P, X] \wedge R + (-1)^{(p-1)} X \wedge [P, R] \qquad (**)$$

ce qui établit (1.20) dans ce cas aussi.
Supposons maintenant par récurrence sur le degré de Q que la propriété est vraie jusqu'à $q \geq 1$ et montrons-la quand le degré de Q est égal à $q+1$. On commence d'abord par le cas particulier où Q est de la forme $Q = X \wedge Q'$ avec Q' un champ de q-vecteurs. Dans ce cas, par hypothèse de récurrence et $(**)$, on a

$$\begin{aligned}
[P, (X \wedge Q') \wedge R] &= [P, X \wedge (Q' \wedge R)] \\
&= [P, X] \wedge Q' \wedge R + (-1)^{(p-1)} X \wedge [P, Q' \wedge R] \\
&= [P, X] \wedge Q' \wedge R + (-1)^{(p-1)} X \wedge ([P, Q'] \wedge R \\
&\quad + (-1)^{(p-1)q} Q' \wedge [P, R]) \\
&= [P, X \wedge Q'] \wedge R + (-1)^{(p-1)(q+1)} (X \wedge Q') \wedge [P, R]\,.
\end{aligned}$$

Remarquons maintenant que le crochet de Schouten-Nijenhuis est de type local : les valeurs de $[S, T]$ sur un ouvert U de M, dépendent uniquement des valeurs de S et T sur cet ouvert. En effet, vu la bilinéarité et l'antisymétrie du crochet de Schouten-Nijenhuis, il suffit de vérifier que $[S, T] = 0$ sur U si T s'annule sur U. Soit alors $x \in U$ arbitraire, et $f \in C^\infty(M)$ une fonction plateau qui vaut 1 au voisinage de x et 0 en dehors de U. Alors fT est identiquement nulle sur M, et on a

$$0 = [S, fT](x) \overset{(*)}{=} [S, f](x) \wedge T_x + f(x)[S, T](x) = [S, T](x).$$

Pour conclure, tout champ de $(q+1)$-vecteurs peut s'écrire localement comme produit extérieur d'un champ de vecteurs et un champ de q-vecteurs.
Reste à montrer (d). Pour cela, considérons le *Jacobiateur* du crochet de Schouten-Nijenhuis, i.e., l'application $\mathcal{J} : \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$ définie par :

$$\mathcal{J}(P, Q, R) := [P, [Q, R]] - [[P, Q], R] - (-1)^{(p-1)(q-1)} [Q, [P, R]]\,. \qquad (1.23)$$

Le crochet de Schouten-Nijenhuis satisfait donc (d) si et seulement si son Jacobiateur est identiquement nul.
En utilisant (b) et (c), on peut vérifier immédiatement que le Jacobiateur satisfait les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(P,Q,R) &= -(-1)^{(p-1)(q-1)}\mathcal{J}(Q,P,R)\\ &= -(-1)^{(q-1)(r-1)}\mathcal{J}(P,R,Q)\,,\end{aligned} \tag{1.24}$$

$$\mathcal{J}(P\wedge Q,R,S) = P\wedge\mathcal{J}(Q,R,S) + (-1)^{q(r+s)}\,\mathcal{J}(P,R,S)\wedge Q\,. \tag{1.25}$$

En particulier, le Jacobiateur est de type local (se démontre de la même manière qu'en haut). On peut donc travailler dans le domaine d'une carte, dans lequel P, Q et R sont des sommes finies de produits extérieurs de champs de vecteurs (ou éventuellement, des fonctions, si leur degré est 0). Les propriétés (1.24) et (1.25) permettent alors de réduire le calcul du Jacobiateur au calcul de $\mathcal{J}(P,Q,R)$ avec P, Q et R sont de degré inférieur ou égal à 1, ce qui permet de conclure. □

Caractérisation des tenseurs de Poisson

On est maintenant en mesure de caractériser les tenseurs de Poisson. Commençons d'abord par le lemme suivant.

Lemme 1.12 ([34]). *Soit π un champ de bivecteurs sur une variété M. Pour toutes fonctions lisses f, g et h sur M, on a*

$$\{f,\{g,h\}_\pi\}_\pi + \{g,\{h,f\}_\pi\}_\pi + \{h,\{f,g\}_\pi\}_\pi = \frac{1}{2}\langle df\wedge dg\wedge dh,[\pi,\pi]\rangle\,.$$

Preuve. Remarquons d'abord que pour tout champ de vecteurs X, on a

$$\begin{aligned}\langle i_\pi(df\wedge dg\wedge dh),X\rangle &= \langle df\wedge dg\wedge dh,\pi\wedge X\rangle\\ &= \pi\wedge X(df,dg,dh)\\ &= \pi(df,dg)\,dh(X) - \pi(df,dh)\,dg(X)\\ &\quad + \pi(dg,dh)\,df(X)\\ &= \langle\{f,g\}_\pi\,dh + \{h,f\}_\pi\,dg + \{g,h\}_\pi\,df, X\rangle\,,\end{aligned}$$

soit

$$i_\pi(df\wedge dg\wedge dh) = \{f,g\}_\pi\,dh + \{g,h\}_\pi\,df + \{h,f\}_\pi\,dg\,.$$

Ainsi, compte tenu de (1.17), on a

$$\begin{aligned}\langle df\wedge dg\wedge dh,[\pi,\pi]\rangle &= -2\langle d\,(i_\pi(df\wedge dg\wedge dh))\,,\pi\rangle\\ &= -2\langle d\,(\{f,g\}_\pi\,dh + \{g,h\}_\pi\,df + \{h,f\}_\pi\,dg)\,,\pi\rangle\\ &= -2\langle d\{f,g\}_\pi\wedge dh + d\{g,h\}_\pi\wedge df\\ &\quad + d\{h,f\}_\pi\wedge dg,\pi\rangle\\ &= 2\,(\{f,\{g,h\}_\pi\}_\pi + \{g,\{h,f\}_\pi\}_\pi + \{h,\{f,g\}_\pi\}_\pi)\,,\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Corollaire 1.13. *Un champ de bivecteurs π sur une variété M est un tenseur de Poisson si et seulement si l'une des propriétés équivalentes suivantes est satisfaite* :

(i) *Le crochet associé, $\{\ ,\ \}_\pi$, satisfait l'identité de Jacobi sur les fonctions coordonnées.*

(ii) *π est* fermé[2] : *le crochet de Schouten-Nijenhuis de π avec lui-même est nul, $[\pi,\pi]=0$.*

(iii) *Relativement à tout système de coordonnées $(x_1,\ldots,x_d)$, les composantes de π obéissent au système d'équations*

$$\sum_{l=1}^{d} \oint_{i,j,k} \pi_{il} \frac{\partial \pi_{jk}}{\partial x_l} = 0\,, \quad \forall\, i,j,k. \tag{1.26}$$

Preuve. Relativement à un système de coordonnées $(x_1,\ldots,x_d)$, le champ de trivecteurs $[\pi,\pi]$ s'écrit

$$[\pi,\pi] = \sum_{i<j<k} \Lambda_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j} \wedge \frac{\partial}{\partial x_k}\,,$$

où, d'après le lemme 1.12,

$$\begin{aligned}\Lambda_{ijk} &= [\pi,\pi](dx_i,dx_j,dx_k)\\ &= 2\left(\{x_i,\{x_j,x_k\}_\pi\}_\pi + \{x_j,\{x_k,x_i\}_\pi\}_\pi + \{x_k,\{x_i,x_j\}_\pi\}_\pi\right).\end{aligned}$$

Maintenant, pour tous i,j,k,

$$\begin{aligned}\{x_i,\{x_j,x_k\}_\pi\}_\pi &= \pi\big(dx_i, d\{x_j,x_k\}\big) = \pi(dx_i, d\pi_{jk})\\ &= \pi\left(dx_i\,, \sum_{l=1}^{d} \frac{\partial \pi_{jk}}{\partial x_l}\, dx_l\right)\\ &= \sum_{l=1}^{d} \pi_{il} \frac{\partial \pi_{jk}}{\partial x_l}\,,\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure. □

Exemple 1.14. Tout champ de bivecteurs π sur une variété M de dimension 2 est un tenseur de Poisson car $[\pi,\pi]$ est de degré $3 > 2 = \dim M$.

Exemple 1.15 (Structures de Poisson constantes sur $\mathbb{R}^n$)**.** Toute matrice antisymétrique à coefficients réels, $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, détermine un champ de bivecteurs sur $\mathbb{R}^n$ par $\pi = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}$ qui est de Poisson, par (1.26).

Plus généralement,

2. Cette terminologie sera justifiée plus tard, voir la remarque 1.37.

Exemple 1.16. Si $X_1, \dots, X_n$ sont des champs de vecteurs sur une variété M qui commutent deux à deux et $(a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ est une matrice antisymétrique à coefficients réels, le champ de bivecteurs $\pi = \sum_{i,j} a_{ij}\, X_i \wedge X_j$ définit sur M un tenseur de Poisson, puisque le crochet de Schouten-Nijenhuis $[\pi, \pi]$ est nul.

Exemple 1.17 (Structure de Lie-Poisson sur le dual d'une algèbre de Lie)**.** Soit $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ une algèbre de Lie de dimension finie. Pour tout $a \in \mathfrak{g}^*$, définissons $\pi_a \in \wedge^2 T_a \mathfrak{g}^* \cong \wedge^2 \mathfrak{g}^*$ par :

$$\pi_a(u, v) = \big\langle a, [u, v] \big\rangle \quad \forall\, u, v \in \mathfrak{g}.$$

Soit $(z_1, \dots, z_n)$ un système de coordonnées linéaires globales sur $\mathfrak{g}^*$ défini par une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathfrak{g}$. Par définition, $\pi_{ij}(a) = \pi_a(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k\, z_k(a)$, où c_{ij}^k sont les constantes de structure de $\mathfrak{g}$ définies par $[e_i, e_j] = \sum_{k=1}^n c_{ij}^k\, e_k$. Ainsi, $\pi : a \mapsto \pi_a$ est un champ de bivecteurs lisse sur $\mathfrak{g}^*$. Celui-ci est un tenseur de Poisson, dit *structure de Lie-Poisson* associée à $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$. En effet, (1.26) est équivalente à $\sum_{m=1}^n \big(c_{im}^l c_{jk}^m + c_{jm}^l c_{ki}^m + c_{km}^l c_{ij}^m \big) = 0 \ \ \forall\, i, j, k, l$, qui n'est rien d'autre que l'identité de Jacobi du crochet de Lie $[\ ,\ ]$ de $\mathfrak{g}$, exprimée en fonction des constantes de structure c_{ij}^k. À noter que le crochet de Poisson correspondant est donné, pour toutes $f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ et tout $a \in \mathfrak{g}^*$, par : $\{f, g\}_\pi(a) = \big\langle a, [d_a f, d_a g] \big\rangle$ où $d_a f$ et $d_a g$ sont considérées comme des éléments de $\mathfrak{g}$ via l'identification $\mathfrak{g}^{**} = \mathfrak{g}$.

1.2 Feuilles symplectiques et structure locale des variétés de Poisson

Le but de cette section est de mettre en évidence le théorème de Weinstein, qui décrit l'aspect local d'une structure de Poisson, ainsi que la notion de feuille symplectique associée à une variété de Poisson.

1.2.1 Définitions et vocabulaire

Étant donné un tenseur de Poisson π sur une variété M, on peut définir un morphisme de fibrés vectoriels $\pi_\sharp : T^*M \longrightarrow TM$, dit *application d'ancrage*, en posant, pour tout $x \in M$, et tous $a, b \in T_x^*M$:

$$b\big(\pi_\sharp(x)(a)\big) = \pi_x(a, b).$$

Celui-ci induit une application $C^\infty(M)$-linéaire, notée encore $\pi_\sharp : \Omega^1(M) \longrightarrow \mathfrak{X}^1(M)$, définie par

$$\pi_\sharp(\alpha) := i_\alpha \pi = \pi(\alpha, .) = -\pi(., \alpha), \quad \forall\, \alpha \in \Omega^1(M).$$

Si $\alpha = df$ avec $f \in C^\infty(M)$, $\pi_\sharp(df)$ n'est autre que le champ hamiltonien de f ; en effet, $\pi_\sharp(df)(g) = dg(\pi_\sharp(df)) = \pi(df, dg) = \{f, g\}_\pi = X_f(g) \ \ \forall\, g \in C^\infty(M)$. Ainsi, compte tenu de (1.18),

$$X_f = \pi_\sharp(df) = -[f, \pi] = -[\pi, f]. \tag{1.27}$$

L'image $C = \operatorname{Im} \pi_\sharp$ du morphisme de fibrés $\pi_\sharp$ est appelée *champ caractéristique* de la variété de Poisson (M, π). Pour tout $x \in M$, la fibre

$$C_x = \operatorname{Im} \pi_\sharp(x) = \left\{ X_f(x) : f \in C^\infty(M) \right\}$$

du champ caractéristique est appelée l'*espace caractéristique* en x ; sa dimension, notée $\rho_\pi(x) = \dim C_x$, est appelée le *rang* de π en x. Autrement dit, $\rho_\pi(x)$ est le rang de l'application linéaire $\pi_\sharp(x) : T_x^* M \to T_x M$. Si $(x_1, \ldots, x_d)$ est un système de coordonnées autour de x, $\pi_\sharp(dx_i) = \sum_{j=1}^d \pi_{ij}\, \partial/\partial x_j$ où les fonctions π_{ij} sont les composantes de π dans $(x_1, \ldots, x_d)$. Donc $\rho_\pi(x)$ est le rang de la matrice antisymétrique $(\pi_{ij}(x))_{1 \le i,j \le d}$ et est donc paire. Par ailleurs, comme la famille $\{\pi_\sharp(dx_i)(x)\}_{1 \le i \le d}$ engendre C_x, on peut en extraire une base de C_x, disons $\{\pi_\sharp(dx_{i_j})(x)\}_{1 \le j \le \rho_\pi(x)}$. Par un arguement de continuité, la famille $\{\pi_\sharp(dx_{i_j})\}_{1 \le j \le \rho_\pi(x)}$ est libre au voisinage de x, et donc le rang de π est au moins égal à $\rho_\pi(x)$ au voisinage de x.
Un point de M est dit *régulier* s'il s'agit d'un maximum local de ρ_π, ou de façon équivalente, si ρ_π est constante au voisinage de x ; dans le cas contraire, on parle de *point singulier*. On notera M^{reg} l'ensemble des points réguliers de (M, π). Quand $M = M^{reg}$, on dit de π qu'il est *régulier*. L'ensemble M^{reg} est clairement ouvert ; il est aussi dense dans M. En effet, si $y \in M$ est un point singulier de π et U est un voisinage ouvert quelconque de y, la restriction sur U de ρ_π admet un maximum en un point $x \in U$ (puisque la fonction ρ_π est bornée et à valeurs dans $\mathbb{N}$), qui est donc un point régulier.

Exemple 1.18. Prenons $M = \mathbb{R}^2$ et $\pi = f(x) \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}$ où f est une fonction lisse sur $\mathbb{R}$, nulle sur $[-1, 1]$ et strictement positive ailleurs. Alors M^{reg} est la réunion de $]-1, 1[\times\mathbb{R}$ où le rang est nul, et les demi-plans $|x| > 1$ où le rang est égal à 2 ; l'ensemble des points singuliers de π est la réunion des droites d'équations $|x| = 1$. En général, si $\pi = h(x, y) \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}$, où h est une fonction lisse sur $\mathbb{R}^2$, l'ensemble des points singuliers de π est le bord de l'ensemble des points où h s'annule.

Sur l'espace caractéristique C_x, on peut définir une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire antisymétrique ω_x en posant pour tous $u, v \in C_x$,

$$\omega_x(u, v) = \pi(a, b) = b(u) = -a(v), \tag{1.28}$$

où a et b sont respectivement des antécédents de u et v par $\pi_\sharp(x)$. On vérifie facilement que ω_x est bien définie indépendamment du choix de a et de b, et qu'elle est non-dégénérée, ce qui signifie que ω_x est une forme symplectique sur l'espace vectoriel C_x.

Soient (M, π), (N, π') deux variétés de Poisson, $\{\ ,\ \}_\pi$ et $\{\ ,\ \}_{\pi'}$ les crochets de Poisson respectifs. Une application $\phi : M \to N$ est dite *morphisme de Poisson* si

$$\{f \circ \phi, g \circ \phi\}_\pi = \{f, g\}_{\pi'} \circ \phi \quad \forall f, g \in C^\infty(N).$$

En d'autres termes, l'application $\phi^* : C^\infty(N) \to C^\infty(M)$, $f \mapsto f \circ \phi$, est un homomorphisme d'algèbres de Lie. De manière équivalente, ϕ est un morphisme de Poisson si

$$\phi_* \pi = \pi' \circ \phi\,.$$

En effet, $\phi_* \pi(df, dg) = \pi(\phi^*(df), \phi^*(dg)) = \pi(df \circ \phi, dg \circ \phi) = \pi'(df, dg) \circ \phi$.

Exemple 1.19. Si $\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie, alors la transposée $\phi^* : \mathfrak{h}^* \to \mathfrak{g}^*$ est un morphisme de Poisson ($\mathfrak{g}^*$ et $\mathfrak{h}^*$ étant munis de leurs structures de Lie-Poisson).

Un champ de vecteurs Y sur une variété de Poisson (M, π) est dit *champ de Poisson* si la dérivée de Lie de π dans la direction de Y est nulle, ou de manière équivalente, si le flot local Φ_Y^t de Y préserve π : Φ_Y^t est un morphisme de Poisson là où il est défini. Un champ hamiltonien est un champ de Poisson, puique

$$\mathcal{L}_{X_f}\pi = [X_f, \pi] \overset{(1.27)}{=} -[[f, \pi], \pi] \overset{(1.23)}{=} -[f, [\pi, \pi]] - [\pi, [f, \pi]] = -\mathcal{L}_{X_f}\pi\,,$$

soit

$$\mathcal{L}_{X_f}\pi = 0 \quad \forall f \in C^\infty(M). \tag{1.29}$$

La réciproque n'est en général pas vraie, même localement. Par exemple, si π est trivial, tout champ de vecteurs est de Poisson alors que le seul champ hamiltonien est le champ de vecteurs nul.
Si Y est un champ de Poisson sur une variété de Poisson (M, π), alors pour toute $f \in C^\infty(M)$,

$$[Y, X_f] = X_{Y(f)}\,; \tag{1.30}$$

en effet, d'après (1.27),

$$[Y, X_f] = -[Y, [\pi, f]] = -[[Y, \pi], f] - [\pi, [Y, f]] = -[\pi, Y(f)] = X_{Y(f)}\,.$$

1.2.2 Le théorème de Weinstein

Théorème 1.20 ([52]). *Autour de tout point x d'une variété de Poisson (M, π), il existe un système de coordonnées $(q_1, \ldots, q_r, p_1, \ldots, p_r, z_1 \ldots, z_s)$ centré en x dans lequel π a pour expression locale*

$$\pi = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial}{\partial q_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{s} \varphi_{ij} \frac{\partial}{\partial z_i} \wedge \frac{\partial}{\partial z_j}\,,$$

avec φ_{ij} dépendent uniquement des coordonnées z_i et s'annulent en x. Les coordonnées $(q_1, \ldots, q_r, p_1, \ldots, p_r, z_1 \ldots, z_s)$ sont appelées coordonnées de Darboux-Weinstein.

Preuve. On va démontrer le théorème par récurrence sur $r = \frac{1}{2}\rho_\pi(x)$.
Le théorème étant trivialement vérifié si $r = 0$, supposons qu'il est vrai jusqu'à $r-1 \geq 0$ et montrons-le quand le rang en x est égal à $2r$. Puisque $\pi(x) \neq 0$, il existe deux fonctions f et g telles que $\{f, g\}_\pi(x) \neq 0$. Prenons $q_1 = f - f(x)$; alors $X_{q_1}(g)(x) = \{f, g\}_\pi(x) \neq 0$ et donc $X_{q_1}(x) \neq 0$. En vertu du théorème de redressement des champs de vecteurs (voir, e.g., [33, théorème 17.13, p. 447]), il existe un système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_d)$ centré en x dans lequel $X_{q_1} = \partial/\partial x_1$. Posons $p_1 = x_1$; alors

$$\{q_1, p_1\}_\pi = X_{q_1}(p_1) = \frac{\partial p_1}{\partial x_1} = 1\,,$$

ce qui implique que X_{q_1} et X_{p_1} sont linéairement indépendants (sinon on aurait $X_{q_1} = \lambda X_{p_1}$ et donc $\{q_1, p_1\}_\pi = X_{q_1}(p_1) = \lambda X_{p_1}(p_1) = 0$) et commutent :

$$[X_{q_1}, X_{p_1}] = X_{\{q_1,p_1\}_\pi} = 0\,.$$

Il existe donc, d'après le théorème de redressement simultané de Frobenius (voir, e.g., [33, théorème 18.6, p. 471]), un système de coordonnées $(y_1, \ldots, y_d)$ centré en x tel que

$$X_{q_1} = \frac{\partial}{\partial y_1} \quad \text{et} \quad X_{p_1} = \frac{\partial}{\partial y_2}\,.$$

L'application $(y_1, \ldots, y_d) \mapsto (q_1, p_1, y_3, \ldots, y_d)$ est de matrice Jacobienne de la forme

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & \multirow{2}{*}{$*$} \\ 1 & 0 & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & I_{d-2} \end{array}\right),$$

où I_{d-2} est la matrice identité d'ordre $d-2$, qui est de déterminant est égal à 1, donc $q_1, p_1, y_3, \ldots, y_d$ définissent un système de coordonnées sur un voisinage ouvert U de x. Dans ce nouveau système de coordonnées, on a

$$\begin{aligned} &\{q_1, p_1\}_\pi = 1\,, \\ &\{q_1, y_i\}_\pi = \{p_1, y_i\}_\pi = 0 \quad \forall\, i \geq 3\,, \end{aligned}$$

et pour tous $i, j \geq 3$,

$$\{q_1, \{y_i, y_j\}_\pi\}_\pi = \{y_i, \{q_1, y_j\}_\pi\}_\pi - \{y_j, \{q_1, y_j\}_\pi\}_\pi = 0\,.$$

De même, $\{p_1, \{y_i, y_j\}_\pi\}_\pi = 0$. En d'autres termes,

$$\pi = \frac{\partial}{\partial q_1} \wedge \frac{\partial}{\partial p_1} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=3}^{d} \pi_{ij} \frac{\partial}{\partial y_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_j}\,, \tag{$*$}$$

avec

$$X_{q_1}(\pi_{ij}) = X_{p_1}(\pi_{ij}) = 0 \quad \forall\, i, j \geq 3. \tag{$**$}$$

Considérons maintenant l'application $\Phi : U \to \mathbb{R}^{d-2}$ définie par $\Phi = (y_3, \ldots, y_d)$. Puisque $dy_3, \ldots, dy_d$ sont linéairement indépendantes, Φ réalise une submersion surjective de U sur un ouvert U' de $\mathbb{R}^{d-2}$. De plus, $\operatorname{Ker}\Phi_* = \operatorname{Vect}\{X_{q_1}, X_{p_1}\}$, et donc d'après $(**)$, les fonctions π_{ij} sont constantes sur les fibres $\Phi^{-1}(c)$ de Φ. Il existe alors des fonctions uniques $\pi'_{ij} : U' \to \mathbb{R}$ telles que $\pi_{ij} = \pi'_{ij} \circ \Phi$ pour tous $i, j \geq 3$, ce qui permet de définir un tenseur de Poisson π' sur U', en posant

$$\pi' = \frac{1}{2} \sum_{i,j=3}^{d} \pi'_{ij} \frac{\partial}{\partial y'_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y'_j}\,,$$

où $(y'_3, \ldots, y'_d)$ sont les coordonnées canoniques sur U'. Notez que Φ est un morphisme de Poisson : $\Phi_* \pi = \pi' \circ \Phi$. D'après $(*)$, la matrice de $\pi_\sharp(x)$ relativement à $(q_1, p_1, y_3, \ldots, y_d)$ est donnée par

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & \multirow{2}{*}{0} \\ -1 & 0 & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \Pi \end{array}\right),$$

où Π est la matrice carrée d'ordre $d-2$ de coefficients $\pi_{ij}(x) = \pi'_{ij}\big(\Phi(x)\big)$. Ceci montre que le rang de π' en $\Phi(x)$ est égal à $2(k-1)$. Par hypothèse de récurrence, il existe un système de coordonnées $(q'_2, \ldots, q'_r, p'_2, \ldots, p'_r, z'_1, \ldots, z'_s)$ autour de $\Phi(x)$ tel que

$$\pi' = \sum_{i=2}^{r} \frac{\partial}{\partial q'_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p'_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{s} \varphi'_{ij} \frac{\partial}{\partial z'_i} \wedge \frac{\partial}{\partial z'_j}, \qquad \varphi'_{ij}(\Phi(x)) = 0$$

et φ'_{ij} ne dépendent que des coordonnées $z'_1, \ldots, z'_s$. En posant

$$q_i = q'_i \circ \Phi, \quad p_i = p'_i \circ \Phi \quad \forall\, i = 2, \ldots, r \quad \text{et} \quad z_j = z'_j \circ \Phi \quad \forall\, j = 1, \ldots, s$$

on obtient finalement le système de coordonnées souhaité. □

Exemple 1.21. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $\pi = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} c^k_{ij}\, z_k \frac{\partial}{\partial z_i} \wedge \frac{\partial}{\partial z_j}$ la structure de Lie-Poisson sur le dual $\mathfrak{g}^*$ correspondante (voir l'exemple 1.17). Alors π est de rang nul à l'origine (puisqu'il s'y annule) et donc $(z_1, \ldots, z_n)$ est un système de coordonnées de Darboux-Weinstein autour de l'origine dans lequel le terme $\sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i}$ n'apparaît pas et les $\varphi_{ij} = \sum_k c^k_{ij}\, z_k$ sont linéaires.

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du théorème de Weinstein.

Corollaire 1.22. *Autour de tout point régulier x de rang $2r$ d'une variété de Poisson (M, π), il existe un système de coordonnées $(q_1, \ldots, q_r, p_1, \ldots, p_r, z_1 \ldots, z_l)$ centré en x dans lequel π s'écrit*

$$\pi = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial}{\partial q_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Un cas particulier important est celui où le rang du tenseur de Poisson est partout égal à la dimension de la variété.

Proposition 1.23. *Un tenseur de Poisson π sur une variété M est symplectique si et seulement s'il est de rang constant égal à la dimension de M.*

Preuve. Si π est symplectique et ω la forme symplectique correspondante, alors $\pi_\sharp = -\omega^\sharp$, qui est inversible par la non dégénérescence de ω. Inversement, si π est de rang constant égal à la dimension de M, $\pi_\sharp$ est un isomorphisme de TM sur T^*M et donc le champ caractéristique C de π coïncide avec le fibré tangent TM tout entier. Ainsi (1.28) définit une 2-forme ω sur M, qui est non dégénérée par définition. D'après le corollaire 1.22, il existe autour de tout point $x \in M$ un système de coordonnées $(q_1, \ldots, q_r, p_1, \ldots, p_r)$ dans lequel π s'écrit

$$\pi = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial}{\partial q_i} \wedge \frac{\partial}{\partial p_i} .$$

Ainsi, pour tout $i = 1, \ldots, r$,

$$\pi_\sharp(dq_i) = \frac{\partial}{\partial p_i} \quad \text{et} \quad \pi_\sharp(dp_i) = -\frac{\partial}{\partial q_i} .$$

On en déduit que $\omega = \sum_{i=1}^{r} dq_i \wedge dp_i$ et est donc fermée. □

Exemple 1.24. La structure de Poisson définie dans l'exemple 1.5 est de rang constant égal à $2r$ et est donc symplectique si et seulement si $s = 0$.

Exemple 1.25. Toute structure de Lie-Poisson est de rang nul à l'origine et donc n'est jamais symplectique.

On retrouve le théorème classique de Darboux pour les formes symplectiques.

Théorème 1.26 (Darboux). *Soit (M, ω) une variété symplectique de dimension $2r$. Autour de tout point $x \in M$, il existe un système de coordonnées $(q_1, \ldots, q_r, p_1, \ldots, p_r)$ dans lequel ω s'écrit*

$$\omega = \sum_{i=1}^{r} dq_i \wedge dp_i .$$

1.2.3 Feuilles symplectiques

Étant donné un tenseur de Poisson π de rang partout constant sur une variété M, son champ caractéristique $C = \operatorname{Im} \pi_\sharp$ est une distribution (régulière) involutive, en vertu de (1.7), et donc intégrable par le théorème d'intégrabilité de Frobenius (e.g, [33, théorème 19. 10]). En général, C est une distribution *singulière* dans le sens où ses fibres $C_x = \operatorname{Im} \pi_\sharp(x)$ ne sont pas de dimension constante. Cependant, C est intégrable : pour tout $x \in M$, il existe une sous-variété immergée connexe $\mathcal{S}$ contenant x et telle que, pour tout $y \in \mathcal{S}$, $T_y\mathcal{S} = C_y$. En effet, en munissant M de la relation : x et y sont *en relation* s'il existe une famille de fonctions $f_1, \ldots, f_k$ sur M telle que

$$y = \Phi_{X_{f_1}}^{t_1} \circ \cdots \circ \Phi_{X_{f_k}}^{t_k}(x) ,$$

on obtient une relation d'équivalence sur M. Notons $(\mathcal{S}_\alpha)_{\alpha \in I}$ la partition correspondante de M en classes d'équivalences. D'après (1.29), les flots des champs hamiltoniens préservent π et donc préservent le rang de π. On en déduit que le rang de π est constant le long de chaque $\mathcal{S}_\alpha$; on notera $2r_\alpha$ la valeur commune du rang de π le long de $\mathcal{S}_\alpha$.

Théorème 1.27 ([27]). *Soit (M, π) une variété de Poisson et soit $(\mathcal{S}_\alpha)_{\alpha \in I}$ la partition définie ci-dessus. Pour tout $\alpha \in I$, $\mathcal{S}_\alpha$ est une sous-variété immergée de M de dimension $2r_\alpha$ et, pour tout $x \in \mathcal{S}_\alpha$, l'espace tangent de $\mathcal{S}_\alpha$ en x est l'espace caractéristique en x de π, i.e., $T_x\mathcal{S}_\alpha = C_x$. De plus, $\mathcal{S}_\alpha$ jouit d'une structure symplectique telle que $i : \mathcal{S}_\alpha \hookrightarrow M$ soit un morphisme de Poisson.*

Les sous-variétés immergées $\mathcal{S}_\alpha$ sont appelées les *feuilles symplectiques* de la variété de Poisson (M, π).

Preuve. Voir [32] pour une démonstration basée sur le théorème de Weinstein. □

1.3 Calcul de Poisson

Dans cette section on verra que la donnée d'une structure de Poisson sur une variété définit, de manière naturelle, un crochet de Lie sur l'espace des 1-formes, qui avec l'application d'ancrage font du fibré cotangent un « algébroïde de Lie », ce qui donne naissance à une version contravariante du calcul de Cartan.

1.3.1 Algébroïdes de Lie

La notion d'algébroïde de Lie est une généralisation de celles de fibré tangent et d'algèbre de Lie.

Définition 1.28. On appelle *pseudo-algébroïde de Lie* sur une variété M un triplet $(\mathcal{A}, [\ ,\ ], \#)$ où $\mathcal{A} \to M$ est un fibré vectoriel sur M, $\# : \mathcal{A} \longrightarrow TM$ est un morphisme de fibrés, dit l'*ancrage*, et $[\ ,\ ]$ est une application $\mathbb{R}$-bilinéaire et antisymétrique sur l'espace des sections $\Gamma(\mathcal{A})$, tels que la règle de Leibniz suivante soit satisfaite :

$$[\alpha, f\beta] = \#(\alpha)(f)\beta + f[\alpha, \beta],$$

pour toutes $\alpha, \beta \in \Gamma(\mathcal{A})$ et toute $f \in C^\infty(M)$. Si, de plus, $[\ ,\ ]$ est un crochet de Lie, c'est-à-dire qu'il vérifie l'identité de Jacobi

$$[[\alpha, \beta], \gamma] + [[\beta, \gamma], \alpha] + [[\gamma, \alpha], \beta] = 0,$$

on dit que $(\mathcal{A}, [\ ,\ ], \#)$ est un ***algébroïde de Lie*** sur M.

La propriété suivante est une conséquence immédiate, mais fondamentale, de la définition d'un algébroïde de Lie.

Proposition 1.29. *Si $(\mathcal{A}, [\ ,\ ], \#)$ est un algébroïde de Lie sur une variété M, l'ancrage $\#$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie de $\Gamma(\mathcal{A})$ dans $\mathfrak{X}^1(M)$: pour toutes sections $\alpha, \beta \in \Gamma(\mathcal{A})$,*

$$\#[\alpha, \beta] = [\#(\alpha), \#(\beta)].$$

Preuve. En vertu de la règle de Leibniz, pour toutes $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma(\mathcal{A})$ et toute $f \in C^\infty(M)$, on a

$$
\begin{aligned}
&[[\alpha,\beta], f\gamma] + [[\beta, f\gamma],\alpha] + [[f\gamma,\alpha],\beta] \\
&= \#([\alpha,\beta])(f)\gamma + f\,[[\alpha,\beta],\gamma] + [\#(\beta)(f)\gamma + f\,[\beta,\gamma],\alpha] \\
&\quad + [-\#(\alpha)(f)\gamma + f\,[\gamma,\alpha],\beta] \\
&= \#([\alpha,\beta])(f)\gamma + f\,[[\alpha,\beta],\gamma] \\
&\quad - \#(\alpha)(\#(\beta)(f))\gamma + \#(\beta)(f)[\gamma,\alpha] - \#(\alpha)(f)[\beta,\gamma] + f\,[[\beta,\gamma],\alpha] \\
&\quad + \#(\beta)(\#(\alpha)(f))\gamma - \#(\alpha)(f)[\gamma,\beta] - \#(\beta)(f)[\gamma,\alpha] + f\,[[\gamma,\alpha],\beta] \\
&= (\#([\alpha,\beta]) - [\#(\alpha),\#(\beta)])\,(f)\gamma \\
&\quad + f([[\alpha,\beta],\gamma] + [[\beta,\gamma],\alpha] + [[\gamma,\alpha],\beta])\ ,
\end{aligned}
\tag{1.31}
$$

ce qui établit l'égalité cherchée, vu l'identité de Jacobi. □

Exemple 1.30 (Fibrés tangents)**.** Muni du crochet de Lie usuel des champs de vecteurs et de l'application identique, le fibré tangent de toute variété M est un algébroïde de Lie, dit *algébroïde tangent* de M.

Exemple 1.31 (Algèbres de Lie)**.** Toute algèbre de Lie peut être vue comme un algébroïde de Lie sur un point.

Exemple 1.32 (Distributions involutives)**.** Si $\mathcal{F}$ est un feuilletage régulier sur une variété M, la distribution involutive correspondante, $T\mathcal{F}$, munie du crochet de Lie des champs de vecteurs tangents à $\mathcal{F}$ et de l'inclusion $i : T\mathcal{F} \to TM$, est un algébroïde de Lie, dit *algébroïde de Lie tangent* à $\mathcal{F}$.

Exemple 1.33. Toute action d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur une variété M, i.e. un homomorphisme d'algèbres de Lie $\zeta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}^1(M)$, définit une structure d'algébroïde de Lie sur le fibré vectoriel trivial $\mathfrak{g} \times M \to M$: l'ancrage $\# : \mathfrak{g} \times M \to TM$ étant défini, pour tout $(u, x) \in \mathfrak{g} \times M$, par $\#(u, x) = \zeta(u)(x)$, et le crochet de Lie est donné par

$$[\alpha,\beta](x) = [\alpha(x),\beta(x)] + \alpha_*\big(\zeta(\beta(x))\big)(x) - \beta_*\big(\zeta(\alpha(x))\big)(x),$$

où l'on a considéré les sections α et β de $\mathfrak{g} \times M \to M$ comme applications de M dans $\mathfrak{g}$.

1.3.2 Le fibré cotangent d'une variété de Poisson est un algébroïde de Lie

Soit M une variété équipée d'une structure de Poisson π. Considérons l'application $[\ ,\ ]_\pi : \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \to \Omega^1(M)$, dite *crochet de Koszul* associé à π, définie pour toutes 1-formes α, β par :

$$[\alpha,\beta]_\pi = \mathcal{L}_{\pi_\sharp(\alpha)}\beta - \mathcal{L}_{\pi_\sharp(\beta)}\alpha - d\big(\pi(\alpha,\beta)\big). \tag{1.32}$$

Théorème 1.34. *Le crochet de Koszul est l'unique application* $\mathbb{R}$*-bilinéaire et antisymétrique sur l'espace des* 1*-formes, qui vérifie*

$$[df, dg]_\pi = d\{f, g\}_\pi \tag{1.33}$$

pour toutes fonctions $f, g \in C^\infty(M)$*, et la règle de Leibniz,*

$$[\alpha, f\beta]_\pi = f\,[\alpha, \beta]_\pi + \pi_\sharp(\alpha)(f)\beta \tag{1.34}$$

pour toutes $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$ *et toute* $f \in C^\infty(M)$*. En outre,* $(T^*M, [\ ,\ ]_\pi, \pi_\sharp)$ *est un algébroïde de Lie, en particulier,*

$$\pi_\sharp[\alpha, \beta]_\pi = [\pi_\sharp(\alpha), \pi_\sharp(\beta)]. \tag{1.35}$$

Preuve. Le crochet de Koszul étant clairement $\mathbb{R}$-bilinéaire et antisymétrique, montrons (1.33) et (1.34). D'une part, en utilisant le fait que $\mathcal{L}_X d = d\mathcal{L}_X$ et que, pour toute $f \in C^\infty(M)$, $\pi_\sharp(df) = X_f$, on obtient

$$\begin{aligned}
[df, dg]_\pi &= \mathcal{L}_{\pi_\sharp(df)} dg - \mathcal{L}_{\pi_\sharp(dg)} df - d(\pi(df, dg)) \\
&= d(X_f(g)) - d(X_g(f)) - d\{f, g\}_\pi \\
&= d\{f, g\}_\pi - d\{g, f\}_\pi - d\{f, g\}_\pi \\
&= d\{f, g\}_\pi\,.
\end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant la formule : $\mathcal{L}_{fX}\alpha = f\mathcal{L}_X\alpha + \alpha(X)df$ pour tous $f \in C^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}^1(M)$ et $\alpha \in \Omega^1(M)$, on calcule

$$\begin{aligned}
[\alpha, f\beta]_\pi &= \mathcal{L}_{\pi_\sharp(\alpha)}(f\beta) - \mathcal{L}_{\pi_\sharp(f\beta)}\alpha - d(\pi(\alpha, f\beta)) \\
&= f\,\mathcal{L}_{\pi_\sharp(\alpha)}\beta + \pi_\sharp(\alpha)(f)\,\beta - f\,\mathcal{L}_{\pi_\sharp(\beta)}\alpha + \alpha(\pi_\sharp(\beta))df \\
&\quad - f\,d(\pi(\alpha, \beta)) - \pi(\alpha, \beta)df \\
&= f\,[\alpha, \beta]_\pi + \pi_\sharp(\alpha)(f)\beta.
\end{aligned}$$

Pour montrer l'unicité, remarquons qu'en vertu de l'antisymétrie et de la règle de Leibniz, le crochet de Koszul est de type local : la valeur de $[\alpha, \beta]_\pi$ en un point $x \in M$ dépend uniquement des valeurs de α et β au voisinage de x [3], et vérifie aussi

$$[f\alpha, g\,\beta]_\pi = fg\,[\alpha, \beta]_\pi + f\,\pi_\sharp(\alpha)(g)\beta - g\,\pi_\sharp(\beta)(f)\alpha.$$

En particulier, pour toutes $f, g, h, k \in C^\infty(M)$, on a

$$\begin{aligned}
[f dh, g\,dk]_\pi &= fg\,[dh, dk]_\pi + f\,\pi_\sharp(dh)(g)\,dk - g\,\pi_\sharp(dk)(f)\,dh \\
&= fg\;d\{h, k\}_\pi + f\,\pi_\sharp(dh)(g)\,dk - g\,\pi_\sharp(dk)(f)\,dh,
\end{aligned}$$

3. Se démontre de la même manière que dans le théorème 1.11.

où l'on a utilisé (1.33) dans la dernière ligne. Ceci détermine totalement, compte tenu de la bilinéarité, le crochet $[\ ,\ ]_\pi$, puisque toute 1-forme s'écrit localement comme somme finie de 1-forme de la forme $f dg$.
Reste à montrer que $(T^*M, [\ ,\ ]_\pi, \pi_\sharp)$ est un algébroïde de Lie, c'est-à-dire que le crochet de Koszul vérifie l'identité de Jacobi. Pour cela, on va montrer d'abord (1.35). En posant, pour toutes $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$,

$$H(\alpha, \beta) = \pi_\sharp[\alpha, \beta]_\pi - [\pi_\sharp(\alpha), \pi_\sharp(\beta)],$$

on vérifie immédiatement, en utilisant la règle de Leibniz, que H est tensoriel en α et β. Donc, $H = 0$ si et seulement si $H(df, dg) = 0\ \forall f, g \in C^\infty(M)$. Or

$$\pi_\sharp[df, dg]_\pi \overset{(1.33)}{=} \pi_\sharp(d\{f, g\}_\pi) = X_{\{f,g\}_\pi} \overset{(1.7)}{=} [X_f, X_g] = [\pi_\sharp(df), \pi_\sharp(dg)].$$

Maintenant, posons pour toutes 1-formes α, β, γ,

$$J(\alpha, \beta, \gamma) = [[\alpha, \beta]_\pi, \gamma]_\pi + [[\beta, \gamma]_\pi, \alpha]_\pi + [[\gamma, \alpha]_\pi, \beta]_\pi\,.$$

D'après (1.31), pour toute fonction f,

$$\begin{aligned} J(\alpha, \beta, f\gamma) &= \big(\pi_\sharp[\alpha, \beta]_\pi - [\pi_\sharp(\alpha), \pi_\sharp(\beta)]_\pi\big)(f)\gamma + f\, J(\alpha, \beta, \gamma) \\ &\overset{(1.35)}{=} f\, J(\alpha, \beta, \gamma), \end{aligned}$$

ce qui montre que J est tensoriel en γ et donc en α et β également, puisque il est antisymétrique. Ainsi J est identiquement nul si et seulement s'il s'annule sur les 1-formes exactes. Pour toutes $f, g, h \in C^\infty(M)$,

$$\begin{aligned} J(df, dg, dh) &= [[df, dg]_\pi, dh]_\pi + [[dg, dh]_\pi, df]_\pi + [[dh, df]_\pi, dg]_\pi \\ &= [d\{f, g\}_\pi, dh]_\pi + [d\{g, h\}_\pi, df]_\pi + [d\{h, f\}_\pi, dg]_\pi \\ &= d\left(\{\{f, g\}_\pi, h\}_\pi + \{\{g, h\}_\pi, f\} + \{\{h, f\}_\pi, g\}_\pi\right) \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

L'algébroïde $(T^*M, [\ ,\ ]_\pi, \pi_\sharp)$ sera appelé *algébroïde cotangent* de (M, π).

► **Exercice 1.35.** Soit $(T^*M, [\ ,\ ], \#)$ un algébroïde de Lie sur le fibré cotangent d'une variété M. On suppose que, pour toutes $f, g \in C^\infty(M)$ et tout $x \in M$,

$$[df, dg](x) = d_x\big(\#(df)(g)\big)\,.$$

Montrer que $\{f, g\}(x) = \#(d_x f)(g)$ définit une structure de Poisson sur M dont l'algébroïde cotangent est $(T^*M, [\ ,\ ], \#)$.

La structure d'algébroïde de Lie cotangent sur le fibré cotangent de (M, π) permet de définir des versions contravariantes des opérateurs d, i_X, $\mathcal{L}_X$ et ∇_X, et ce, en copiant

leurs définition algébrique.
D'abord, la différentielle contravariante, notée $d_\pi : \mathfrak{X}^p(M) \to \mathfrak{X}^{p+1}(M)$, se définit par :

$$\begin{aligned} d_\pi P(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1} \pi_\sharp(\alpha_i) \cdot P\big(\alpha_1, \ldots, \widehat{\alpha_i}, \ldots, \alpha_{p+1}\big) \\ &+ \sum_{1 \le i < j \le p+1} (-1)^{i+j} P\big([\alpha_i, \alpha_j]_\pi, \alpha_1, \ldots, \widehat{\alpha_i}, \ldots, \widehat{\alpha_j}, \ldots, \alpha_{p+1}\big), \end{aligned} \tag{1.36}$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}$ sont des 1-formes.

Proposition 1.36. *Pour tout $P \in \mathfrak{X}^p(M)$,*

$$d_\pi P = [\pi, P]\,,$$

où $[\ ,\ ]$ dénote le crochet de Schouten-Nijenhuis.

Preuve. De la même manière que dans le cas de la différentielle extérieure on montre que, pour tout $P \in \mathfrak{X}^p(M)$, $d_\pi P$ est $C^\infty(M)$-multilinéaire et alterné, i.e., $d_\pi P$ est un champ de $(p+1)$-vecteurs (voir, e.g., [33, p. 311]). Il suffit donc de montrer que $d_\pi P$ et $[\pi, P]$ coïncident à chaque fois appliqués sur une forme différentielle de la forme $df_1 \wedge \ldots \wedge df_{p+1}$ $(f_i \in C^\infty(M))$. Pour cela, remarquons que

$$i_P(df_1 \wedge \ldots \wedge df_{p+1}) = (-1)^{p-1} \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i\, P\big(df_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{df_i} \wedge \ldots \wedge df_{p+1}\big)\, df_i\,,$$

et que

$$\begin{aligned} i_\pi(df_1 \wedge \ldots \wedge df_{p+1}) = \sum_{1 \le i, j \le p+1} (-1)^{i+j-1} \{f_i, f_j\}_\pi\, df_1 \wedge \ldots \wedge \\ \wedge \widehat{df_i} \wedge \ldots \wedge \widehat{df_j} \wedge \ldots \wedge df_{p+1}\,. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} &\langle df_1 \wedge \ldots \wedge df_{p+1}, [\pi, P] \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i\, d\left(P(df_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{df_i} \wedge \ldots \wedge df_{p+1})\right) \wedge df_i, \pi \right\rangle \\ &- \left\langle \sum_{1 \le i, j \le p+1} (-1)^{i+j-1}\, d\{f_i, f_j\}_\pi \wedge df_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{df_i} \wedge \ldots \wedge \widehat{df_j} \wedge \ldots \wedge df_{p+1}, P \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i-1}\, \pi_\sharp(df_i) \cdot P\left(df_1, \ldots, \widehat{df_i}, \ldots, df_{p+1}\right) \\ &\quad + \sum_{1 \le i, j \le p+1} (-1)^{i+j}\, P\left([df_i, df_j]_\pi, df_1, \ldots, \widehat{df_i}, \ldots, \widehat{df_j}, \ldots, df_{p+1}\right) \\ &= \langle df_1 \wedge \ldots \wedge df_{p+1}, d_\pi P \rangle\,, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Par conséquent, d_π vérifie, à l'exemple de la différentielle extérieure, les propriétés suivantes :

$$d_\pi(P \wedge Q) = d_\pi P \wedge Q + (-1)^{degP} P \wedge d_\pi Q\,, \tag{1.37}$$

$$d_\pi \circ d_\pi = 0\,. \tag{1.38}$$

Remarque 1.37. La condition $[\pi, \pi] = 0$ s'exprime en termes de d_π sous la forme $d_\pi \pi = 0$; on dit que π est *fermé*.

La cohomologie associée à d_π

$$H^p_\pi(M) := \frac{\mathrm{Ker}\,(d_\pi : \mathfrak{X}^p(M) \to \mathfrak{X}^{p+1}(M))}{\mathrm{Im}(d_\pi : \mathfrak{X}^{p-1}(M) \to \mathfrak{X}^p(M))}$$

est appelée *cohomologie de Poisson* de (M, π). En étendant l'application d'ancrage $\pi_\sharp$ à l'espace des formes différentielles en posant, $\pi_\sharp(f) = f$ pour toute fonction f, et

$$\pi_\sharp(\eta)(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = (-1)^k \eta\big(\pi_\sharp(\alpha_1), \ldots, \pi_\sharp(\alpha_k)\big),$$

on obtient un homomorphisme $C^\infty(M)$-linéaire $\pi_\sharp : \Omega^*(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$ qui entrelace d et d_π, i.e.,

$$\pi_\sharp(d\eta) = -d_\pi(\pi_\sharp \eta),$$

ce qui induit un homomorphisme $\pi_\sharp : H^*_{dR}(M) \to H^*_\pi(M)$ de la cohomologie de de Rham dans la cohomologie de Poisson, qui est un isomorphisme si π est symplectique.

Ensuite, la dérivée de Lie dans la direction d'une 1-forme différentielle α, notée $\mathcal{L}_\alpha : \mathfrak{X}^p(M) \to \mathfrak{X}^p(M)$, et le produit intérieur par α, noté $i_\alpha : \mathfrak{X}^p(M) \to \mathfrak{X}^{p-1}(M)$, se définissent par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\alpha P(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) = {} & \pi_\sharp(\alpha) \cdot P(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \\ & - \sum_{i=1}^{p} P(\alpha_1, \ldots, [\alpha, \alpha_i]_\pi, \ldots, \alpha_p), \end{aligned} \tag{1.39}$$

$$i_\alpha P(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}) = P(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}), \tag{1.40}$$

et on a les mêmes formules usuelles

$$i_{[\alpha,\beta]_\pi} = \mathcal{L}_\alpha i_\beta - i_\beta \mathcal{L}_\alpha\,, \tag{1.41}$$

$$\mathcal{L}_{[\alpha,\beta]_\pi} = \mathcal{L}_\alpha \mathcal{L}_\beta - \mathcal{L}_\beta \mathcal{L}_\alpha\,, \tag{1.42}$$

$$\mathcal{L}_\alpha = i_\alpha d_\pi + d_\pi i_\alpha\,, \tag{1.43}$$

$$\mathcal{L}_\alpha d_\pi = d_\pi \mathcal{L}_\alpha\,. \tag{1.44}$$

Ces opérateurs sont liés aux opérateurs usuels par l'application d'ancrage :

$$i_\alpha \pi_\sharp(\eta) = -\pi_\sharp(i_{\pi_\sharp(\alpha)}\eta), \tag{1.45}$$

$$\mathcal{L}_\alpha \pi_\sharp(\eta) = \pi_\sharp(\mathcal{L}_{\pi_\sharp(\alpha)}\eta), \tag{1.46}$$

$$\mathcal{L}_{df} P = \mathcal{L}_{X_f} P\,, \tag{1.47}$$

pour tous $f \in C^\infty(M)$, $\alpha \in \Omega^1(M)$, $\eta \in \Omega^k(M)$ et $P \in \mathfrak{X}^p(M)$.

Finalement, on peut étendre la dérivée de Lie $\mathcal{L}_\alpha$ aux formes différentielles en définissant, pour toute $\eta \in \Omega^k(M)$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\alpha \eta(X_1, \ldots, X_k) = \pi_\sharp(\alpha) \cdot \eta(X_1, \ldots, X_k) \\ - \sum_{i=1}^{k} \eta(X_1, \ldots, \mathcal{L}_\alpha X_i, \ldots, X_k),\end{aligned} \tag{1.48}$$

où $X_1, \ldots, X_k$ sont des champs de vecteurs. En particulier,

$$\mathcal{L}_\alpha \beta = [\alpha, \beta]_\pi \quad \forall \beta \in \Omega^1(M). \tag{1.49}$$

Cette dérivée de Lie peut s'étendre en un crochet de Lie gradué sur l'espace des formes différentielles analogue au crochet de Schouten-Nijenhuis, appelé crochet de Koszul-Schouten, qui peut être défini de la même manière : pour toute $\eta \in \Omega^k(M)$ et toute $\rho \in \Omega^l(M)$, le *crochet de Koszul-Schouten* de η et ρ est la $(k + l - 1)$-forme, notée $[\eta, \rho]_\pi$ et donnée par

$$\begin{aligned}\langle [\eta, \rho]_\pi, P\rangle = (-1)^{(k-1)(l-1)} \langle \eta, d_\pi(i_\rho P)\rangle \\ -\langle \rho, d_\pi(i_\eta P)\rangle + (-1)^k \langle \eta \wedge \rho, d_\pi P\rangle\,,\end{aligned} \tag{1.50}$$

pour tout champ de $(k + l - 1)$-vecteurs P. Ici $i_\eta : \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{X}^*(M)$ est le produit intérieur par ρ, i.e., $\langle \omega, i_\eta P\rangle = \langle \eta \wedge \omega, P\rangle$ pour tout champ de p-vecteurs P et toute $(p - k)$-forme ω, si $k < p$; $i_\eta P = 0$ sinon.

Théorème 1.38 ([31]). *Le crochet de Koszul-Schouten est $\mathbb{R}$-bilinéaire et satisfait les propriétés suivantes* :

(a) *Pour tous $f \in C^\infty(M)$, $\alpha \in \Omega^1(M)$ et $\eta \in \Omega^k(M)$,*

$$[f, \eta]_\pi = i_{X_f} \eta\,, \qquad [\alpha, \eta]_\pi = \mathcal{L}_\alpha \eta\,. \tag{1.51}$$

(b) *L'antisymétrie graduée : pour toute $\eta \in \Omega^k(M)$ et toute $\omega \in \Omega^l(M)$,*

$$[\eta, \omega]_\pi = -(-1)^{(k-1)(l-1)} [\omega, \eta]_\pi\,. \tag{1.52}$$

(c) *La règle de Leibniz graduée : pour toutes $\eta \in \Omega^k(M)$, $\omega \in \Omega^l(M)$ et $\rho \in \Omega^r(M)$,*

$$[\eta\,, \omega \wedge \rho]_\pi = [\eta, \omega]_\pi \wedge \rho + (-1)^{(k-1)l} \omega \wedge [\eta, \rho]_\pi\,, \tag{1.53}$$

$$[\eta \wedge \omega\,, \rho]_\pi = \eta \wedge [\omega, \rho]_\pi + (-1)^{(r-1)l} [\eta, \rho]_\pi \wedge \omega. \tag{1.54}$$

(d) *L'identité de Jacobi graduée :*

$$\begin{aligned}(-1)^{(k-1)(r-1)} [\eta, [\omega, \rho]_\pi]_\pi + (-1)^{(l-1)(k-1)} [\omega, [\rho, \eta]_\pi]_\pi \\ +(-1)^{(r-1)(l-1)} [\rho, [\eta, \omega]_\pi]_\pi = 0\,.\end{aligned} \tag{1.55}$$

En outre, la différentielle extérieure est une dérivation de $[\ ,\ ]_\pi$*, i.e.,*

$$d\,[\eta,\omega]_\pi = [d\eta,\omega]_\pi + (-1)^{k-1}[\eta, d\omega]_\pi\,. \tag{1.56}$$

Preuve. Les propriétés (a), (b), (c) et (d) se démontrent de la même manière que dans le cas du crochet de Schouten-Nijenhuis (voir le théorème 1.11).
Pour prouver que d est une dérivation de $[\ ,\ ]_\pi$, posons pour toutes $\eta \in \Omega^k(M)$ et $\omega \in \Omega^l(M)$,

$$\mathcal{I}(\eta,\omega) = d\,[\eta,\omega]_\pi - [d\eta,\omega]_\pi - (-1)^{k-1}[\eta, d\omega]_\pi\,.$$

On vérifie immédiatement que

$$\mathcal{I}(\eta,\omega) = -(-1)^{(k-1)(l-1)}\mathcal{I}(\omega,\eta)$$

et que

$$\mathcal{I}(\eta,\omega\wedge\rho) = \mathcal{I}(\eta,\omega)\wedge\rho + (-1)^{kl}\omega\wedge\mathcal{I}(\eta,\rho),$$

pour toute forme différentielle ρ. En particulier, $\mathcal{I}$ est de type local. Il suffit donc de vérifier (1.56) dans les trois cas suivants : η et ω sont des 0-formes, i.e., des fonctions ; η est une fonction et ω est la différentielle d'une fonction ; η et ω sont les différentielles de deux fonctions. Le premier cas étant trivial, vérifions le deuxième. D'après (1.51) et (1.33), on a

$$\mathcal{I}(f,dg) = d\,[f,dg]_\pi - [df,dg]_\pi = d(i_{X_f}dg) - d\{f,g\}_\pi = 0\,.$$

Pour le troisième cas, on a : $\mathcal{I}(df,dg) = d[df,dg]_\pi = d^2\{f,g\}_\pi = 0$, ce qui achève la démonstration. □

1.3.3 Connexions Contravariantes

Un autre élément du calcul de Poisson est la notion de connexion contravariante. Ces connexions ont été introduites par Vaismann [49, 51] ; elles jouent un rôle important dans la géométrie de Poisson, e.g., [15], [26], [20], etc, et deviennent de plus en plus très utiles dans différents domaines de mathématiques [24, 25, 13, 5]. Pour un traitement détaillé des connexions contravariantes, voir [20].

Une connexion contravariante se définit d'une manière similaire à celle d'une connexion ordinaire (covariante), sauf que les 1-formes remplacent les champs de vecteurs. Plus précisément,

Définition 1.39. Une ***connexion contravariante*** sur une variété de Poisson (M,π) est une application $\mathbb{R}$-bilinéaire $\mathcal{D} : \Omega^1(M)\times\Omega^1(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$, notée $(\alpha,\beta)\mapsto \mathcal{D}_\alpha\beta$, vérifiant, pour toute fonction f sur M,

$$\mathcal{D}_{f\alpha}\beta = f\,\mathcal{D}_\alpha\beta \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_\alpha(f\beta) = f\,\mathcal{D}_\alpha\beta + \pi_\sharp(\alpha)(f)\beta\,.$$

$\mathcal{D}_\alpha\beta$ est appelée *dérivée contravariante* de β dans la direction de α.

Exemple 1.40. Toute connexion covariante ∇ sur M induit deux connexions contravariantes définies par : $\mathcal{D}_\alpha\beta := \nabla_{\pi_\sharp(\alpha)}\beta\,, \quad \tilde{\mathcal{D}}_\alpha\beta := \nabla_{\pi_\sharp(\beta)}\alpha + [\alpha,\beta]_\pi\,.$
En particulier, les connexions contravariantes existent sur toute variété de Poisson. Quand π est symplectique, toute connexion contravariante $\mathcal{D}$ sur M est induite par une connexion covariante : $\mathcal{D}_\alpha\beta = \nabla_{\pi_\sharp(\alpha)}\beta$ avec $\nabla_X Y := \mathcal{D}_{\pi_\sharp^{-1}(X)}Y$.

Lorsqu'une connexion contravariante $\mathcal{D}$ sur (M,π) est induite par une connexion covariante, elle vérifie la propriété suivante :

$$\big(\forall\, a \in T^*M,\ \pi_\sharp(a) = 0\big) \implies \mathcal{D}_a = 0\,, \tag{1.57}$$

on dit que $\mathcal{D}$ est une *$\mathcal{F}$-connexion* [20]. Si $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{F}$-connexion sur l'ouvert M^{reg} des points régulier de (M,π), on dit que $\mathcal{D}$ est une *$\mathcal{F}^{reg}$-connexion*.
Une connexion contravariante n'est en général pas une $\mathcal{F}$-connexion (voir l'exemple 1.42), et n'est donc pas forcément induite par une connexion covariante.

La définition d'une connexion contravariante étant similaire à la définition d'une connexion covariante, on peut développer les notions usuelles de torsion, courbure, transport parallèle, géodésique, etc. Néanmoins, il y a quelques différences surprenantes dans la géométrie de Poisson contravariante (voir [20]).
Si $(U; x_1,\ldots,x_d)$ est une carte locale de M, on définit les *symboles de Christoffel* Γ^k_{ij} d'une connexion contravariante $\mathcal{D}$ par :

$$\mathcal{D}_{dx_i}dx_j = \sum_{k=1}^{d}\Gamma^k_{ij}\,dx_k\,. \tag{1.58}$$

Il est facile de voir que, sous un changement de coordonnées, ces symboles se transforment suivant la règle

$$\tilde{\Gamma}^t_{rs} = \sum_{i,j,k}\frac{\partial\tilde{x}_r}{\partial x_i}\frac{\tilde{x}_s}{\partial x_j}\frac{\partial x_k}{\partial\tilde{x}_t}\Gamma^k_{ij} + \frac{\partial\tilde{x}_r}{\partial x_i}\frac{\partial^2\tilde{x}_s}{\partial x_j\partial x_k}\frac{\partial x_j}{\partial\tilde{x}_t}\pi_{ik}\,, \tag{1.59}$$

où π_{ij} sont les composantes de π dans $(x_1,\ldots,x_d)$. Inversement, la donnée d'une famille de symboles qui se transforment suivant cette règle sous un changement de coordonnées, définit une connexion contravariante.
La *torsion* et la *courbure* de la connexion contravariante $\mathcal{D}$ sont définies respectivement par :

$$T(\alpha,\beta) = \mathcal{D}_\alpha\beta - \mathcal{D}_\beta\alpha - [\alpha,\beta]_\pi\,, \tag{1.60}$$
$$R(\alpha,\beta)\gamma = \mathcal{D}_\alpha\mathcal{D}_\beta\gamma - \mathcal{D}_\beta\mathcal{D}_\alpha\gamma - \mathcal{D}_{[\alpha,\beta]_\pi}\gamma\,. \tag{1.61}$$

On vérifie immédiatement que T et R sont des tenseurs de types (2,1) et (3,1), respectivement. Quand T (resp. R) est identiquement nulle, on dit de $\mathcal{D}$ qu'elle est *sans torsion* (resp. *plate*). En utilisant (1.60) et (1.61), on trouve que la torsion et la courbure ont respectivement pour composantes locales

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k - \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_k}, \tag{1.62}$$

$$R_{ijk}^l = \sum_{m=1}^d \Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m + \pi_{im} \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x_m} - \pi_{jm} \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x_m} - \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_m} \Gamma_{mk}^l . \tag{1.63}$$

À l'instar du cas covariant, la donnée d'une métrique riemannienne sur la variété de Poisson (M, π) donne naissance à une connexion contravariante analogue à la connexion de Levi-Civita. Soit g une métrique riemannienne sur M, et soit $\#_g^{-1} : TM \to T^*M$ l'isomorphisme musical associé à g, i.e. $\#_g^{-1}(u) := g(u, .)$. La métrique g définit sur le fibré cotangent une métrique, que l'on notera g^*, par :

$$g^*(a, b) = g(\#_g(a), \#_g(b)) \quad \forall\, a, b \in T^*M.$$

Proposition 1.41 ([5]). *Il existe une unique connexion contravariante $\mathcal{D}$ sur M vérifiant*

(i) *$\mathcal{D}$ est sans torsion :* $\mathcal{D}_\alpha \beta - \mathcal{D}_\beta \alpha = [\alpha, \beta]_\pi$;

(ii) *$\mathcal{D}$ est métrique :* $\pi_\sharp(\alpha) \cdot g^*(\beta, \gamma) = g^*(\mathcal{D}_\alpha \beta, \gamma) + g^*(\beta, \mathcal{D}_\alpha \gamma)$.

Cette connexion est déterminée par la formule de Koszul

$$\begin{aligned} g^*(\mathcal{D}_\alpha \beta, \gamma) = \frac{1}{2} \{ &\pi_\sharp(\alpha) \cdot g^*(\beta, \gamma) + \pi_\sharp(\beta) \cdot g^*(\alpha, \gamma) - \pi_\sharp(\gamma) \cdot g^*(\alpha, \beta) \\ &+ g^*([\alpha, \beta]_\pi, \gamma) - g^*([\beta, \gamma]_\pi, \alpha) + g^*([\gamma, \alpha]_\pi, \beta) \}. \end{aligned} \tag{1.64}$$

On appelle $\mathcal{D}$ la *connexion de Levi-Civita contravariante* associée au couple (π, g).

Preuve. Puisque g^* est non dégénérée, il suffit de calculer $g^*(\mathcal{D}_\alpha \beta, \gamma)$ pour toutes 1-formes α, β, γ. En utilisant (i) et (ii), on calcule

$$\begin{aligned} g^*(\mathcal{D}_\alpha \beta, \gamma) &= \pi_\sharp(\alpha) \cdot g^*(\beta, \gamma) - g^*(\beta, \mathcal{D}_\alpha \gamma) \\ &= \pi_\sharp(\alpha) \cdot g^*(\beta, \gamma) - g^*(\beta, \mathcal{D}_\gamma \alpha) - g^*(\beta, [\alpha, \gamma]_\pi) \\ &= \pi_\sharp(\alpha) \cdot g^*(\beta, \gamma) - \pi_\sharp(\gamma) \cdot g^*(\beta, \alpha) + g^*(\mathcal{D}_\gamma \beta, \alpha) - g^*(\beta, [\alpha, \gamma]_\pi) \\ &= \pi_\sharp(\alpha) \cdot g^*(\beta, \gamma) - \pi_\sharp(\gamma) \cdot g^*(\beta, \alpha) + g^*(\mathcal{D}_\beta \gamma, \alpha) \\ &\quad + g^*([\gamma, \beta]_\pi, \alpha) - g^*(\beta, [\alpha, \gamma]_\pi) \\ &= \pi_\sharp(\alpha) \cdot g^*(\beta, \gamma) - \pi_\sharp(\gamma) \cdot g^*(\beta, \alpha) + \pi_\sharp(\beta) \cdot g^*(\gamma, \alpha) \\ &\quad - g^*(\gamma, \mathcal{D}_\beta \alpha) + g^*([\gamma, \beta]_\pi, \alpha) - g^*(\beta, [\alpha, \gamma]_\pi) \\ &= \pi_\sharp(\alpha) \cdot g^*(\beta, \gamma) - \pi_\sharp(\gamma) \cdot g^*(\beta, \alpha) + \pi_\sharp(\beta) \cdot g^*(\gamma, \alpha) \\ &\quad - g^*(\gamma, \mathcal{D}_\alpha \beta) - g^*(\gamma, [\beta, \alpha]_\pi) + g^*([\gamma, \beta]_\pi, \alpha) - g^*(\beta, [\alpha, \gamma]_\pi), \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} 2g^*(\mathcal{D}_\alpha \beta, \gamma) = &\pi_\sharp(\alpha) \cdot g^*(\beta, \gamma) + \pi_\sharp(\beta) \cdot g^*(\alpha, \gamma) - \pi_\sharp(\gamma) \cdot g^*(\alpha, \beta) \\ &+ g^*([\alpha, \beta]_\pi, \gamma) - g^*([\beta, \gamma]_\pi, \alpha) + g^*([\gamma, \alpha]_\pi, \beta), \end{aligned}$$

ce qui montre l'unicité. L'existence se démontre immédiatement en vérifiant que (1.64) définit bien une connexion contravariante, sans torsion et métrique. □

Exemple 1.42. Prenons $M = \mathbb{R}^3$ munie de sa métrique euclidienne et du tenseur de Poisson $\pi = \frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} + (y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}) \wedge \frac{\partial}{\partial z}$. La connexion de Levi-Civita contravariante $\mathcal{D}$ correspondante est donnée par :

$$\mathcal{D}_{dx}dx = \mathcal{D}_{dx}dy = \mathcal{D}_{dx}dz = \mathcal{D}_{dy}dx = \mathcal{D}_{dy}dy = \mathcal{D}_{dy}dz = \mathcal{D}_{dz}dz = 0\,,$$

$$\mathcal{D}_{dz}dx = -dy\,, \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{dz}dy = dx;$$

elle est plate, mais elle n'est pas une $\mathcal{F}$-connexion, puisqu'à l'origine, $\pi_\sharp(dz)$ s'annule, alors que $\mathcal{D}_{dz}dx$ et $\mathcal{D}_{dz}dy$ ne s'annulent pas.

1.4 Structures de Poisson invariantes à gauche sur un groupe de Lie

Soit G un groupe de Lie de dimension n, e son élément neutre et $\mathfrak{g} = T_eG$ son algèbre de Lie. Un champ de multivecteurs P sur G est dit *invariant à gauche* s'il est invariant sous les translations à gauche $L_g : h \mapsto gh$ sur G, c'est-à-dire,

$$(L_g)_*P(h) = P(gh) \quad \forall\, g, h \in G.$$

Une structure de Poisson *invariante à gauche* sur G est la donnée d'un champ de bivecteurs π sur G invariant à gauche et vérifiant $[\pi, \pi] = 0$. Une telle structure de Poisson est nécessairement de rang constant sur G, égal à son rang en e.
Si G est connexe, un champ de multivecteurs P est invariant à gauche si et seulement si la dérivée de Lie $\mathcal{L}_XP$ de P dans la direction de tout champ invariant à droite X est nulle [4] (puisque le flot de X est le sous-groupe à un paramètre des translations à gauche $L_{\exp(tX_e)}$). Par conséquent, le crochet de Schouten-Nijenhuis $[P, Q]$ de deux champs de multivecteurs invariants à gauche P et Q est aussi invariant à gauche. En effet, d'après (1.18) et (1.23), pour tout champ de vecteurs invariant à droite X,

$$\mathcal{L}_X[P, Q] = [\mathcal{L}_XP, Q] + [P, \mathcal{L}_XQ] = 0\,.$$

Puisque l'évaluation en e, i.e., $P \mapsto P(e)$, est un isomorphisme de l'espace des champs de multivecteurs invariants à gauche sur l'espace $\wedge^*\mathfrak{g} = \oplus_{k=0}^n \wedge^k \mathfrak{g}$ (son inverse étant l'application $x \mapsto x^+$ où $x^+(g) := (L_g)_*x \quad \forall\, g \in G$), le crochet de Schouten-Nijenhuis définit sur $\wedge^*\mathfrak{g}$ un crochet, que l'on appellera *crochet de Schouten-Nijenhuis* de $\mathfrak{g}$; ses propriétés sont résumées dans le lemme suivant.

Lemme 1.43. *Le crochet de Schouten-Nijenhuis d'une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est l'unique application $\mathbb{R}$-bilinéaire sur $\wedge^*\mathfrak{g}$ qui étend le crochet de Lie de $\mathfrak{g}$ et qui vérifie*

(a) *Pour tous $x \in \wedge^i\mathfrak{g}$ et $y \in \wedge^j\mathfrak{g}$, $[x, y] \in \wedge^{i+j-1}\mathfrak{g}$.*

4. On rappelle que la dérivée de Lie $\mathcal{L}_X\tau$ d'un tenseur τ dans la direction d'un champ de vecteurs X est nulle ssi τ est invariant sous le flot de X.

(b) *L'antisymétrie graduée : pour tous $x \in \wedge^i \mathfrak{g}$ et $y \in \wedge^j \mathfrak{g}$,*

$$[x, y] = -(-1)^{(i-1)(j-1)}[y, x]. \tag{1.65}$$

(c) *La règle de Leibniz graduée : pour tous $x \in \wedge^i \mathfrak{g}$, $y \in \wedge^j \mathfrak{g}$ et $z \in \wedge^k \mathfrak{g}$,*

$$[x\,, y \wedge z] = [x, y] \wedge z + (-1)^{(i-1)j} y \wedge [x, z], \tag{1.66}$$
$$[x \wedge y\,, z] = x \wedge [y, z] + (-1)^{(k-1)j} [x, z] \wedge y. \tag{1.67}$$

(d) *Le crochet d'un élément de $\wedge^* \mathfrak{g}$ et un élément de $\wedge^0 \mathfrak{g} = \mathbb{R}$ est nul.*

En outre, le crochet de Schouten-Nijenhuis de $\mathfrak{g}$ vérifie l'identité de Jacobi graduée :

$$\begin{aligned}(-1)^{(i-1)(k-1)}[x, [y, z]] + (-1)^{(j-1)(i-1)}[y, [z, x]] \\ +(-1)^{(k-1)(j-1)}[z, [x, y]] = 0\,,\end{aligned} \tag{1.68}$$

et pour tous $u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_s \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}&[u_1 \wedge \cdots \wedge u_r, v_1 \wedge \cdots \wedge v_s] = \\ &\sum_{k,l}(-1)^{k+l}[u_k, v_l] \wedge u_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{u}_k \wedge \cdots \wedge u_r \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{v}_l \wedge \cdots \wedge v_s\,.\end{aligned} \tag{1.69}$$

Remarque 1.44. Une manière directe de définir le crochet de Schouten-Nijenhuis sur $\wedge^* \mathfrak{g}$ consiste à étendre (1.69), par $\mathbb{R}$-bilinéarité, aux sommes de multivecteurs décomposables de $\wedge^* \mathfrak{g}$.

Conte tenu de ce qui précède, on a :

Proposition 1.45. *Une structure de Poisson invariante à gauche sur un groupe de Lie connexe G est équivalente à la donnée d'un élément $r \in \wedge^2 \mathfrak{g}$ vérifiant l'équation suivante, dite équation de Yang-Baxter classique (en abrégé EYBC) :*

$$[r, r] = 0\,. \tag{1.70}$$

Les éléments de $\wedge^2 \mathfrak{g}$ vérifiant (1.70) sont appelés *solutions de l'EYBC*.

Exemple 1.46. Si la dimension de $\mathfrak{g}$ est égale à 2, tout élément de $\wedge^2 \mathfrak{g}$ est une solution de l'EYBC.

Exemple 1.47. Si $u, v \in \mathfrak{g}$ sont tels que $[u, v] = 0$, $r = u \wedge v$ est une solution de l'EYBC ; la structure de Poisson invariante à gauche correspondante sur G est de rang constant égal à 0 si $u \wedge v = 0$, 2 sinon.

Par la suite, on donnera une caractérisation des solutions de l'EYBC qui peut être très utile.

Dans tout ce qui suit, $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie réelle de dimension n, $\mathfrak{g}^*$ l'espace dual de $\mathfrak{g}$ et r un élément de $\wedge^2 \mathfrak{g}$. On notera $r : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}$ l'application linéaire définie par

$$b(r(a)) = -a(r(b)) = r(a, b) \quad \forall\, a, b \in \mathfrak{g}^*, \tag{1.71}$$

$\mathcal{S}_r$ le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{g}$ image de r et $[\,,\,]_r$ le crochet défini sur $\mathfrak{g}^*$ par

$$[a,b]_r = \mathrm{ad}^*_{r(b)}a - \mathrm{ad}^*_{r(a)}b \quad \forall\, a,b \in \mathfrak{g}^*\,, \tag{1.72}$$

où $\mathrm{ad}^* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^*)$ est la représentation coadjointe de $\mathfrak{g}$ donnée par

$$\mathrm{ad}^*_u a\,(v) = a([u,v]) \quad \forall\, u,v \in \mathfrak{g},\ a \in \mathfrak{g}^*\,.$$

Lemme 1.48. *Pour tous $a,b,c \in \mathfrak{g}^*$, on a :*

$$\frac{1}{2}\,[r,r](a,b,c) = a\big([r(b),r(c)]\big) + b\big([r(c),r(a)]\big) + c\big([r(a),r(b)]\big). \tag{1.73}$$

Preuve. Puisque le membre droit de (1.73) est linéaire en a,b et c, il suffit de montrer (1.73) sur une base de $\mathfrak{g}^*$. Pour cela, soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une base de $\mathfrak{g}$ et $(e_1^*,\ldots,e_n^*)$ la base duale sur $\mathfrak{g}^*$. Écrivons

$$[e_i,e_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k\, e_k\,, \qquad r = \sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}\, e_i \wedge e_j\,.$$

En utilisant (1.69), on obtient par calcul direct

$$[r,r] = \sum_{i,j,k,l,m} a_{il}a_{jm}c_{ij}^k\, e_k \wedge e_l \wedge e_m\,.$$

Ainsi, pour tous $i,j,k = 1,\ldots,n$,

$$[r,r](e_i^*,e_j^*,e_k^*) = 2\sum_{l,m} \oint_{i,j,k} a_{il}a_{jm}c_{lm}^k = 2\oint_{i,j,k} e_i^*([r(e_j^*),r(e_k^*)])\,.$$

D'où le résultat. $\square$

Lemme 1.49. *Si r est une solution de l'EYBC, $[\,,\,]_r$ définit un crochet de Lie sur $\mathfrak{g}^*$ et $r : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}$ est un morphisme d'algèbres de Lie. En particulier, $\mathcal{S}_r$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$.*

Preuve. Supposons que r est une solution de l'EYBC. D'après (1.73), pour tous $a,b,c \in \mathfrak{g}^*$, on a

$$\begin{aligned} c\big(r([a,b]_r)\big) &= -\mathrm{ad}^*_{r(b)}a(r(c)) + \mathrm{ad}^*_{r(a)}b(r(c)) \\ &= -a\big([r(b),r(c)]\big) - b\big([r(c),r(a)]\big) \\ &= c\big([r(a),r(b)]\big). \end{aligned}$$

Donc

$$r\big([a,b]_r\big) = [r(a),r(b)], \tag{1.74}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned}[][a,b]_r,c]_r &= \mathrm{ad}^*_{r(c)}[a,b]_r - \mathrm{ad}^*_{r([a,b]_r)}c \\ &= \mathrm{ad}^*_{r(c)}\mathrm{ad}^*_{r(b)}a - \mathrm{ad}^*_{r(c)}\mathrm{ad}^*_{r(a)}b + \mathrm{ad}^*_{r(a)}\mathrm{ad}^*_{r(b)}c - \mathrm{ad}^*_{r(b)}\mathrm{ad}^*_{r(a)}c\,.\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\oint_{a,b,c}[[a,b]_r,c]_r = 0\,,$$

d'où le résultat. □

Remarque 1.50. Une autre manière d'établir le lemme ci-dessus consiste à remarquer que le crochet $[\,,\,]_r$ peut être défini à l'aide du crochet de Koszul : si G est un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et π est le tenseur de Poisson invariant à gauche associé à la solution de l'EYBC r, alors pour toutes 1-formes α,β invariantes à gauche et tout champ de vecteurs X invariant à gauche, on a

$$\begin{aligned}[][\alpha,\beta]_\pi(X) &= \left(\mathcal{L}_{\pi_\sharp(\alpha)}\beta\right)(X) - \left(\mathcal{L}_{\pi_\sharp(\beta)}\alpha\right)(X) \\ &= -\beta\left([\pi_\sharp(\alpha),X]\right) + \alpha\left([\pi_\sharp(\beta),X]\right), \qquad (*)\end{aligned}$$

car $\pi(\alpha,\beta)$, $\alpha(X)$ et $\beta(X)$ sont des fonctions constantes sur G par invariance à gauche. Donc $[\alpha,\beta]_\pi(X)$ est aussi une fonction constante sur G puisque $\pi_\sharp(\alpha)$ et $\pi_\sharp(\beta)$ sont invariants à gauche. Il en résulte que $\mathcal{L}_Y[\alpha,\beta]_\pi(X) = 0$ pour tout champ de vecteurs invariant à droite Y, et donc $[\alpha,\beta]_\pi$ est une 1-forme invariante à gauche. Ainsi, en identifiant $\mathfrak{g}^*$ à l'espace des 1-formes invariantes à gauche, le crochet de Koszul définit sur $\mathfrak{g}^*$ un crochet de Lie qui n'est rien d'autre, d'après $(*)$, que $[\,,\,]_r$.

Maintenant, considérons la 2-forme ω_r définie sur $\mathcal{S}_r$ par

$$\omega_r(u,v) = r(a,b) = b(u) = -a(v) \quad \forall\, u,v \in \mathcal{S}_r\,, \tag{1.75}$$

où a et b sont respectivement des antécédents de u et v par r. Il est clair que ω_r est bien définie et non-dégénérée ; il s'agit donc d'une forme symplectique sur l'espace vectoriel $\mathcal{S}_r$.
Inversement, si $(\mathcal{S},\omega)$ est un sous-espace symplectique de $\mathfrak{g}$, la forme symplectique ω définit un isomorphisme $\omega^\flat : \mathcal{S} \to \mathcal{S}^*$ par $\omega^\flat(u) = \omega(u,.)$. L'application

$$r : \mathfrak{g}^* \xrightarrow{i^*} \mathcal{S}^* \xrightarrow{\omega^\sharp} \mathcal{S} \overset{i}{\hookrightarrow} \mathfrak{g}\,,$$

où $\omega^\sharp$ est l'inverse de $\omega^\flat$ et i^* l'application duale de l'inclusion $i : \mathcal{S} \hookrightarrow \mathfrak{g}$, définit un élément $r \in \wedge^2\mathfrak{g}$ tel que $(\mathcal{S}_r,\omega_r) = (\mathcal{S},\omega)$. Les éléments de $\wedge^2\mathfrak{g}$ sont donc en correspondance biunivoque avec les sous-espaces symplectiques de $\mathfrak{g}$.

Proposition 1.51. *Les assertions suivantes sont équivalentes* :

1. *r est une solution de l'équation de Yang-Baxter classique.*

2. *$\mathcal{S}_r$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, et pour tous $u, v, w \in \mathcal{S}_r$,*

$$\omega_r\big(u, [v, w]\big) + \omega_r\big(v, [w, u]\big) + \omega_r\big(w, [u, v]\big) = 0\,. \tag{1.76}$$

Preuve. Remarquons que si $\mathcal{S}_r$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$, alors, d'après (1.75), pour tous $u = r(a)$, $v = r(b)$ et $w = r(c)$ dans $\mathcal{S}_r$, on a

$$\omega_r\big(u, [v, w]\big) = -a\big([r(b), r(c)]\big).$$

Donc

$$\oint_{u,v,w} \omega_r\big(u, [v, w]\big) = -\oint_{a,b,c} a\big([r(b), r(c)]\big).$$

Il suffit alors d'utiliser le lemme 1.49 et (1.73) pour conclure. □

La donnée d'une solution de l'EYBC sur $\mathfrak{g}$ est équivalente donc à la donnée d'une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ munie d'une forme symplectique vérifiant (1.76).

Exemple 1.52. Avec les mêmes notations de l'exemple 1.47, $\mathcal{S}_r = \mathrm{Vect}\{u, v\}$ qui est abélienne, et $\omega_r(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \wedge v \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Chapitre 2

Structures bi-hamiltoniennes sur le fibré cotangent d'une variété de Riemann-Poisson

Il est bien connu que le fibré cotangent de toute variété M possède une structure symplectique dite canonique et donc un tenseur de Poisson Π_0. Le couple (T^*M, Π_0) est le modèle fondamental de la mécanique hamiltonienne [1]. Il est alors naturel de chercher des situations où ce modèle est bi-hamiltonien (au sens de Magri [37]), c'est-à-dire qu'il existe sur T^*M un autre tenseur de Poisson compatible avec Π_0. Dans [48] Turiel a associé à tout tenseur J de type (1,1) un champ de bivecteurs Π_J sur T^*M et a montré que Π_J est de Poisson si et seulement si J est sans torsion de Nijenhuis et que, dans ce cas, Π_J est compatible avec Π_0.

Dans ce chapitre on considère la situation suivante. Soit M une variété équipée d'un tenseur de Poisson π et d'une métrique riemannienne g et soit $J = \pi_\sharp \circ \#^{-1}$ le $(1,1)$-tenseur reliant π à g. La structure d'algébroïde de Lie sur T^*M associée à π définit par dualité un tenseur de Poisson Π sur TM et donc un tenseur de Poisson Π^g sur T^*M, image de Π par l'isomorphisme musical associé à g. Ainsi, sur le fibré cotangent de M sont définis : le tenseur de Poisson canonique Π_0, le tenseur de Poisson Π^g et le champ de bivecteurs Π_J. On démontre (voir le théorème 2.10) que les trois assertions suivantes sont équivalentes : (a) Π^g est compatible avec Π_0 ; (b) $\Pi^g = \Pi_J$; (c) π est parallèle par rapport à la connexion de Levi-Civita de g. Dans le cas d'un groupe de Lie G muni d'une métrique riemannienne et d'une structures de Poisson invariantes à gauche, on exprime grâce au théorème 2.10 et sa preuve, la condition $\nabla\pi = 0$ au niveau de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Ceci permet d'établir que $\mathfrak{g}$ se décompose en somme directe d'une sous-algèbre de Lie kählérienne et d'une sous-algèbre de Lie euclidienne (voir le théorème 2.15).

1. C'est l'espace des phases.

2.1 Tenseur de Poisson dual d'un algébroïde de Lie

Dans cette section, on rappelle (cf., e.g., [17, p. 119], [19, p. 240-241], [36, p. 391-392]) que la donnée d'un pseudo-algébroïde de Lie $(\mathcal{A}, [\ ,\ ], \#)$ donne naissance à un champ de bivecteurs (linéaire) Π sur le fibré dual $\mathcal{A}^*$ de $\mathcal{A}$, qui est de Poisson si et seulement si $(\mathcal{A}, [\ ,\ ], \#)$ est un algébroïde de Lie, et vice versa.

Soit $p : \mathcal{E} \to M$ un fibré vectoriel sur une variété M. Une *fonction basique* sur $\mathcal{E}$ est une fonction de type $f \circ p$ où f est une fonction sur M. Une fonction *linéaire* sur $\mathcal{E}$ est une fonction dont la restriction sur chaque fibre de $\mathcal{E}$ est linéaire. Un champ de bivecteurs Π sur $\mathcal{E}$ est dit *linéaire* si les conditions suivantes sur le crochet $\{F, G\}_\Pi = \Pi(dF, dG)$ sont satisfaites :

(i) Le crochet de deux fonctions linéaires est une fonction linéaire.

(ii) Le crochet d'une fonction linéaire et une fonction basique est une fonction basique.

(iii) Le crochet de deux fonctions basiques est nul.

En particulier, une structure de Poisson sur $\mathcal{E}$ est linéaire si le tenseur de Poisson correspondant est linéaire.

Soit $(\mathcal{A}, [\ ,\ ], \#)$ un pseudo-algébroïde de Lie sur une variété M et soit $p : \mathcal{A} \to M$ la projection canonique. Sur le fibré dual $\mathcal{A}^*$ est défini, de manière naturelle, un champ de bivecteurs linéaire qui peut être décrit de la manière suivante [2] : pour toute fonction $F \in C^\infty(\mathcal{A}^*)$ et toute section $\xi \in \Gamma(\mathcal{A}^*)$, on définit une section $F_\xi \in \Gamma(\mathcal{A})$ en posant, pour tout $x \in M$ et tout $\mu \in \mathcal{A}^*_x$,

$$\big\langle \mu, F_\xi(x) \big\rangle = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} F(\xi(x) + t\mu). \tag{2.1}$$

Considérons, pour toutes $F, G \in C^\infty(\mathcal{A}^*)$, le crochet $\{F, G\}$ ainsi défini : pour toute section $\xi \in \Gamma(\mathcal{A}^*)$,

$$\begin{aligned} \{F, G\} \circ \xi = \big\langle \xi, [F_\xi, G_\xi] \big\rangle - \#(F_\xi)\big(\langle \xi, G_\xi \rangle - G \circ \xi\big) \\ + \#(G_\xi)\big(\langle \xi, F_\xi \rangle - F \circ \xi\big). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Ce crochet est indépendant du choix de la section $\xi \in \Gamma(\mathcal{A}^*)$; en effet, si ξ et ξ' sont deux sections de $\mathcal{A}^*$ qui coïncident en un point $x \in M$, alors par définition, pour toute fonction $F \in C^\infty(\mathcal{A}^*)$, $F_\xi(x) = F_{\xi'}(x)$. Ainsi, en choisissant une base $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_r)$ de sections locales de $\mathcal{A}$ définies au voisinage de x, avec $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r)$ comme base duale, on peut écrire

$$\xi = \sum_{i=1}^r z_i\, \varepsilon_i\,, \quad \xi' = \sum_{i=1}^r z'_i\, \varepsilon_i\,,$$

$$F_\xi = \sum_{i=1}^r f_i\, \epsilon_i\,, \quad F_{\xi'} = \sum_{i=1}^r f'_i\, \epsilon_i\,, \quad G_\xi = \sum_{i=1}^r g_i\, \epsilon_i\,, \quad G_{\xi'} = \sum_{i=1}^r g'_i\, \epsilon_i$$

2. Cette construction est issue de [10], où elle est décrite sans démonstration.

avec $z_i(x) = z_i'(x)$, $f_i(x) = f_i'(x)$ et $g_i(x) = g'(x)$. Un calcul direct donne

$$\begin{aligned}\{F,G\}\big(\xi(x)\big) = \sum_{1\le i,j\le r} & f_i(x)g_j(x)\,\big\langle \xi(x), [\epsilon_i,\epsilon_j](x)\big\rangle \\ & - z_i(x)g_j(x)\, d_{\xi(x)}F\left((\varepsilon_i)_*\#(\epsilon_j)(x)\right) \\ & + z_i(x)f_j(x)\, d_{\xi(x)}G\left((\varepsilon_i)_*\#(\epsilon_j)(x)\right) \\ = \{F,G\}\big(\xi'(x)\big). &\end{aligned}$$

Il est clair que $\{\ ,\ \}$ est $\mathbb{R}$-bilinéaire et antisymétrique. En utilisant la règle de Leibniz de $\mathcal{A}$ et l'égalité,

$$(FG)_\xi = (F\circ\xi)\,G_\xi + (G\circ\xi)\,F_\xi\,,$$

on vérifie que $\{\ ,\ \}$ satisfait aussi la règle de Leibniz

$$\{F,GH\} = G\{F,H\} + H\{F,G\}.$$

Il existe donc un champ de bivecteurs Π sur $\mathcal{A}^*$ tel que $\Pi(dF,dG) = \{F,G\}$. En outre, pour toutes $f,g\in C^\infty(M)$ et toutes $\alpha,\beta\in\Gamma(\mathcal{A})$,

$$\{f\circ p, g\circ p\} = 0\,,\quad \{\alpha, f\circ p\} = \#(\alpha)(f)\circ p \quad \text{et} \quad \{\alpha,\beta\} = [\alpha,\beta]\,, \tag{2.3}$$

où une section de $\mathcal{A}$ est considérée comme une fonction linéaire sur $\mathcal{A}^*$, ce qui montre que Π est linéaire.
En coordonnées locales $(x_1,\dots,x_d,\epsilon_1,\dots,\epsilon_r)$ sur $\mathcal{A}^*$, avec $(x_1,\dots,x_d)$ un système de coordonnées sur M et $(\epsilon_1,\dots,\epsilon_r)$ une base de sections locales sur $\mathcal{A}$, le champ de bivecteurs Π s'écrit

$$\Pi = \sum_{i,j} -b_{ji}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\wedge\frac{\partial}{\partial\epsilon_j} + \frac{1}{2}\sum_{i,j,k} c_{ij}^k\epsilon_k\,\frac{\partial}{\partial\epsilon_i}\wedge\frac{\partial}{\partial\epsilon_j}\,, \tag{2.4}$$

où b_{ji} et c_{ij}^k sont les fonctions de structure définies par

$$\#(\epsilon_j) = \sum_{i=1}^d b_{ji}\,\frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad [\epsilon_i,\epsilon_j] = \sum_{k=1}^r c_{ij}^k\,\epsilon_k\,. \tag{2.5}$$

Ceci montre, en particulier, que Π est l'unique champ de bivecteurs (linéaire) sur $\mathcal{A}^*$ vérifiant (2.3).

Inversement, étant donné un champ de bivecteurs linéaire Π sur $\mathcal{A}^*$, les formules (2.3) définissent un ancrage $\# : \mathcal{A}\to TM$ et un crochet $[\ ,\ ]$ sur $\Gamma(\mathcal{A})$, $\mathbb{R}$-bilinéaire et antisymétrique, qui satisfont la règle de Leibniz (qui n'est rien d'autre qu'un cas particulier de la règle de Leibniz du crochet correspondant à Π). En d'autres termes, $(\mathcal{A},[\ ,\ ],\#)$ et un pseudo-algébroïde de Lie.

Montrons maintenant que $(\mathcal{A},[\ ,\ ],\#)$ est un algébroïde de Lie si et seulement si Π est de Poisson. D'après le corollaire 1.13, Π est de Poisson si et seulement si $\{\ ,\ \}$ vérifie l'identité de Jacobi sur les fonctions coordonnées. Puisqu'autour de tout point de $\mathcal{A}^*$ on peut trouver un système de coordonnées composé de fonctions basiques et de fonctions linéaires, il suffit que $\{\ ,\ \}$ vérifie l'identité de Jacobi sur les fonctions basiques et les fonctions linéaires. Il est clair que l'identité de Jacobi est satisfaite si les trois fonctions sont toutes basiques ou si deux d'entre elles sont basiques et l'autre est linéaire. Par ailleurs, pour toute $f \in C^\infty(M)$ et toutes $\alpha, \beta, \gamma \in \Gamma(\mathcal{A})$, on a

$$\begin{aligned}\{\{\alpha, \beta\}, f \circ p\} + \{\{\beta, f \circ p\}, \alpha\} + \{\{f \circ p, \alpha\}, \beta\}\\ = (\#[\alpha, \beta] - [\#(\alpha), \#(\beta)])\,(f) \circ p\,,\end{aligned}$$

$$\{\{\alpha, \beta\}, \gamma\} + \{\{\beta, \gamma\}, \alpha\} + \{\{\gamma, \alpha\}, \beta\} = [[\alpha, \beta], \gamma] + [[\beta, \gamma], \alpha] + [[\gamma, \alpha], \beta]\,.$$

Donc compte tenu de la proposition 1.29, Π est de Poisson si et seulement si $(\mathcal{A}, [\ ,\ ], \#)$ est un algébroïde de Lie.

Pour résumer, on a le théorème suivant.

Théorème 2.1. *À tout pseudo-algébroïde de Lie $(\mathcal{A}, [\ ,\ ], \#)$ correspond un et un seul champ de bivecteurs linéaire Π sur $\mathcal{A}^*$ vérifiant* (2.3)*. Inversement, tout champ de bivecteurs linéaire sur $\mathcal{A}^*$ définit une structure de pseudo-algébroïde de Lie sur $\mathcal{A}$ par* (2.3)*. On appellera Π le tenseur dual de $(\mathcal{A}, [\ ,\ ], \#)$.*
Le pseudo-algébroïde de Lie $(\mathcal{A}, [\ ,\ ], \#)$ est un algébroïde de Lie si et seulement si son tenseur dual est de Poisson.

Exemple 2.2. Si $\mathcal{A} = \mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie, son tenseur de Poisson dual sur $\mathcal{A}^* = \mathfrak{g}^*$ n'est rien d'autre que le tenseur de Lie-Poisson associée à $\mathfrak{g}$.

Exemple 2.3 (Structure symplectique canonique du fibré cotangent)**.** Si $\mathcal{A} = TM$, muni de sa structure d'algébroïde de Lie tangent, les fonctions de structure sont données relativement à tout système de coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_d)$ sur M par $b_{ij} = \delta_{ij}$ et $c_{ij}^k = 0$. Ainsi, si $(x_1, \ldots, x_d, \xi_1, \ldots, \xi_d)$ est le système de coordonnées correspondant sur $\mathcal{A}^* = T^*M$, le tenseur de Poisson dual sur T^*M, qu'on notera Π_0, est donné par $\Pi_0 = \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial \xi_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_i}$ et est donc symplectique. Le tenseur Π_0 est appelé *structure de Poisson canonique* du fibré cotangent.

Exemple 2.4 (Structure de Poisson tangente)**.** Le fibré cotangent de toute variété de Poisson (M, π) étant un algébroïde de Lie (voir chapitre 1), il existe, en vertu du théorème 2.1, une structure de Poisson linéaire duale sur TM, donnée localement par :

$$\Pi = \sum_{i,j=1}^d \pi_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^d \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_k} y_k \frac{\partial}{\partial y_i} \wedge \frac{\partial}{\partial y_j}\,,$$

où $(x_1, \ldots, x_d)$ est un système de coordonnées sur M, $(x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots, y_d)$ est le système de coordonnées linéaires correspondant sur TM et π_{ij} sont les composantes de π dans $(x_1, \ldots, x_d)$. On appellera Π la *structure de Poisson tangente* associée à (M, π).

2.2 Structures bi-hamiltoniennes sur le fibré cotangent

Dans cette section on va développer le matériel nécessaire pour la preuve du théorème 2.10, résultat principal de ce chapitre.

On dira que deux structures de Poisson π et π' sur une variété M sont *compatibles* si leur crochet de Schouten-Nijenhuis est nul, i.e., $[\pi, \pi'] = 0$, ou de manière équivalente $\pi + \pi'$ est un tenseur de Poisson. Une *structure bi-hamiltonienne* sur M est la donnée de deux tenseurs de Poisson compatibles sur M.

Exemple 2.5. $M = \mathbb{R}^3$, $\pi = (x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}) \wedge \frac{\partial}{\partial z}$ et $\pi' = z\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}$. Alors π et π' sont compatibles, puisque $\pi + \pi' = x\frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z} + y\frac{\partial}{\partial z} \wedge \frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y}$ est de Poisson.

La proposition suivante permet d'exprimer la compatibilité de deux tenseurs de Poisson linéaires sur le dual d'un fibré vectoriel en termes des algébroïdes de Lie correspondants.

Proposition 2.6. *Soit $p : \mathcal{A} \to M$ un fibré vectoriel sur une variété M, et soient Π et Π' deux tenseurs de Poisson linéaires sur le fibré dual $\mathcal{A}^*$, et $([\ ,\ ], \#)$ et $([\ ,\ ]', \#')$ les structures d'algébroïdes de Lie correspondants sur $\mathcal{A}$. Alors Π et Π' sont compatibles ssi $([\ ,\ ] + [\ ,\ ]', \# + \#')$ est une structure d'algébroïde de Lie sur $\mathcal{A}$. Si tel est le cas, le dual de $(\mathcal{A}, [\ ,\ ] + [\ ,\ ]', \# + \#')$ n'est rien d'autre que $\Pi + \Pi'$.*

Preuve. Évidente. □

On dira que deux structures d'algébroïde de Lie sur un fibré vectoriel sont *compatibles* si elles satisfont les conditions de la proposition ci-dessus.

2.2.1 *Cas d'une variété munie d'un (1,1)-tenseur*

Dans [48] Turiel a montré que la donné d'un (1,1)-tenseur A sur une variété M définit sur T^*M un champ de bivecteurs Π_A qui est de Poisson si et seulement si la torsion de Nijenhuis de A est nulle et que, dans ce cas, Π_A est compatible avec la structure de Poisson canonique de T^*M. Dans ce qui suit on va retrouver ce résultat en utilisant le langage des algébroïdes de Lie adapté à notre situation.

Soit $A : TM \to TM$ un tenseur de type (1,1) sur une variété M. Considérons la 1-forme θ_A définie sur T^*M par :

$$\langle \theta_A(a), \zeta \rangle = \langle a, A(p_*(\zeta)) \rangle \quad \forall\, a \in T^*M,\ \zeta \in T_a(T^*M)\,, \tag{2.6}$$

où $p : T^*M \longrightarrow M$ est la projection canonique. Si $(x_1, \ldots, x_d, \xi_1, \ldots, \xi_d)$ est un système de coordonnées linéaires sur T^*M, θ_A a pour expression locale

$$\theta_A = \sum_{i,j=1}^{d} A_i^j \xi_j\, dx_i, \tag{2.7}$$

où A_i^j sont les composantes de A dans $(x_1, \ldots, x_d)$.
Lorsque $A = \mathrm{Id}_{TM}$, la 2-forme $\omega_0 := d\theta_{\mathrm{Id}_{TM}} = \sum_i d\xi_i \wedge dx_i$ est une 2-forme symplectique, qui n'est rien d'autre que la forme symplectique canonique du fibré cotangent définie dans l'exemple 2.3.
Pour toute $F \in C^\infty(T^*M)$, notons X_F le champ hamiltonien de F par rapport à ω_0. La formule

$$\Pi_A(dF, dG) = d\theta_A(X_F, X_G) \tag{2.8}$$

définit un champ de bivecteurs Π_A sur T^*M. En utilisant (2.7), on obtient

$$\Pi_A = \sum_{i,j=1}^{d} -A_j^i \frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial \xi_j} + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^{d} \left(\frac{\partial A_j^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i^k}{\partial x_j} \right) \xi_k \frac{\partial}{\partial \xi_i} \wedge \frac{\partial}{\partial \xi_j}, \tag{2.9}$$

ce qui montre que Π_A est linéaire et est donc le tenseur dual d'un pseudo-algébroïde de Lie sur le fibré tangent (théorème 2.1). Considérons le crochet $[\ ,\ ]_A$ défini sur $\mathfrak{X}^1(M)$ par

$$[X, Y]_A = [AX, Y] + [X, AY] - A[X, Y]. \tag{2.10}$$

On vérifie immédiatement que $(TM, [\ ,\ ]_A, A)$ est un pseudo-algébroïde de Lie. Puisque

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_{j=1}^{d} A_i^j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]_A = \sum_{k=1}^{d} \left(\frac{\partial A_j^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i^k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_k}, \tag{2.11}$$

et compte tenu de (2.4) et (2.9), Π_A est le tenseur dual de $(TM, [\ ,\ ]_A, A)$.

Proposition 2.7. *Soit $A : TM \to TM$ un $(1,1)$-tenseur sur une variété M. Le crochet $[\ ,\ ]_A$ défini par (2.10) vérifie l'identité de Jacobi ssi A est sans torsion de Nijenhuis, i.e., $\mathcal{N}_A(X, Y) := [AX, AY] - A[AX, Y] - A[X, AY] + A^2[X, Y] = 0$.*
Si tel est le cas, $(TM, [\ ,\ ]_A, A)$ est un algébroïde de Lie compatible avec l'algébroïde tangent de M.

Preuve. Si $[\ ,\ ]_A$ vérifie l'identité de Jacobi, $(TM, [\ ,\ ]_A, A)$ est un algébroïde de Lie et, en particulier, $A[X, Y]_A = [AX, AY]$ pour tous $X, Y \in \mathfrak{X}^1(M)$, soit $\mathcal{N}_A(X, Y) = 0$. Pour montrer l'inverse, on vérifie facilement que pour tous champs de vecteurs X, Y, Z,

$$\oint_{X,Y,Z} \big([X, [Y, Z]_A]_A - [\mathcal{N}_A(X, Y), Z] - \mathcal{N}_A([X, Y], Z) \big) = 0,$$

ce qui montre que $[\ ,\ ]_A$ vérifie l'identité de Jacobi lorsque A est de torsion de Nijenhuis nulle. Finalement, en remarquant que

$$[X, Y] + [X, Y]_A = [X, Y]_{\mathrm{Id}_{TM}+A} \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}^1(M)$$

et que $\mathrm{Id}_{TM} + A$ est sans torsion de Nijenhuis lorsque A l'est, on voit que $([\ ,\ ]_A, A)$ est compatible avec la structure d'algébroïde de Lie tangent de TM. □

La réciproque de la proposition précédente est aussi vraie.

Proposition 2.8. *Si* $([\ ,\ ]', A)$ *est une structure d'algébroïde de Lie sur* TM *compatible avec sa structure d'algébroïde de Lie tangent, alors* $[\ ,\ ]' = [\ ,\ ]_A$. *De plus,* A *est sans torsion de Nijenhuis.*

Preuve. Le triplet $(TM, [\ ,\ ] + [\ ,\ ]', \mathrm{Id}_{TM} + A)$ étant un algébroïde de Lie, pour tous champs de vecteurs X, Y,

$$(\mathrm{Id}_{TM} + A)([X,Y] + [X,Y]') = [(\mathrm{Id}_{TM} + A)X, (\mathrm{Id}_{TM} + A)Y]$$

soit en utilisant l'égalité $A[X,Y]' = [AX, AY]$,

$$[X,Y]' = [AX,Y] + [X,AY] - A[X,Y] = [X,Y]_A\,.$$

Finalement, $[AX, AY] = A[X,Y]' = A[X,Y]_A$ et donc $\mathcal{N}_A = 0$. □

2.2.2 Cas d'une variété de Riemann-Poisson

Soit (M, π, g) une variété de Riemann-Poisson. Notons ∇ la connexion de Levi-Civita de g et $\#_g : T^*M \longrightarrow TM$ l'isomorphisme musical associé à g.
En posant

$$J = \pi_\sharp \circ \#_g^{-1}\,, \tag{2.12}$$

on définit un (1,1)-tenseur sur M et donc, d'après le paragraphe précédent, un champ de bivecteurs Π_J sur T^*M, dual du pseudo-algébroïde de Lie $(TM, [\ ,\ ]_J, J)$. Si la torsion de Nijenhuis de J est identiquement nulle, Π_J est un tenseur de Poisson compatible avec Π_0. D'un autre côté, en notant Π le tenseur de Poisson tangent associé à π, c'est-à-dire le tenseur de Poisson sur TM, dual de l'algébroïde de Lie cotangent $(T^*M, [\ ,\ ]_\pi, \pi_\sharp)$ associé à π, on peut définir un tenseur de Poisson Π^g sur T^*M, en prenant Π^g comme étant l'image de Π par $\#_g^{-1}$. On est donc devant la situation suivante. Sur le fibré cotangent de M sont définis : le tenseur de Poisson canonique Π_0, le tenseur de Poisson Π^g et le champ de bivecteurs Π_J. On peut alors se poser les deux questions naturelles suivantes :

1. *Quand* Π^g *est-il compatible avec* Π_0 *?*
2. *Quelle relation y-a-t-il entre* Π^g *et* Π_J *?*

Pour répondre à ces deux questions, on va les réexprimer dans le langage des algébroïdes de Lie. Pour cela, considérons le crochet $[\ ,\ ]_\pi^g$ défini sur $\mathfrak{X}^1(M)$ par :

$$[X,Y]_\pi^g = \#_g[\#_g^{-1}(X), \#_g^{-1}(Y)]_\pi \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}^1(M). \tag{2.13}$$

Ici $[\ ,\ ]_\pi$ est le crochet de Koszul associé à π (donné par (1.32)). Muni du crochet $[\ ,\ ]_\pi^g$ et de $J = \pi_\sharp \circ \#_g^{-1}$ comme ancrage, TM est clairement un algébroïde de Lie de tenseur de Poisson dual Π^g. Donc, d'après la proposition 2.6, Π^g est compatible avec Π_0 si et seulement si l'algébroïde de Lie $(TM, [\ ,\ ]_\pi^g, J)$ est compatible avec l'algébroïde de Lie tangent de M, ce qui est équivalent, en vertu des propositions 2.7 et 2.8, au fait que

$$[X,Y]_\pi^g = [X,Y]_J \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}^1(M), \tag{2.14}$$

soit encore à $\Pi^g = \Pi_J$. Comparons maintenant les crochets $[\ ,\ ]_\pi^g$ et $[\ ,\ ]_J$.

Lemme 2.9. *Pour tous champs de vecteurs X, Y, Z, on a :*

$$\begin{aligned} g([X,Y]^g_\pi - [X,Y]_J, Z) = &- g((\nabla_X J)Y, Z) + g((\nabla_Y J)X, Z) \\ &- g((\nabla_Z J)Y, X). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Preuve. D'une part, en utilisant (2.12), (2.13) et la formule classique de la dérivée de Lie (6), on trouve

$$\begin{aligned} g([X,Y]^g_\pi, Z) = &J(X) \cdot g(Y,Z) - J(Y) \cdot g(X,Z) - Z \cdot g(JX, Y) \\ &+ g(X, [JY, Z]) - g(Y, [JX, Z]). \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$g([X,Y]_J, Z) = g([JX, Y], Z) + g([X, JY], Z) - g(J[X,Y], Z).$$

Ainsi, en utilisant les propriétés de ∇ et le fait que J est antisymétrique par rapport à g, c'est-à-dire, $g(JX, Y) = -g(X, JY)$, on calcule

$$\begin{aligned} g([X,Y]^g_\pi - [X,Y]_J, Z) &= J(X) \cdot g(Y,Z) - J(Y) \cdot g(X,Z) - Z \cdot g(JX, Y) \\ &\quad + g(X, [JY, Z]) - g(Y, [JX, Z]) - g([JX, Y], Z) \\ &\quad - g([X, JY], Z) + g(J[X,Y], Z) \\ &= g(\nabla_{JX} Y, Z) + g(Y, \nabla_{JX} Z) - g(\nabla_{JY} X, Z) \\ &\quad - g(X, \nabla_{JY} Z) - g(\nabla_Z (JX), Y) - g(JX, \nabla_Z Y) \\ &\quad + g(X, \nabla_{JY} Z) - g(X, \nabla_Z (JY)) - g(Y, \nabla_{JX} Z) \\ &\quad + g(Y, \nabla_Z (JX)) - g(\nabla_{JX} Y, Z) + g(\nabla_Y (JX), Z) \\ &\quad - g(\nabla_X (JY), Z) + g(\nabla_{JY} X, Z) + g(J\nabla_X Y, Z) \\ &\quad - g(J\nabla_Y X, Z) \\ &= -g(\nabla_X (JY), Z) + g(J(\nabla_X Y), Z) \\ &\quad + g(\nabla_Y (JX), Z) - g(J(\nabla_Y X), Z) \\ &\quad - g(\nabla_Z (JY), X) + g(J(\nabla_Z Y), X). \end{aligned}$$

Ce qui établit l'égalité cherchée, puisque $(\nabla_X J)Y = \nabla_X (JY) - J(\nabla_X Y)$. □

On est maintenant en mesure d'énoncer et de démontrer le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 2.10. *Soit (M, π, g) une variété de Riemann-Poisson. Avec les notations ci-dessus, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) *Π^g est compatible avec Π_0 ;*

(2) *$\Pi^g = \Pi_J$;*

(3) *π est ∇-parallèle, i.e., $\nabla \pi = 0$.*

Si de plus π est symplectique, alors une des conditions (1), (2) ou (3) est satisfaite si et seulement si J est sans torsion de Nijenhuis.

Preuve. On a déjà vu que (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (2.14). Pour l'équivalence (2) $\Leftrightarrow$ (3), on va la démontrer par double implication.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Si $\Pi^g = \Pi_J$ ou de façon équivalente $[\ ,\ ]^g_\pi = [\ ,\ ]_J$, alors en posant pour tous champs de vecteurs X, Y, Z, $\Lambda(X, Y, Z) := g((\nabla_X J)Y, Z)$, (2.15) s'écrit

$$\Lambda(X, Y, Z) + \Lambda(Z, Y, X) = \Lambda(Y, X, Z).$$

Puisque le membre gauche de cette égalité est symétrique en X et Z, Λ est symétrique par rapport aux deux dernières variables, i.e.,

$$\Lambda(X, Y, Z) = \Lambda(X, Z, Y) \quad \forall\, X, Y, Z \in \mathfrak{X}^1(M).$$

Maintenant, en utilisant le fait que J est antisymétrique par rapport à g, on peut écrire

$$\begin{aligned} 0 &= X.(g(JY, Z) + g(Y, JZ)) \\ &= g(\nabla_X(JY), Z) + g(JY, \nabla_X Z) + g(\nabla_X Y, JZ) + g(Y, \nabla_X(JZ)) \\ &= (g(\nabla_X(JY), Z) - g(J(\nabla_X Y), Z)) + (g(Y, \nabla_X(JZ)) - g(Y, J(\nabla_X Z))) \\ &= g((\nabla_X J)Y, Z) + g((\nabla_X J)Z, Y), \end{aligned}$$

soit

$$\Lambda(X, Y, Z) = -\Lambda(X, Z, Y) \quad \forall\, X, Y, Z \in \mathfrak{X}^1(M).$$

Par conséquent, $\Lambda = 0$, soit $\nabla J = 0$, soit encore $\nabla\pi = 0$.

(3) $\Leftarrow$ (2) : Si π est ∇-parallèle, alors par définition, J est aussi ∇-parallèle et donc, en vertu du lemme 2.9, $[\ ,\ ]^g_\pi = [\ ,\ ]_J$, soit $\Pi^g = \Pi_J$.

Finalement si π est symplectique, J est inversible et, dans ce cas, l'équation (2.14) est satisfaite si et seulement si J est sans torsion de Nijenhuis, ce qui permet de conclure. □

Remarque 2.11. La géométrie des variétés de Riemann-Poisson vérifiant (3) du théorème 2.10 a déjà été étudiée par A. Lichnerowicz [35] (voir aussi [51, p. 39]).

Une conséquence immédiate du théorème 2.10 est l'existence sur le fibré cotangent de toute variété kählérienne d'une structure symplectique compatible avec la structure canonique. Rappelons qu'une *variété kählérienne* est une variété M munie d'une *structure presque complexe*, i.e., un (1,1)-tenseur J sur M tel que $J^2 = -\mathrm{Id}_{TM}$, et d'une métrique riemannienne g telle que $g(u, v) = g(Ju, Jv)$ pour tous $u, v \in TM$, et $\nabla J = 0$ où ∇ est la connexion de Levi-Civita associée à g. La 2-*forme fondamentale* d'une variété kählérienne (M, J, g) est définie par $\Omega(u, v) := g(Ju, v)$. Il est bien connu que la forme fondamentale d'une variété kählérienne est une forme symplectique (voir, e.g., [28]).

Corollaire 2.12. *Soit (M, J, g) une variété kählérienne et soit π le tenseur de Poisson associé à la forme fondamentale de (M, J, g). Alors $\Pi^g = \Pi_J$ et Π^g et Π_0 sont compatibles.*

2.3 Groupes de Lie munis d'une métrique invariante à gauche et d'un tenseur de Poisson invariant à gauche parallèle

Cette section concerne le cas particulier où la variété de Riemann-Poisson est un groupe de Lie muni d'une métrique riemannienne et d'un tenseur de Poisson invariants à gauche.

Soient (G, π, g) un groupe de Lie connexe muni d'une structure de Poisson et d'une métrique riemannienne invariantes à gauche, $\mathfrak{g} = T_eG$ son algèbre de Lie, $r \in \wedge^2\mathcal{G}$ la solution de l'EYBC associée à π et $\langle\ ,\ \rangle = g(e)$ le produit scalaire défini sur $\mathfrak{g}$ par g. Soit $A : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ la connexion de Levi-Civita infinitésimale associée à $(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle)$, i.e., l'application $\mathbb{R}$-bilinéaire donnée par :

$$2\langle A_u v, w\rangle = \langle [u, v], w\rangle + \langle [w, u], v\rangle + \langle [w, v], u\rangle. \tag{2.16}$$

Noter que A est l'unique application $\mathbb{R}$-bilinéaire de $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$ vérifiant :

1. Pour tous $u, v \in \mathfrak{g}$,
$$A_u v - A_v u = [u, v]. \tag{2.17}$$
2. Pour tout $u \in \mathfrak{g}$, A_u est antisymétrique, i.e.,
$$\langle A_u v, w\rangle + \langle v, A_u w\rangle = 0 \quad \forall\, v, w \in \mathfrak{g}. \tag{2.18}$$

À noter aussi que A est reliée à la connexion de Levi-Civita ∇ de g par

$$\nabla_{u^+} v^+ = (A_u v)^+ \quad \forall\, u, v \in \mathfrak{g}\,, \tag{2.19}$$

où u^+ dénote le champ de vecteurs invariant à gauche sur G associé à u.
Par invariance à gauche, la condition $\nabla\pi = 0$ est équivalente à

$$r(A_u^* a, b) + r(a, A_u^* b) = 0 \quad \forall\, u \in \mathfrak{g},\ a, b \in \mathfrak{g}^*, \tag{2.20}$$

où $A_u^* : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ est la transposée de $A_u : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$. Le lemme qui suit détaille encore plus cette équation. Notons d'abord $J = r \circ \#^{-1}$, où $r : \mathfrak{g}^* \longrightarrow \mathfrak{g}$ est l'application linéaire donnée par (1.71) et $\#^{-1} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ est l'isomorphisme : $\#^{-1}(u) = \langle u, \cdot\rangle$. Le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ décompose $\mathfrak{g}$ orthogonalement en :

$$\mathfrak{g} = \operatorname{Im} r \oplus (\operatorname{Im} r)^\perp\,, \tag{2.21}$$

avec $\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} J$ (qui est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$, d'après la proposition 1.51) et $(\operatorname{Im} r)^\perp = \operatorname{Ker} J$.

Lemme 2.13. *Avec les notations ci-dessus, le tenseur de Poisson π est parallèle par rapport à g si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) $(\operatorname{Im} r)^\perp$ *est une sous-algèbre de Lie de* $\mathfrak{g}$,

(ii) *Pour tous* $u, v \in \operatorname{Im} r$,

$$[Ju, Jv] - J[Ju, v] - J[u, Jv] + J^2[u, v] = 0\,.$$

(iii) *Pour tous* $u \in \operatorname{Im} r$*,* v *et* $w \in (\operatorname{Im} r)^{\perp}$*,*

$$\langle \mathrm{ad}_u v, w\rangle + \langle v, \mathrm{ad}_u w\rangle = 0\,.$$

(iv) *Pour tous* $u \in (\operatorname{Im} r)^{\perp}$*,* v *et* $w \in \operatorname{Im} r$*,*

$$\langle \mathrm{ad}_u v, w\rangle + \langle v, \mathrm{ad}_u w\rangle = 0\,.$$

(v) *Pour tous* $u \in (\operatorname{Im} r)^{\perp}$*,* v *et* $w \in \operatorname{Im} r$*,*

$$\big\langle (\mathrm{ad}_u \circ J - J \circ \mathrm{ad}_u) v, w\big\rangle = 0\,.$$

Preuve. La démonstration repose sur celle du théorème 2.10 : on a vu que le tenseur de Poisson π est parallèle par rapport à g si et seulement si l'équation (2.14) est satisfaite. Celle-ci est équivalente, par invariance à gauche, à l'équation

$$[u,v]_r^{\#} = [u,v]_J \quad \forall\, u, v \in \mathfrak{g}\,, \tag{$*$}$$

où $[\ ,\ ]_r^{\#}$ et $[\ ,\ ]_J$ sont définis par :

$$[u,v]_r^{\#} := \#[\#^{-1}(u), \#^{-1}(v)]_r\,; \qquad [u,v]_J := [Ju,v] + [u,Jv] - J[u,v]\,.$$

Ici $[\ ,\ ]_r$ est le crochet de Lie défini sur $\mathfrak{g}^*$ par (1.72).

($\Leftarrow$). Compte tenu de (2.21), il suffit de montrer $(*)$ dans les trois cas suivants :

• Premier cas : u et $v \in \operatorname{Im} r$. D'après (ii), on a :

$$0 = [Ju, Jv] - J[u,v]_J = J([u,v]_r^{\#} - [u,v]_J)\,,$$

ce qui implique que $[u,v]_r^{\#} - [u,v]_J \in \operatorname{Ker}(J) = (\operatorname{Im} r)^{\perp}$. Par ailleurs, on a :

$$[u,v]_J = [Ju,v] + [u,Jv] - J[u,v] \in \operatorname{Im} r\,,$$

car $\operatorname{Im} r$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Et, pour tout $w \in (\operatorname{Im} r)^{\perp}$,

$$\begin{aligned}
\langle [u,v]_r^{\#}, w\rangle &\overset{(1.72)}{=} \langle \mathrm{ad}_w \circ J(u), v\rangle - \langle u, \mathrm{ad}_w \circ J(v)\rangle \\
&\overset{(v)}{=} \langle \mathrm{ad}_w \circ J(u), v\rangle - \langle u, J \circ \mathrm{ad}_w(v)\rangle \\
&= \langle \mathrm{ad}_w \circ J(u), v\rangle + \langle J(u), \mathrm{ad}_w(v)\rangle \overset{(iv)}{=} 0\,.
\end{aligned}$$

Donc $[u,v]_r^{\#} \in \operatorname{Im} r$. Il en résulte que $[u,v]_r^{\#} - [u,v]_J \in \operatorname{Im} r \cap (\operatorname{Im} r)^{\perp} = \{0\}$.

• Deuxième cas : u et $v \in (\operatorname{Im} r)^{\perp}$. Dans ce cas, on a $[u,v]_J = J[u,v] \overset{(i)}{=} 0 = [u,v]_r^{\#}$.

• Troisième cas : $u \in \operatorname{Im} r$ et $v \in (\operatorname{Im} r)^{\perp}$.
Si $w \in \operatorname{Im} r$ (arbitraire), $\langle [u,v]_r^{\#}, w\rangle = -\langle [Ju,w], v\rangle = 0$ et

$$\langle [u,v]_J, w\rangle = -\langle (\mathrm{ad}_v \circ J - J \circ \mathrm{ad}_v) u, w\rangle \overset{(v)}{=} 0\,.$$

Donc $\langle [u,v]_r^{\#} - [u,v]_J, w\rangle = 0$ pour tout $w \in \operatorname{Im} r$.
Si maintenant $w \in (\operatorname{Im} r)^{\perp}$, $\langle [u,v]_r^{\#}, w\rangle = -\langle \mathrm{ad}_{J(u)} w, v\rangle$ et $\langle [u,v]_J, w\rangle = \langle \mathrm{ad}_{J(u)} v, w\rangle$, donc $\langle [u,v]_r^{\#} - [u,v]_J, w\rangle = 0 \ \forall\, w \in (\operatorname{Im} r)^{\perp}$, d'après (iii).

($\Rightarrow$). Se démontre de la même manière. □

Remarque 2.14. Compte tenu de (iv) et (v) du lemme ci-dessus et de l'antisymétrie de J, on a aussi : $\langle \mathrm{ad}_u \circ J(v), w\rangle - \langle v, \mathrm{ad}_u \circ J(w)\rangle = 0 \ \forall\, u \in (\mathrm{Im}\, r)^\perp,\ \forall\, v, w \in \mathrm{Im}\, r$.

Le théorème suivant montre que l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie, muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche et d'un tenseur de Poisson invariant à gauche parallèle, se décompose en somme directe d'une sous-algèbre de Lie kählérienne et d'une sous-algèbre de Lie euclidienne. Rappelons qu'une *algèbre de Lie kählérienne* est une algèbre de Lie *euclidienne* [3] $(\mathfrak{g}, \langle\ ,\ \rangle)$ munie d'une *structure complexe*, i.e., un endomorphisme $I : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ vérifiant $I^2 = -\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$, telle que

- Pour tous $u, v \in \mathfrak{g}$, $\langle Iu, Iv\rangle = \langle u, v\rangle$.
- La torsion de Nijenhuis de I est nulle, i.e.,

$$[Iu, Iv] - I[Iu, v] - I[u, Iv] + I^2[u, v] = 0\,.$$

- la forme fondamentale $\omega(u, v) := \langle Iu, v\rangle$ satisfait

$$\omega\big(u, [v, w]\big) + \omega\big(v, [w, u]\big) + \omega\big(w, [u, v]\big) = 0 \quad \forall\, u, v, w \in \mathfrak{g}\,.$$

Théorème 2.15. *Soit (G, π, g) un groupe de Lie connexe muni d'une structure de Poisson et d'une métrique riemannienne invariantes à gauche. On suppose que π est parallèle par rapport à la connexion de Levi-Civita de g. Alors l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G se décompose en somme directe d'espaces vectoriels, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h}$, d'une sous-algèbre de Lie kählérienne $(\mathfrak{k}, \langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{k}}, I)$ et d'une sous-algèbre de Lie euclidienne $(\mathfrak{h}, \langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{h}})$. En outre, il existe deux représentations d'algèbres de Lie $\rho_{\mathfrak{k}} : \mathfrak{k} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{h})$ et $\rho_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{k})$ telles que, pour tous $u \in \mathfrak{k}$ et $v \in \mathfrak{h}$, $\rho_{\mathfrak{k}}(u)$ et $\rho_{\mathfrak{h}}(v)$ sont antisymétriques par rapport à $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{h}}$ et $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{k}}$, respectivement, et $\rho_{\mathfrak{h}}(v)$ commute avec I.*

Preuve. Posons $\mathfrak{k} = \mathrm{Im}\, r$, $\mathfrak{h} = (\mathrm{Im}\, r)^\perp$, et notons $\langle\ ,\ \rangle_0$ (resp. $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{h}}$) la restriction de $\langle\ ,\ \rangle$ à $\mathfrak{k}$ (resp. $\mathfrak{h}$), J_0 la restriction de J à $\mathfrak{k}$ et ω_0 la forme symplectique définie sur $\mathfrak{k}$ par (1.75). On vérifie immédiatement que, pour tous $u, v \in \mathfrak{k}$,

$$\omega_0(u, J_0 v) = \langle u, v\rangle_0. \tag{2.22}$$

Il est bien connu (cf., e.g., [50, p. 41-42]) que $I = J_0(-J_0^2)^{-1/2}$ est une structure complexe sur $\mathfrak{k}$, compatible avec ω_0, i.e.,

$$\langle u, v\rangle_{\mathfrak{k}} := \omega_0(u, Iv) \overset{(2.22)}{=} \Big\langle u, (-J_0^2)^{-1/2}(v)\Big\rangle_0\,, \qquad (u, v \in \mathfrak{k}) \tag{2.23}$$

est un produit scalaire. Puisque $(-J_0^2)^{-1/2}$ est un polynôme en J_0 [4], il en est de même pour I. Ainsi, compte tenu du (ii) du lemme 2.13, I est sans torsion de Nijenhuis [5]. Il

3. Par algèbre de Lie euclidienne, on entend toute algèbre de Lie munie d'un produit scalaire.
4. En effet, $(-J_0^2)^{-1/2} = P(-J_0^2)$ où P est le polynôme d'interpolation de Lagrange défini par $P(\lambda_i) = \lambda_i^{-1/2}$ où les $\lambda_i > 0$ sont les valeurs propres de $-J_0^2$.
5. On rappelle que si $T : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ est un endomorphisme d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, de torsion de Nijenhuis nulle, alors pour tout polynôme P, $P(T)$ est aussi sans torsion de Nijenhuis, voir, e.g., [30, lemme 1.2]

est alors clair que $(\mathfrak{k}, \langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{k}}, I)$ est une sous-algèbre de Lie kählérienne de $\mathfrak{g}$. D'après le (i) du lemme 2.13, $(\mathfrak{h}, \langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{h}})$ est une sous-algèbre de Lie euclidienne de $\mathfrak{g}$. Ceci établit la décomposition désirée.
Maintenant, posons pour tous $u \in \mathfrak{k}$ et $v \in \mathfrak{h}$,

$$[u, v] = \rho_{\mathfrak{k}}(u)(v) + \rho_{\mathfrak{h}}(v)(u) \tag{2.24}$$

avec $\rho_{\mathfrak{k}}(u)(v) \in \mathfrak{h}$ et $\rho_{\mathfrak{h}}(v)(u) \in \mathfrak{k}$. On obtient ainsi deux applications linéaires $\rho_{\mathfrak{k}} : \mathfrak{k} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{h})$ et $\rho_{\mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{k})$. En utilisant l'identité de Jacobi du crochet de Lie $[\ ,\ ]$ de $\mathfrak{g}$ et le fait que $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{h}$ sont des sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$, on trouve facilement que $\rho_{\mathfrak{k}}$ et $\rho_{\mathfrak{h}}$ sont des représentations d'algèbres de Lie. D'après le (iii) du lemme 2.13, $\rho_{\mathfrak{k}}(u)$ $(u \in \mathfrak{k})$ est clairement antisymétrique par rapport à $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{h}}$. D'un autre côté, pour tout $v \in \mathfrak{h}$, $\rho_{\mathfrak{h}}(v)$ commute avec J_0 (par le (v) du lemme 2.13) et par suite commute avec $(-J_0^2)^{-1/2}$ et I puisqu'ils sont des polynômes en J_0. Finalement, d'après le (iv) du lemme 2.13, $\rho_{\mathfrak{h}}(v)$ est antisymétrique par rapport à $\langle\ ,\ \rangle_0$ et donc par rapport à $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{k}}$, vu (2.23). □

On va maintenant donner une méthode de construction d'exemples.

Soit $(\mathfrak{g}_1, \langle\ ,\ \rangle_1, J)$ une algèbre de Lie kählérienne (voir, e.g., [16] pour des exemples de telles algèbres) et $(\mathfrak{g}_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$ une algèbre de Lie euclidienne. On suppose qu'il existe une représentation d'algèbres de Lie $\rho : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{g}_2)$ telle que pour tout $u \in \mathfrak{g}_1$, $\rho(u)$ est une dérivation d'algèbres de Lie antisymétrique par rapport à $\langle\ ,\ \rangle_2$. Définissons sur $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ le crochet de Lie

$$[u_1 + u_2, v_1 + v_2] = [u_1, v_1] + [u_2, v_2] + \rho(u_1)(v_2) - \rho(v_1)(u_2),$$

et le produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle = \langle\ ,\ \rangle_1 + \langle\ ,\ \rangle_2$. D'après la proposition 1.51, la forme fondamentale de $\mathfrak{g}_1$, $\omega(u, v) := \langle Ju, v\rangle_1$, définit une solution de l'équation de Yang-Baxter classique r sur $\mathfrak{g}$, et il est évident que $(\mathfrak{g}, r, \langle\ ,\ \rangle)$ vérifie les conditions du lemme 2.13.

Chapitre 3

Géométrie des variétés de Riemann-Poisson plates et métaplates

Ce chapitre est entièrement consacré à la démonstration du théorème 3.22, résultat principal de ce chapitre. Comme la notion importante et moins connue apparaissant dans le travail de Hawkins est celle de la métacourbure, on va consacrer une partie importante pour la définir et donner ses propriétés. On va aussi définir le tenseur $\mathbf{T}$ ingrédient essentiel du théorème 3.22. Le calcul de la métacourbure et de $\mathbf{T}$ dans le cas d'une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion, objet des théorèmes 3.15 et 3.16, est l'étape clé vers la démonstration du théorème 3.22.

3.1 Qu'est ce que la métacourbure ?

Introduite par Hawkins [25], la métacourbure se manifeste naturellement dans l'étude des déformations non commutatives de l'algèbre extérieure des formes différentielles. Géométriquement parlant, la métacourbure est un (2,3)-tenseur (symétrique par rapport aux indices contravariants et antisymétrique par rapport aux indices covariants) associé naturellement à toute connexion contravariante sans torsion ni courbure.

Dans cette section on définit cette notion et on donne ses propriétés. On commence d'abord par présenter le crochet de Hawkins ; celui-ci est un crochet gradué sur l'algèbre extérieure des formes différentielles associé naturellement à toute connexion contravariante sans torsion. On définit ensuite, à l'aide du crochet de Hawkins, le tenseur de métacourbure. Finalement, on introduit le tenseur $\mathbf{T}$.
Les résultats des paragraphes 3.1.1 et 3.1.2 sont tout à fait connus et dûs à Hawkins ; notre apport principal consiste en l'originalité des preuves.

3.1.1 Le crochet de Hawkins

L'extension du crochet de Poisson des fonctions lisses d'une variété de Poisson en un crochet (de Poisson) gradué sur l'algèbre extérieure des formes différentielles est une question à laquelle se sont intéressés plusieurs auteurs ([21, 40, 29]). Le crochet de Hawkins, qu'on va présenter, en est un exemple.

Définition 3.1. Un *crochet de Poisson gradué* de degré $k \in \mathbb{Z}$ sur l'algèbre extérieure des formes différentielles d'une variété M est une application $\mathbb{R}$-bilinéaire

$$\{\ ,\ \} : \Omega^*(M) \times \Omega^*(M) \to \Omega^*(M)$$

vérifiant les propriétés suivantes :

1. $|\{\sigma, \tau\}| = |\sigma| + |\tau| + k$
2. $\{\sigma, \tau\} = -(-1)^{(|\sigma|+k)(|\tau|+k)}\{\tau, \sigma\}$ (antisymétrie graduée)
3. $\{\sigma, \tau \wedge \rho\} = \{\sigma, \tau\} \wedge \rho + (-1)^{(|\sigma|+k)|\tau|}\tau \wedge \{\sigma, \rho\}$ (règle de Leibniz)
4. $\{\sigma, \{\tau, \rho\}\} = \{\{\sigma, \tau\}, \rho\} + (-1)^{(|\sigma|+k)(|\tau|+k)}\{\tau, \{\sigma, \rho\}\}$ (identité de Jacobi graduée).

Si de plus d est une dérivation de $\{\ ,\ \}$, c'est-à-dire,

$$d\{\sigma, \tau\} = \{d\sigma, \tau\} + (-1)^{|\sigma|+k}\{\sigma, d\tau\},$$

on dit que $\{\ ,\ \}$ est un *crochet de Poisson gradué différentiel*.

Théorème 3.2 ([25]). *Étant donné une connexion contravariante sans torsion $\mathcal{D}$ sur une variété de Poisson (M, π), il existe un unique crochet $\{\ ,\ \}$ sur l'espace $\Omega^*(M)$ des formes différentielles ayant les propriétés suivantes* :

(a) $\{\ ,\ \}$ *est $\mathbb{R}$-bilinéaire, antisymétrique et de degré* 0*, i.e.,*

$$\{\sigma, \tau\} = -(-1)^{|\sigma||\tau|}\{\tau, \sigma\} \quad et \quad |\{\sigma, \tau\}| = |\sigma| + |\tau| , \tag{3.1}$$

(b) *Pour toutes $f, g \in C^\infty(M)$ et toute $\alpha \in \Omega^1(M)$,*

$$\{f, g\} = \pi(df, dg) \quad et \quad \{f, \alpha\} = \mathcal{D}_{df}\alpha , \tag{3.2}$$

(c) $\{\ ,\ \}$ *satisfait la règle de Leibniz*

$$\{\sigma, \tau \wedge \rho\} = \{\sigma, \tau\} \wedge \rho + (-1)^{|\sigma||\tau|}\tau \wedge \{\sigma, \rho\} , \tag{3.3}$$

(d) *d est une dérivation de $\{\ ,\ \}$*

$$d\{\sigma, \tau\} = \{d\sigma, \tau\} + (-1)^{|\sigma|}\{\sigma, d\tau\} . \tag{3.4}$$

Le crochet $\{\ ,\ \}$ sera appelé ***crochet de Hawkins***.

Preuve. On commence par un cas particulier : supposons que M peut être couverte par une seule carte. Définissons $\{\ ,\ \}$ comme suit : le crochet de deux fonctions est leur crochet de Poisson

$$\{f, g\} = \pi(df, dg) ,$$

le crochet d'une fonction f et une forme différentielle σ est la dérivée contravariante de σ dans la direction de df

$$\{f, \sigma\} = -\{\sigma, f\} = \mathcal{D}_{df}\, \sigma\ , \tag{3.5}$$

et le crochet de deux 1-formes est donné par la formule [1] :

$$\{\alpha, \beta\} = -\mathcal{D}_\alpha d\beta - \mathcal{D}_\beta d\alpha + d\mathcal{D}_\beta \alpha + [\alpha, d\beta]_\pi\,, \tag{3.6}$$

où $[\ ,\ ]_\pi$ est le crochet de Koszul-Schouten (voir chapitre 1) ; notez que

$$\begin{aligned}\{\beta, \alpha\} &= -\,\mathcal{D}_\beta d\alpha - \mathcal{D}_\alpha d\beta + d(\mathcal{D}_\alpha \beta) + [\beta, d\alpha]_\pi \\ &= -\,\mathcal{D}_\beta d\alpha - \mathcal{D}_\alpha d\beta + d(\mathcal{D}_\beta \alpha + [\alpha, \beta]_\pi) - [d\alpha, \beta]_\pi \\ &= -\,\mathcal{D}_\alpha d\beta - \mathcal{D}_\beta d\alpha + d\mathcal{D}_\beta \alpha + [\alpha, d\beta]_\pi \\ &= \{\alpha, \beta\}\end{aligned} \tag{3.7}$$

et, pour toute $f \in C^\infty(M)$,

$$\{\alpha, f\beta\} = -(\mathcal{D}_{df}\alpha) \wedge \beta + f\,\{\alpha, \beta\}\,. \tag{3.8}$$

En choisissant un système de coordonnées globales sur M, on peut écrire toute forme différentielle sur M comme somme finie de produits extérieurs de 1-formes. On peut donc étendre (3.6) aux formes différentielles de degrés supérieurs, en prenant

$$\begin{aligned}\{\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k, \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_l\} = (-1)^{k+1} \sum_{i,j} (-1)^{i+j} \{\alpha_i, \beta_j\} \wedge \\ \wedge\, \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\alpha_i} \wedge \cdots \wedge \alpha_k \wedge \beta_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\beta_j} \wedge \cdots \wedge \beta_l\,,\end{aligned} \tag{3.9}$$

où le chapeau $\widehat{\ }$ signifie que le terme correspondant est omis.
Il est clair que l'application $\{\ ,\ \}$ ainsi définie est de degré 0 et satisfait (3.2). Par définition de $\{\ ,\ \}$ et grâce aux formules (3.7), (3.8) et (3.9), on montre sans trop de difficulté que $\{\ ,\ \}$ est antisymétrique et vérifie (3.3).
Pour prouver (3.4), posons pour toutes formes différentielles σ et τ,

$$\mathcal{I}(\sigma, \tau) = d\,\{\sigma, \tau\} - \{d\sigma, \tau\} - (-1)^{|\sigma|}\{\sigma, d\tau\}\,.$$

On vérifie immédiatement que

$$\mathcal{I}(\sigma, \tau) = -(-1)^{|\sigma||\tau|}\mathcal{I}(\tau, \sigma)$$

et

$$\mathcal{I}(\sigma, \tau \wedge \rho) = \mathcal{I}(\sigma, \tau) \wedge \rho + (-1)^{(|\sigma|+1)|\tau|}\tau \wedge \mathcal{I}(\sigma, \rho)\,,$$

pour toutes formes différentielles σ, τ et ρ. Il suffit donc de vérifier (3.4) dans les trois cas suivants : σ et τ sont des 0-formes, c'est-à-dire des fonctions ; σ est une fonction et

1. Cette formule apparaît pour la première fois dans [4]

τ est la différentielle d'une fonction ; σ et τ sont les différentielles de deux fonctions. Pour le premier cas, puisque $\mathcal{D}$ est sans torsion,

$$\begin{aligned} d\{f,g\} &= [df,dg]_\pi = \mathcal{D}_{df}dg - \mathcal{D}_{dg}df \\ &= -\{dg,f\} + \{df,g\}\,. \end{aligned}$$

D'après (3.5) et (3.6), on a :

$$d\{f,dg\} = d\mathcal{D}_{df}dg = \{df,dg\} \quad \text{et} \quad d\{df,dg\} = d(d\mathcal{D}_{df}dg) = 0\,,$$

ce qui montre (3.4) dans le deuxième et le troisième cas.
Montrons que $\{\ ,\ \}$ est unique. Pour cela, supposons que $\{\ ,\ \}'$ est un autre crochet vérifiant (a), (b), (c) et (d). En utilisant (3.1) et (3.3), on obtient immédiatement

$$\{f,\sigma\}' = \mathcal{D}_{df}\sigma = \{f,\sigma\} \quad \forall f \in C^\infty(M), \forall \sigma \in \Omega^*(M).$$

Si α et β sont deux 1-formes, alors en supposant que $\beta = fdg$ avec $f,g \in C^\infty(M)$, on calcule

$$\begin{aligned} \{\alpha, fdg\}' &= \{\alpha,f\}' \wedge dg + f\{\alpha,dg\}' \\ &= -\mathcal{D}_{df}\alpha \wedge dg + f(d\mathcal{D}_{dg}\alpha - \mathcal{D}_{dg}d\alpha) \\ &= -\mathcal{D}_{fdg}d\alpha + d\mathcal{D}_{fdg}\alpha - \mathcal{D}_{df}\alpha \wedge dg - df \wedge \mathcal{D}_{dg}\alpha \\ &= -\mathcal{D}_{fdg}d\alpha + d\mathcal{D}_{fdg}\alpha - \mathcal{D}_\alpha(df\wedge dg) - [df,\alpha]_\pi \wedge dg - df \wedge [dg,\alpha]_\pi \\ &= -\mathcal{D}_{fdg}d\alpha - \mathcal{D}_\alpha(d(fdg)) + d\mathcal{D}_{fdg}\alpha - [df,\alpha]_\pi \wedge dg - df \wedge [dg,\alpha]_\pi \\ &= -\mathcal{D}_\alpha(d(fdg)) - \mathcal{D}_{fdg}d\alpha + d\mathcal{D}_{fdg}\alpha + [\alpha, d(fdg)]_\pi \\ &= \{\alpha, fdg\}\,. \end{aligned}$$

Donc, pour toutes $\alpha,\beta \in \Omega^1(M)$, $\{\alpha,\beta\}' = \{\alpha,\beta\}$. En utilisant (3.3), on montre par récurrence que

$$\begin{aligned} \{\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k, \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_l\}' = (-1)^{k+1} \sum_{i,j} (-1)^{i+j} \{\alpha_i,\beta_j\}' \wedge \\ \wedge\, \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\alpha_i} \wedge \cdots \wedge \alpha_k \wedge \beta_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\beta_j} \wedge \cdots \wedge \beta_l\,, \end{aligned}$$

pour toutes $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$, $\beta_1,\ldots,\beta_l \in \Omega^1(M)$. Il s'ensuit que $\{,\}'$ et $\{,\}$ coïncident. Ceci implique, en particulier, qu'on obtient le même crochet indépendamment du choix du système de coordonnées (globales) utilisé pour le définir, ce qui achève la démonstration de l'existence et de l'unicité de $\{\ ,\ \}$ dans le cas particulier considéré.

Soit maintenant M une variété quelconque. Si $\{\ ,\ \}$ existe sur M, il doit être de type local, c'est-à-dire, les valeurs de $\{\sigma,\tau\}$ sur un ouvert U de M, dépendent uniquement des valeurs de σ et τ sur cet ouvert. En effet, vu la bilinéarité et l'antisymétrie de $\{\ ,\ \}$, il suffit de montrer que si τ s'annule sur U, alors $\{\sigma,\tau\} = 0$ sur U. Soit alors $x \in U$ arbitraire, et $f \in C^\infty(M)$ une fonction plateau qui vaut 1 au voisinage de x et 0 en dehors de U. Alors $f\tau$ est identiquement nulle sur M, et on a

$$0 = \{\sigma, f\tau\}(x) \overset{(3.3)}{=} \{\sigma,f\}(x) \wedge \tau_x + f(x)\{\sigma,\tau\}(x) = \{\sigma,\tau\}(x).$$

Sur le domaine U de toute carte de M, $\{\ ,\ \}$ induira un crochet

$$\{\ ,\ \}_{|U} : \Omega^*(U) \times \Omega^*(U) \to \Omega^*(U)$$

donné, pour toutes $\omega, \eta \in \Omega^*(U)$ et tout $x \in U$, par

$$\{\omega, \eta\}_{|U}(x) = \{\widetilde{\omega}, \widetilde{\eta}\}(x),$$

où $\widetilde{\omega}$ et $\widetilde{\eta}$ sont des formes différentielles sur M qui coïncident avec ω et η sur un voisinage de x [2]. Puisque $\{\ ,\ \}$ est de type local, $\{\ ,\ \}_{|U}$ est bien défini, indépendamment du choix des extensions $\widetilde{\omega}$ et $\widetilde{\eta}$. Le fait que $\{\ ,\ \}$ vérifie les propriétés (a), (b), (c) et (d) implique immédiatement que $\{\ ,\ \}_{|U}$ vérifie les même propriétés. Or on a vu plus haut que, sur le domaine $U \subseteq M$ de toute carte, il existe un unique crochet $\{\ ,\ \}_U$ vérifiant (a), (b), (c) et (d) ; il en résulte que $\{\ ,\ \}_{|U} = \{\ ,\ \}_U$. Ainsi, si $\{\ ,\ \}$ existe sur M, il est déterminé de manière unique par :

$$\{\sigma, \tau\}(x) = \{\sigma_{|U}, \tau_{|U}\}_U(x), \tag{$*$}$$

où σ, $\tau \in \Omega^*(M)$, $x \in M$, U est le domaine d'une carte autour de x et $\{\ ,\ \}_U$ est l'unique crochet sur U vérifiant (a), (b), (c) et (d).
Il s'agit maintenant de vérifier que $(*)$ convient. D'après ce qui précède, $\{\ ,\ \}_U$ est de type local, et pour tout ouvert $U' \subseteq U$,

$$\{\ ,\ \}_{U\ |U'} = \{\ ,\ \}_{U'}\ .$$

Donc si V est le domaine d'une autre carte autour de x, alors

$$\{\sigma_{|U}, \tau_{|U}\}_U(x) = \{\sigma_{|U\cap V}, \tau_{|U\cap V}\}_{U\cap V}(x) = \{\sigma_{|V}, \tau_{|V}\}_V(x),$$

ce qui montre que le crochet $\{\ ,\ \}$ donné par $(*)$ est bien défini. Les propriétés (a), (b), (c) et (d) sont clairement satisfaites, puisque chaque $\{\ ,\ \}_U$ les vérifie. Ceci achève la démonstration de l'existence et de l'unicité de $\{\ ,\ \}$ dans le cas général. □

Remarque 3.3. En utilisant (3.1) et (3.3), on voit que le crochet de Hawkins satisfait aussi la propriété :

$$\{\sigma \wedge \tau, \rho\} = (-1)^{|\tau||\rho|}\{\sigma, \rho\} \wedge \tau + \sigma \wedge \{\tau, \rho\}\ , \tag{3.10}$$

pour toutes formes différentielles σ, τ, ρ.

2. De telles formes différentielles existent : si $f \in C^\infty(U)$, alors en choisissant une fonction plateau φ sur M de support dans U, la fonction $\widetilde{f} := \varphi f$ sur U, 0 en dehors de U, est lisse sur M. Comme $\omega = \sum \omega_{i_1\cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$, où x_{i_j}, $\omega_{i_1\cdots i_k} \in C^\infty(U)$, il suffit d'étendre les fonctions x_{i_j}, $\omega_{i_1\cdots i_k}$ en $\widetilde{x}_{i_j}$, $\widetilde{\omega}_{i_1\cdots i_k} \in C^\infty(M)$ et de prendre $\widetilde{\omega} = \sum \widetilde{\omega}_{i_1\cdots i_k} d\widetilde{x}_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\widetilde{x}_{i_k}$.

3.1.2 La métacourbure

Une question naturelle que l'on peut se poser est de savoir si le crochet de Hawkins est un crochet de Poisson gradué, c'est-à-dire qu'il satisfait l'identité de Jacobi graduée. Considérons le Jacobiateur du crochet de Hawkins $\{\ ,\ \}$, c'est-à-dire, l'application

$$\mathcal{J} : \Omega^*(M) \times \Omega^*(M) \times \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(M)$$

définie par

$$\mathcal{J}(\sigma, \tau, \rho) := \{\sigma, \{\tau, \rho\}\} - \{\{\sigma, \tau\}, \rho\} - (-1)^{|\sigma||\tau|}\{\tau, \{\sigma, \rho\}\} . \tag{3.11}$$

Le crochet de Hawkins satisfait donc l'identité de Jacobi si et seulement si son Jacobiateur est identiquement nul.
Comme conséquence des propriétés du crochet de Hawkins, son Jacobiateur jouit de propriétés remarquables.

Lemme 3.4. *Le Jacobiateur du crochet de Hawkins est $\mathbb{R}$-trilinéaire et vérifie, pour toutes $\sigma, \tau, \rho, \lambda \in \Omega^*(M)$,*

$$\mathcal{J}(\sigma, \tau, \rho) = -(-1)^{|\sigma||\tau|}\mathcal{J}(\tau, \sigma, \rho) = -(-1)^{|\tau||\rho|}\mathcal{J}(\sigma, \rho, \tau) , \tag{3.12}$$

$$\mathcal{J}(\sigma \wedge \tau, \rho, \lambda) = \sigma \wedge \mathcal{J}(\tau, \rho, \lambda) + (-1)^{|\tau|(|\rho|+|\lambda|)}\mathcal{J}(\sigma, \rho, \lambda) \wedge \tau , \tag{3.13}$$

et

$$\begin{aligned} d\mathcal{J}(\sigma, \tau, \rho) = \mathcal{J}(d\sigma, \tau, \rho) &+ (-1)^{|\sigma|}\mathcal{J}(\sigma, d\tau, \rho) \\ &+ (-1)^{|\sigma|+|\tau|}\mathcal{J}(\sigma, \tau, d\rho) . \end{aligned} \tag{3.14}$$

En outre, pour toutes $f, g, h \in C^\infty(M)$ et toute $\alpha \in \Omega^1(M)$,

$$\mathcal{J}(f, g, h) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{J}(f, g, \alpha) = R(df, dg)\alpha , \tag{3.15}$$

où R est la courbure de $\mathcal{D}$.

Preuve. Par vérification immédiate. □

D'après (3.15), pour que $\mathcal{J}$ soit nul $\mathcal{D}$ doit être plate. Dans le lemme qui suit, on va voir que lorsque tel est le cas, un $(2,3)$-tenseur se manifeste naturellement.

Lemme 3.5 ([25]). *Sous les hypothèses du théorème 3.2, si $\mathcal{D}$ est plate il existe un tenseur $\mathcal{M}$ de type $(2,3)$ symétrique par rapport aux indices contravariants et antisymétrique par rapport aux indices covariant, tel que, pour toute $f \in C^\infty(M)$ et toutes $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$, on ait*

$$\mathcal{M}(df, \alpha, \beta) = \{f, \{\alpha, \beta\}\} - \{\{f, \alpha\}, \beta\} - \{\{f, \beta\}, \alpha\} , \tag{3.16}$$

où $\{\ ,\ \}$ est le crochet de Hawkins associé à $\mathcal{D}$.

Le tenseur $\mathcal{M}$ est appelé ***métacourbure*** de $\mathcal{D}$. Lorsque $\mathcal{M} \equiv 0$, on dira de $\mathcal{D}$ qu'elle est *métaplate*.

Preuve. Définissons, pour toutes 1-formes α, β, γ, $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma)$ comme étant la section de $\bigwedge^2 T^*M$ donnée pour tout $x \in M$ par :

$$\mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma)(x) = \mathcal{J}(f, \beta, \gamma)(x),$$

où f est une fonction lisse telle que $\alpha(x) = d_x f$. Cette définition ne dépend pas du choix de f ; en effet, si g est une autre fonction telle que $d_x g = \alpha(x)$, $d_x(f - g) = 0$ donc on peut écrire $f - g = c + \sum_i x_i h_i$ où c est une constante, x_i et h_i sont des fonctions lisses qui s'annulent en x. En vertu de (3.13),

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(f - g, \beta, \gamma)(x) = \mathcal{J}(c, \beta, \gamma)(x) + \sum_i x_i(x)\mathcal{J}(h_i, \beta, \gamma)(x) \\ + h_i(x)\mathcal{J}(x_i, \beta, \gamma)(x) = 0\,,\end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathcal{M}$ est bien définie. Il est clair que $\mathcal{M}$ vérifie (3.16) et est $C^\infty(M)$-linéaire en α ; elle est aussi symétrique par rapport à β et γ, par (3.12). Donc pour montrer que $\mathcal{M}$ est un tenseur, il suffit de montrer que $\mathcal{M}$ est $C^\infty(M)$-linéaire en β. D'après (3.12), (3.13) et (3.15), pour toute $g \in C^\infty(M)$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(df, g\beta, \gamma) &= \mathcal{J}(f, g\beta, \gamma) \\ &= g\mathcal{M}(df, \beta, \gamma) + \beta \wedge R(df, dg, \gamma) \\ &= g\mathcal{M}(df, \beta, \gamma)\end{aligned}$$

car $\mathcal{D}$ est de courbure nulle. D'où $\mathcal{M}(\alpha, g\beta, \gamma) = g\mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma)$ pour toutes 1-formes α, β et γ.
Finalement, comme $\mathcal{D}$ est plate, pour toutes $f, g, h \in C^\infty(M)$, on a

$$\begin{aligned}0 &= d(R(df, dg)dh) = d\mathcal{J}(f, g, dh) \\ &\overset{(3.14)}{=} \mathcal{J}(df, g, dh) + \mathcal{J}(f, dg, dh) \overset{(3.12)}{=} -\mathcal{M}(dg, df, dh) + \mathcal{M}(df, dg, dh),\end{aligned}$$

ce qui implique, par le caractère tensoriel de $\mathcal{M}$, que $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathcal{M}(\beta, \alpha, \gamma)$. D'où le résultat. □

La proposition suivante fournit une condition nécessaire et suffisante pour que le crochet de Hawkins vérifie l'identité de Jacobi.

Proposition 3.6 ([25])**.** *Le crochet de Hawkins associé à une connexion contravariante sans torsion, $\mathcal{D}$, vérifie l'identité de Jacobi si et seulement si $\mathcal{D}$ est plate et métaplate.*

Preuve. Supposons que $\mathcal{D}$ est plate et métaplate, et montrons que le Jacobiateur du crochet de Hawkins est identiquement nul. En utilisant (3.12) et (3.13), on montre aisément que le Jacobiateur $\mathcal{J}$ est de type local. Ceci nous permet de travailler dans le domaine d'une carte, dans lequel σ, τ et ρ sont des sommes finies de produits extérieurs de fonctions et de différentielles de fonctions (où éventuellement, des fonctions, si leur degré est 0). Les propriétés (3.12) et (3.13) permettent d'exprimer $\mathcal{J}(\sigma, \tau, \rho)$ comme sommes finies de produits extérieurs faisant intervenir des fonctions, des différentielles de fonctions et des Jacobiateurs de la forme :

$$\mathcal{J}(f,g,h), \quad \mathcal{J}(f,g,dh), \quad \mathcal{J}(f,dg,dh), \quad \text{et} \quad \mathcal{J}(df,dg,dh),$$

où f, g et h sont des fonctions lisses. Ces Jacobiateurs sont tous nuls ; en effet, d'après (3.15) et (3.14),

$$\mathcal{J}(f,g,h) = 0, \quad \mathcal{J}(f,g,dh) = R(df,dg)dh = 0\,,$$

$$\mathcal{J}(f,dg,dh) = \mathcal{M}(df,dg,dh) = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{J}(df,dg,dh) = d\mathcal{J}(f,dg,dh) = 0\,.$$

Il en résulte que $\mathcal{J}$ est identiquement nul.

Inversement, si $\mathcal{J}$ est identiquement nul, $\mathcal{D}$ est clairement plate et métaplate. Ceci achève la démonstration. □

3.1.3 *Le tenseur* **T**

Le but de ce paragraphe est d'introduire le tenseur **T**, ingrédient essentiel du théorème 3.22.

Soit (M,π) une une variété de Poisson munie d'une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion contravariante sans torsion ni courbure $\mathcal{D}$. Posons pour tout $x \in M^{reg}$ et tous $a,b \in T^*_x M$,

$$\mathbf{T}_x(a,b) := \{\alpha,\beta\}(x) \quad (\in \textstyle\bigwedge^2 T^*_x M), \tag{3.17}$$

où $\{\ ,\ \}$ dénote le crochet de Hawkins associé à $\mathcal{D}$, et α et β sont des 1-formes $\mathcal{D}$-parallèles ($\mathcal{D}\alpha = \mathcal{D}\beta = 0$) définies au voisinage de x telles que $\alpha(x) = a$ et $\beta(x) = b$. (De telles 1-formes existent comme on le verra dans la proposition 3.11 de la section suivante.)

Lemme 3.7. *La formule* (3.17) *définit sur* M^{reg} *un tenseur* **T** *de type* $(2,2)$*, symétrique par rapport aux indices contravariants et antisymétrique par rapport aux indices covariants. De plus,*

(i) $\mathcal{D}\mathbf{T} = \mathcal{M}$ (*métacourbure de* $\mathcal{D}$) ;

(ii) **T** *est identiquement nul si et seulement si toute* 1*-forme* $\mathcal{D}$*-parallèle est de différentielle* $\mathcal{D}$*-parallèle aussi.*

Preuve. Pour montrer que (3.17) est indépendante du choix de α et de β, remarquons que $[\alpha,\gamma]_\pi = \mathcal{D}_\alpha\gamma$ pour toute 1-forme γ, puisque $\mathcal{D}\alpha = 0$ et que $\mathcal{D}$ est sans torsion. Donc le crochet de Koszul-Schouten de α et toute forme η est égal à la dérivée contravariante de η dans la direction de α, i.e., $[\alpha,\eta]_\pi = \mathcal{D}_\alpha\eta$. Il en résulte, compte tenu de (3.6) et (3.7), que

$$\{\alpha,\beta\} = -\mathcal{D}_\beta d\alpha = -\mathcal{D}_\alpha d\beta\,, \tag{3.18}$$

ce qui montre que (3.17) est bien indépendante du choix de α et de β.
D'après (3.16) et (3.5), pour toute fonction f et toutes 1-formes $\mathcal{D}$-parallèles α, β, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(df, \beta, \alpha) &= \mathcal{D}_{df}\{\beta, \alpha\} - \{\beta, \mathcal{D}_{df}\alpha\} - \{\mathcal{D}_{df}\beta, \alpha\} \\ &= \mathcal{D}_{df}\{\beta, \alpha\} \overset{(3.18)}{=} -\mathcal{D}_{df}\mathcal{D}_{\beta}d\alpha\,,\end{aligned}$$

soit par le caractère tensoriel de $\mathcal{M}$,

$$\mathcal{M}(\gamma, \beta, \alpha) = -\mathcal{D}_{\gamma}\mathcal{D}_{\beta}d\alpha\,, \tag{3.19}$$

pour toute 1-forme γ. Par ailleurs,

$$\mathbf{T}(\beta, \alpha) = -\mathcal{D}_{\beta}d\alpha \tag{3.20}$$

d'après (3.17) et (3.18). Donc $\big(\mathcal{D}_{\gamma}\mathbf{T}\big)(\beta, \alpha) = -\mathcal{D}_{\gamma}\mathcal{D}_{\beta}d\alpha = \mathcal{M}(\gamma, \beta, \alpha)$, ce qui montre (i). Quant à (ii), il résulte immédiatement de (3.20). □

3.2 Calcul des tenseurs $\mathcal{M}$ et $\mathbf{T}$

Le calcul de la métacourbure est en général difficile. Dans le cas d'un tenseur de Poisson symplectique, Hawkins a établi une formule simple de la métacourbure [25, théorème 2.4, p. 393]. Boucetta et Bahayou ont également établi dans [4] une formule de la métacourbure dans le cas d'un groupe de Lie-Poisson muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche. Dans cette section on va établir une formule de la métacourbure (et du tenseur $\mathbf{T}$ également) lorsque la connexion contravariante est une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion (voir les théorèmes 3.15 et 3.16), généralisant ainsi la formule de Hawkins.

Dans ce qui suit, $\mathcal{D}$ désigne une connexion contravariante sans torsion sur une variété de Poisson (M, π) de dimension d.

On commence par le lemme simple suivant.

Lemme 3.8. *Soit U un ouvert de M sur lequel le rang de π est constant. Supposons que $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{F}$-connexion sur U. Alors, pour toutes 1-formes $\alpha, \beta \in \Omega^1(U)$, $\pi_\sharp(\beta) = 0$ implique $\pi_\sharp(\mathcal{D}_\alpha\beta) = 0$, et dans ce cas, $\mathcal{D}_\alpha\beta = \mathcal{L}_{\pi_\sharp(\alpha)}\beta$.*

Preuve. Si $\pi_\sharp(\beta) = 0$ alors $\mathcal{D}_\beta\alpha = 0$ et donc, comme $\mathcal{D}$ est sans torsion, $\pi_\sharp(\mathcal{D}_\alpha\beta) = \pi_\sharp([\alpha, \beta]_\pi) = [\pi_\sharp(\alpha), \pi_\sharp(\beta)] = 0$ et $\mathcal{D}_\alpha\beta = [\alpha, \beta]_\pi = \mathcal{L}_{\pi_\sharp(\alpha)}\beta$ par définition du crochet de Koszul. □

En d'autres termes, le noyau de l'application d'ancrage est stable par $\mathcal{D}$ sur U. Le lemme qui suit montre que, si $\mathcal{D}$ est plate, il existe autour de tout point régulier un sous-fibré supplémentaire de $\operatorname{Ker}\pi_\sharp$ qui est aussi stable par $\mathcal{D}$.

Lemme 3.9. *Si $\mathcal{D}$ est plate et est une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion, alors pour tout point régulier $x \in M^{reg}$ et tout $\mathcal{H}_0$ tel que $T_x^*M = (\operatorname{Ker}\pi_\sharp)_x \oplus \mathcal{H}_0$, le fibré cotangent se décompose différentiablement au voisinage de x sous la forme*

$$T^*M = (\operatorname{Ker}\pi_\sharp) \oplus \mathcal{H}\,,$$

où $\mathcal{H}$ est stable par $\mathcal{D}$, i.e. $\mathcal{D}\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}$, et $\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_0$.

Preuve. Soit $(U; x_i, y_u)$ $(i = 1, \ldots, 2r\,;\ u = 1, \ldots, d-2r)$ une carte locale autour de x dans laquelle π s'écrit

$$\pi = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2r} \pi_{ij}\,\frac{\partial}{\partial x_i} \wedge \frac{\partial}{\partial x_j}\,,$$

avec la matrice $(\pi_{ij})_{1\le i,j\le 2r}$ constante et inversible ; notons $(\pi^{ij})_{1\le i,j\le 2r}$ sa matrice inverse. La restriction de $\operatorname{Ker}\pi_\sharp$ à U est un sous-fibré vectoriel de $T^*_{|_U}M$ (de rang $d-2r$), on peut donc choisir une décomposition lisse (arbitraire)

$$T^*_{|_U}M = (\operatorname{Ker}\pi_\sharp) \oplus \mathcal{H}.$$

Il est clair que

$$\operatorname{Ker}\pi_\sharp = \operatorname{Vect}\{dy_1, \ldots, dy_{d-2r}\}$$

et que

$$\mathcal{H} = \operatorname{Vect}\left\{\theta_i = dx_i + \sum_{u=1}^{d-2r} B_i^u\, dy_u\right\}_{1\le i\le 2r}$$

pour certaines fonctions $B_i^u \in C^\infty(U)$. Puisque $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{F}$-connexion sans torsion sur U, on a $\mathcal{D}_{dy_u} = \mathcal{D}dy_u = 0$ pour tout u. Ainsi pour tous i, j,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{\theta_i}\theta_j &= \mathcal{D}_{dx_i}\left(dx_j + \sum_{u=1}^{d-2r} B_j^u\, dy_u\right)\\
&= \mathcal{D}_{dx_i}dx_j + \sum_{u=1}^{d-2r} \pi_\sharp(dx_i)(B_j^u)\, dy_u\\
&= \left(\sum_{k=1}^{2r}\Gamma_{ij}^k\, dx_k + \sum_{u=1}^{d-2r}\Gamma_{ij}^u\, dy_u\right) + \sum_{u=1}^{d-2r}\sum_{k=1}^{2r}\pi_{ik}\frac{\partial B_j^u}{\partial x_k}\, dy_u\\
&= \sum_{k=1}^{2r}\Gamma_{ij}^k\,\theta_k + \sum_{u=1}^{d-2r}\left(\Gamma_{ij}^u + \sum_{k=1}^{2r}\left(\pi_{ik}\frac{\partial B_j^u}{\partial x_k} - \Gamma_{ij}^k B_k^u\right)\right) dy_u\,,
\end{aligned}$$

où $\Gamma_{ij}^k, \Gamma_{ij}^u$ sont les symboles de Christoffel de $\mathcal{D}$. Ainsi la décomposition souhaitée existe si et seulement si on peut trouver des fonctions locales $\{B_i^u\}_{i,u}$ vérifiant le système linéaire d'équations aux dérivées partielles

$$\Gamma_{ij}^u + \sum_{k=1}^{2r}\left(\pi_{ik}\frac{\partial B_j^u}{\partial x_k} - \Gamma_{ij}^k B_k^u\right) = 0 \quad \forall\, i, j, \forall\, u\,,$$

ou de manière équivalente

$$\frac{\partial B_j^u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{2r}\left(\sum_{l=1}^{2r}\pi^{il}\Gamma_{lj}^k\right)B_k^u - \sum_{l=1}^{2r}\pi^{il}\Gamma_{lj}^u \quad \forall i,j,\forall u\,. \tag{$*$}$$

En notation matricielle, celui-ci s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x_i}B^u = \Gamma_i B^u + Y_i^u\,,$$

où

$$B^u = \begin{pmatrix} B_1^u \\ \vdots \\ \vdots \\ B_{2r}^u \end{pmatrix};\ \Gamma_i = \left(\sum_{m=1}^{2r}\pi^{im}\Gamma_{mk}^l\right)_{1\le k,l\le 2r};\ Y_i^u = -\sum_{j=1}^{2r}\pi^{ij}\begin{pmatrix}\Gamma_{j1}^u \\ \vdots \\ \vdots \\ \Gamma_{j\,2r}^u\end{pmatrix}.$$

En considérant les B_i^u comme fonctions de variables x_i et de paramètres y_u, ce système peut être résolu, selon le théorème de Frobenius (cf. e.g., [23, théorème 1.1]), si et seulement si les conditions d'intégrabilité suivantes sont satisfaites pour tous i, j et tout u,

$$\Gamma_i\Gamma_j + \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma_i = \Gamma_j\Gamma_i + \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma_j\,,\quad \Gamma_i Y_j^u + \frac{\partial}{\partial x_j}Y_i^u = \Gamma_j Y_i^u + \frac{\partial}{\partial x_i}Y_j^u\,,$$

soit

$$\sum_{m=1}^{2r}\Gamma_{im}^l\Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l\Gamma_{ik}^m + \pi_{im}\frac{\partial\Gamma_{jk}^l}{\partial x_m} - \pi_{jm}\frac{\partial\Gamma_{ik}^l}{\partial x_m} = 0\,,$$
$$\sum_{m=1}^{2r}\Gamma_{im}^u\Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^u\Gamma_{ik}^m + \pi_{im}\frac{\partial\Gamma_{jk}^u}{\partial x_m} - \pi_{jm}\frac{\partial\Gamma_{ik}^u}{\partial x_m} = 0\,.$$

Ce qui signifie, d'après (1.63), que la courbure de $\mathcal{D}$ est nulle. Le système $(*)$ a donc des solutions (qui dépendent différentiablement des paramètres et des valeurs initiales). Ceci achève la démonstration. □

Notation 3.10. Étant donné $\mathcal{H}$ comme dans le lemme précédent, la restriction de $\pi_\sharp$ à $\mathcal{H}$ définit un isomorphisme de fibrés de $\mathcal{H}$ sur C ; on notera $\varpi^{\mathcal{H}} : C \to \mathcal{H}$ son inverse.

Proposition 3.11. *Les assertions suivantes sont équivalentes* :

(a) *$\mathcal{D}$ est plate et est une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion.*

(b) *Pour tout $x \in M^{reg}$ et tout $a \in T_x^*M$, il existe une 1-forme α définie au voisinage de x telle que $\alpha(x) = a$ et $\mathcal{D}\alpha = 0$.*

(c) *Autour de tout $x \in M^{reg}$, il existe un corepère local $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_d\}$ de M tel que $\mathcal{D}\alpha_i = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, d$. Un tel corepère sera dit $\mathcal{D}$-plat.*

Preuve. (a) $\Longrightarrow$ (b) : Soit U un voisinage ouvert de x sur lequel le rang de π est constant. Sur U, le champ caractéristique C est une distribution régulière (involutive) de rang $2r$ et $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{F}$-connexion sans torsion. On peut donc définir une connexion partielle ∇ sur $C_{|U}$, en posant pour toutes $\alpha, \beta \in \Omega^1(U)$,

$$\pi_\sharp(\mathcal{D}_\alpha \beta) = \nabla_{\pi_\sharp(\alpha)}\pi_\sharp(\beta). \tag{3.21}$$

On vérifie immédiatement que les tenseurs de courbure R^∇ et $R^\mathcal{D}$ respectivement de ∇ et $\mathcal{D}$ sont reliés par la formule :

$$R^\nabla\big(\pi_\sharp(a), \pi_\sharp(b)\big)\pi_\sharp(c) = \pi_\sharp\left(R^\mathcal{D}(a,b)c\right) \quad \forall\, a,b,c \in T^*_{|U}M,$$

et donc ∇ est de courbure nulle puisque $\mathcal{D}$ l'est par hypothèse. En utilisant le théorème de Frobenius, on peut montrer comme dans le cas classique que, pour tout $v \in C_x$, il existe un champ de vecteurs X défini au voisinage de x tel que $X(x) = v$, X est tangent à C, i.e., $X(y) \in C_y$ pour tout y voisin de x, et $\nabla X = 0$.
Soit maintenant $a \in T^*_xM$. D'après le lemme 3.9, le fibré cotangent se décompose de manière lisse au voisinage de x en : $T^*M = (\operatorname{Ker}\pi_\sharp) \oplus \mathcal{H}$, où $\mathcal{H}$ est $\mathcal{D}$-stable. Écrivons $a = b + c$ avec $b \in \operatorname{Ker}\pi_\sharp(x)$ et $c \in \mathcal{H}_x$. Par l'argument ci-dessus, il existe un champ de vecteurs X défini au voisinage de x, tangent à C tel que $X(x) = \pi_\sharp(c)$ et $\nabla X = 0$. Posons $\gamma = \varpi^\mathcal{H}(X) \in \Gamma(\mathcal{H})$; alors $\gamma(x) = c$ et, pour toute 1-forme ϕ, $\pi_\sharp(\mathcal{D}_\phi\gamma) = \nabla_{\pi_\sharp(\phi)}X = 0$, ce qui implique que $\mathcal{D}\gamma = 0$. En prenant $\alpha = \sum_{u=1}^{d-2r} b_u\, dy_u + \gamma$, où $\{y_u\}$ est une famille de fonctions locales sur M telles que $\operatorname{Ker}\pi_\sharp = \operatorname{Vect}\{dy_1, \dots, dy_s\}$ au voisinage de x, et les b_u sont les coordonnées de b dans $\{d_xy_1, \dots, d_xy_{d-2r}\}$, on obtient finalement la 1-forme cherchée.

(b) $\Longrightarrow$ (c) : Soit $\{a_1, \dots, a_d\}$ une base quelconque de T^*_xM. Chaque covecteur a_i peut se prolonger en une 1-forme (locale) $\mathcal{D}$-parallèle α_i. Puisque $a_1, \dots, a_d$ sont linéairement indépendants, la famille $\{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$ est libre au voisinage de x.

(c) $\Longrightarrow$ (a) : Par hypothèse le tenseur de courbure $R^\mathcal{D}$ s'annule sur l'ouvert dense M^{reg} des points réguliers de (M, π) et donc s'annule partout, par continuité. Reste à montrer que $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion. Pour cela, soit $x \in M^{reg}$ arbitraire, et soit $\{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$ un corepère plat autour de x. Pour tout $a \in \operatorname{Ker}\pi_\sharp(x)$ et toute 1-forme $\beta = \sum_i f_i\,\alpha_i$, on a $\mathcal{D}_a\beta = \sum_i \pi_\sharp(a)(f_i)\,\alpha_i + f_i\,\mathcal{D}_a\alpha_i = 0$. □

Le corollaire suivant est un raffinement de la proposition précédente.

Corollaire 3.12. *Si $\mathcal{D}$ est plate et est une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion, alors autour de tout point régulier $x \in M^{reg}$ il existe une carte $\mathcal{S}$-feuilletée avec coordonnées tangentes $\{x_i\}_{i=1}^{2r}$ et coordonnées transverses $\{y_u\}_{u=1}^{d-2r}$ telle que pour tout $\mathcal{H}$ comme dans le lemme 3.9,*

$$\mathbf{F}^* = \left\{\phi_i := \varpi^\mathcal{H}(\partial/\partial x_i)\, ;\, dy_u\right\}$$

est un corepère $\mathcal{D}$-plat de M. Un tel système de coordonnées sera dit plat.

Preuve. Soit $\{\alpha_1, \dots, \alpha_d\}$ un corepère $\mathcal{D}$-plat autour de x. Comme $\{\pi_\sharp(\alpha_i)(x)\}_{i=1}^{d}$ engendre C_x, on peut en extraire une base, disons $\{\pi_\sharp(\alpha_{i_j})(x)\}_{j=1}^{2r}$. Par un arguement de continuité, la famille $\{\pi_\sharp(\alpha_{i_1}),\dots,\pi_\sharp(\alpha_{i_{2r}})\}$ est libre au voisinage de x. De plus, $[\pi_\sharp(\alpha_{i_j}),\pi_\sharp(\alpha_{i_k})]=\pi_\sharp([\alpha_{i_j},\alpha_{i_k}]_\pi)=\pi_\sharp(\mathcal{D}_{\alpha_{i_j}}\alpha_{i_k}-\mathcal{D}_{\alpha_{i_k}}\alpha_{i_j})=0$ pour tous j,k. Donc il existe, en vertu du théorème de redressement simultané, un système de coordonnées $(x_1,\dots,x_{2r},y_1,\dots,y_{d-2r})$ centré en x tel que $\pi_\sharp(\alpha_{i_j})=\partial/\partial x_j$ pour tout $j=1,\dots,2r$. Il est alors clair que $\mathcal{C}=\mathrm{Vect}\{\partial/\partial x_i\}$, $\mathrm{Ker}\,\pi_\sharp=\mathrm{Vect}\{dy_u\}$ et $\mathcal{D}dy_u=0$ pour tout $u=1,\dots,d-2r$. De plus, si $\mathcal{H}$ est comme dans le lemme 3.9, alors $\phi_j:=\varpi^{\mathcal{H}}(\partial/\partial x_j)$ est la projection de α_{i_j} sur $\mathcal{H}$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,\pi_\sharp$ et donc $\mathcal{D}\phi_j=0$ puisque $\mathcal{D}\,\alpha_{i_j}=0$ et que $\mathrm{Ker}\,\pi_\sharp$ et $\mathcal{H}$ sont stables par $\mathcal{D}$. □

Remarque 3.13. Une autre manière équivalente d'exprimer que le système de coordonnées $\mathcal{S}$-feuilleté (x_i,y_u) est plat est la suivante : $\nabla\partial/\partial x_i=0$ pour tout i, où ∇ est la connexion partielle (locale) définie par (3.21).

On suppose pour le reste de cette section que $\mathcal{D}$ est plate et qu'elle est une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion.

Dans la suite on va calculer les tenseurs $\mathcal{M}$ et $\mathbf{T}$ dans le corepère $\mathbf{F}^*$. Pour ce faire, on a besoin d'abord de déterminer son repère dual. Avec les notations du corollaire 3.12, pour chaque i, il existe des fonctions uniques, $A_i^1,\dots,A_i^{d-2r}$, définies au voisinage de x telles que :

$$dx_i+\sum_{u=1}^{d-2r}A_i^u\,dy_u\in\mathcal{H}\,. \tag{3.22}$$

Considérons pour tout i et tout u,

$$X_i:=-X_{x_i}=-\pi_\sharp(dx_i)\,;\quad Y_u:=\frac{\partial}{\partial y_u}-\sum_{i=1}^{2r}A_i^u\,\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{3.23}$$

Lemme 3.14. *Avec les mêmes notations précisées ci-dessus, $\{X_i,Y_u\}$ est le repère dual de $\mathbf{F}^*$. De plus, les champs de vecteurs X_i et Y_u sont, respectivement, hamiltoniens et de Poisson, et vérifient :*

$$\begin{aligned}
&[X_i,X_j]=-\sum_{k=1}^{2r}\frac{\partial\pi_{ij}}{\partial x_k}X_k\,;\quad [X_i,Y_u]=\sum_{j=1}^{2r}\frac{\partial A_i^u}{\partial x_j}X_j\,;\\
&[Y_u,Y_v]=\sum_{i,j=1}^{2r}\pi^{ij}\left(\frac{\partial A_j^u}{\partial y_v}-\frac{\partial A_j^v}{\partial y_u}+\sum_{k=1}^{2r}A_k^u\frac{\partial A_j^v}{\partial x_k}-A_k^v\frac{\partial A_j^u}{\partial x_k}\right)X_i\,.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Preuve. Pour tous i,j et tous u,v, on a :

$$\begin{aligned}
&\phi_j(X_i)=-\phi_j(\pi_\sharp(dx_i))=dx_i(\pi_\sharp(\phi_j))=dx_i(\tfrac{\partial}{\partial x_j})=\delta_{ij}\,,\\
&dy_v(X_i)=-dy_v(\pi_\sharp(dx_i))=dx_i(\pi_\sharp(dy_v))=0\,,\quad dy_v(Y_u)=\delta_{uv}\,.
\end{aligned}$$

De plus, comme $\phi_i(X_j) = \delta_{ij}$, on déduit que

$$\mathcal{H} \ni \phi_i = \sum_j \pi^{ij} \left(dx_j + \sum_{k,u} \pi_{jk}\, \phi_k \left(\frac{\partial}{\partial y_u} \right) dy_u \right).$$

Donc par unicité des fonctions A_i^u, on a $A_i^u = \sum_{j=1}^{2r} \pi_{ij}\, \phi_j\, (\partial/\partial y_u)$ soit $\phi_i\, (\partial/\partial y_u) = \sum_{j=1}^{2r} \pi^{ij}\, A_j^u$. Ainsi

$$\phi_i = \sum_{j=1}^{2r} \pi^{ij} \left(dx_j + \sum_{u=1}^{d-2r} A_j^u\, dy_u \right) \tag{3.25}$$

et donc $\phi_i(Y_u) = \sum_{j=1}^{2r} \pi^{ij}(-A_j^u + A_j^u) = 0$, ce qui montre bien que $\{X_i, Y_u\}$ est le repère dual de $\mathbf{F}^*$.

Par définition, les champs de vecteurs X_i sont hamiltoniens. Pour voir que les Y_u sont de Poisson, remarquons que $[\phi_i, \phi_j]_\pi = \mathcal{D}_{\phi_i}\phi_j - \mathcal{D}_{\phi_j}\phi_i = 0$, ce qui donne

$$\begin{aligned} Y_u \cdot \pi(\phi_i, \phi_j) &= \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \phi_j\, (Y_u) - \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \phi_i\, (Y_u) \\ &= -\phi_j\big(\big[\tfrac{\partial}{\partial x_i}, Y_u\big]\big) + \phi_i\big(\big[\tfrac{\partial}{\partial x_j}, Y_u\big]\big) \\ &= -\mathcal{L}_{Y_u}\phi_j\big(\tfrac{\partial}{\partial x_i}\big) + Y_u \cdot \pi(\phi_i, \phi_j) + \mathcal{L}_{Y_u}\phi_i\big(\tfrac{\partial}{\partial x_j}\big) - Y_u \cdot \pi(\phi_j, \phi_i) \\ &= -\pi(\phi_i, \mathcal{L}_{Y_u}\phi_j) - \pi(\mathcal{L}_{Y_u}\phi_i, \phi_j) + 2Y_u \cdot \pi(\phi_i, \phi_j). \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{L}_{Y_u}\pi\, (\phi_i, \phi_j) = 0$. Par ailleurs,

$$\mathcal{L}_{Y_u}\pi\, (\phi_i, dy_v) = -\pi(\phi_i, \mathcal{L}_{Y_u} dy_v) = -\pi(\phi_i, d(Y_u(y_v)) = 0\,,$$

et on a clairement $\mathcal{L}_{Y_u}\pi\, (dy_v, dy_w) = 0$. Il en résulte que $\mathcal{L}_{Y_u}\pi = 0$, d'où les Y_u sont de Poisson.

Finalement, comme les X_i et les Y_u sont, respectivement, hamiltoniens et de Poisson,

$$\begin{aligned} [X_i, X_j] &\overset{(1.7)}{=} X_{\{x_i, x_j\}} = X_{\pi_{ij}} = -\sum_{k=1}^{2r} \frac{\partial \pi_{ij}}{\partial x_k} X_k\,, \\ [X_i, Y_u] &\overset{(1.30)}{=} X_{Y_u(x_i)} = -X_{A_i^u} = \sum_{j=1}^{2r} \frac{\partial A_i^u}{\partial x_j} X_j\,, \end{aligned}$$

et la dernière égalité de (3.24) s'établit immédiatement par calcul direct. □

On est maintenant en mesure de donner les expressions des tenseurs $\mathcal{M}$ et $\mathbf{T}$ dans le corepère $\mathbf{F}^*$.

Théorème 3.15. *Avec les mêmes hypothèses et notations déjà précisées plus haut, on a :*

(a) *Pour tout $u = 1, \ldots, d - 2r$, $\mathcal{M}(dy_u, \cdot, \cdot) = 0$.*

(b) *Pour tous $i, j, k = 1, \ldots, 2r$,*

$$\mathcal{M}(\phi_i, \phi_j, \phi_k) = -\sum_{l<m} \frac{\partial^3 \pi_{lm}}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \phi_l \wedge \phi_m + \sum_{l,u} \frac{\partial^3 A_l^u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \phi_l \wedge dy_u$$
$$+ \sum_{u<v,\, l} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\pi^{kl} \left(\frac{\partial A_l^u}{\partial y_v} - \frac{\partial A_l^v}{\partial y_u} + \sum_m A_m^u \frac{\partial A_l^v}{\partial x_m} - A_m^v \frac{\partial A_l^u}{\partial x_m} \right) \right) dy_u \wedge dy_v.$$

Preuve. (a) : Pour toutes 1-formes α, β,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(dy_u, \alpha, \beta) &\overset{\text{def}}{=} \{y_u, \{\alpha, \beta\}\} - \{\{y_u, \alpha\}, \beta\} - \{\{y_u, \beta\}, \alpha\} \\ &= \mathcal{D}_{dy_u}\{\alpha, \beta\} - \{\mathcal{D}_{dy_u}\alpha, \beta\} - \{\mathcal{D}_{dy_u}\beta, \alpha\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion et que $\pi_\sharp(dy_u) = 0$.
(b) : D'après (3.19), on a

$$\mathcal{M}(\phi_i, \phi_j, \phi_k) = -\mathcal{D}_{\phi_i} \mathcal{D}_{\phi_j} d\phi_k \quad \text{pour tous } i, j, k.$$

Par ailleurs, d'après (3.24),

$$d\phi_i(X_j, X_k) = -\phi_i([X_j, X_k]) = \frac{\partial \pi_{jk}}{\partial x_i}, \quad d\phi_i(X_j, Y_u) = -\phi_i([X_j, Y_u]) = -\frac{\partial A_j^u}{\partial x_i}$$

et

$$\begin{aligned} d\phi_i(Y_u, Y_v) &= -\phi_i([Y_u, Y_v]) \\ &= -\sum_{j=1}^{2r} \pi^{ij} \left(\frac{\partial A_j^u}{\partial y_v} - \frac{\partial A_j^v}{\partial y_u} + \sum_{k=1}^{2r} A_k^u \frac{\partial A_j^v}{\partial x_k} - A_k^v \frac{\partial A_j^u}{\partial x_k} \right). \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} d\phi_i &= \sum_{j<k} \frac{\partial \pi_{jk}}{\partial x_i} \phi_j \wedge \phi_k - \sum_{j,u} \frac{\partial A_j^u}{\partial x_i} \phi_j \wedge dy_u \\ &\quad - \sum_{u<v,\, j} \pi^{ij} \left(\frac{\partial A_j^u}{\partial y_v} - \frac{\partial A_j^v}{\partial y_u} + \sum_k A_k^u \frac{\partial A_j^v}{\partial x_k} - A_k^v \frac{\partial A_j^u}{\partial x_k} \right) dy_u \wedge dy_v\,, \end{aligned} \tag{3.26}$$

ce qui permet de conclure. □

Théorème 3.16.

(i) *Pour tout $u = 1, \ldots, d - 2r$,* $\mathbf{T}(dy_u, \cdot\,) = 0\,;$

(ii) *Pour tous* $i, j, k = 1, \ldots, 2r$,

$$\mathbf{T}(\phi_i, \phi_j) = -\sum_{k<l} \frac{\partial^2 \pi_{kl}}{\partial x_i \partial x_j} \phi_k \wedge \phi_l + \sum_{k,u} \frac{\partial^2 A_k^u}{\partial x_i \partial x_j} \phi_k \wedge dy_u$$
$$+ \sum_{u<v,\,k} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\pi^{jk}\left(\frac{\partial A_k^u}{\partial y_v} - \frac{\partial A_k^v}{\partial y_u} + \sum_l A_l^u \frac{\partial A_k^v}{\partial x_l} - A_l^v \frac{\partial A_k^u}{\partial x_l}\right)\right) dy_u \wedge dy_v.$$

Preuve. Se démontre, en utilisant (3.20), de manière similaire à celle du théorème 3.15. □

3.2.1 Cas symplectique

Si le tenseur de Poisson π est symplectique, i.e., $\pi = \omega^{-1}$ où ω est une 2-forme symplectique, la connexion contravariante sans torsion ni courbure $\mathcal{D}$ (qui est, dans ce cas, une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion puisque le noyau de l'application d'ancrage associée à π est réduit à zéro) est reliée à une connexion covariante ∇ sur M, sans torsion ni courbure, via $\pi_\sharp(\mathcal{D}_\alpha \beta) = \nabla_{\pi_\sharp(\alpha)} \pi_\sharp(\beta)$. Dans ce cas, un système de coordonnées plat et un système sur lequel ∇ est donnée trivialement par dérivées partielles (remarque 3.13).

Corollaire 3.17 ([25], théorème 2.4)**.** *Si $\pi = \omega^{-1}$, les composantes de $\mathcal{M}$ relativement à tout système de coordonnées plat $(x_1, \ldots, x_d)$ sont données par*

$$\mathcal{M}_{lm}^{ijk} = -\sum_{a,b,c,d,e} \pi_{ai}\pi_{bj}\pi_{ck}\omega_{dl}\omega_{em} \frac{\partial^3 \pi_{de}}{\partial x_a \partial x_b \partial x_c}, \tag{3.27}$$

où π_{ai} et ω_{dl} sont respectivement les composantes de π et ω.

De même, on a

Corollaire 3.18. *Avec les hypothèses et les notations du corollaire 3.17, les composantes de* $\mathbf{T}$ *relativement à $(x_1, \ldots, x_d)$ sont données par*

$$\mathbf{T}_{kl}^{ij} = -\sum_{a,b,c,d} \pi_{ai}\pi_{bj}\omega_{ck}\omega_{dl} \frac{\partial^2 \pi_{cd}}{\partial x_a \partial x_b}. \tag{3.28}$$

Ceux-ci signifient que pour une variété symplectique, $\mathcal{M}$ (resp. $\mathbf{T}$) est identiquement nul si et seulement si les composantes de π sont polynomiales de degré au plus 2 (resp. 1) dans la structure affine définie par ∇.

Exemple 3.19. Soit (M, ω) une variété symplectique. Si $\mathcal{D}$ est une connexion de Poisson sans torsion ni courbure sur M relativement à $\pi = \omega^{-1}$, alors $\mathbf{T}$ est identiquement nul. En effet, la condition $\mathcal{D}\pi = 0$ est équivalente à dire que les composantes de π relativement à tout système de coordonnées plat sont constantes.

Exemple 3.20. Soit G un groupe de Lie avec algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, et soit $r \in \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$ une solution de l'EYBC. Pour tout tenseur τ sur $\mathfrak{g}$, notons τ^+ le tenseur invariant à gauche sur G correspondant à τ. D'après [6, p. 71], la formule

$$\mathcal{D}^r_{a^+} b^+ = -(\mathrm{ad}^*_{r(a)} b)^+, \quad a, b \in \mathfrak{g}^*$$

définit sur (G, r^+) une connexion contravariante $\mathcal{D}^r$, invariante à gauche, sans torsion ni courbure, qui est une $\mathcal{F}$-connexion et dont $\mathbf{T}$ est identiquement nul d'après le (c') de l'introduction (voir page xvi). Il est bien connu (voir, e.g., [14]) que si r est inversible, alors la forme symplectique invariante à gauche ω^+, inverse de r^+, définit sur G une connexion covariante ∇, invariante à gauche, sans torsion ni courbure, via

$$\omega^+(\nabla_{u^+} v^+, w^+) = -\omega^+(v^+, [u^+, w^+]), \quad u, v, w \in \mathfrak{g}\,.$$

Dans ce cas, il est facile de voir que $\mathcal{D}^r$ et ∇ sont reliées par : $r^+_\sharp(\mathcal{D}^r_{a^+} b^+) = \nabla_{r(a)^+} r(b)^+$ où $r^+_\sharp$ est l'applciation d'ancrage associée à r^+. Il en résulte que les composantes de r^+ sont polynomiales de degré au plus 1 dans la structure affine définie par ∇ puisque $\mathbf{T} = 0$ et que r est inversible ; on retrouve ainsi un résultat de Boucetta et Medina (cf. [11, théorème 1.1-(1)]).

3.2.2 *Cas d'une variété de Riemann-Poisson*

Soit $\mathcal{D}$ la connexion de Levi-Civita contravariante associée à un tenseur de Poisson π et une métrique riemannienne g. Grâce à g, le fibré cotangent se décompose orthogonalement en

$$T^*M = \operatorname{Ker} \pi_\sharp \oplus (\operatorname{Ker} \pi_\sharp)^\perp\,.$$

Lemme 3.21. *Soit U un ouvert sur lequel le rang de π est constant. On suppose que $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{F}$-connexion sur U. Alors $(\operatorname{Ker} \pi_{\sharp|_U})^\perp$ est stable par $\mathcal{D}$.*

Preuve. Soit α arbitraire dans $\Gamma((\operatorname{Ker} \pi_{\sharp|_U})^\perp)$. Puisque $\mathcal{D}$ est métrique, pour toutes $\beta, \gamma \in \Omega^1(U)$ avec $\pi_\sharp(\gamma) = 0$, on a $g^*(\mathcal{D}_\beta \alpha, \gamma) = \pi_\sharp(\beta) \cdot g^*(\alpha, \gamma) - g^*(\alpha, \mathcal{D}_\beta \gamma) = 0$ car $\pi_\sharp(\mathcal{D}_\beta \gamma) = 0$ (lemme 3.8). □

Ainsi si $\mathcal{D}$ est plate et est une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion, alors, d'après le corollaire 3.12, il existe autour de tout $x \in M^{reg}$ une carte $\mathcal{S}$-feuilletée avec coordonnées tangentes $\{x_i\}_{i=1}^{2r}$ et coordonnées transverses $\{y_u\}_{u=1}^{d-2r}$ telle que $\{\phi_i := \varpi^\perp(\partial/\partial x_i);\, dy_u\}$ soit un corepère $\mathcal{D}$-plat, où $\varpi^\perp : C \to (\operatorname{Ker} \pi_\sharp)^\perp$ dénote l'inverse de $\pi_\sharp : (\operatorname{Ker} \pi_\sharp)^\perp \to C$. Dans ce cas, les fonctions A^u_i définies par (3.22) peuvent être calculées à l'aide de la métrique ; en effet, en utilisant (3.25) et le fait que $g^*(\phi_i, dy_u) = 0$, on voit facilement que $A^u_i = -\sum_v g^*_{iv} g^{*uv}$ où $g^*_{iv} = g^*(dx_i, dy_v)$ et (g^{*uv}) est la matrice inverse de celle de coefficients $g^*_{uv} = g^*(dy_u, dy_v)$.

3.3 Résultat principal

Cette section est entièrement consacrée à la preuve du théorème suivant, résultat principal de ce chapitre.

Théorème 3.22. *Soit $(M, \pi, \mathcal{D})$ une variété de Poisson munie d'une connexion contravariante sans torsion ni courbure.*

(1) *Si $\mathcal{D}$ est une $\mathcal{F}^{reg}$-connexion et $\mathbf{T} = 0$, alors pour tout point régulier x_0 de rang $2r$ il existe une action libre $\zeta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(U)$ d'une algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$ de dimension $2r$ sur un voisinage ouvert U de x_0 et une solution inversible $r \in \wedge^2\mathfrak{g}$ de l'équation de Yang-Baxter classique telles que $\pi = \pi^r$ et $\mathcal{D} = \mathcal{D}^r$.*

(2) *Si de plus $\mathcal{D}$ est la connexion de Levi-Civita contravariante associée à π et une métrique riemannienne g, alors ζ peut être choisie de telle sorte que ses champs fondamentaux soient de Killing.*

Preuve. Soit (x_i, y_u), avec $i = 1, \ldots, 2r$ et $u = 1, \ldots, d-2r$, un système de coordonnées plat autour du point régulier x_0, choisissons $\mathcal{H}$ comme dans le lemme 3.9 et soit $\mathbf{F}^* = \{\phi_i, dy_u\}$ le corepère plat correspondant et $\{X_i, Y_u\}$ son repère dual. On va construire une famille de champs de vecteurs $\{Z_1, \ldots, Z_{2r}\}$ sur un voisinage ouvert U de x_0, qui sont linéairement indépendants, tangents au feuilletage symplectique $\mathcal{S}$ et qui commutent avec les X_i et les Y_u. Dans ce cas,

- la famille $\{Z_1, \ldots, Z_{2r}\}$ formera une algèbre de Lie réelle $\mathfrak{g}$ de dimension $2r$, car d'après l'identité de Jacobi

$$[[Z_i, Z_j], X_l] = [[Z_i, Z_j], Y_u] = 0 \quad \forall\, i, j, l, \forall\, u\,,$$

ce qui s'exprime, en écrivant $[Z_i, Z_j] = \sum_k c_{ij}^k\, Z_k$ où $c_{ij}^k \in C^\infty(U)$, par $X_l(c_{ij}^k) = Y_u(c_{ij}^k) = 0$; il est alors clair que $\mathfrak{g}$ agit librement sur U.

- le tenseur de Poisson π s'écrira

$$\pi = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}\, Z_i \wedge Z_j$$

où la matrice $(a_{ij})_{1 \le i,j \le 2r}$ est constante et inversible : puisque les X_i et les Y_u sont de Poisson (lemme 3.14), alors en écrivant $\pi = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}\, Z_i \wedge Z_j$ où $a_{ij} \in C^\infty(U)$, on obtient $X_k(a_{ij}) = Y_u(a_{ij}) = 0$.

- la connexion $\mathcal{D}$ sera donnée sur U par :

$$\mathcal{D}_\alpha \beta = \sum_{i,j} a_{ij} \alpha(Z_i)\, \mathcal{L}_{Z_j} \beta\,.$$

En effet, ceci est vrai pour chaque $\beta \in \mathbf{F}^*$ car $\mathcal{L}_{Z_i} \phi_j = \mathcal{L}_{Z_i} dy_u = 0$, et $\mathcal{D}_\alpha \beta - \sum_{i,j} a_{ij} \alpha(Z_i)\, \mathcal{L}_{Z_j} \beta$ est tensoriel en β comme $\pi_\sharp(\alpha) = \sum_{i,j} a_{ij} \alpha(Z_i) Z_j$.

On va procéder en deux étapes. On va d'abord construire une famille libre de champs de vecteurs tangents à $\mathcal{S}$ qui commutent avec les X_i, et à partir de celle-ci, on va construire ensuite la famille désirée.
Pour commencer, remarquons qu'en vertu du théorème 3.16 et du lemme 3.14, on a :

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{2r} \lambda_{ij}^k X_k\,, \quad [X_i, Y_u] = \sum_{j=1}^{2r} \mu_{iu}^j X_j\,, \quad [Y_u, Y_v] = \sum_{i=1}^{2r} \nu_{uv}^i X_i$$

où les fonctions λ_{ij}^k, μ_{iu}^j, ν_{uv}^i sont toutes de Casimir. Soit $\mathcal{T} \subset M$ une transversale à $\mathcal{S}$ passant par x_0. Fixons $y \in \mathcal{T}$; les restrictions $X_1^y, \ldots, X_{2r}^y$ des champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_{2r}$ sur la feuille symplectique $\mathcal{S}_y$ passant par y forment une algèbre de Lie $\mathfrak{g}_y$ qui agit librement et transitivement sur $\mathcal{S}_y$. Donc d'après [1], il existe un anti-homomorphisme d'algèbres de Lie $\hat{\Gamma}_y : \mathfrak{g}_y \to \mathfrak{X}^1(\mathcal{S}_y)$, qui est libre, transitive, d'image

$$\hat{\Gamma}_y(\mathfrak{g}_y) = \left\{T \in \mathfrak{X}^1(\mathcal{S}_y) : [T, X_i^y] = 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, 2r\right\},$$

et tel que $\hat{\Gamma}_y(X_i^y)(y) = X_i(y)$ pour tout i. En posant pour chaque i,

$$T_i(z) := \hat{\Gamma}_y(X_i^y)(z), \quad z \in \mathcal{S}_y$$

et en faisant varier y le long de $\mathcal{T}$, on obtient une famille de champs de vecteurs $\{T_1, \ldots, T_{2r}\}$ linéairement indépendants, tangents à $\mathcal{S}$, vérifiant

$$[T_i, X_j] = 0 \quad \text{pour tous } i, j,$$

et tels que $T_i(y) = X_i(y)$ pour tout i et tout $y \in \mathcal{T}$. Noter que $T_1, \ldots, T_{2r}$ sont lisses puisque les solutions du système

$$[T, X_i] = 0\,, \quad i = 1, \ldots, 2r$$

dépendent différentiablement du paramètre $y \in \mathcal{T}$ et des valeurs initiales le long de la transversale $\mathcal{T}$.
Puisque μ_{iu}^j sont des fonctions de Casimir,

$$[X_i, [T_j, Y_u]] = [[X_i, T_j], Y_u] + [T_j, [X_i, Y_u]] = 0 \quad \forall\, i, j, \forall\, u\,.$$

Donc

$$[T_i, Y_u] = \sum_{j=1}^{2r} \gamma_{iu}^j T_j\,,$$

où les γ_{iu}^j sont des fonctions de Casimir. Par ailleurs,

$$[T_i, [Y_u, Y_v]] = 0 \quad \forall\, i, \forall\, u, v$$

car les ν^i_{uv} sont de Casimir, et

$$\begin{aligned}
[T_i, [Y_u, Y_v]] &= [[T_i, Y_u], Y_v] + [Y_u, [T_i, Y_v]] \\
&= \left[\sum_{j=1}^{2r} \gamma^j_{iu} T_j, Y_v\right] + \left[Y_u, \sum_{j=1}^{2r} \gamma^j_{iv} T_j\right] \\
&= \sum_{j=1}^{2r}\left(-\frac{\partial \gamma^j_{iu}}{\partial y_v} + \frac{\partial \gamma^j_{iv}}{\partial y_u} - \sum_{k=1}^{2r} \gamma^j_{ku}\gamma^k_{iv} - \gamma^j_{kv}\gamma^k_{iu}\right) T_j\,,
\end{aligned}$$

d'après (3.23) et le fait que les γ^j_{iu} sont de Casimir. Il en résulte

$$\frac{\partial \gamma^i_{ju}}{\partial y_v} - \frac{\partial \gamma^i_{jv}}{\partial y_u} + \sum_{k=1}^{2r} \gamma^i_{ku}\gamma^k_{jv} - \gamma^i_{kv}\gamma^k_{ju} = 0 \quad \forall\, i, j, \forall\, u, v\,. \tag{$*$}$$

Maintenant on va chercher une matrice inversible $\xi = (\xi_{ij})_{1\le i,j\le 2r}$ où ξ_{ij} sont des fonctions de Casimir, et telle que les champs de vecteurs

$$Z_i := \sum_{j=1}^{2r} \xi_{ji} T_j\,, \quad i = 1, \ldots, 2r$$

vérifient

$$[Z_i, Y_u] = 0 \ \text{ pour tout } i \text{ et tout } u\,.$$

Si une telle matrice existe, $\{Z_1, \ldots, Z_{2r}\}$ est clairement la famille souhaitée.
Compte tenu de (3.23) et le fait que ξ_{ij} sont cherchées de sorte qu'elles soient de Casimir, la condition pour laquelle les Z_i commutent avec les Y_u est équivalente au système

$$\frac{\partial \xi_{ji}}{\partial y_u} = \sum_{k=1}^{2r} \gamma^j_{ku}\, \xi_{ki} \quad \forall\, i, j, u\,,$$

qui s'écrit matriciellement sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial y_u} \xi_i = \Gamma_u\, \xi_i\,,$$

où $\xi_1, \ldots, \xi_{2r}$ sont les vecteurs colonnes de ξ et $\Gamma_u := (\gamma^i_{ju})_{1\le i,j\le 2r}$. Il s'agit donc de résoudre ce système. Comme toutes les données sont de Casimir et $(y_1, \ldots, y_{d-2r})$ est un système de coordonnées sur $\mathcal{T}$, il suffit de le résoudre sur $\mathcal{T}$. D'après le théorème de Frobenius, celui-ci peut être résolu si et seulement si la condition d'intégrabilité suivante

$$\Gamma_u\Gamma_v + \frac{\partial}{\partial y_v}\Gamma_u = \Gamma_v\Gamma_u + \frac{\partial}{\partial y_u}\Gamma_v$$

est satisfaite pour tous u, v, ce qui est exactement $(*)$. Il suffit maintenant de prendre $\xi_{ij}(x_0) = \delta_{ij}$ comme conditions initiales pour conclure.

Finalement, si $\mathcal{D}$ est la connexion de Levi-Civita contravariante associée à π et une métrique riemannienne g, alors en choisissant $\mathcal{H} = (\operatorname{Ker} \pi_\sharp)^\perp$, on a

$$\mathcal{L}_{Z_i} g\,(\phi_j, \phi_k) = \mathcal{L}_{Z_i} g\,(\phi_j, dy_u) = \mathcal{L}_{Z_i} g\,(dy_u, dy_v) = 0$$

puisque $\mathcal{L}_{Z_i}\phi_j = \mathcal{L}_{Z_i} dy_u = 0$ et que $g(\phi_i, \phi_j)$ et $g(dy_u, dy_v)$ sont de Casimir. Ceci montre que les Z_i sont de Killing. $\square$

Bibliographie

[1] Alekseevsky D. V., Michor P. W., *Differential geometry of $\mathfrak{g}$-manifolds*, Diff. Geom. Appl., 5 (1995) 371-403 North-Holland.

[2] Bahayou A., *Connexions contravariantes sur les groupes de Lie-Poisson*, Thèse de l'Université d'Ourgla (Algérie) 2011.

[3] Bahayou A., Boucetta M., *Multiplicative noncommutative deformations of left invariant Riemannian metrics on Heisenberg groups*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série I 347 (2009) 791-796.

[4] ———, *Metacurvature of Riemannian Poisson-Lie groups*, J. Lie Theory, Vol. 19 (2009) 439-462.

[5] Boucetta M., *Compatibilités des structures pseudo-riemanniennes et des structrues de Poisson*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 333 (2001) 763-768.

[6] ———, *Solutions of the classical Yang-Baxter equation and noncommutative deformations*, Lett. Math. Phys. (2008) 83 : 69-81.

[7] ———, *Poisson manifolds with compatible pseudo-metric and pseudo-Riemannian Lie algebras*, Diff. Geom. Appl., Vol. 20, Issue 3 (2004) 279-291.

[8] ———, *Riemann-Poisson manifolds and Kähler-Riemann foliations*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 336, Série I (2003) 423-428.

[9] ———, *On the Riemann-Lie algebras and Riemann-Poisson Lie groups*, J. Lie Theory 15 (2005), no. 1, 183-195.

[10] ———, *Riemannian geometry of Lie algebroïds*, J. Egypt. Math. Soc., Vol. 19, Issues 1-2 (2011) 57-70.

[11] Boucetta M., Medina A., *Polynomial Poisson structures on affine solvmanifolds*, J. Symplectic Geom. Vol. 9, Number 3 (2011) 387-401.

[12] Boucetta M., Saassai Z., *A class of Poisson structures compatible with the canonical Poisson structure on the cotangent bundule*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 349 (2011) 331-335.

[13] Bursztyn H., Waldmann S., *Bimodule deformations, Picard groups and contravariant connections*, 2003. `arxiv:math/0207255v2 [math.QA]`.

[14] Chu B.-Y., *Symplectic homogeneous spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 197 (1974) 145-159.

[15] Crainic M., Marcut I., *On the existence of symplectic realizations*, J. Symplectic Geom. Vol. 9, Number 4 (2011) 435-444.

[16] Dardié J. M., Medina A., *Algèbres de Lie kählériennes et double extension*, J. Algebra 3, 185 (1996) 774-795.

[17] da Silva A. C., Weinstein A., *Geometric models for noncommutative algebras*, Berkeley Mathematics Lecture Notes, Vol. 10, Amer. Math. Soc., 1999.

[18] Diatta A., Medina A., *Classical Yang-Baxter equation and left invariant geometry on Lie groups*, Manuscripta Math. 114 (2004) 477-486.

[19] Dufour J.-P., Zung N. T., *Poisson structures and their normal forms*, Progress in Math. Vol. 242, Birkhäuser Verlag Berlin 2005.

[20] Fernandes R. L., *Connections in Poisson Geometry I : holonomy and invariants*, J. Diff. Geom. 54 (2000) 303-366.

[21] Grabawski J., *$\mathbb{Z}$-graded extensions of Poisson brackets*, Rev. Math. Phys . 9 (1997) 1-27.

[22] Gracia-Bondía J. M., Várily J. C., Figueroa H., *Elements of noncommutative geometry*, Birkhäuser Advanced Texts, 2001.

[23] Hakopian H. A., Tonoyan M. G., *Partial differential analogs of ordinary differential equations and systems*, New York J. Math. 10 (2004) 89-116.

[24] Hawkins E., *Noncommutative rigidity*, Commun. Math. Phys. 246 (2004) 211-235.

[25] ———, *The structure of noncommutative deformations*,J. Diff. Geom. 77 (2007) 385-424.

[26] Karabegov A. V., *Fedosov's formal symplectic groupoïd and contravariant connections*, J. Geom. Phys., Vol 56, Issue 10 (2006) 1985-2009.

[27] Kirillov A. A., *Local Lie algebras*, Russian Math. Surveys 31 (1976) 55-75.

[28] Kobayashi S., Nomizu K., *Fondations of differential geometry*, Vol. I, II, Interscience Publ., New York-London, 1969.

[29] Kosmann-Schwarzbach Y., *From Poisson algebras to Gerstenhaber algebras*, Ann. Inst. Fourier 46, 5 (1996) 1243-1274.

[30] Kosmann-Schwarzbach Y., Magri F., *Poisson-Nijenhuis structures*, Ann. Inst. Henri Poincaré, section A, tome 53, n° 1 (1990) 35-81.

[31] Koszul J.-L., *Crochet de Schouten-Nijenhuis et cohomologie*. Dans : Elie Cartan et les mathématiques d'aujourd'hui, Astérisque hors série, (1985) 257-271.

[32] Laurent-Gengoux C., Pichereau A., Vanhaecke P., *Poisson structures*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 347, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.

[33] Lee J. M., *Introduction to smooth manifilods*, Graduate text in Math., 218, Springer-Verlag New York, Inc., 2003.

[34] Lichnerowicz A., *Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées*, J. Diff. Geom. 12 (1977) 253-300.

[35] ———, *Global theory of connections and holonomy groups*, Noordhoof Intern. Publ., Leyden, 1976.

[36] Mackenzie K. C. H., *General Theory of Lie Groupoids and Lie Algebroids*, London Math. Soc. Lecture Note Series 213, Cambridge University Press, New York, 2005.

[37] Magri F., *A simple model of the integrable Hamiltonian equation*, J. Math. Phys. 19 (1978) 1156-1162.

[38] Magri F., Casati P., Falqui G., Pedroni M., *Eight lectures on integrable systems*, In : Integrability of Nonlinear Systems, Lecture Notes in Physics 495 (2nd edition), 2004, pp. 209-250.

[39] Matsushima Y., *Differentiable manifolds*, Marcel Dekker, Inc. New York, 1972.

[40] Monterde J., Vallejo J. A., *Poisson brackets of even symplectic forms on the algebra of differential forms*, Ann. Global Anal. Geom. 22 (2002) 267-289.

[41] Nijenhuis A., *Jocobi-type identities for bilinear differential concomitants of certain tesor fields*, J. Indag. Math. 17 (1955) 390-403.

[42] Poisson S. D., *Sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique*, J. école Polytechnique 8 Cah. 15 (1805) 1414-1444.

[43] Pradines J., *Théorie de Lie pour les groupoïdes différentiables*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A Math. 264 (1967) 245-248.

[44] Schouten J. A., *On the differential operators of first order in tensor calculus*, Convengo Int. Geometria differenziale Italia, 1953, Ed. Cremonese, Roma, 1954, pp 1-7.

[45] Stefan P., *Accessible sets, orbits, and foliations with singularities*, Proc. London Soc. (3) 29 (1974) 699-713.

[46] Saassai Z., Boucetta M., *On the local structure of noncommutative deformations*, J. Geom. Phys., Vol. 82 (2014) 64-74.

[47] Sussmann H. J., *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*, Trans. Amer. Math. Soc. 180 (1973) 171-188.

[48] Turiel F.-J., *Structures bihamiltoniennnes sur le fibré contangent*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 315, Série I (1992) 1085-1088.

[49] Vaismann I., *On the geometric quantization of Poisson manifolds*, J. Math. Phys., 32 (1991) 3339-3345.

[50] ———, *Symplectic geometry and secondary caracteristic classes*, Progress in Math. 72, Birkhäuser, Boston, 1987.

[51] ———, *Lectures on the geometry of Poisson manifolds*, Progr. in Math. Vol. 118, Birkhäsher, Berlin 1994.

[52] Weinstein A., *The local structure of Poisson manifolds*, J. Diff. Geom. 18 (1983) no. 3, 523-557.

[53] ———, *Poisson geometry*, Diff. Geom. Appl., 9 (1998) 213-238 North-Holland.