

# THÈSE

présentée à la Faculté pour obtenir le grade de :

**Docteur**

CED : Sciences et Techniques:

Spécialité : Mathématiques\_Applications

## GROUPES D'ISOMÉTRIES DES MÉTRIQUES LORENTZIENNES INVARIANTES À GAUCHE SUR LES GROUPES DE LIE

par :

**Abdelmounaim Chakkar**

(Dernier diplôme : Master en Mathématiques\_Applications)

soutenue le

devant la commission d'examen :

# Résumé

---

Cette thèse s'intéresse à l'étude de la géométrie Lorentzienne ainsi que l'explication de la géométrie modèle définie par W. Thurston. Dans un premier temps nous réalisons une étude globale de l'espace vectoriel Lorentzien, en proposant une caractérisation des endomorphismes auto-adjoints relativement à un produit scalaire indéfini. Dans un second temps nous nous intéressons à identifier les similitudes et différences entre les propriétés des variétés Riemanniennes et pseudo-Riemanniennes, en construisant des exemples. Dans un troisième temps nous donnons une explication du théorème de Thurston sur la classification des géométries modèles en trois dimensions où nous mettons l'accent sur la construction explicite des ces géométries modèles plutôt que de leur description. Et finalement la présentation de nos résultats de recherche est structurée en deux parties : La classification des métriques Lorentziennes et le calcul des groupes d'isométries.

**Mots clés** : Géométrie Lorentzienne, huit géométries modèles de Thurston, groupe de Lie, métrique Lorentzienne invariante à gauche, groupe d'isométries.

# Abstract

---

This thesis focuses on the study of Lorentzian geometry as well as the explanation of Thurston's Eight Model Geometries. First, we carry out a global study of the Lorentzian vector space, by proposing a characterization of self-adjoint endomorphisms relative to an indefinite scalar product. Secondly, we are interested in identifying the similarities and differences between the properties of Riemannian and pseudo-Riemannian manifolds, by giving examples. Thirdly, we give an explanation of Thurston's theorem on the classification of Model Geometries in three dimensions where we focus on the explicit construction of these Model Geometries rather than their description. And finally the presentation of our research results is structured in two parts : The classification of Lorentzian metrics and the calculation of isometry groups.

**Keywords** : Lorentzian geometry, Thurston's Eight Model Geometries, Lie group, left-invariant Lorentzian metric, isometry group.

*À toute ma famille,  
À tous ceux que j'aime,  
Je dédie les pages qui suivent*

# Remerciements

---

Ce mémoire de thèse conclue six années de travail au sein du FSTG, représente l'aboutissement de mes douze années d'études passées à l'université Cadi Ayyad et constitue la fondation d'activités de recherche de plus longue haleine. Ce travail n'aurait pas été possible sans l'aide de toutes les personnes qui m'ont accompagné tout au long de cette période. C'est pourquoi je veux profiter de cette section pour leur exprimer mes sincères remerciements :

À mes directeurs de thèse, les professeurs Mohamed Boucetta et Abdelhak Abouqateb, pour tout ce qu'ils m'ont appris, pour leur dévouement et leur patience. Je les remercie pour leur leadership dans une démarche caractérisée par la rigueur et la connaissance profonde du champ d'étude à travers lequel j'ai développé ma connaissance en géométrie différentielle et grâce à eux, j'ai pu bénéficier des opportunités scientifiques. Cette thèse n'aurait pas été possible sans l'immense soutien qu'ils m'ont témoigné pendant toutes ces années. Un grand merci à vous deux.

À tous les membres de l'équipe de recherche Géométrie, Topologie de la faculté FSTG, avec qui j'ai partagé de très bons moments tant au travail de recherche que personnellement. Tout particulièrement aux étudiants du Master : Géométrie, Modélisation géométrique et optimisation de formes, et à mes collègues doctorants qui, entre cafés et discussions, ont rendu ces années vraiment agréables.

J'en profite aussi pour saluer très chaleureusement toute l'équipe des participants au "Colloque en Géométrie différentielle et algèbres non associatives" organisé au centre international de rencontres mathématiques- Marseille, notamment la comité d'organisation ainsi que le professeur Saïd Benayadi, pour qui j'ai une affection toute particulière.

À mes parents et mon épouse, qui m'ont toujours fait confiance et m'ont soutenu dans les moments les plus difficiles.

Mes plus sincères remerciements vont également aux membres du jury, qui ont accepté d'examiner cette thèse.

# Publications

---

Notre contribution consiste, au premier lieu, de déterminer une classification des métriques Lorentziennes sur les groupes de lie simplement connexes unimodulaires tridimensionnels qui sont inclus dans les huit géométries modèles de Thurston [chapitre 3](#), voir à cet égard l'article qu'est en cours de révision [6]. Via l'utilisation de ces métriques, nous donnons une description complète des groupes d'isométrie de tels groupes de Lie dans le deuxième article (voir [7]) qu'est accepté pour publication .

# Table des matières

---

0	INTRODUCTION	1
I	Géométrie Lorentzienne et Théorème de Thurston	5
1	ESPACE VECTORIEL LORENTZIEN	6
1.1	Formes bilinéaires symétriques et produits scalaires . . . . .	6
1.1.1	Formes bilinéaires symétriques et produits scalaires . . . . .	6
1.1.2	Bornes d'une forme bilinéaire symétrique par un produit scalaire . . . . .	10
1.1.3	Montée et descente d'indices . . . . .	13
1.2	Espace vectoriel Lorentzien . . . . .	16
1.2.1	Cône de type temps. . . . .	16
1.2.2	Inégalité inversée . . . . .	17
1.2.3	Cônes de lumière et causaux . . . . .	18
1.3	Le groupe de Lorentz . . . . .	21
1.3.1	Généralités. . . . .	21
1.3.2	Le groupe de Lorentz en dim 2. . . . .	23
1.3.3	Quelques propriétés du groupe de Lorentz en dimension supérieur à 2. . . . .	25
1.3.4	Autres propriétés de $SO_1^\uparrow(n)$ en tant que groupe de Lie. . . . .	30
1.4	Le revêtement universel de $SO_1^\uparrow(4)$ . . . . .	33
1.4.1	Construction du morphisme de revêtement universel. . . . .	33
1.4.2	Transformations de Lorentz dans $SL(2, \mathbb{C})$ et décomposition polaire. . . . .	38
1.4.3	Le groupe de Möbius . . . . .	42
1.5	Forme canonique de Jordan des endomorphismes auto-adjoints . . . . .	44
1.5.1	Forme canonique d'un endomorphisme linéaire. . . . .	44
1.5.2	Forme canonique d'un endomorphisme auto-adjoint pour un produit scalaire arbitraire. . . . .	46
1.5.3	Forme canonique de Jordan d'un endomorphisme auto-adjoint par rapport à un produit scalaire Lorentzien. . . . .	52
2	THÉORIE GÉNÉRALE DES VARIÉTÉS PSEUDO-RIEMANNIENNES	54
2.1	Similitudes entre la géométrie Riemannienne et pseudo-Riemannienne	54
2.1.1	Concept. . . . .	54
2.1.2	Connexion de Levi-Civita . . . . .	55
2.1.3	Éléments associés à la connexion affine. . . . .	56

2.1.4	Le tenseur de courbure. . . . .	59
2.1.5	Courbure sectionnelle . . . . .	60
2.2	Bornes des courbures sectionnelles et de Ricci . . . . .	64
2.3	Propriétés conformes et pré géodésiques de type lumière . . . . .	67
2.3.1	Isométries, homothéties, transformations conformes. . . . .	67
2.3.2	Modifications conformes de la métrique. . . . .	68
2.3.3	Invariance des pré géodésiques de type lumière. . . . .	69
2.4	Un tour sur les différences avec des contre-exemples explicites . . . . .	72
2.4.1	Indépendance de la complétude avec le caractère causal. . . . .	72
2.4.2	Géodésiques fermées incomplètes (de type lumière). . . . .	74
2.4.3	Connexité géodésique. . . . .	77
2.4.4	Tores plats avec groupes d'isométrie non compacts. . . . .	77
3	LES HUIT GÉOMÉTRIES RIEMANNIENNES DE THURSTON . . . . .	80
3.1	Géométries modèles . . . . .	80
3.2	Théorème de Thurston . . . . .	81
3.2.1	En deux dimensions. . . . .	82
3.2.2	En trois dimensions. . . . .	83
<b>II Présentation des résultats</b>		<b>90</b>
4	MÉTRIQUES LORENTZIENNES SUR LES GROUPES DE LIE UNIMODULAIRES DE DIMENSION 3 . . . . .	91
4.1	Introduction . . . . .	91
4.2	Préliminaires . . . . .	97
4.3	Métriques Lorentziennes invariantes à gauche . . . . .	102
4.3.1	Métriques Lorentziennes inv. à gauche sur Nil . . . . .	102
4.3.2	Métriques Lorentziennes inv. à gauche sur $SU(2)$ . . . . .	103
4.3.3	Métriques Lorentziennes inv. à gauche sur $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$ . . . . .	103
4.3.4	Métriques Lorentziennes inv. à gauche sur Sol . . . . .	107
4.3.5	Métriques Lorentziennes inv. à gauche sur $\widetilde{E}_0(2)$ . . . . .	112
4.4	Solitons de Ricci généralisés Lorentziens invariants à gauche . . . . .	115
5	GROUPES D'ISOMÉTRIES DES GROUPES DE LIE LORENTZIENS UNIMODULAIRES DE DIMENSION 3 . . . . .	119
5.1	Introduction . . . . .	119
5.2	Notations et préliminaires . . . . .	123
5.3	Groupes d'automorphismes isométriques . . . . .	124
5.4	Groupes d'isométries . . . . .	128
5.4.1	Résultats utiles pour le calcul des groupes d'isotropie . . . . .	129
5.4.2	Résultats . . . . .	137





# Introduction

---

La géométrie Euclidienne classique décrit notre espace ordinaire comme un espace affine (tridimensionnel) doté d'un produit scalaire (défini positif). Dans un tel espace, des objets tels que des courbes et des surfaces peuvent être étudiés. La découverte de deux avancées conceptuelles importantes remonte à l'époque de Gauss : la distinction entre propriétés intrinsèques et extrinsèques des surfaces, et l'existence de géométries non Euclidiennes. Ces concepts ont été systématiquement développés à travers la notion de variété Riemannienne (un espace topologique dans lequel chaque point est intrinsèquement doté d'un produit scalaire Euclidien infinitésimal). Au début du 20-ème siècle, la relativité restreinte d'Einstein a montré que l'espace physique et le temps peuvent être décrits (ensemble) en introduisant deux modifications dans la géométrie Euclidienne classique : ajouter une dimension supplémentaire à l'espace affine et définir le produit scalaire comme Lorentzien, c'est-à-dire non-dégénéré avec signature  $(+, +, +, -)$ . La relativité générale a montré que l'espace-temps physique à grande échelle (lorsque les champs gravitationnels ne peuvent pas être considérés comme uniformes) est intrinsèquement courbe et doit donc être décrit par une variété Lorentzienne, un objet formellement identique au Riemannien sauf en signature.

Ainsi, cette thèse comporte deux parties : La première partie rappelle quelques résultats préliminaires de la géométrie Lorentzienne nécessaires pour réaliser la suite de ce travail et aussi dans ce mémoire, nous donnons les grandes lignes de la preuve de théorème de Thurston sur les huit géométries modèles qu'est étroitement lié à notre projet de déterminer le groupe d'isométrie d'un groupe de Lie Lorentzien. La seconde partie est composée de deux chapitres et est consacrée à l'étude du groupe d'isométrie d'un groupe de Lie unimodulaire Lorentzien.

Premièrement, l'étude de la géométrie Lorentzienne est présentée selon la direction suivante :

La perspective purement géométrique, qui analyse les similitudes et les différences des cas Riemannien et Lorentzien. Par exemple, en géométrie Riemannienne, les géodésiques sont des courbes à accélération nulle. Ainsi, les géodésiques sont caractérisées comme les uniques courbes qui déterminent le chemin le plus court entre chacun des deux points par lesquels elles passent. Une des conséquences du théorème classique de Hopf-Rinow [45] est la suivante : si une variété Riemannienne connexe est complète (ses géodésiques peuvent être étendues infiniment), alors elle est géodésiquement connexe (deux de ses points peuvent être connectés par un géodésique). En géométrie Lorentzienne, il est toujours logique de définir les géodésiques comme des courbes à

accélération nulle, mais il n’y a pas de résultat général analogue à Hopf-Rinow. À cet égard un de nos principaux résultats est que nous pouvons conclure qu’il existe une différence significative entre les groupes d’isométries des groupes de Lie Riemanniens et Lorentziens en dimension trois.

Deuxièmement, Certaines variétés, telles que le tore et le cylindre, ont des métriques héritées de l’espace euclidien dont elles sont les quotients. Certains, comme la sphère et le plan projectif, n’ont pas de métrique compatible avec la métrique Euclidienne, mais le plan projectif a une métrique héritée de la sphère. Cela soulève la question : toutes les variétés Riemanniennes (et leurs métriques) peuvent-elles être obtenues comme quotients de certaines variétés de référence? Si oui, quelles sont les propriétés que doivent posséder ces variétés de référence? Pour répondre à ces questions, Thurston a défini dans son ouvrage *Three-Dimensional Geometry and Topology* [58] un nouveau concept appelé géométrie modèle, à savoir un couple  $(G, X)$  tel que  $X$  est une variété connexe et simplement connexe avec un groupe de Lie  $G$  des difféomorphismes de  $X$  qui agit transitivement sur  $X$  avec stabilisateur compact tel que  $G$  maximal et il existe une variété  $M$  de volume fini modelée par  $(G, X)$ .

La seconde partie est constituée de deux chapitres qui correspondent à la pré-publication [6] et la publication [7]. Les travaux effectués pendant cette thèse portent essentiellement sur la classification des métriques Lorentziennes invariantes à gauche ainsi que la détermination des groupes complets d’isométries  $\text{Isom}(G, g)$  sur les groupes de Lie unimodulaires de dimension 3. L’investigation des groupes d’isométrie joue un rôle fondamental dans l’étude de la géométrie, et il existe de beaux résultats sur les groupes d’isométrie des groupes de Lie Riemanniens et pseudo-Riemanniens, (voir par exemple [16, 20, 24, 26, 38, 44, 54] et les références qui y sont contenues). Concernant le groupe de Lie  $(G, g)$  unimodulaire Lorentzien et tridimensionnel, qui fait l’objet de la deuxième partie, les choses se compliquent sensiblement. En effet, il a été prouvé par Wolf dans [62] (voir aussi [61]) que si  $G$  est nilpotent, alors  $\text{Isom}(G, g) \cong L(G) \rtimes \text{Aut}(G, g)$ , i.e.  $\text{Isom}(G, g)$  est le produit semi-direct de groupe de translations à gauche  $L(G)$  et groupe des automorphismes isométriques  $\text{Aut}(G, g)$ , qui s’identifie, via la représentation d’isotropie à l’élément neutre  $e$ , au groupe  $\text{Aut}(\mathfrak{g}) \cap \text{O}(\mathfrak{g}, g(e))$  où  $\mathfrak{g}$  est l’algèbre de Lie de  $G$ . Cependant un phénomène nouveau apparaît si  $(G, g)$  est non symétrique et est équipé d’une métrique Lorentzienne invariante à gauche : le groupe d’isotropie  $\text{Isom}_e(G, g)$  peut très bien ne pas être contenu dans le groupe des automorphismes de  $G$ . Le résultat principal du [chapitre 5](#) est énoncé dans le théorème suivant.

**Théorème 0.1** (théorème principal). *Soit  $(G, g)$  un groupe de Lie connexe, simplement connexe et unimodulaire de dimension trois avec une métrique  $g$  Lorentzienne invariante à gauche .*

1. *Si  $(G, g)$  est un espace symétrique, alors  $\text{Isom}_e(G, g) \neq \text{Aut}(G, g)$ , et  $\text{Isom}_e(G, g) \cong \text{O}(2, 1)$ .*

2. Si  $G = \text{Sol}$  doté d'une métrique Lorentzienne invariante à gauche équivalente à  $\text{sol7}$  (voir [Tableau 4.1](#)), alors  $\text{Isom}_e(G, g) \cong \mathbf{K} \times \mathbb{Z}_2$  et  $\text{Aut}(G, g) \cong \mathbb{Z}_2$ .
3. Dans tous les autres cas,  $\text{Isom}_e(G, g) = \text{Aut}(G, g)$  avec  $\dim \text{Isom}(G, g) = 3$  ou 4.

Nous mentionnons ici que  $\mathbf{K}$  désigne le groupe à un paramètre de rotations autour d'un axe dans  $\mathbb{R}_1^3$  engendré par un vecteur isotrope.

Cette thèse est divisée en cinq chapitres :

Chapitre 1. Les espaces vectoriels Lorentziens sont étudiés. Nous collectons des éléments qui sont très connus, même s'ils sont très répandus dans la littérature. Ceux-ci incluent les propriétés élémentaires des espaces vectoriels avec un produit scalaire Lorentzien (ou, en général, indéfini), des critères sur les bornes des formes bilinéaires symétriques, la classification des transformations de Lorentz, les propriétés de l'application du spineur, et enfin les formes canoniques des endomorphismes auto-adjoints par rapport à un produit scalaire quelconque et en particulier le produit scalaire Lorentzien.

Chapitre 2. Il est centré plus spécifiquement sur l'étude des variétés pseudo-Riemanniennes (pas nécessairement définies positives) en général. Nous passons brièvement en revue les éléments typiques de la géométrie Riemannienne (par exemple : connexion Levi-Civita, géodésiques, courbure...) dans le but suivant : indiquer quelles propriétés restent essentiellement identiques, doivent être modifiées ou ne sont manifestement pas valables, dans le cas indéfini. Un soin particulier est apporté aux pré-géodésiques de type lumière, car elles constituent un élément invariant conforme, sans analogue dans le cas Riemannien. Nous terminons par un tour sur des propriétés qui peuvent sembler pathologiques du point de vue Riemannien, mais deviennent naturelles dans l'indéfini. Quelques exemples sont construits ici avec des outils élémentaires. Ils peuvent orienter l'intuition du cas indéfini, et suggérer des questions ouvertes.

Chapitre 3. Il traite de façon détaillée la notion de géométrie modèle de Thurston, le contenu de ce chapitre est essentiel pour aboutir à notre résultat principal sur le groupe d'isométrie d'un groupe de Lie tridimensionnel Lorentzien. William Thurston a commencé le chapitre "the eight model geometries" dans son livre [58] mentionné ci-dessus par une question : Qu'est ce que la géométrie ? À cette fin, le présent chapitre vise à examiner la réponse qu'en donne Thurston, en expliquant pourquoi il n'y a que huit cas possibles en trois dimensions.

Chapitre 4. Il est spécifiquement consacré à la classification des métriques Lorentziennes. La première section décrit la démarche à suivre pour obtenir la liste des classes non isométriques des métriques. Dans la deuxième section, nous précisons les modèles de groupes de Lie unimodulaires tridimensionnels  $G$ . Dans la troisième section, nous effectuons pour chaque groupe de Lie  $G$  les étapes mentionnées dans la première section et nous fournissons dans la quatrième section pour chaque classe de métriques trouvées la signature de la courbure de Ricci. Enfin, le chapitre se termine par une comparaison avec

des travaux connexes et une discussion sur la courbure constante, Einstein, localement symétrique, semi-symétrique non localement symétrique et soliton de Ricci généralisée.

Chapitre 5. Le groupe d'isométrie d'un groupe de Lie  $(G, g)$  Lorentzien unimodulaire de dimension 3 est déterminé. Dans la première et deuxième section, nous présentons notre théorème principal et nous mettons en place les notations et rappelons quelques faits de base sur l'endomorphisme symétrique associé à  $(G, g)$ , nous rappelons également quelques résultats bien connus sur le groupe d'isométrie de  $(G, g)$ . Dans la troisième section, nous partons des quatre types d'endomorphisme symétrique, cela nous permet de déterminer explicitement le groupe des automorphismes isométriques  $\text{Aut}(G, g)$ . Enfin, dans la dernière section, afin de prouver le résultat principal nous proposons un algorithme pour résoudre au niveau de l'algèbre de Lie le problème consistant à trouver une description complète de la différentielle de chaque isométrie à l'élément neutre  $e$ . Bien que cette détermination ne soit qu'au niveau de l'algèbre de Lie, nous avons une assez bonne image de toutes les possibilités de groupe d'isotropie de  $\text{Isom}(G, g)$ .

Première partie

Géométrie Lorentzienne et  
Théorème de Thurston

# Espace vectoriel Lorentzien

Dans ce chapitre nous donnons les résultats les plus importants sur l'espace vectoriel Lorentzien, qui nous sont nécessaires pour mener une étude qui concerne essentiellement la caractérisation d'un endomorphisme auto adjoint relativement à un produit scalaire Lorentzien. Tout au long de ce chapitre, nous admettons des résultats de base d'algèbre linéaire.  $V$  désignera un espace vectoriel réel de dimension finie.

## 1.1 FORMES BILINÉAIRES SYMÉTRIQUES ET PRODUITS SCALAIRES

Dans la section actuelle, on présente les propriétés algébriques élémentaires sur les formes bilinéaires symétriques (tenseurs symétriques 2-covariants). Comme références principales, on peut choisir [[2], Chapitre 2] et [[45], Section 2.3]

### 1.1.1 Formes bilinéaires symétriques et produits scalaires

**Définition 1.1** (Forme bilinéaire symétrique). Soit  $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  une forme bilinéaire symétrique. Alors  $b$  est

- *définie positive* si  $b(v, v) > 0, \forall v \in V \setminus \{0\}$
- *semi-définie positive* si  $b(v, v) \geq 0, \forall v \in V \setminus \{0\}$
- *indéfinie* si elle est ni semi-définie positive ni semi-définie négative
- *non-dégénérée* si la condition  $b(v, w) = 0, \forall w \in V$  implique que  $v = 0$ .  
Sinon  $b$  est *dégénérée*, et  
 $N = \{v \in V : b(v, w) = 0; \forall w \in V\}$  est appelé *le radical* de  $b$ .

Soit  $q_b : V \rightarrow \mathbb{R}$  la forme quadratique associée à  $b$  définie par  $q_b(x) = b(x, x)$ . Il est aisé de voir que  $b$  peut être reconstruite de  $q_b$  en utilisant

$$b(u, v) = \frac{1}{2}(q_b(u + v) - q_b(u) - q_b(v))$$

En plus, étant donné  $v \in V$ ,  $q_b(v) = b(v, v)$ , on dit que  $v$  est

- *de type temps* (ou *temporel*) si  $q_b(v) < 0$ ,
- *de type lumière* (ou *isotrope*) si  $q_b(v) = 0$  et  $v \neq 0$ ,
- *de type espace* (ou *spatial*) si  $q_b(v) > 0$ ,
- *causal* si  $v$  est temporel ou de type lumière.

Nous définissons également  $|x| = \sqrt{|q_b(x)|}$ .

*Notation 1.2.* Il n'y a pas de critère universellement accepté pour le caractère du vecteur nul. Parfois, il est considéré comme de type lumière et d'autres fois comme spatial. Nous allons utiliser

- (i) vecteurs isotropes pour faire référence à des vecteurs de type lumière avec le vecteur zéro.
- (ii) vecteurs non spatiaux pour désigner des vecteurs causaux avec le vecteur zéro.
- (iii) et les vecteurs non causaux pour désigner des vecteurs spatiaux avec le vecteur zéro.

En généralisant la terminologie Euclidienne, nous donnons les définitions suivantes.

**Définition 1.3.** Un produit scalaire  $g$  sur  $V$  est une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée.

**Définition 1.4.** Soit  $(V, g)$  un espace vectoriel doté d'un produit scalaire  $g$ . Soit  $f$  un endomorphisme de  $(V, g)$ , on dit que  $f$  est une isométrie (resp. auto-adjoint) si  $g(u, v) = g(f(u), f(v))$  (resp.  $g(u, f(v)) = g(f(u), v)$ ) pour tout  $u, v \in V$ .

**Définition 1.5.** Si  $v, w \in V$ , on dit que  $v$  est orthogonal à  $w$ ,  $v \perp w$ , si  $g(v, w) = 0$ . Par conséquent, pour  $A, B \subset V$  on dit que  $A$  est orthogonal à  $B$ ,  $A \perp B$ , si  $v \perp w$  pour tout  $v \in A$  et pour tous  $w \in B$ . On notera

$$A^\perp = \{w \in V : g(v, w) = 0, \forall v \in A\}.$$

En outre, une base  $e_1, e_2, \dots, e_n$  de  $V$  est dite orthonormée si ses vecteurs sont unitaires, tels que  $|e_i| = \sqrt{|g(e_i, e_i)|} = 1, i = 1, \dots, n$  et orthogonaux entre eux i.e.  $g(e_i, e_j) = 0, \forall i \neq j$ .

**Lemme 1.6.** Étant donné une base  $B$  orthonormée de  $(V, g)$ , le nombre  $\nu$  des vecteurs temporels dans la base  $B$  ne dépend pas de la base choisie, mais dépend uniquement de  $(V, g)$ .

*Preuve.* Supposons par absurde qu'il existe une autre base orthonormée  $B'$  de  $(V, g)$  de sorte que  $\nu \neq \nu'$ . Sans perte de généralité, on suppose que  $\nu > \nu'$ . Alors, l'intersection de sous-espace  $U$  généré par le  $n - \nu'$  des vecteurs spatiaux dans  $B'$  et le sous-espace  $W$  engendré par les  $\nu$  des vecteurs temporels dans  $B$  aurait une dimension supérieure strictement à 0, c'est-à-dire qu'il existerait un vecteur  $u \in V$  tel que  $b(u, u) > 0$  et  $b(u, u) < 0$ . Contradiction  $\square$

**Définition 1.7.** Soit  $(V, g)$  un espace vectoriel doté d'un produit scalaire  $g$ . Un sous-espace vectoriel  $W < V$  est dit non-dégénéré dans  $(V, g)$  si  $W \cap W^\perp = \{0\}$  (ou de manière équivalente, si la restriction  $g_W = g|_{W \times W}$  est non-dégénérée)

**Proposition 1.8.** Si  $W < V$ , alors

- (i)  $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$

- (ii)  $(W^\perp)^\perp = W$   
 (iii)  $W + W^\perp = V \Leftrightarrow W$  est non-dégénéré  $\Leftrightarrow W^\perp$  est non-dégénéré.

*Preuve.* (i) Soit  $e_1, \dots, e_\rho, e_{\rho+1}, \dots, e_n$  une base de  $V$  telle que  $e_1, \dots, e_\rho$  est une base de  $W$ . Si  $v = \sum_{i=1}^n a^i e_i$ , alors

$$v \in W^\perp \Leftrightarrow g(v, e_i) = 0, \forall i \in \{1, \dots, \rho\} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n g_{ij} a^j = 0, \forall i \in \{1, \dots, \rho\},$$

où  $g_{ij} = g(e_i, e_j)$ . Comme  $g$  est non-dégénéré, le sous-espace vectoriel  $W^\perp$  est donné par l'ensemble des solutions d'un système linéaire composé de  $\rho$  équations indépendantes à  $n$  variables, et par conséquent  $\dim W^\perp = n - \rho$ .

- (ii) L'inclusion  $W \subset (W^\perp)^\perp$  est triviale. Par [item \(i\)](#),  $\dim(W^\perp)^\perp = \dim W$  d'où l'égalité.  
 (iii) Immédiate d'après [item \(i\)](#) et [item \(ii\)](#). □

En conséquence du résultat précédent, nous donnerons une preuve d'un théorème connu de Sylvester. Le long de cette preuve, nous nous concentrerons sur le cas non-dégénéré de sorte que la procédure constructive des bases orthonormées (étendant éventuellement des sous-ensembles orthonormés) sera apparente

**Théorème 1.9.** Soit  $(V, g)$  un espace vectoriel doté d'un produit scalaire. Alors  $(V, g)$  admet une base orthonormée.

*Preuve.* Prouvons-le par récurrence. Supposons d'abord que  $\dim V = 1$ . Comme  $g$  est non-dégénéré, il existe  $v \in V$  tel que  $g(v, v) \neq 0$ . Donc  $u = \frac{v}{|v|}$  est une base orthonormée. Supposons maintenant que  $n = \dim V$  et que le résultat est vrai pour tout  $k < n$ . Comme  $g$  est non-dégénéré, il existe  $v \in V$  tel que  $g(v, v) \neq 0$ , et d'après [item \(i\)](#) et [item \(iii\)](#) de [Proposition 1.8](#),  $(\text{span}(v))^\perp$  a une dimension  $n - 1$  et non-dégénéré. Alors, par hypothèse de récurrence, on en déduit l'existence d'une base orthonormée  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$  de  $(\text{span}(v))^\perp$ . Enfin  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, \frac{v}{|v|}$  est une base orthonormée pour  $V$ . □

**Corollaire 1.10.** Toute base orthonormée d'un sous-espace non-dégénéré  $U$  de  $V$  peut être étendue à une base orthonormée de  $(V, g)$ .

*Preuve.* Comme  $U^\perp$  est non-dégénéré, on peut compléter la base orthonormée de  $U$  avec une base orthonormée de  $U^\perp$ . □

**Définition 1.11.** Le nombre de vecteurs temporels dans une base orthonormée, qui ne dépend que de  $(V, g)$  (voir [Lemme 1.6](#)), est appelé l'indice de  $(V, g)$ .



*Notation 1.12.* Toutes les bases orthonormées  $e_1, \dots, e_n$  sont supposées être ordonnées, de telle manière que si  $\epsilon_i = g(e_i, e_i)$  pour  $i = 1, \dots, n$ , tous ont la même valeur de  $(\epsilon_1; \dots; \epsilon_n)$ , qui est appelée la signature de  $g$ . Nous supposons que la signature est de la forme  $(+, \dots, +, -, \dots, -)$ .

**Définition 1.13.** Un produit scalaire  $g$  est

- Euclidien si  $\nu = 0$ .
- Lorentzien si  $\nu = 1$  et  $n \geq 2$ .

On dit que  $g$  est un produit scalaire indéfini si  $\nu \neq 0$  et  $\nu \neq n$ .

**Exemple 1.14.** Sur  $\mathbb{R}^n$  on définit le produit scalaire usuel  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\nu$  d'indice  $\nu$ , comme suit

$$\langle (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \rangle_\nu = \sum_{i=1}^{n-\nu} a_i b_i - \sum_{i=n-\nu+1}^n a_i b_i.$$

**Théorème 1.15** (Loi d'inertie de Sylvester). *Si  $b$  est une forme bilinéaire symétrique, alors il existe une base de Sylvester, i. e., une base orthogonale telle que tous ses vecteurs sont unitaires ou de type lumière. Le nombre de vecteurs spatiaux, temporels et de type lumière dans la base ne dépend pas de la base choisie et ils sont appelés respectivement co-indice, indice et nullité de  $b$ . On notera l'indice par  $\nu$  et la nullité par  $\mu$ .*

*Preuve.* Remarquons que à partir de  $b$  nous pouvons définir une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée  $\bar{b}$  sur le quotient  $V/N$  où  $N$  est le radical de  $b$ , telle que  $\bar{b}([u], [v]) = b(u, v)$ ,  $\forall u, v \in V$  où  $[u]$  et  $[v]$  désignent respectivement les classes de  $u$  et  $v$  dans  $V/N$ . Maintenant appliquons [Théorème 1.9](#) sur  $\bar{b}$  pour obtenir une base orthonormée  $[e_1], [e_2], \dots, [e_\rho]$  de  $V/N$  et par suite on choisit une base  $e_{\rho+1}, e_{\rho+2}, \dots, e_{\rho+\mu}$  de  $N$ . Alors  $e_1, \dots, e_\rho, e_{\rho+1}, \dots, e_{\rho+\mu}$  est la base requise de  $V$ . L'indépendance de l'indice, du co-indice et de la nullité d'une telle base découle du [Lemme 1.6](#) et du fait que l'ensemble des vecteurs de type lumière dans la base engendrent toujours le radical  $N$ .  $\square$

*Remarque 1.16.* D'après le théorème de Sylvester, nous pouvons conclure que

1. Le sous-espace généré par les  $n - \rho$  vecteurs de type lumière de toute base de Sylvester coïncide avec le radical de  $b$  et, par conséquent, il ne dépend pas de la base choisie. Cependant, les sous-espaces engendrés respectivement par les vecteurs temporels et spatiaux dans la base Sylvester dépendent de la base.
2. Si l'on considère un sous-espace  $W < V$ , la restriction  $b_w := b|_{W \times W}$  de  $b$  est une nouvelle forme bilinéaire sur  $W$  qui peut être dégénérée même si  $b$  est non-dégénéré. Il est facile de voir qu'une base orthogonale de  $W$  avec tous ses vecteurs unitaires ou de type lumière peut être étendue à une base de  $V$  avec les mêmes propriétés si et seulement si le radical de  $b_w$  est inclus dans le radical de  $b$ .

3. Soient  $V$  et  $V'$  deux espaces vectoriels et  $b$  et  $b'$  deux formes bilinéaires symétriques sur  $V$  et  $V'$  respectivement. Alors, il existera un isomorphisme  $f : V \rightarrow V'$  qui préserve  $b$  et  $b'$  i.e.  $b(x, y) = b'(f(x), f(y))$  pour tous  $x, y \in V$  si et seulement si  $n = n', v = v'$  et  $\mu = \mu'$ .

*Notation 1.17.* Si  $f : V \rightarrow V'$  est une application linéaire et  $B$  et  $B'$  sont deux bases (ordonnées) de  $V$  et  $V'$  respectivement, étant  $B$  donné par  $v_1, \dots, v_n$ , alors  $M(f, B' \leftarrow B)$  désignera la matrice dont les colonnes sont constituées par les coordonnées de  $f(v_1), \dots, f(v_n)$  dans  $B'$ .

*Remarque 1.18.* En utilisant le théorème de Sylvester et les calculs de base de l'algèbre linéaire, nous concluons ce qui suit :

1. Soient  $B$  et  $B'$  deux bases, et  $P = M(I_V, B \leftarrow B')$ , alors :

$$M_{B'}(b) = P^t M_B(b) P, \text{ et } \det(M_{B'}(b)) = (\det P)^2 \det(M_B(b)).$$

En particulier, le rang de la matrice  $M_B(b)$  est indépendant de  $B$  et égal à celui de  $b$ . En outre, la forme bilinéaire symétrique  $b$  est un scalaire produit si et seulement si  $\det(M_B(b)) \neq 0$  (pour une base  $B$  et, donc, pour toute base), et pour chaque produit scalaire  $g$ , nous avons que

$$(-1)^v \det(M_B(g)) > 0.$$

2. Si  $g$  est un produit scalaire et  $e_1, \dots, e_{n-v}, e_{n-v+1}, \dots, e_n$  une base orthonormée quelconque, alors

$$v = \sum_{i=1}^n \epsilon_i g(e_i, v) e_i, \text{ avec } \epsilon_i = g(e_i, e_i).$$

(la preuve est triviale en tenant compte du fait que  $v - \sum_{i=1}^n \epsilon_i g(e_i, v) e_i$  est orthogonal à tout vecteur de la base et, par conséquent, appartient au radical de  $g$ ).

### 1.1.2 Bornes d'une forme bilinéaire symétrique par un produit scalaire

Soit  $g$  un produit scalaire Euclidien. On sait que pour toute forme bilinéaire symétrique  $b$ , il existe une base orthonormée  $e_1, \dots, e_n$  de  $g$  telle que  $b(e_i, e_j) = \lambda_i \delta_{ij}$ . Ainsi, si  $\lambda_i \geq 1$  pour tout  $i$ , nécessairement  $b(v, v) \geq g(v, v)$  pour tout  $v \in V$ . La situation change radicalement si le produit scalaire  $g$  est indéfini. Nous aurons besoin de la technique simple suivante :

**Lemme 1.19.** *Soit  $g$  un produit scalaire admettant un vecteur de type lumière  $v$ . Alors, il existe deux suites  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  et  $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$  convergentes de limite  $v$  telles que  $u_i$  est temporel, et  $w_i$  est spatial pour tout  $i \in \mathbb{N}$ .*

*Preuve.* Soit  $u$  un vecteur temporel tel que  $g(u, v) \leq 0$ , et  $w$  un vecteur spatial tel que  $g(v, w) \geq 0$  (évidemment, de tels vecteurs peuvent être obtenus en

changeant  $u$  et  $w$  par  $-u$ , et  $-w$  si nécessaire). Les suites requises sont  $u_k = v + \frac{1}{k}u$ ,  $w_k = v + \frac{1}{k}w$ .  $\square$

Le résultat suivant peut être vu comme un point clé pour comprendre les différences de sens des bornes pour différents éléments de courbure Riemannienne et Lorentzienne comme le tenseur de Ricci ou la courbure sectionnelle, qui seront étudiés dans le chapitre suivant. La plupart de notre démonstration découle de celle du [[2], Lemme 2.1].

**Théorème 1.20** (Dajczer-Nomizu [19], Kulkarni [33]). *Soit  $(V, g)$  un espace vectoriel doté d'un produit scalaire indéfini  $g$ ,  $n = \dim V$ ,  $\nu =$  l'indice de  $g$ , et  $b$ , une forme bilinéaire symétrique. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $b = cg$ , pour tout  $c \in \mathbb{R}$ ,
- (ii)  $q_b = 0$  sur l'ensemble des vecteurs de type lumière de  $g$ ,
- (iii)  $\exists a > 0 : \left| \frac{q_b}{q_g} \right| \leq a$  sur l'ensemble des vecteurs temporels de  $g$ ,
- (iv)  $\exists a' > 0 : \left| \frac{q_b}{q_g} \right| \leq a'$  sur l'ensemble des vecteurs spatiaux de  $g$ ,
- (v)  $\exists a \in \mathbb{R} : \frac{q_b}{q_g} \leq a$  sur l'ensemble des vecteurs non isotropes de  $g$ ,
- (vi)  $\exists a' \in \mathbb{R} : \frac{q_b}{q_g} \geq a'$  sur l'ensemble des vecteurs non isotropes de  $g$ .

*Preuve.* (i)  $\Rightarrow$  (les autres). Trivial.

(ii)  $\Rightarrow$  (i). On distingue quatre cas :

**cas I :**  $n = 2, \nu = 1$ . Soit  $B$  une base orthonormée  $e_1, e_2$  de  $g$ , alors  $v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_1 + e_2)$  et  $v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_1 - e_2)$  sont deux vecteurs de type lumière. Soit  $\tilde{B}$  la base  $v_1, v_2$  et  $c = b(v_1, v_2)$ . Alors

$$M_{\tilde{B}}(b) = c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = c M_{\tilde{B}}(g), \quad (1.1)$$

ce qui implique clairement que  $b = cg$ .

**cas II :**  $n > 2, \nu = 1$ . Soit  $B$  une base orthonormée  $e_1, \dots, e_n$  pour  $g$  avec  $g(e_n, e_n) = -1$ , et  $b_{ij} = b(e_i, e_j)$ . En appliquant le cas I à chaque plan  $\text{span}_{\mathbb{R}}(e_i, e_n), \forall i = 1, \dots, n-1$ , on obtient que  $b_{in} = 0, b_{ii} = -b_{nn}, \forall i = 1, \dots, n-1$ . Ainsi nous avons :

$$M_B(b) = \left( \begin{array}{ccc|c} c & & ? & \\ & \ddots & & 0 \\ ? & & c & \\ \hline 0 & & & -c \end{array} \right), \quad (1.2)$$

avec  $c = -b_{nn}$ . Si nous définissons le vecteur de type lumière  $v(\theta) = \cos(\theta)e_i + \sin(\theta)e_j + e_n$  pour  $i \neq j \neq n$  et  $\theta \neq \frac{k\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} 0 = b(v(\theta), v(\theta)) &= \cos^2(\theta)b_{ii} + \sin^2(\theta)b_{jj} + 2\sin(\theta)\cos(\theta)b_{ij} + b_{nn} \\ &= \sin(2\theta)b_{ij}. \end{aligned}$$

Donc  $b_{ij} = 0$  pour tout  $i \neq j \neq n$ , et d'où

$$M_B(b) = \left( \begin{array}{cc|c} c & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & c & 0 \\ \hline 0 & & -c \end{array} \right), \quad (1.3)$$

ce qui entraîne que  $b = cg$ .

**cas III** :  $n > 2$ ,  $\nu = n - 1$ . Ce cas est résolu comme le précédent en considérant le produit scalaire  $-g$  plutôt que  $g$ .

**cas IV** :  $n > 2$ ,  $1 < \nu < n - 1$ . Soit  $B$  une base orthonormée  $e_1, \dots, e_{n-\nu}, e_{n-\nu+1}, \dots, e_n$  de  $g$ , et  $b_{ij} = b(e_i, e_j)$ . Raisonnons comme dans le cas II en restreignant au sous-espace vectoriel Lorentzienne  $\text{span}_{\mathbb{R}}(e_1, \dots, e_{n-\nu}, e_k)$  pour tout  $k \in \{n - \nu + 1, \dots, n\}$ , nous obtenons donc

$$M_B(b) = \left( \begin{array}{c|cc} cI_{n-\nu} & & 0 \\ \hline & -c & ? \\ 0 & & \ddots \\ & ? & & -c \end{array} \right), \quad (1.4)$$

La preuve est conclue en raisonnant comme dans le cas III et en nous limitant au sous-espace Lorentzien  $\text{span}_{\mathbb{R}}(e_k, e_{n-\nu+1}, \dots, e_n)$  pour tout  $k \in \{1, \dots, n - \nu\}$ , nous obtenons

$$M_B(b) = \left( \begin{array}{c|c} cI_{\nu} & 0 \\ \hline 0 & -cI_{n-\nu} \end{array} \right), \quad (1.5)$$

ce qui entraîne que  $b = cg$ .

Pour le reste de la preuve, nous devons utiliser [Lemme 1.19](#).

(iii)  $\Rightarrow$  (ii). Soit  $u$  un vecteur de type lumière et  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite des vecteurs temporels convergente vers  $u$ ; d'après notre hypothèse [item \(iii\)](#) il s'ensuit que

$$0 \leq |q_b(u_k)| \leq a |q_g(u_k)|, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

En faisant la limite, nous obtenons

$$0 \leq |q_b(u)| \leq a |q_g(u)| (= 0).$$

Ainsi,  $q_b(u) = 0$  pour tout vecteur de type lumière  $u$ .

(iv)  $\Rightarrow$  (ii). Il est prouvé de manière analogue à (iii)  $\Rightarrow$  (ii), en utilisant [Lemme 1.19](#).

(v)  $\Rightarrow$  (ii). Soit  $u$  un vecteur de type lumière,  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  les deux suites de vecteurs temporels et de vecteurs spatiaux, respectivement, convergentes de limite  $u$ . Par hypothèse

$$q_b(u_k) \geq a q_g(u_k), \quad q_b(v_k) \leq a q_g(v_k), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

En faisant la limite, nous obtenons

$$q_b(u) \geq a q_g(u) = 0, \quad q_b(u) \leq a q_g(u) = 0.$$

Par conséquent,  $q_b(u) = 0$ , pour tout vecteur de type lumière  $u$ .

(vi)  $\Rightarrow$  (ii). Il est prouvé de manière analogue à (v)  $\Rightarrow$  (ii) □

Comme conséquence immédiate de ce théorème, nous obtenons la caractérisation suivante des produits scalaires homothétiques.

**Corollaire 1.21.** *Soient  $g, g'$  deux produits scalaires indéfinis sur  $V$  ayant le même indice  $\nu \neq \frac{n}{2}$ . Alors*

$$\exists c > 0 : g' = c g \Leftrightarrow g \text{ et } g' \text{ ont les mêmes vecteurs de type lumière.}$$

La condition  $\nu \neq \frac{n}{2}$  est imposée juste pour s'assurer que la constante  $c$  est positive.

### 1.1.3 Montée et descente d'indices

#### 1.1.3.1 Espace dual.

Rappelons que, étant donné un espace vectoriel de dimension finie  $V$ , son *espace dual* est défini comme étant l'espace vectoriel  $V^*$  constitué des formes linéaires sur  $V$ , c'est-à-dire des applications linéaires  $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}$ . Forcément, les dimensions de  $V$  et  $V^*$  coïncident; en fait, si nous fixons une base  $B$  donnée par les vecteurs  $v_1, \dots, v_n$  de  $V$ , la base duale  $B^*$  est définie par  $\phi^1, \dots, \phi^n$  où  $\phi^i, i = 1, \dots, n$  est déterminé par  $\phi^i(v_j) = \delta_j^i$  avec  $\delta_j^i$  est le delta de Kronecker. En conséquence, nous avons

$$v = \sum_{i=1}^n \phi^i(v) v_i, \quad \forall v \in V, \quad \phi = \sum_{j=1}^n \phi(v_j) \phi^j, \quad \forall \phi \in V^*.$$

Soient  $V, W$  deux espaces vectoriels de dimension finie. Il est bien connu que si  $f : V \rightarrow W$  est une application linéaire, l'application transposée de  $f$  définie par  $f^t : W^* \rightarrow V^*, f^t(\phi) = \phi \circ f$ , est linéaire.

Étant donné deux bases  $B$  et  $B'$  de  $V$  et  $W$ , respectivement. Nous avons que

$M(f^t, B^* \leftarrow B'^*) = M(f, B' \leftarrow B)$ . De plus, il existe un isomorphisme canonique  $\Phi$  entre  $V$  et son espace bidual  $V^{**} = (V^*)^*$  défini par

$$\Phi : V \rightarrow V^{**}, v \mapsto \Phi_v, \text{ où } \Phi_v(\phi) = \phi(v), \forall \phi \in V^*.$$

Dans toute base  $B$  et la base bidual associée  $B^{**} = (B^*)^*$ , nous avons que  $M(\Phi, B^{**} \leftarrow B)$  est la matrice d'identité  $I_n$ .

### 1.1.3.2 Les deux isomorphismes $\flat$ et $\sharp$ .

**Définition 1.22.** Soit  $g$  un produit scalaire de  $V$ , l'isomorphisme  $\flat : V \rightarrow V^*$ , est défini comme suit :

$$\flat : \begin{cases} V & \rightarrow & V^* \\ v & \mapsto & v^\flat \end{cases} \begin{cases} V & \rightarrow & \mathbb{R} \\ w & \mapsto & g(v, w). \end{cases} \quad (\forall v, w \in V)$$

L'isomorphisme inverse de  $\flat$  noté  $\sharp$  est l'isomorphisme

$$\sharp : \begin{cases} V^* & \rightarrow & V \\ \phi & \mapsto & \phi^\sharp \end{cases} \begin{cases} V^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \phi & \mapsto & g(\phi^\sharp, w) = \phi(w). \end{cases} \quad (\forall w \in V, \phi \in V^*)$$

Il est aisé de montrer qu'en fait les deux applications linéaires  $\flat$  et  $\sharp$  sont isomorphismes.

En effet; soit  $B$  une base  $v_1, \dots, v_n$  de  $V$  et soit  $B^*$  sa base duale correspondante  $\phi^1, \dots, \phi_n$ . Notons

$$g_{ij} = g(v_i, v_j), \quad g^{ij} = (M_B(g)^{-1})_{ij}.$$

Si  $v = \sum_{i=1}^n a^i v_i$ , alors

$$v^\flat = \sum_{j=1}^n a_j \phi^j \quad \text{où} \quad a_j = \sum_{i=1}^n g_{ij} a^i;$$

cette façon de regarder l'isomorphisme  $\flat$  est appelée *abaissement d'indice*. De plus, nous appelons *élévation d'indice* le processus analogue pour l'isomorphisme  $\sharp$  : Si  $\phi = \sum_{j=1}^n b_j \phi^j$ , alors

$$\phi^\sharp = \sum_{j=1}^n b^j v_j \quad \text{où} \quad b^j = \sum_{i=1}^n g^{ij} b_i.$$

*Remarque 1.23.* Soit  $e_1, \dots, e_{n-\nu}, e_{n-\nu+1}, \dots, e_n$  une base orthonormée de  $V$ ; alors

$$g_{ij} = \delta_{ij} \epsilon_i, \quad \text{avec} \quad \epsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leq n - \nu \\ -1 & \text{si } i \geq n - \nu + 1 \end{cases}$$

Alors  $a^i = \epsilon_i a_i$ . Donc, si  $g$  est Euclidien,  $a^i = a_i$ , et si  $g$  est Lorentzien,  $a^i = a_i$ , pour  $i \leq n - 1$  et  $a^n = -a_n$ .

1.1.3.3 *Extension à d'autres types de tenseurs.*

Les deux applications  $\flat$  et  $\sharp$  ci-dessus permettent d'établir des isomorphismes entre l'espace des tenseurs  $(r, s)$  ( $r$  contravariant,  $s$  covariant), et  $(r', s')$  sur  $V$ , lorsque  $r + s = r' + s'$ . Par exemple, considérons un tenseur à 2-covariants.

$$T : V \times V \rightarrow \mathbb{R}.$$

On peut donc construire le tenseur 2-contravariant :

$$\tilde{T} : V^* \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$$

de sorte que  $\tilde{T}(v^\flat, w^\flat) = T(v, w)$ ,  $\forall v, w \in V$ . En coordonnées, on dit que  $\tilde{T}$  est obtenu en élevant les indices de  $T$ . Explicitement, si

$$T = \sum_{i,j=1}^n t_{ij} \phi_i \otimes \phi_j, \quad \tilde{T} = \sum_{k,l=1}^n t_{kl} v_k \otimes v_l,$$

alors

$$t^{kl} = \sum_{i,j=1}^n t_{ij} g^{ik} g^{jl}$$

1.1.3.4 *Contraction métrique.*

Rappelons que, étant donné un tenseur  $(r, s)$  avec  $r, s \geq 1$ , on peut définir un nouveau tenseur en contractant un indice contravariant avec un second indice covariant. Ainsi, par exemple, si  $T$  est un tenseur  $(1, 1)$ , sa contraction (dans les seuls indices possibles) est juste  $\sum_{i=1}^n t_i^i = \sum_{i=1}^n T(\phi^i, v_i)$ , où  $v_1, \dots, v_n$  est une base quelconque de  $V$  et  $\phi^1, \dots, \phi^n$ , sa base duale associée.

La contraction sur une paire d'indices qui sont à la fois contravariants ou tous les deux covariants n'est pas possible en général. Cependant, en présence d'un produit scalaire (également appelé métrique)  $g$ , de telles contractions sont possibles. On utilise la métrique pour monter ou descendre l'un des indices puis on utilise l'opération habituelle de contraction. L'opération combinée est connue sous le nom de contraction métrique. Ainsi, par exemple, si  $T$  est un tenseur à 2-covariants, sa contraction métrique est obtenue en montant l'un des deux indices et en se contractant. En coordonnées, on obtient :

$$\sum_{i,j=1}^n g^{ij} T(v_i, v_j).$$

1.1.3.5 *Tenseurs et endomorphismes.*

Rappelons qu'il existe un isomorphisme naturel (indépendant de  $g$ ) entre l'espace des tenseurs  $(1, 1)$  et celui des endomorphismes sur  $V$ . Pour être précis, on peut attribuer à chaque endomorphisme  $f$  le tenseur  $T_f$  défini comme étant

$$T_f(\phi, v) = \phi(f(v)), \quad \forall v \in V, \phi \in V^*.$$

*Remarque 1.24.* Fixons un produit scalaire  $g$  sur  $V$ , nous pouvons assigner un endomorphisme  $f_T$  à chaque tenseur 2-covariant  $T$  : en montant le premier indice, et considérer ensuite l'endomorphisme associé au correspondant tenseur  $(1, 1)$ . Explicitement,  $f$  est caractérisé par la relation

$$g(u, f_T(v)) = T(u, v), \quad u, v \in V.$$

Il est intéressant de remarquer que, dans le cas où  $T$  est un tenseur 2-covariant symétrique, l'endomorphisme  $f_T$  est auto-adjoint par rapport à  $g$ .

## 1.2 ESPACE VECTORIEL LORENTZIEN

1.2.1 *Cône de type temps.*

Dans ce paragraphe, nous allons désigner par  $(V, g)$  un espace vectoriel doté d'un produit scalaire d'indice  $\nu = 1$ , qu'on l'appellera un espace vectoriel Lorentzien de dimension  $n \geq 2$ .

1.2.1.1 *Existence.*

**Proposition 1.25.** *L'ensemble des vecteurs temporels (resp. causaux, de type lumière) a deux parties connexes. Chacune de ces parties est nommée cône temporel (resp. cône causal; cône de lumière).*

*Preuve.* Soit  $e_1, \dots, e_n$  une base orthonormée de  $V$ , et  $v \in V$  tel que  $v = \sum_{i=1}^n a^i e_i$ . Évidemment,

$$\begin{aligned} v \text{ est de type lumière} &\Leftrightarrow \begin{cases} |a^n| = \sqrt{(a^1)^2 + \dots + (a^{n-1})^2} \\ a^n \neq 0, \end{cases} \\ v \text{ est temporel} &\Leftrightarrow |a^n| > \sqrt{(a^1)^2 + \dots + (a^{n-1})^2}, \\ v \text{ est causal} &\Leftrightarrow \begin{cases} |a^n| \geq \sqrt{(a^1)^2 + \dots + (a^{n-1})^2} \\ a^n \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Et par conséquent l'ensemble des vecteurs temporels (resp. causaux, de type lumière) admet deux parties connexes, une qui correspond à  $a^n > 0$  et l'autre qui correspond à  $a^n < 0$ .  $\square$



**Définition 1.26.** *L'orientation du temps* correspond au choix d'une des deux composantes connexes de l'ensemble des vecteurs temporels. Le cône temporel choisi est alors appelé *cône futur* tandis que l'autre est appelé *cône passé*.

Désormais, les vecteurs dans le cône futur (resp. passé) seront appelés orientés vers le futur (resp. orientés vers le passé).

**Proposition 1.27.** *Deux vecteurs temporels  $v$  et  $w$  se trouvent dans le même cône temporel si et seulement si  $g(v, w) < 0$ .*

*Preuve.* Supposons sans perte de généralité que  $|v| = 1$ , et complétons donc  $v$  en une base orthonormée  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, v$  de  $V$ . Remarquons que

$$w = g(e_1, w)e_1 + g(e_2, w)e_2 + \dots + g(e_{n-1}, w)e_{n-1} - g(v, w)v,$$

il est clair que  $v$  et  $w$  sont dans le même cône temporel si et seulement si  $-g(v, w) > 0$  (voir la preuve de [Proposition 1.25](#))  $\square$

**Proposition 1.28.** *Si  $v, w$  sont deux vecteurs temporels dans le même cône, alors il en est de même de  $av + bw$  pour tout  $a, b > 0$ . En particulier, chaque cône temporel est convexe.*

*Preuve.* [Proposition 1.27](#) implique que  $g(v, w) < 0$ , et alors

$$g(v, av + bw) = ag(v, v) + bg(v, w) < 0; \quad (1.6)$$

$$g(av + bw, av + bw) = a^2g(v, v) + b^2g(w, w) + 2abg(v, w) < 0 \quad (1.7)$$

Alors, de la dernière inégalité, on déduit  $av + bw$  est temporel, et de la première, il s'ensuit que  $av + bw$  appartient au même cône que  $v$ .  $\square$

### 1.2.2 Inégalité inversée

**Théorème 1.29** (Inégalité inverse de Cauchy-Schwarz). *Soient  $v, w \in V$  deux vecteurs temporels, alors*

(i)  $|g(v, w)| \geq |v||w|$ , l'égalité est réalisée ssi  $v$  et  $w$  sont liés.

(ii) Si  $v$  et  $w$  sont dans le même cône, alors  $\exists! \varphi \geq 0$  tel que

$$g(v, w) = -|v||w| \cosh(\varphi).$$

Le nombre  $\varphi$  est appelé l'angle hyperbolique entre  $v$  et  $w$ .

*Preuve.* (i) Soit  $a$  un nombre réel et  $w$  un vecteur tel que  $w = av + \bar{w}$  avec  $\bar{w} \perp v$  (voir [item \(iii\)](#) de [Proposition 1.8](#)). Alors

$$g(w, w) = a^2g(v, v) + g(\bar{w}, \bar{w});$$

et donc  $a^2g(v, v) = g(w, w) - g(\bar{w}, \bar{w})$ . En utilisant la dernière équation et le fait que  $g(\bar{w}, \bar{w}) \geq 0$ , on en déduit que

$$\begin{aligned} g(v, w)^2 &= a^2g(v, v)^2 = g(v, v)(g(w, w) - g(\bar{w}, \bar{w})) \\ &\geq g(v, v)g(w, w) = |v|^2|w|^2. \end{aligned}$$

De plus, l'égalité est atteinte si et seulement si  $g(\bar{w}, \bar{w}) = 0$ , c'est-à-dire si et seulement si  $v, w$  sont liés.

(ii) Si  $v, w$  se trouvent dans le même cône, alors  $\frac{-g(v, w)}{|v||w|} \geq 1$ .

Il existe donc un unique  $\phi \geq 0$  tel que

$$\cosh(\phi) = \frac{-g(v, w)}{|v||w|}.$$

□

**Théorème 1.30** (Inégalité triangulaire inversée). *Si  $v, w \in V$  sont deux vecteurs temporels se trouvant dans le même cône, alors*

$$|v| + |w| \leq |v + w|,$$

en plus l'égalité est réalisée si et seulement si  $v, w$  sont liés.

*Preuve.* Comme  $v, w$  se trouvent dans le même cône,  $v + w$  est temporel et  $g(v, w) < 0$  (voir [Proposition 1.27](#) et [Proposition 1.28](#)). Par suite

$$\begin{aligned} |v + w|^2 &= -g(v + w, v + w) \\ &= |v|^2 + |w|^2 + 2|g(v, w)| \geq |v|^2 + |w|^2 + 2|v||w| = (|v| + |w|)^2 \end{aligned}$$

De plus, l'égalité est atteinte si et seulement si  $|g(v, w)| = |v||w|$ , c'est-à-dire d'après [Théorème 1.29](#), si et seulement si  $v, w$  sont liés. □

### 1.2.3 Cônes de lumière et causaux

Dans ce qui suit, nous considérons certaines propriétés analogues des cônes lumière et causaux.

**Proposition 1.31.** *Si  $u, v \in V$  sont deux vecteurs de type lumière, alors*

$$u, v \text{ est linéairement dépendant} \Leftrightarrow g(u, v) = 0.$$

*Preuve.* ( $\Rightarrow$ ) Trivial.

( $\Leftarrow$ ) Soit  $B$  une base  $e_1, \dots, e_n$  de  $V$  et considérons  $u = \sum_{i=1}^n a^i e_i$  et  $v = \sum_{i=1}^n b^i e_i$

avec  $a^n$  et  $b^n$  sont nécessairement non nuls. Sans de perte de généralité et à une constante multiplicative non nulle près, supposons que

$$u = \sum_{i=1}^{n-1} a^i e_i + e_n, \quad v = \sum_{i=1}^{n-1} b^i e_i + e_n \tag{1.8}$$

Par conséquent, comme  $g(u, v) = g(u, u) = g(v, v) = 0$ , donc

$$1 = a^1 b^1 + \dots + a^{n-1} b^{n-1} = (a^1)^2 + \dots + (a^{n-1})^2 = (b^1)^2 + \dots + (b^{n-1})^2.$$

Notons  $m = \sum_{i=1}^{n-1} a^i e_i$  et  $n = \sum_{i=1}^{n-1} b^i e_i$  et soit  $h$  la restriction de  $g$  sur l'espace Euclidien engendré par  $e_1, \dots, e_{n-1}$ , ainsi  $h(m, n)^2 = h(m, m)h(n, n)$ . L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique alors qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  (en fait  $\lambda > 0$  puisque  $h(m, n) = 1$ ) tel que  $m = \lambda n$ . Or  $|m| = |n|$ , alors  $\lambda = 1$  d'où l'égalité attendue.  $\square$

*Remarque 1.32.*

- (i) Si  $u, v \in V$  sont deux vecteurs causaux indépendants, alors :  
 $u, v$  sont dans le même cône causal  $\Leftrightarrow g(u, v) < 0$ .
- (ii) Le cône causal est convexe.

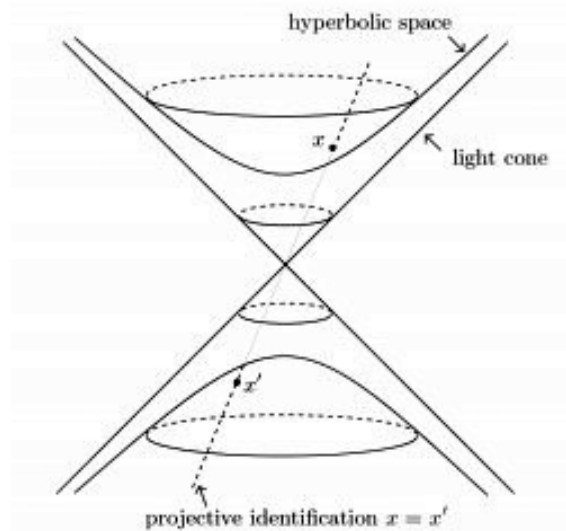


FIGURE 1.1 – Cône de lumière et espace hyperbolique

1.2.3.1 *Sous-espaces.*

Le caractère causal d'un vecteur ou d'un sous-espace est la propriété d'être de type espace, type lumière ou type temps.

**Définition 1.33.** Soit  $(V, g)$  un espace vectoriel Lorentzien. on dit qu'un sous-espace de  $V$ ,  $W < V$  est

- de type espace, si  $g|_W$  est Euclidien.
- de type temps, si  $g|_W$  est non-dégénéré d'indice  $\nu = 1$  (i.e.  $W$  est sous espace vectoriel Lorentzien avec  $\dim W \geq 2$ ).
- de type lumière, si  $g|_W$  est dégénéré (i.e.  $W \cap W^\perp \neq \{0\}$ ).

**Proposition 1.34.** *Un sous-espace  $W < V$  est de type temps si et seulement si  $W^\perp$  est de type espace.*

*Preuve.* En supposant que  $g|_W$  est non-dégénéré, nous en déduisons que  $g|_{W^\perp}$  est non-dégénéré et réciproquement si  $g|_{W^\perp}$  est non-dégénéré alors  $g|_W$  est non-dégénéré (voir [Proposition 1.8](#)), ceci entraîne que  $W \cap W^\perp = \{0\}$ . Ainsi,  $V = W \oplus W^\perp$  et donc

$$1 = \text{indice}(g|_W) + \text{indice}(g|_{W^\perp}).$$

En conséquence,  $\text{indice}(g|_W) = 1 \Leftrightarrow \text{indice}(g|_{W^\perp}) = 0$ . □

**Proposition 1.35.** *Soit  $W < V$ , avec  $\dim(W) \geq 2$ , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $W$  est de type temps,
- (ii)  $W$  contient 2 vecteurs isotropes linéairement indépendants,
- (iii)  $W$  contient un vecteur temporel.

*Preuve.* (i)  $\Rightarrow$  (ii)

Comme  $W$  est sous-espace vectoriel Lorentzien, il existe une base orthonormée  $e_1, \dots, e_k$  de  $W$  où  $e_1$  est spatial et  $e_k$  est temporel. Alors  $e_1 + e_k$  et  $e_1 - e_k$  sont deux vecteurs isotropes linéairement indépendants.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii)

Soient  $v, w$  deux vecteurs isotropes linéairement indépendants de  $W$ . Ainsi

$$g(v \pm w, v \pm w) = g(v, v) \pm 2g(v, w) + g(w, w) = \pm 2g(v, w).$$

D'après [Proposition 1.31](#), on sait que  $g(v, w)$  est non nul, il en résulte que l'un des 2 vecteurs  $v \pm w$  est temporel.

(iii)  $\Rightarrow$  (i)

Soit  $u$  un vecteur temporel de  $W$ . Supposons par absurde que  $g|_W$  est dégénéré. Alors  $\exists z \in \text{rad}(g|_W)$  tel que  $z \neq 0$  (en particulier  $z$  est isotrope). Comme  $u, z$  sont 2 vecteurs causaux linéairement indépendants, on sait par [item \(i\)](#) du [Remarque 1.32](#) que

$$\begin{cases} \text{si } u \text{ et } z \text{ sont dans le même cône causal} \Rightarrow g(u, z) < 0, \\ \text{si } u \text{ et } z \text{ sont dans 2 cônes causaux différents} \Rightarrow g(u, z) > 0. \end{cases}$$

Les deux résultats précédents contredisent le fait que  $z$  se trouve dans le radical de  $W$ . D'où,  $g|_W$  est à fortiori non-dégénéré. □

*Remarque 1.36.* Si  $W < V$ , alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $W$  est dégénéré.
- (ii)  $W$  contient un vecteur lumière, mais pas temporel.
- (iii) L'intersection de  $W$  avec le sous-ensemble de vecteurs isotropes constitue un sous-espace vectoriel de dimension 1.

### 1.3 LE GROUPE DE LORENTZ

#### 1.3.1 Généralités.

L'espace vectoriel Lorentzien  $\mathbb{L}^n = (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , avec  $n \geq 2$ , sera appelé espace-temps de Lorentz-Minkowski, où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désignera désormais le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  de [Exemple 1.14](#).

Soit  $B_0$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et  $M_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées de taille  $n$  à coefficients réels. On note

$$\eta = M_{B_0}(\langle \cdot, \cdot \rangle) = \left( \begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array} \right), \quad (1.9)$$

**Définition 1.37** (Le groupe des transformations de Lorentz). On définit Le groupe des transformations de Lorentz noté  $Iso(\mathbb{L}^n)$  comme étant le groupe des isométries linéaires de  $\mathbb{L}$  préservant le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

$$Iso(\mathbb{L}^n) = \{f : \mathbb{L}^n \rightarrow \mathbb{L}^n \mid f \text{ est une isométrie linéaire} \}.$$

Et le groupe de Lorentz comme

$$O_1(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t \eta A = \eta \}.$$

Si nous considérons  $\mathbb{L}^n$  comme un espace Lorentzien affine (défini de manière analogue à un espace Euclidien affine, mais doté d'un produit scalaire Lorentzien), le groupe des transformations affines qui préservent le produit scalaire Lorentzien est appelé groupe des transformations de Poincaré, et le groupe matriciel correspondant, le groupe de Poincaré.

En fixant une base orthonormée  $B$  de  $\mathbb{L}$ , on peut construire l'isomorphisme de groupe  $Iso(\mathbb{L}^n) \rightarrow O_1(n)$  qui envoie chaque transformation de Lorentz  $f$  à la matrice  $M(f, B)$ .

En particulier, lorsqu'on fixe la base usuelle  $B_0$ , on a

$$\begin{aligned} \Phi : Iso(\mathbb{L}^n) &\leftrightarrow O_1(n) \\ f &\mapsto A_f = M(f, B_0) \\ \Phi^{-1}(A) &= f_A \leftarrow A. \end{aligned}$$

La situation est analogue au cas Euclidien entre  $Iso(\mathbb{R}^n)$  et  $O(n)$ .

*Remarque 1.38.* Comme  $A^t \eta A = \eta$ , il s'ensuit que  $(\det A)^2 = 1$ , ce qui implique  $\det f_A = \pm 1$ .

En revanche, les automorphismes d'un espace vectoriel à déterminant positif sont en correspondance avec ceux qui conservent l'orientation de la base ; ainsi, si  $f \in \text{Aut}_{\mathbb{R}} V$ , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\det f > 0$ ,
- (ii) il existe une base  $B$  telle que  $f(B)$  a la même orientation que  $B$ , (i. e.  $\det(M(I_V, B \leftarrow f(B))) > 0$ ), et
- (iii) pour toute base  $B$ , l'orientation de  $f(B)$  a la même orientation que  $B$ .

**Définition 1.39.** On dit qu'une transformation de Lorentz,  $f$ , est propre si  $\det f (= \det A_f) = 1$ , et impropre dans le cas contraire.

Le sous-groupe des transformations de Lorentz propres (resp. le sous-ensemble des transformations de Lorentz impropres) sera noté par  $\text{Iso}^+(\mathbb{L}^n)$  (resp.  $\text{Iso}^-(\mathbb{L}^n)$ ), et son sous-groupe associé  $\Phi(\text{Iso}^+(\mathbb{L}^n))$  (resp.  $\Phi(\text{Iso}^-(\mathbb{L}^n))$ ) par  $O_1^+(n)$  (resp.  $O_1^-(n)$ ).

À partir de la base usuelle  $e_1, \dots, e_n$  de  $\mathbb{L}^n$ , on peut fixer l'orientation temporelle standard :

$$\begin{cases} \text{Cône causal futur } C^\uparrow : & \text{celui qui contient } e_n, \\ \text{Cône causal passé } C^\downarrow : & \text{celui qui contient } -e_n. \end{cases}$$

*Remarque 1.40.* Soit  $f$  une transformation de Lorentz,

$$A_f = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Remarquons que

$$-1 = \langle f(e_n), f(e_n) \rangle = a_{1n}^2 + a_{2n}^2 + \dots + a_{(n-1)n}^2 - a_{nn}^2.$$

Et par suite  $|a_{nn}| \geq 1$ . Comme  $\langle e_n, f(e_n) \rangle = -a_{nn}$  et les cônes causaux sont connexes, nous concluons que

$$a_{nn} \geq 1 \Leftrightarrow f(e_n) \in C^\uparrow \Leftrightarrow f(C^\uparrow) = C^\uparrow \Leftrightarrow f(C^\downarrow) = C^\downarrow,$$

et

$$a_{nn} \leq -1 \Leftrightarrow f(e_n) \in C^\downarrow \Leftrightarrow f(C^\uparrow) = C^\downarrow \Leftrightarrow f(C^\downarrow) = C^\uparrow.$$

**Définition 1.41.** Soit  $f$  une transformation de Lorentz,  $f$  est appelée orthochrone si  $f(C^\uparrow) = C^\uparrow$ . On notera par  $\text{Iso}^\uparrow(\mathbb{L}^n)$  le sous-groupe des transformations orthochrones et  $O_1^\uparrow(n) = \Phi(\text{Iso}^\uparrow(n))$ . De manière analogue, nous désignerons le sous-ensemble de transformations non-orthochrones par  $\text{Iso}^\downarrow(\mathbb{L}^n)$ , et  $O_1^\downarrow(n) = \Phi(\text{Iso}^\downarrow(n))$ .

**Proposition 1.42.** Si  $f \in \text{Iso}(\mathbb{L}^n)$ , alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f \in \text{Iso}^\uparrow(\mathbb{L}^n)$ .
- (ii) il existe un vecteur causal  $v \in \mathbb{L}^n$  tel que  $\langle v, f(v) \rangle < 0$ ,
- (iii) pour tout vecteur temporel  $v \in \mathbb{L}^n$  on a  $\langle v, f(v) \rangle < 0$ ,
- (iv) dans toute base orthonormée, l'élément  $(n, n)$  de la matrice de  $f$  est supérieur à zéro (et, en fait, supérieur ou égal à 1).

*Preuve.* C'est une conséquence de [Remarque 1.32](#) et [Remarque 1.40](#). □

**Exemple 1.43.**

$$\left( \begin{array}{c|cc} I_{n-2} & & 0 \\ \hline & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{array} \right) \in O_1^{\uparrow}(n); \quad \left( \begin{array}{c|cc} I_{n-1} & & 0 \\ \hline & 1 & 0 \\ & 0 & -1 \end{array} \right) \in O_1^{-\downarrow}(n)$$

$$\left( \begin{array}{c|cc} I_{n-1} & & 0 \\ \hline & -1 & 0 \\ & 0 & -1 \end{array} \right) \in O_1^{+\downarrow}(n); \quad \left( \begin{array}{c|cc} I_{n-1} & & 0 \\ \hline & -1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{array} \right) \in O_1^{-\uparrow}(n)$$

Après ces quatre exemples, il est clair que  $O_1(n)$  a au moins quatre composantes connexes. En fait, il n'y en a que quatre (voir [Remarque 1.58](#) ci-dessous).

### 1.3.2 Le groupe de Lorentz en dim 2.

Le groupe  $O_1(2)$  peut être étudié de la même manière que le groupe des isométries de l'espace Euclidien. À savoir, calculer directement les matrices de taille  $2 \times 2$  qui satisfont

$$A^t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cependant, pour mieux apprécier les particularités du cas Lorentzien, nous utiliserons une base formée de vecteurs lumières.

Soit  $B_0$  la base canonique  $e_1, e_2$  de  $\mathbb{R}^2$  et considérons la base  $B$  formée de vecteurs de type lumière  $u, v$  telle que  $u = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_1 + e_2)$  et  $v = \frac{\sqrt{2}}{2}(-e_1 + e_2)$ . Clairement  $u, v$  satisfont  $\langle u, v \rangle = -1$ ;  $\langle u, u \rangle = \langle v, v \rangle = 0$ . Ainsi

$$M_B(\langle \cdot, \cdot \rangle) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier,  $u$  et  $v$  se trouvent dans le même cône causal. Notons

$$P = M(I_{\mathbb{R}^2}, B_0 \leftarrow B) = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P^{-1} = M(I_{\mathbb{R}^2}, B \leftarrow B_0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer explicitement  $O_1(2)$ , nous obtiendrons d'abord la matrice de toute isométrie  $f \in Iso(\mathbb{L}^2)$  dans la base  $B$  puis dans la base  $B_0$ . Rappelons qu'avec notre notation nous avons  $M(f, B_0) = PM(f, B)P^{-1}$ ; (voir [Notation 1.17](#) et [Remarque 1.18](#)).

Si  $f(u) = au + bv$  et  $f(v) = cu + dv$ , alors

$$0 = \langle u, u \rangle = \langle f(u), f(u) \rangle = -2ab,$$

$$0 = \langle v, v \rangle = \langle f(v), f(v) \rangle = -2cd.$$

Ainsi, il y a deux possibilités :

**cas I :**  $f(u) = au$  ( $a \neq 0$ ). En tenant compte du fait que  $f \in Iso(\mathbb{L}^2)$  et, en particulier

$$-1 = \langle u, v \rangle = \langle f(u), f(v) \rangle = -ad,$$

on en conclut que  $d = \frac{1}{a}$  et nécessairement  $c = 0$ . Par conséquent,  $f(v) = \frac{1}{a}v$ , et par suite

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix}, \quad a \neq 0.$$

D'où il s'ensuit que  $f \in Iso^+(\mathbb{L}^2)$ , ( $\det f = 1$ ), et comme  $f(u) = au$ ,  $f \in Iso^\uparrow(\mathbb{L}^2)$  si et seulement si  $a > 0$ .

**cas II :**  $f(u) = bv$  ( $b \neq 0$ ). Comme dans le cas précédent, on en déduit que  $f(v) = \frac{1}{b}u$ , et alors

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}, \quad b \neq 0.$$

Ainsi  $f \in Iso^-(\mathbb{L}^2)$ , ( $\det f = -1$ ), et puisque  $v$  est dans le même cône causal que  $u$ , donc  $f \in Iso^\uparrow(\mathbb{L}^2)$  si et seulement si  $b > 0$ . De toute façon, la matrice est diagonalisable et elle admet une base orthonormée formée de vecteurs propres.



Par conséquent, il est immédiat que, si  $f \in Iso(\mathbb{L}^2)$ , alors

$$\begin{aligned}
 A_f \in O_1^{+\uparrow}(2) &\Leftrightarrow M(f, B) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \text{ pour certains } a > 0 \\
 &\Leftrightarrow M(f, B_0) = PM(f, B)P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a + \frac{1}{a} & a - \frac{1}{a} \\ a - \frac{1}{a} & a + \frac{1}{a} \end{pmatrix} \text{ avec } a > 0 \\
 &\Leftrightarrow M(f, B_0) = \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix}, \text{ où } \theta = \ln(a) \in \mathbb{R}.
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

On peut procéder de manière analogue avec les trois autres composantes connexes de  $O_1(2)$  (ou en composant avec les matrices de [Exemple 1.43](#)); en fait, nous obtenons

### Isométries avec déterminant égal à 1.

Toutes ces isométries admettent une base formée de vecteurs propres de type lumière et

$$SO_1^{\uparrow}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ \sinh(\theta) & \cosh(\theta) \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}; O_1^{+\downarrow}(2) = \left\{ -A : A \in O_1^{+\uparrow}(2) \right\}$$

### Isométries avec déterminant égal à $-1$ .

Toutes ces isométries admettent une base orthonormée formée de vecteurs propres et

$$O_1^{-\downarrow}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cosh(\theta) & \sinh(\theta) \\ -\sinh(\theta) & -\cosh(\theta) \end{pmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}; O_1^{-\uparrow}(2) = \left\{ -A : A \in O_1^{-\downarrow}(2) \right\}$$

Observez que, contrairement au cas Euclidien, toutes ces matrices sont diagonalisables. Les transformations de Lorentz orthochrones et propre en dimension 2 sont généralement appelées *pures* ou, dans le jargon de la relativité, *boosts*. Comme nous le verrons ci-dessous, toute transformation orthogonale de Lorentz en dimension 4 peut être essentiellement décrite par la composition d'une transformation de Lorentz pure et d'une isométrie bidimensionnelle Euclidienne. En conséquence, les boosts s'avèrent être paradigmatiques pour les interprétations des effets relativistes.

#### 1.3.3 Quelques propriétés du groupe de Lorentz en dimension supérieur à 2.

**Proposition 1.44.** Si  $A \in O_1(n)$ , alors :

- (i) les vecteurs propres non isotropes de  $A$ , le cas échéant, ont pour valeurs propres  $+1$  ou  $-1$ ,
- (ii) le produit des valeurs propres de deux vecteurs propres causaux linéairement indépendants est  $1$ ,
- (iii) si  $U$  est un espace propre de  $A$  associé à une valeur propre  $\varepsilon = \pm 1$  (en particulier, si  $U$  contient un vecteur non-isotrope), alors tout autre espace propre est orthogonal à  $U$ ,
- (iv) si  $U$  est un sous espace  $A$ -invariant, alors  $U^\perp$  est aussi  $A$ -invariant.

*Preuve.* (i) Soit  $v$  un vecteur propre non isotrope de  $A$ ,  $Av = av$ . Alors

$$\langle v, v \rangle = \langle Av, Av \rangle = a^2 \langle v, v \rangle \Rightarrow a = \pm 1$$

- (ii) Soient  $v, w$  deux vecteurs propres causaux linéairement indépendants tels que  $Av = av$ ;  $Aw = bw$ . D'après [Proposition 1.31](#) et [Remarque 1.32](#), on a également

$$0 \neq \langle v, w \rangle = \langle Av, Aw \rangle = ab \langle v, w \rangle \Rightarrow ab = 1.$$

- (iii) Soit  $z \in U$  un vecteur propre de  $A$  associé à une valeur propre  $\varepsilon = \pm 1$  (en particulier, cela se produit si  $z$  est non isotrope par [item \(i\)](#)). Soit  $w$  un vecteur propre d'une valeur propre  $\lambda$  distincte de  $\varepsilon$ . Pour tout  $u \in U$

$$\langle u, w \rangle = \langle Au, Aw \rangle = \lambda \varepsilon \langle u, w \rangle.$$

Ainsi, soit  $\langle u, w \rangle = 0$ , ce qui conclut la preuve, soit  $\lambda \varepsilon = 1$  i.e.  $\lambda = \varepsilon$ , ce qui contredit notre hypothèse sur  $w$ .

- (iv) Comme  $A$  est une isométrie,  $A(U) = U$ . De plus,  $A^{-1}(U) = U$ . Considérons  $w \in U^\perp$ , alors  $\langle Aw, u \rangle = \langle w, A^{-1}u \rangle = 0$ ,  $\forall u \in U$ , et donc,  $Aw \in U^\perp$ .

□

Le résultat suivant résume les possibilités quand  $A$  admet un plan invariant non-spatial.

**Proposition 1.45.** *Soit  $\pi \subset \mathbb{L}$  un plan  $A$ -invariant qui n'est pas de type espace. Alors*

- (i) Si  $\pi$  est temporel, exactement l'une des trois possibilités suivantes est réalisée :
  - (a)  $A|_\pi = \pm Id$ ,
  - (b)  $A|_\pi$  admet deux vecteurs propres de type lumière linéairement indépendants associés aux valeurs propres  $\lambda \neq \pm 1$  et  $\frac{1}{\lambda}$ ,
  - (c)  $A|_\pi$  admet deux vecteurs propres linéairement indépendants non isotropes associés aux valeur propre  $+1$  et  $-1$ .
- (ii) Si  $\pi$  est de type lumière, alors  $A|_\pi$  admet un vecteur propre de type lumière  $v$ ,  $Av = \lambda v$ . Si  $\lambda \neq \pm 1$ , alors  $\pi$  admet également un vecteur propre de type espace.

Dans tous les cas,  $A$  admet un vecteur propre causal appartenant à  $\pi$  et les deux racines de polynôme caractéristique de  $A|_{\pi}$  sont réelles.

*Preuve.* Le cas où  $\pi$  est temporel découle de [sous-section 1.3.2](#). En fait, les cas [item \(a\)](#), [item \(b\)](#) peuvent se produire si et seulement si  $A|_{\pi}$  préserve l'orientation.

Pour le cas où  $\pi$  est de type lumière, notons que, par [Remarque 1.36](#), le radical de  $\langle , \rangle_{\pi}$  a la dimension 1 et le reste des vecteurs est spatial. Ainsi, si  $v \in \pi$  est de type lumière, alors  $v$  et son image  $A(v)$  appartiennent nécessairement au radical de  $\langle , \rangle_{\pi}$  et on a  $A(v) = \lambda v$ . Enfin, si  $z \in \pi$  ne se trouve pas dans le radical de  $\langle , \rangle_{\pi}$ , nécessairement  $z$  est spatial selon [Remarque 1.36](#) et par conséquent  $B = \{v, z\}$  est une base de  $\pi$ . Alors  $A(z) = az + bv$  pour certains  $a, b \in \mathbb{R}$ , puisque  $\langle A(z), A(z) \rangle = a^2 \langle z, z \rangle = \langle z, z \rangle$  on en déduit que  $A(z) = \pm z + bv$ . On obtient donc

$$M(A|_{\pi}, B) = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

Donc, si  $\lambda \neq \pm 1$  alors le polynôme caractéristique de  $A|_{\pi}$  a deux valeurs propres réelles distinctes, et  $A|_{\pi}$  est diagonalisable.  $\square$

**Lemme 1.46.** *Si le polynôme caractéristique de  $A \in O_1(n)$  admet une racine complexe non réelle  $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , alors  $A$  admet un plan invariant  $\pi$  qui est spatial et vérifie que les racines du polynôme caractéristique de  $A|_{\pi}$  sont à la fois,  $a$  et son conjugué  $\bar{a}$ .*

*Preuve.* On considère  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , soit  $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  un vecteur propre associé à la valeur propre  $a$ . Clairement,  $A(\bar{z}) = \bar{a}\bar{z}$ , et comme  $a$  est non réel,  $\{z, \bar{z}\}$  est  $\mathbb{C}$ -linéairement indépendant et donc il génère un plan complexe  $\text{span}_{\mathbb{C}}(z, \bar{z})$ . En prenant les parties réelles et imaginaires  $x = (z + \bar{z})/2$  et  $y = (z - \bar{z})/2i$ , nous avons que  $x, y \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$  sont linéairement indépendants lorsqu'ils sont considérés comme complexes (et donc aussi comme réels). En effet  $\text{span}_{\mathbb{C}}(z, \bar{z}) = \text{span}_{\mathbb{C}}(x, y)$ . De plus, le plan réel  $\text{span}_{\mathbb{R}}(x, y)$  est également  $A$ -invariant (on utilise le fait que  $A$  est une matrice réelle) et, alors, les racines du polynôme caractéristique de  $A|_{\pi}$  sont  $a, \bar{a}$ . D'après [Proposition 1.45](#), un tel plan  $\pi$  doit être spatial.  $\square$

**Lemme 1.47.** *Si  $A \in O_1(n)$ ; avec  $n \geq 2$ , alors  $A$  admet un vecteur propre causal.*

*Preuve.* Il s'agit de prouver que ce résultat est vrai quel que soit le naturel  $n$ ; nous allons raisonner par récurrence sur  $n$ .

Pour  $n = 2$ , le résultat découle de [Proposition 1.45](#).

Supposons donc par hypothèse que le résultat est vrai pour les nombres naturels inférieurs à  $n$ , et prouvons-le pour  $n$ . Soit  $a$  une racine du polynôme caractéristique de  $A$ .

Si un  $a \in \mathbb{R}$ , alors il admet un vecteur propre  $v$ . Si  $v$  est causal c'est fini, sinon  $v$  est spatial et le sous-espace  $v^{\perp}$  est à la fois Lorentzien et  $A$ -invariant. Ainsi, l'hypothèse d'induction peut être appliquée à  $A|_{v^{\perp}}$ .

Si  $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , alors considérons le plan spatial invariant  $\pi$  donné par [Lemme 1.46](#) et appliquons l'hypothèse d'induction à la restriction  $A|_{\pi^\perp}$ .  $\square$

**Lemme 1.48.** *Si  $A$  admet un vecteur propre de type lumière  $v$  avec une valeur propre réelle  $\lambda \neq \pm 1$ . Alors  $A$  admet un deuxième vecteur propre  $u$  de type lumière de valeur propre  $1/\lambda$  et laisse donc invariant un plan  $\Pi$  de type temps, tel que  $v \in \Pi$ .*

*Preuve.* On procède par récurrence sur  $n$  : Pour  $n = 2$ , le résultat est connu, rappelons [Proposition 1.45](#). Supposons donc le résultat acquis à un certain rang  $n - 1$  et prouvons-le au rang  $n$ . Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  les racines du polynôme caractéristique de  $A$ , et posons  $\lambda_1 = \lambda$ . Si toutes ces racines sont réelles alors, comme  $\det A_f = \pm 1$ , nous avons que  $\lambda_1 \dots \lambda_n = \pm 1$ . Ainsi, il existe une valeur propre  $\lambda_i \neq \pm 1$  avec  $\lambda_i \neq \lambda_1$ , et le résultat découle directement de [Proposition 1.44](#) (d'après [item \(i\)](#) et [item \(ii\)](#)) et [Proposition 1.35](#).

Si une valeur propre  $a$  de  $A$  est complexe, prenons le plan spatial  $A$ -invariant  $\pi$  fourni par [Lemme 1.46](#) tel que le spectre de  $A|_\pi$  est constitué de 2 éléments  $a$  et son conjugué  $\bar{a}$ . Alors Par l'hypothèse d'induction sur  $A|_{\pi^\perp}$  et en utilisant le fait que  $v \in \pi^\perp$  nous obtenons le résultat. En effet, comme  $\mathbb{L}^n = \pi \oplus \pi^\perp$  donc  $v = v_1 + v_2$  avec  $v_1 \in \pi$  et  $v_2 \in \pi^\perp$ . De plus  $A(v_1) + A(v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2$ , et puisque  $A(v_1) \in \pi$  et  $A(v_2) \in \pi^\perp$  ( $\pi$  est  $A$ -invariant) d'où  $A(v_1) = \lambda v_1$  (cela provient de la définition de la somme directe) et enfin  $v_1 = 0$ , car  $A|_\pi$  n'a pas de valeurs propres réelles.  $\square$

**Théorème 1.49.** *Si  $A \in O_1(n)$  et  $f_A \in \text{Iso}(\mathbb{L}^n)$  est sa transformation de Lorentz associée, alors seuls les trois cas suivants (mutuellement exclusifs) sont possibles :*

- (i)  *$A$  admet un vecteur propre temporel. Dans un tel cas, il existe une base orthonormée  $B$  telle que  $M(f_A, B)$  soit de la forme*

$$\left( \begin{array}{c|c} R_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & \pm 1 \end{array} \right)$$

où  $R_{n-1} \in O(n-1)$ . Si  $A \in O_1^{+\uparrow}(n)$ , on dit que  $f_A$  est une rotation spatiale pure (dans l'hyperplan orthogonal au vecteur propre).

- (ii)  *$A$  admet un vecteur propre isotrope de valeur propre  $\lambda \neq \pm 1$ . Alors il existe une base orthonormée  $B$  telle que  $M(f_A, B)$  soit de la forme*

$$\left( \begin{array}{c|c} R_{n-2} & 0 \\ \hline 0 & R \end{array} \right)$$

où  $R_{n-2} \in O(n-2)$  et  $R \in O_1(2)$ . Dans ce cas,  $f_A$  est une composition d'une transformation de Lorentz bidimensionnelle dans un plan temporel  $\pi$  avec une isométrie Euclidienne dans son orthogonal  $\pi^\perp$ .

- (iii)  *$A$  admet un unique vecteur propre isotrope indépendant de valeur propre  $+1$  ou  $-1$ .*

*Preuve.* Raisonnement par récurrence. Pour  $n = 2$  la conclusion découle de l'étude de  $O_1(2)$  réalisée dans [sous-section 1.3.2](#). En fait, en dimension 2, le cas

item (iii) ne peut pas se produire.

Supposons que le théorème est vrai pour  $n - 1$  et prouvez-le pour  $n$ . D'après Lemme 1.47, il existe un vecteur propre causal  $v$ ,  $Av = \lambda v$ . Alors,

1. Si  $v$  est temporel, on obtient item (i) (voir aussi la partie item (iv) de Proposition 1.44).
2. Si  $v$  est isotrope, Nous avons là encore deux cas à envisager :
  - (a)  $\lambda \neq \pm 1$ , dans ce cas on obtient item (ii) par Lemme 1.48.
  - (b)  $\lambda = \pm 1$  et supposons que item (iii) ne soit pas vérifié (à savoir l'unicité de vecteur propre isotrope indépendant). Nous voyons donc que le cas item (i) est réalisé. En effet si  $w$  est un autre vecteur propre isotrope linéairement indépendant de  $v$ , par item (ii) de Proposition 1.44, les valeurs propres de  $w$  et  $v$  sont égales, alors l'un des deux vecteurs propres  $v + w$ ,  $v - w$  est temporel.

On voit que ces trois cas sont exclusifs l'un de l'autre. En fait de toute évidence, les situations item (ii) et item (iii) sont exclusives. Si nous supposons que item (i) est réalisé, soit  $v$  un vecteur propre temporel  $Av = av$ ,  $a = \pm 1$ , et montrons que les cas item (ii) et item (iii) ne sont pas possibles. Si  $w$  est un vecteur propre isotrope  $Aw = bw$ , nécessairement  $a = b = \pm 1$  (voir item (ii) de Proposition 1.44), ce qui exclut la possibilité item (ii). De plus, le plan temporel  $\text{span}(w, v)$  est constitué de vecteurs propres de valeur propre  $a = \pm 1$ , ce qui exclut la possibilité item (iii).  $\square$

*Remarque 1.50.* Si  $f$  est une isométrie de  $\mathbb{L}^3$  qui admet un unique vecteur propre isotrope indépendant  $u$  avec valeur propre  $+1$  ou  $-1$ .

- On choisit une base  $B_1$  de  $\mathbb{L}^3$  formée des éléments que l'on note  $u, e, v$  de sorte que  $u, v$  soient isotropes et orthogonaux à  $e$ ,  $g(e, e) = g(u, v) = 1$ ,  $u$  est un vecteur propre isotrope de valeur propre  $\varepsilon$  ( $\varepsilon^2 = 1$ ) et  $\text{span}(u)^\perp = \text{span}(u, e)$ . Alors  $f$  est représenté dans la base  $B_1$  par la matrice suivante .

$$M(f, B_1) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \lambda & \varepsilon \frac{\lambda^2}{2} \\ 0 & \nu & \nu \varepsilon \lambda \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}, \text{ où } \nu = \pm 1 \text{ et } \lambda \neq 0.$$

- Soit  $B_2$  la famille formée des vecteurs  $\frac{\sqrt{2}}{2}(u + v)$ ,  $e$ ,  $\frac{\sqrt{2}}{2}(-u + v)$ , alors  $B_2$  est une base orthonormée de  $\mathbb{L}^3$ . Ainsi la matrice associée à  $f$  dans la base  $B_2$  est

$$M(f, B_2) = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\lambda & \lambda \\ \nu \lambda & \nu \varepsilon \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) & \frac{\lambda^2}{2} \nu \varepsilon \\ \nu \lambda & -\frac{\lambda^2}{2} \nu \varepsilon & \nu \varepsilon \left(1 + \frac{\lambda^2}{2}\right) \end{pmatrix}; \lambda \in \mathbb{R}, \varepsilon = \pm 1, \nu = \pm 1.$$

### 1.3.4 Autres propriétés de $SO_1^\uparrow(n)$ en tant que groupe de Lie.

Rappelons qu'un groupe de Lie  $G$  est un groupe avec une structure de variété différentiable telle que

$$\begin{array}{ll} G \times G \rightarrow G & G \rightarrow G \\ (g, h) \mapsto gh & g \mapsto g^{-1} \end{array}$$

soient des applications différentiables. Tout sous-groupe fermé du groupe linéaire général réel  $GL(n, \mathbb{R})$  est naturellement un groupe de Lie. De plus, tout groupe de Lie est isomorphe à un groupe matriciel fermé. L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$  peut être considérée comme l'espace tangent du groupe  $G$  à l'identité. Pour les groupes des matrices,  $\mathfrak{g}$  est également une algèbre matricielle, sous-algèbres de Lie de l'algèbre de Lie  $M_n(\mathbb{R})$  des  $n \times n$  matrices réelles munie du crochet (appelé aussi commutateur des matrices)  $[X, Y] = XY - YX$ . L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  détermine localement le groupe de Lie  $G$ , et aussi globalement, si  $G$  est simplement connexe [60].

Il s'agit ici de mettre en évidence certaines propriétés dérivées du caractère de groupe de Lie de  $SO_1^\uparrow(n)$ . Par ailleurs, les propriétés du groupe orthogonal spécial, c'est-à-dire le groupe de rotations  $SO(n)$ , sont aussi obtenues en même temps. Nous écrivons donc  $G_\varepsilon$ , qui est à la fois égal à  $SO_1^\uparrow(n)$  si  $\varepsilon = -1$  et  $SO(n)$  si  $\varepsilon = 1$ .

#### 1.3.4.1 Généralités.

Soit  $\eta_\varepsilon$  la matrice identité  $Id_n$  pour  $\varepsilon = 1$  et la matrice  $\eta$  pour  $\varepsilon = -1$ . On considère la fonction  $F$  définie par

$$F : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R}), \quad A \mapsto A^t \eta_\varepsilon A.$$

Clairement,  $G_\varepsilon$  est la composante neutre de  $F^{-1}(\eta_\varepsilon)$ . Ainsi,  $G_\varepsilon$  est un sous-groupe matriciel fermé de  $GL(n, \mathbb{R})$  et, alors, un groupe de Lie. Son algèbre peut être obtenue en prenant n'importe quelle courbe lisse  $s \mapsto A(s) \in G_\varepsilon$ , avec  $A(0) = Id_n$ , et prenant la dérivée usuelle à  $s = 0$  dans l'égalité

$$A^t(s) \eta_\varepsilon A(s) = \eta_\varepsilon.$$

Explicitement :

**Proposition 1.51.** *L'algèbre de Lie de  $G_\varepsilon$  est*

$$\mathfrak{g}_\varepsilon = \{X \in M_n(\mathbb{R}) : X^t = -\eta_\varepsilon X \eta_\varepsilon\}.$$

En d'autre terme, l'algèbre de Lie associée à  $SO(n)$  est constituée des matrices antisymétriques, et celle associée à  $SO_1^\uparrow(n)$  des matrices de type

$$\left( \begin{array}{c|c} A_{n-1} & a \\ \hline a^t & 0 \end{array} \right),$$

où  $a = (a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$  et  $A_{n-1}$  est antisymétrique. En particulier, la dimension des deux,  $SO_1^\uparrow(n)$  et  $SO(n)$ , est  $n(n-1)/2$ .

*Remarque 1.52.* On voit encore que Le groupe de Lie  $SO(n)$  est compact, puisque il est considéré comme un sous-ensemble fermé borné de  $M_n(\mathbb{R})$  (en utilisant le fait que  $A^t A = Id_n$  et en prenant la trace de  $A^t A$  on aura  $\sum_{i,j=1}^n (A_{ij})^2 = n$ ). Cependant,  $SO_1^\uparrow(n)$  n'est pas compact pour  $n \geq 2$ , car  $SO_1^\uparrow(2)$  peut être considéré comme un sous-groupe fermé non compact de  $SO_1^\uparrow(n)$ . Rappelons que  $SO(n-1)$  peut être également considéré comme un sous-groupe de  $SO_1^\uparrow(n)$ . Plus précisément

$$\widetilde{SO}(n-1) = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) : A \in SO(n-1) \right\} \quad (1.11)$$

est l'intersection des deux groupes  $SO(n)$  et  $SO_1^\uparrow(n)$  (et, de plus,  $\widetilde{SO}(n-1)$  est un sous-groupe compact maximal de  $SO_1^\uparrow(n)$ ).

#### 1.3.4.2 L'espace hyperbolique en tant que variété homogène.

Tout d'abord, rappelons quelques notions d'espaces homogènes. Soit  $G$  un groupe de Lie et  $M$  une variété. Une action à gauche de  $G$  sur  $M$  est une application lisse  $G \times M \rightarrow M$ ,  $(g, x) \mapsto g.x$  qui satisfait,

- (i)  $(g_1 g_2).x = g_1(g_2.x)$ ,
- (ii)  $e.x = x$ ,

pour l'identité  $e$  de  $G$  et pour tout  $g_1, g_2 \in G$ ,  $x \in M$ .

L'action  $G$  est transitive si, pour tout  $x_1, x_2 \in M$ , il existe  $g \in G$  tel que  $g.x_1 = x_2$ . Le groupe d'isotropie en  $x$  est le sous-groupe fermé  $G_x := \{g \in G : g.x = x\}$ .

*Remarque 1.53.* Si l'action à gauche de  $G$  sur  $M$  est transitive alors les groupes d'isotropie de deux points quelconques sont conjugués.

Les propriétés suivantes sont bien connues dans la théorie des groupes de Lie (voir par exemple [60], [36] et [28]).

#### **Théorème 1.54.**

- (i) Si  $G$  est un groupe de Lie et  $H$  un sous-groupe fermé de  $G$ , alors l'application

$$G \times G/H \rightarrow G/H, (g, g'H) \mapsto (gg')H$$

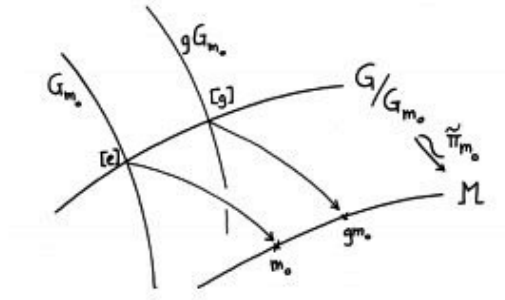


FIGURE 1.2 – Action transitive de  $G$  sur  $M$

est une action transitive à gauche, et la projection naturelle  $P : G \rightarrow G/H$  est une application ouverte (continue). De plus,  $G/H$  admet une structure différentiable unique pour que  $P$  devienne une submersion (différentiable).

(ii) Si  $G \times M \rightarrow M$  est une action à gauche transitive, alors  $G/G_x$  est naturellement difféomorphe à  $M$  pour tout  $x \in M$ .

Quand  $M$  est sous l’hypothèse du cas [item \(ii\)](#),  $M$  est appelé espace homogène.

*Remarque 1.55.* Si  $G/H$  et  $H$  sont connexes alors  $G$  est connexe.

Après ces préliminaires généraux, revenons aux groupes  $G_\varepsilon$ . Soit l’espace hyperbolique (supérieur)  $\mathbb{H}^{n-1}$  dans  $\mathbb{L}^n$ .

$$\mathbb{H}^{n-1} = \{p \in \mathbb{L}^n : \langle p, p \rangle = -1, p_n \geq 1\}.$$

Afin d’étudier en même temps le cas Euclidien, considérons aussi la sphère usuelle  $S^{n-1}$  dans  $\mathbb{R}^n$ , et mettons  $M_\varepsilon = \mathbb{H}^{n-1}$  pour  $\varepsilon = -1$  et  $M_\varepsilon = S^{n-1}$  pour  $\varepsilon = 1$ . Les résultats suivants découlent des définitions ci-dessus.

**Proposition 1.56.** *L’application*

$$G_\varepsilon \times M_\varepsilon \rightarrow M_\varepsilon, \quad (A, p) \mapsto Ap$$

est une action à gauche (bien définie), lisse et transitive de  $G_\varepsilon$  sur  $M_\varepsilon$ . Le groupe d’isotropie de l’action à  $e_n = (0, \dots, 0, 1)^t$  est  $\widetilde{SO}(n-1)$ .

Ainsi, compte tenu du [item \(ii\)](#) du [Théorème 1.54](#), on a :

**Théorème 1.57.** *En considérant  $H = \widetilde{SO}(n-1)$  comme un sous-groupe de  $G_\varepsilon$ , le quotient  $G_\varepsilon/H$  est naturellement difféomorphe à  $M_\varepsilon$ , c’est-à-dire :*

$$SO_1^\uparrow(n)/\widetilde{SO}(n-1) \cong \mathbb{H}^{n-1}, \quad SO(n)/\widetilde{SO}(n-1) \cong S^{n-1}$$

*Remarque 1.58.* [Théorème 1.57](#) et [Remarque 1.55](#) nous permettent de prouver facilement que  $G_\varepsilon$  est connexe, (pour une preuve alternative, écrite directement dans n’importe quelle signature, voir [\[\[45\], Lemme 9.6\]](#)).



1.4 LE REVÊTEMENT UNIVERSEL DE  $SO_1^\uparrow(4)$ 

Parmi les groupes  $SO_1^\uparrow(n)$ , le cas  $n = 4$  est particulièrement intéressant tant pour sa structure mathématique que pour ses interprétations physiques. Notre but dans cette section est de montrer que le revêtement universel de  $SO_1^\uparrow(4)$  est le groupe  $SL(2, \mathbb{C})$ , en construisant explicitement un revêtement à deux feuilletés de  $SL(2, \mathbb{C})$  dans  $SO_1^\uparrow(4)$ . En particulier, cette application donne également le revêtement universel  $SU(2) \rightarrow SO(3)$ . Parmi les conséquences, une décomposition de toute transformation de Lorentz (propre orthochrone) en une composition d'un boost et d'une rotation est déduite. Le lecteur intéressé pourra en apprendre davantage à partir des références [5] et [47].

## 1.4.1 Construction du morphisme de revêtement universel.

Afin de construire le morphisme de revêtement universel  $SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO_1^\uparrow(4)$ , notre plan de travail est :

- (1) Une brève étude de la topologie de  $SL(2, \mathbb{C})$  (et  $SU(2)$ ), montrant en particulier qu'il est connexe.
- (2) L'ensemble des matrices hermitiennes  $H(2, \mathbb{C})$  constitue naturellement un espace vectoriel Lorentzien (réel) muni du produit scalaire noté  $g_{\mathbb{L}}$  et canoniquement isomorphe à  $\mathbb{L}^4$ .
- (3) L'action naturelle  $SL(2, \mathbb{C}) \times H(2, \mathbb{C}) \rightarrow H(2, \mathbb{C})$  induit l'application spinorielle requise.

$$SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow Iso^{+\uparrow}(H(2, \mathbb{C}), g_{\mathbb{L}}) \equiv SO_1^\uparrow(4).$$

1.4.1.1 Les groupes de Lie  $SL(2, \mathbb{C})$  et  $SU(2)$ .

Soit  $M_2(\mathbb{C})$  l'espace des matrices complexes de taille  $2 \times 2$ , et  $SL(2, \mathbb{C}) \subset M_2(\mathbb{C})$  le groupe des matrices complexes de déterminant 1. Évidemment,  $SL(2, \mathbb{C})$  peut être considéré comme un sous-groupe fermé de  $M_4(\mathbb{R})$  et donc comme un groupe de Lie. Mettons

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}).$$

**Lemme 1.59.** *Supposons que  $|a|^2 + |b|^2 \neq 0$ . Alors  $A \in SL(2, \mathbb{C})$  si et seulement s'il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que*

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{|a|^2 + |b|^2} \begin{pmatrix} -\bar{b} \\ \bar{a} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Dans ce cas  $\lambda$  est unique.

*Preuve.* Rappelons que

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \frac{-\bar{b}}{|a|^2 + |b|^2} \\ b & \frac{\bar{a}}{|a|^2 + |b|^2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c + \frac{\bar{b}}{|a|^2 + |b|^2} \\ b & d - \frac{\bar{a}}{|a|^2 + |b|^2} \end{vmatrix},$$

le second déterminant est égal à 1. Ainsi, le premier déterminant est 1 si et seulement si le dernier est 0, dans ce cas il existerait  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que

$$\begin{pmatrix} c + \frac{\bar{b}}{|a|^2 + |b|^2} \\ d - \frac{\bar{a}}{|a|^2 + |b|^2} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \text{ Par conséquent, Équation 1.12 est vérifiée}$$

pour un certain  $\lambda \in \mathbb{C}$  (nécessairement unique).  $\square$

**Proposition 1.60.** *L'application*

$$F : (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) \times \mathbb{C} \rightarrow SL(2, \mathbb{C}), \left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \lambda \right) \mapsto \begin{pmatrix} a & \frac{-\bar{b}}{|a|^2 + |b|^2} + \lambda a \\ b & \frac{\bar{a}}{|a|^2 + |b|^2} + \lambda b \end{pmatrix}$$

*est un difféomorphisme.*

*Preuve.* La différentiabilité de  $F$  est triviale, et l'existence de  $F^{-1}$  est assurée par [Lemme 1.59](#). La différentiabilité de  $F^{-1}$  est assurée par la forme explicite de  $\lambda$  (à savoir,  $\lambda = (c + \frac{\bar{b}}{|a|^2 + |b|^2})a^{-1}$  si  $a \neq 0$  et  $\lambda = (d - \frac{\bar{a}}{|a|^2 + |b|^2})b^{-1}$  si  $b \neq 0$ ).  $\square$

**Corollaire 1.61.**  *$SL(2, \mathbb{C})$  est difféomorphe à  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^3$ .*

*Preuve.* Appliquons [Proposition 1.60](#) en remarquant que  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ , en tant que variété différentiable, est équivalent à  $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$  et, par conséquent,  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  est difféomorphe à  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$ .  $\square$

*Remarque 1.62.* Le fait que le groupe de Lie  $SL(2, \mathbb{C})$  est de dimension 6 peut également être déduit en regardant son algèbre de Lie. Prenons n'importe quelle courbe lisse  $s \mapsto A(s) \in SL(2, \mathbb{C})$ , avec  $A(0) = Id_2$  et dérivons à 0 la fonction constante  $s \mapsto \det(A(s)) = 1$  (qui caractérise  $SL(2, \mathbb{C})$ ). Alors, on obtient l'algèbre de Lie de  $SL(2, \mathbb{C})$  noté  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  :

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \{X \in M_2(\mathbb{C}) : \text{trace}(X) = 0\}.$$

En conséquence,  $SL(2, \mathbb{C})$  est un six-dimensionnel groupe de Lie réel (complexe de dimension 3).

De même, on peut étudier le groupe unitaire  $U(n)$  et le groupe spécial unitaire  $SU(n)$ . Dans n'importe quelle dimension, ils sont définis, respectivement, par

$$U(n) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) : A^*A = Id_n\}, \quad SU(n) = U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$$

où  $A^*$  est la matrice transconjugée de  $A$  telle que  $A^* = \bar{A}^t$ .

*Remarque 1.63.* Sachant que  $A \in M_2(\mathbb{C})$  appartient à  $SU(2)$  si et seulement si  $A = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$  pour certains  $a, b \in \mathbb{C}$  avec  $|a|^2 + |b|^2 = 1$ , nous pouvons donc montrer que :

1.  $SU(2)$  est difféomorphe à  $\mathbb{S}^3$ .
2. L'algèbre de Lie de  $SU(2)$  est définie comme étant l'algèbre réelle tridimensionnelle des matrices anti-hermitiennes de taille  $2 \times 2$  et de trace nulle, i.e.

$$\mathfrak{su}(2) = \{X \in M_2(\mathbb{C}) : X + X^* = 0, \text{ trace}(X) = 0\}.$$

Nous pouvons également obtenir des résultats analogues pour  $U(2)$ .

#### 1.4.1.2 L'espace vectoriel Lorentzien $H(2, \mathbb{C})$ .

Considérons l'espace vectoriel réel  $H(2, \mathbb{C})$  des matrices Hermitienne de taille  $2 \times 2$  (i.e.  $A^* = A$ ). Explicitement

$$H(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & \bar{z} \\ z & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) : a, d \in \mathbb{R}, z = x + iy \in \mathbb{C} \right\}.$$

Il s'agit naturellement d'un espace vectoriel réel de dimension quatre. Dans cet espace, le (moins) déterminant

$$-\begin{vmatrix} a & \bar{z} \\ z & d \end{vmatrix} = x^2 + y^2 - ad,$$

est une forme quadratique qui définit un produit scalaire  $g_L$  de signature Lorentzienne.

Rappelons que le sous-espace  $H(2, \mathbb{C})_*$  des matrices de trace nulle ( $d = -a$ ) constitue un hyperplan naturel de type espace. Ainsi, nous allons considérer l'espace vectoriel Lorentzien  $(H(2, \mathbb{C}), g_L)$  et l'espace vectoriel Euclidien  $(H(2, \mathbb{C})_*, g_E)$  de dimension 3.

Les matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

constituent une base orthonormée naturelle, que nous appellerons  $B_P$ , pour  $(H(2, \mathbb{C}), g_{\mathbb{L}})$ . De plus, les trois premières (les matrices de Pauli classiques) constituent une base orthonormée pour  $(H(2, \mathbb{C})_*, g_E)$ . Alors, deux isométries canoniques entre  $\mathbb{L}^4$  et  $(H(2, \mathbb{C}), g_{\mathbb{L}})$  peuvent être définies par :

$$\begin{aligned} \mathbb{L}^4 &\rightarrow (H(2, \mathbb{C}), g_{\mathbb{L}}) \\ x = (x_1, \dots, x_4)^t &\mapsto \underline{x} = \sum_{i=1}^4 x^i \sigma_i & \underline{x} &= \begin{pmatrix} x^3 + x^4 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 + x^4 \end{pmatrix}; \\ \mathbb{L}^4 &\rightarrow (H(2, \mathbb{C}), g_{\mathbb{L}}) \\ x = (x_1, \dots, x_4)^t &\mapsto \tilde{x} = x^4 \sigma_4 - \sum_{i=1}^3 x^i \sigma_i & \tilde{x} &= \begin{pmatrix} -x^3 + x^4 & -x^1 + ix^2 \\ -x^1 - ix^2 & x^3 + x^4 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Notons que la première des deux isométries ci-dessus envoie la base orthonormale canonique de  $\mathbb{L}^4$  dans la base de Pauli  $B_P$ . Dans ce qui suit, nous choisirons cette première isométrie comme étant préférée, et  $(H(2, \mathbb{C}), g_{\mathbb{L}})$  est alors identifié canoniquement à  $\mathbb{L}^4$ . On a donc aussi un isomorphisme canonique entre les groupes d'isométries, concrètement :

$$Iso(H(2, \mathbb{C}), g_{\mathbb{L}}) \rightarrow O_1(4), \quad f \mapsto M(f, B_P), \quad (1.14)$$

explicitement, pour tout  $x \in \mathbb{L}^4$

$$\underline{M(f, B_P)x} = f(\underline{x}). \quad (1.15)$$

Ainsi, à partir de maintenant, les deux groupes de Lie seront également considérés comme identifiés canoniquement.

#### 1.4.1.3 Action de $SL(2, \mathbb{C})$ sur $H(2, \mathbb{C})$ et $\mathbb{L}^4$ .

Considérons l'application définie comme suit :

$$\begin{aligned} \phi : SL(2, \mathbb{C}) \times H(2, \mathbb{C}) &\rightarrow H(2, \mathbb{C}) \\ (A, X) &\mapsto \phi(A, X) := AXA^*. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Les propriétés simples et pertinentes de l'action  $\phi$  sont :

1.  $\phi$  est bien définie :  $(AXA^*)^* = AXA^*$ .
2.  $\phi$  est une action sur  $H(2, \mathbb{C})$  :  $\phi(A_1.A_2, X) = \phi(A_1, \phi(A_2, X))$ .
3.  $SL(2, \mathbb{C})$  agit par isométrie sur  $(H(2, \mathbb{C}), g_{\mathbb{L}})$ 
  - (a)  $\phi$  est linéaire par rapport à son deuxième argument :  $\phi(A, aX_1 + bX_2) = a\phi(A, X_1) + b\phi(A, X_2)$ ,
  - (b) la métrique  $g_{\mathbb{L}}$  est préservée :  $\det(\phi(A, X)) = \det(X)$ ,

pour tout  $A, A_1, A_2 \in SL(2, \mathbb{C})$ ;  $X, X_1, X_2 \in H(2, \mathbb{C})$ ;  $a, b \in \mathbb{R}$ .

La troisième propriété implique que l'application bien définie :

$$\phi_A : H(2, \mathbb{C}) \rightarrow H(2, \mathbb{C}), \quad X \mapsto \phi(A, X)$$

est une isométrie de  $(H(2, \mathbb{C}), g_{\mathbb{L}})$ . Donc, nous avons également l'application bien définie :

$$* : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow Iso(H(2, \mathbb{C}), g_{\mathbb{L}}), \quad A \mapsto A_* = \phi_A.$$

De plus, comme [Équation 1.16](#) définit une action, on a  $(A_1.A_2)_* = (A_1)_* \circ (A_2)_*$ . Autrement dit, l'application  $*$  est un morphisme de groupe de Lie. Notons aussi que  $SL(2, \mathbb{C})$  est connexe (voir [Corollaire 1.61](#)) et, ainsi, l'image du morphisme  $*$  doit se trouver dans  $Iso^{+\uparrow}(H(2, \mathbb{C}), g_{\mathbb{L}})$ . Et donc, en tenant compte de l'identification du groupe d'isométrie  $Iso(H(2, \mathbb{C}), g_{\mathbb{L}})$  avec  $O_1(4)$  énoncé dans [Équation 1.14](#), on a aussi le morphisme du groupe de Lie :

$$\Lambda : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO_1^\uparrow(4), \quad A \mapsto M(A_*, B_P) \quad (1.17)$$

*Remarque 1.64.* Un tel morphisme  $\Lambda$  est appelé un morphisme spinoriel (ou application spineur), voir par exemple [\[47\]](#) pour une explication.

Explicitement, pour tout  $x \in \mathbb{L}^4$  (rappelons [Équation 1.13](#), [Équation 1.14](#), et [Équation 1.15](#))

$$\underline{(\Lambda(A))x} = \phi(A, \underline{x}) = A\underline{x}A^*. \quad (1.18)$$

**Théorème 1.65.** *Le morphisme spinoriel défini dans [Équation 1.17](#) est un revêtement à deux feuillets qui donne le revêtement universel (de groupes de Lie) de  $SO_1^\uparrow(4)$ . Ainsi,*

$$SL(2, \mathbb{C}) / \{\pm Id_2\} \cong SO_1^\uparrow(4).$$

*Preuve.* Nous avons déjà justifié que  $\Lambda$  est un morphisme de groupe de Lie. Prouvons que son noyau est juste  $\{\pm id_2\}$ . Remarquons que si pour tout  $X \in H(2, \mathbb{C})$ ,  $A_*(X) = X$  i.e.  $AXA^* = X$ , alors, en prenant  $X = Id_2$ , la matrice  $A$  doit être unitaire ( $A^* = A^{-1}$ ). Donc,  $AX = XA$  pour tout  $X$ , et  $A = \pm Id_2$  suit facilement en appliquant cette égalité pour  $X$  dans une base naturelle de  $H(2, \mathbb{C})$ .

Comme le noyau est un sous-groupe discret, le morphisme  $\Lambda$  est localement injectif. De plus, comme les dimensions de  $SL(2, \mathbb{C})$  et de  $SO_1^\uparrow(4)$  coïncident ([Remarque 1.62](#), [Proposition 1.51](#)), la différentielle de  $\Lambda$  en  $Id_2$  doit être bijective. Ainsi, il est bien connu de la théorie des groupes de Lie que  $\Lambda$  doit être un revêtement [\[\[60\], Prop. 3.26\]](#) - et un revêtement universelle, puisque  $SL(2, \mathbb{C})$  est simplement connexe d'après [Corollaire 1.61](#).  $\square$

*Remarque 1.66.* Il est facile de vérifier que la restriction de l'action [Équation 1.16](#) de  $SU(2) \times H(2, \mathbb{C})_*$  dans  $H(2, \mathbb{C})_*$  donnée par

$$\begin{aligned} SU(2) \times H(2, \mathbb{C})_* &\rightarrow H(2, \mathbb{C})_* \\ (A, X) &\mapsto \phi(A, X) := AXA^*, \end{aligned} \quad (1.19)$$

cette action est bien définie rendant l'application  $SU(2) \rightarrow SO(3)$  un revêtement universel à deux feuillets, et en conséquence  $SO(3)$  est difféomorphe à l'espace projectif  $\mathbb{R}P^3$  d'après [Remarque 1.63](#).

#### 1.4.2 Transformations de Lorentz dans $SL(2, \mathbb{C})$ et décomposition polaire.

L'application spinorielle  $\Lambda$  donne un autre aperçu du groupe de Lorentz. Nous avons déjà vu que  $SU(2)$  apparaît comme un sous-groupe privilégié de  $SL(2, \mathbb{C})$ . Nous trouverons un autre sous-ensemble privilégié  $SH_+(2, \mathbb{C})$  de  $SL(2, \mathbb{C})$ , qui correspondra à certains boosts de  $SO_1^\uparrow(4)$ , et nous verrons comment ces deux sous-ensembles,  $SH_+(2, \mathbb{C})$  et  $SU(2)$ , nous permettent de reconstruire tout  $SO_1^\uparrow(4)$ . Notre plan de travail est le suivant :

1. Comme étape technique et préalable, nous rappelons la décomposition polaire  $A = PR$  de toute matrice complexe régulière  $A \in GL(n, \mathbb{C})$  au moyen d'une matrice hermitienne positive ( $P \in H_+(n, \mathbb{C})$ ) et d'une matrice unitaire ( $R \in U(n)$ ).
2. Nous vérifions que, par l'application spinorielle  $\Lambda : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO_1^\uparrow(4)$ , la matrice unitaire  $R \in SU(2)$  correspond à une rotation qui fixe l'axe temporel de  $\mathbb{L}^4$ . La matrice hermitienne positive  $P \in SH_+(2, \mathbb{C})$  correspond à un boost<sup>1</sup> dans un plan de type temps qui contient l'axe  $t$ .
3. En conséquence, toute matrice sur  $SO_1^\uparrow(4)$  admet plusieurs décompositions, et en particulier, elle peut être écrite comme la composition d'une rotation et d'un boost.

Pour des raisons de terminologie, nous considérons un espace vectoriel complexe  $V(\mathbb{C})$  (de dimension finie).  $End_{\mathbb{C}}V$  désigne l'espace vectoriel de tous les endomorphismes de  $V(\mathbb{C})$  et  $Aut_{\mathbb{C}}V$  le groupe de tous ses automorphismes.

Une forme sesquilinéaire est une application  $V(\mathbb{C}) \times V(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ , qui est conjuguée-linéaire dans la première variable et linéaire dans la seconde. Une forme hermitienne  $h$  est une forme sesquilinéaire qui est également symétrique, c'est-à-dire  $h(u, v) = \overline{h(v, u)}$ .

---

1. Un élément  $A$  de  $SO_1^\uparrow(4)$  vérifiant l'une des conditions équivalentes ci-dessous est appelé un boost

—  $P$  fixe point par point un plan vectoriel de type espace.

—  $P$  est conjugué dans  $SO_1^\uparrow(4)$  à  $\begin{pmatrix} \cosh \psi & \sinh \psi & 0 & 0 \\ \sinh \psi & \cosh \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Un produit scalaire sur  $V(\mathbb{C})$  est une forme hermitienne  $G$  qui est définie positive, c'est-à-dire  $G(v, v) > 0$ , pour tout  $v \in V(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ . Comme précédemment,  $Iso(V, G)$  désigne le sous-groupe de  $Aut_{\mathbb{C}}V$  contenant les isométries de  $(V, G)$ . L'adjoint  $f^* \in End_{\mathbb{C}}V$  d'un endomorphisme  $f \in End_{\mathbb{C}}V$  par rapport à  $G$  est défini par l'égalité  $G(f^*(u), v) = G(u, f(v))$ , clairement,  $(f^*)^* = f$ . On dit que  $f$  est auto-adjoint si  $f = f^*$ . Si  $B$  est une base orthonormée quelconque alors  $M(f^*, B) = M(f, B)^*$ , l'endomorphisme  $f$  est auto-adjoint si et seulement si  $M(f, B)$  est hermitien ; dans ce cas, on peut choisir une base  $B$  de vecteurs propres. De plus,  $f$  est une isométrie si et seulement si  $f^{-1} = f^*$ , i.e.  $f$  est une isométrie si et seulement si  $M(f, B)$  est unitaire pour toute base  $B$  orthonormée.

#### 1.4.2.1 Décomposition polaire.

Commençons par le résultat classique suivant

**Lemme 1.67.** *Soit  $(V, G)$  un espace vectoriel complexe doté d'un produit scalaire et  $f \in Aut_{\mathbb{C}}V$ . Alors :*

- (i)  $f \circ f^*$  est auto-adjoint, et toutes ses valeurs propres sont positives. Donc, il existe une base  $G$ -orthonormée  $B$  telle que  $M(f \circ f^*, B)$  est diagonale, réelle et définie positive.
- (ii)  $\exists! h \in Aut_{\mathbb{C}}V$  auto-adjoint et dont toutes les valeurs propres sont positives, tel que  $h \circ h = f \circ f^*$ .
- (iii)  $h^{-1} \circ f \in Iso(V, G)$ .

*Preuve.* (i)  $f \circ f^*$  est auto-adjoint découle directement du fait que  $G(u, f \circ f^*(v)) = G(f^*(u), f^*(v)) = G(f \circ f^*(u), v)$  et puisque  $f$  est injectif donc  $G(f^*(u), f^*(u)) > 0$  pour tout  $u \neq 0$  ce qui montre que  $f \circ f^*$  est définie positive.  
(ii) Remarquons que  $M(h, B)$  est nécessairement la racine positive de la matrice diagonale réelle définie positive  $M(f \circ f^*, B)$ .  
(iii) Étant donné que  $h^{-1}$  est auto-adjoint, nous avons

$$\begin{aligned} G(h^{-1} \circ f(u), h^{-1} \circ f(v)) &= G(h^{-1} \circ h^{-1} \circ f(u), f(v)) \\ &= G((f^*)^{-1}(u), f(v)) = G(f^* \circ (f^*)^{-1}(u), v) = G(u, v) \end{aligned}$$

□

Soit  $H_+(n, \mathbb{C})$  l'ensemble de toutes les matrices hermitiennes à valeurs propres positives.

**Théorème 1.68.** *Pour tout  $A \in GL(n, \mathbb{C})$ , il existe un unique couple  $(P, R) \in H_+(n, \mathbb{C}) \times U(n)$  tel que  $A = PR$ . En outre, l'application*

$$H_+(n, \mathbb{C}) \times U(n) \rightarrow GL(n, \mathbb{C}), \quad (P, R) \mapsto PR \quad (1.20)$$

*est un homéomorphisme.*

*Preuve.* L'existence d'un tel couple vient du fait qu'on peut écrire l'automorphisme  $f_A$  associé à  $A$  comme  $f_A = h \circ r$ , où  $r := h^{-1} \circ f_A$  et  $h$  est donné dans le lemme précédent. Pour l'unicité, on remarque que pour une deuxième décomposition  $f_A = \hat{h} \circ \hat{r}$ , nécessairement  $\hat{h}$  doit être une racine de  $f_A \circ f_A^*$  avec des valeurs propres positives et, par conséquent, elle est nécessairement unique.

La continuité et la bijectivité de [Équation 1.20](#) sont alors évidentes. La continuité de l'inverse pourrait être prouvée en analysant l'unicité du processus de décomposition. Cependant, il s'agit d'une conséquence triviale du théorème classique de l'invariance du domaine de Brouwer, qui stipule que toute application bijective continue entre des sous-ensembles ouverts de  $\mathbb{R}^n$  ou, de façon plus générale, des variétés, est une application ouverte (et donc a un inverse continu).  $\square$

Maintenant, on définit

$$SH_+(2, \mathbb{C}) := H_+(2, \mathbb{C}) \cap SL(2, \mathbb{C}) \quad (1.21)$$

**Corollaire 1.69.** *Si  $A \in SL(2, \mathbb{C})$  et  $P, R$  sont les matrices obtenues dans sa décomposition polaire, alors  $P \in SH_+(2, \mathbb{C})$  et  $R \in SU(2)$ . Par conséquent, l'application restreinte :*

$$SH_+(2, \mathbb{C}) \times SU(2) \rightarrow SL(2, \mathbb{C}) \quad (P, R) \mapsto PR, \quad (1.22)$$

*est un homéomorphisme.*

*Preuve.* Si  $P \in SH_+(2, \mathbb{C})$  et  $R \in SU(2)$  alors  $PR \in SL(2, \mathbb{C})$ . Réciproquement, si  $S \in SL(2, \mathbb{C})$  alors il existe d'après [Théorème 1.68](#) un couple unique  $(P, R) \in H_+(2, \mathbb{C}) \times U(2)$  tel que  $S = PR$ . Remarquons que  $\det(P)$  doit être réel et positif,  $\det(P) \cdot \det(R) = 1$  et  $|\det(R)| = 1$ . Le résultat en découle.  $\square$

*Remarque 1.70.* Clairement,  $SH_+(2, \mathbb{C})$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^3$ , car

$$SH_+(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & x + iy \\ x - iy & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) : x, y \in \mathbb{R}; a, d > 0; ad - x^2 - y^2 = 1 \right\}$$

et on peut supprimer la dernière restriction en substituant  $a = \frac{(1+x^2+y^2)}{d}$ . Ainsi, l'application dans [Équation 1.22](#) récupère que  $SL(2, \mathbb{C})$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}^3$ .

Remarquons aussi que, sous l'homéomorphisme polaire

$$SH_+(2, \mathbb{C}) \times SU(2) \cong SL(2, \mathbb{C}),$$

le quotient  $SL(2, \mathbb{C}) / \{\pm id_2\}$  correspond à  $SH_+(2, \mathbb{C}) \times SU(2) / \{\pm id_2\}$ , qui est homéomorphe à  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{RP}^3$  (rappelons [Remarque 1.63](#) et [Remarque 1.66](#)). Par conséquent, nous avons également :



**Corollaire 1.71.**  $SO_1^\uparrow(4)$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}P^3$ .

#### 1.4.2.2 Rotations et boosts dans $SL(2, \mathbb{C})$ .

Revenons au morphisme spinoriel  $\Lambda : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO_1^\uparrow(4)$  (voir [Équation 1.17](#)), et considérons  $SU(2)$  et  $SH_+(n, \mathbb{C})$  comme des sous-ensembles de  $SL(2, \mathbb{C})$ . Rappelons que  $A \in SO_1^\uparrow(4)$  est appelé une rotation (resp. boost) sur le plan  $\pi \subset \mathbb{L}^4$  si  $\pi$  est spatial (resp. temporel),  $A$  restreint à  $\pi^\perp$  est l'identité et  $A$  restreint à  $\pi$  est une rotation classique à deux dimensions (resp. une transformation de Lorentz restreinte). Si  $A$  est une rotation, toute direction non nulle dans  $\pi^\perp$  est appelée un axe de rotation.

**Proposition 1.72.** Soit  $R \in SL(2, \mathbb{C})$ .  $R \in SU(2)$  si et seulement si  $\Lambda(R) \in \widetilde{SO}(3)$  (inclus dans  $SO_1^\uparrow(4)$ , selon [Équation 1.11](#)), c'est-à-dire que  $\Lambda(R)$  est une rotation, étant  $x_4$  un axe de rotation.

*Preuve.* Soit  $R \in SU(2)$ , on remarque que la matrice de Pauli  $\sigma_4 = Id_2$  représente une direction temporelle de  $(H(2, \mathbb{C}), g_{\mathbb{L}})$ , et c'est un vecteur propre de  $R_*$  de valeur propre 1 puisque  $R_*(\sigma_4) = RId_2R^* = Id_2 = \sigma_4$ . Donc, la restriction de  $R_*$  à  $\sigma_4^\perp = (H(2, \mathbb{C})_*, g_E)$  est une isométrie qui préserve l'orientation et, par conséquent,  $R_*$  a aussi un vecteur propre invariant spatial. La réciproque est immédiate.  $\square$

Pour étudier  $\Lambda(SH_+(2, \mathbb{C}))$ , considérons d'abord le cas simple suivant.

**Lemme 1.73.** Pour  $\alpha > 0$ , ( $\alpha \neq 1$ ), soit  $P_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix} (\in SH_+(2, \mathbb{C}))$ . Alors  $\Lambda(P_\alpha)$  est un boost sur le plan temporel  $\text{span}_{\mathbb{R}}(x_3, x_4)$  avec des valeurs propres  $\alpha^2, \alpha^{-2}$ .

*Preuve.* On peut vérifier aisément que

$$(P_\alpha)_*(\sigma_3 \pm \sigma_4) = P_\alpha(\sigma_3 \pm \sigma_4)P_\alpha = \alpha^{\pm 2} \begin{pmatrix} 1 \pm 1 & 0 \\ 0 & 1 \mp 1 \end{pmatrix} = \alpha^{\pm 2}(\sigma_3 \pm \sigma_4).$$

Le calcul de  $(P_\alpha)_*(\sigma_i) = \sigma_i$  pour  $i = 1, 2$  est simple.  $\square$

**Proposition 1.74.** Si  $P \in SH_+(2, \mathbb{C})$ , il existe un plan temporel  $\pi$  qui contient l'axe  $x_4$  tel que  $\Lambda(P)$  est un boost sur  $\pi$ .

*Preuve.* Comme  $P$  est hermitien défini positif, il existe  $R \in SU(2)$  tel que  $P = R^{-1}P_\alpha R$  pour un certain  $\alpha$ , ( $\neq 1$ ) positif. Soit  $\sigma'_i$  de sorte que  $R_*\sigma'_i = \sigma_i$  pour  $i = 1, 2, 3$ . Clairement,  $P_*\sigma'_i = \sigma'_i$  pour  $i = 1, 2$ . Donc  $P_*$  est un boost sur le plan orthogonal  $\pi = \text{span}_{\mathbb{R}}(\sigma'_3, \sigma_4)$ .  $\square$

*Remarque 1.75.*

- Le résultat précédent est valable pour  $P \in H(2, \mathbb{C}) \cap SL(2, \mathbb{C})$ .
- Réciproquement, soit  $P \in SL(2, \mathbb{C})$  : s'il existe un plan temporel  $\pi \subset \mathbb{L}^4$  qui contient l'axe  $x_4$  tel que  $\Lambda(P)$  est un boost sur  $\pi$  et restreint à l'identité sur  $\pi^\perp$ , alors  $P \in H(2, \mathbb{C}) \cap SL(2, \mathbb{C})$  (i.e. soit  $P$  ou bien  $-P$  appartient à  $SH^+(2, \mathbb{C})$ )

1.4.2.3 *Décomposition de  $SO_1^\uparrow(4)$  en boosts et rotations.*

Les résultats précédents peuvent être résumés dans le théorème suivant, dont la preuve est détaillée pour la commodité du lecteur.

**Théorème 1.76.** *Soit  $L \in SO_1^\uparrow(4)$ . Alors il existe un boost  $B$  sur un plan temporel  $\pi_1$  qui contient l'axe  $x_4$ , et une rotation  $S$  sur un plan spatial  $\pi_2$  orthogonal à l'axe  $x_4$  (mais pas nécessairement orthogonal à  $\pi_1$ ) tels que  $L = BS$ . De plus,  $B$  et  $S$  sont déterminés de manière univoque.*

*Preuve.* Soit  $A \in SL(2, \mathbb{C})$  tel que  $\Lambda(A) = L$  (Théorème 1.65), et prenons sa décomposition polaire  $A = PR$  (Théorème 1.68, Corollaire 1.69). Maintenant,  $L = \Lambda(P)\Lambda(R)$ , où  $\Lambda(P)$  est un boost pour un certain plan  $\pi_1$  (Proposition 1.74) et  $\Lambda(R)$  est une rotation pour un certain plan  $\pi_2$  spatial (Proposition 1.72), d'où le résultat demandé.

Pour l'unicité, supposons que si  $L = \hat{B}\hat{S}$  alors il existe  $\hat{P} \in SH_+(2, \mathbb{C})$  et  $\hat{R} \in SU(2)$  tels que  $\hat{B} = \Lambda(\hat{P})$  et  $\hat{S} = \Lambda(\hat{R})$  (encore par Proposition 1.72, Proposition 1.74, voir aussi Remarque 1.75) et on a également  $\hat{P}\hat{R} = \pm A (= \Lambda^{-1}(L))$  (Théorème 1.65). Par l'unicité de la décomposition polaire (Théorème 1.68) nécessairement  $\hat{P} = P$  et  $\hat{R} = \pm R$ , ce qui implique  $\hat{B} = B$ ,  $\hat{S} = S$ .  $\square$

1.4.3 *Le groupe de Möbius*

Une belle conséquence du morphisme spinoriel  $\Lambda : SL(2, \mathbb{C}) \rightarrow SO_1^\uparrow(4)$  (voir Équation 1.17), est de montrer l'existence d'un isomorphisme naturel entre  $SO_1^\uparrow(4)$  et le groupe de Möbius, avec d'autres relations suggestives.

1.4.3.1 *La sphère de Riemann et le groupe de Möbius.*

Le groupe de Möbius qu'on notera  $Moeb(S_{\mathbb{R}})$  est l'ensemble des transformations fractionnaires linéaires du plan complexe, c'est-à-dire l'ensemble des applications méromorphes du type

$$F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ avec } ad - bc = 1,$$

doté de la composition en tant qu'opération de groupe.

De telles applications sont aussi naturellement identifiables comme les transformations conformes (préservant l'orientation) de la sphère de Riemann  $S_{\mathbb{R}}$ , c'est-à-dire la sphère usuelle de  $\mathbb{R}^3$  considérée comme une variété différentiable. Rappelons qu'il existe plusieurs façons naturelles de considérer cet espace. La première est celle du plan complexe étendu  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . La seconde est la ligne projective complexe  $CP^1$ , c'est-à-dire l'espace quotient :

$$CP^1 := (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) / \sim \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}.$$

Chaque classe  $\left[ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right]$  peut alors être dénotée par  $z = u \setminus v$ , qui s'identifie naturellement, à un élément de  $\mathbb{C}^*$ . De plus, quand  $z \neq 0, \infty$ , il existe deux représentants naturels de la classe, à savoir  $\begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ z^{-1} \end{pmatrix}$ . Ces deux représentants peuvent être considérés comme les images d'un point unique de la sphère de Riemann  $S_R$ , par projection stéréographique à partir des pôles nord et sud.

En résumé, les transformations de Möbius peuvent également être écrites comme suit

$$\begin{aligned} S_R &\rightarrow S_R \\ z = \frac{u}{v} &\mapsto z' = \frac{u'}{v'} = \frac{az + b}{cz + d'} \end{aligned}$$

$$\text{avec } \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

#### 1.4.3.2 Le revêtement spinoriel du groupe de Möbius.

Remarquons que l'action naturelle

$$\begin{aligned} SL(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ \left( A, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right) &\mapsto A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

induit naturellement l'action

$$SL(2, \mathbb{C}) \times \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$$

et, donc, un morphisme de groupe surjective.

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}: SL(2, \mathbb{C}) &\longrightarrow \text{Meob}(S_R) \\ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\longmapsto z \mapsto z' = \frac{az + b}{cz + d'} \end{aligned}$$

Clairement,  $\text{Ker}(\hat{\Lambda}) = \{\pm Id_2\}$  et nous avons un isomorphisme de groupe canonique

$$SL(2, \mathbb{C}) / \{\pm Id_2\} \cong \text{Meob}(S_R).$$

Donc, comme une conséquence directe du [Théorème 1.65](#),

**Corollaire 1.77.** *Les groupes de Lie  $SO_1^\uparrow(4)$  et  $\text{Meob}(S_R)$  sont canoniquement isomorphes.*

1.5 FORME CANONIQUE DE JORDAN DES ENDOMORPHISMES AUTO-ADJOINTS

1.5.1 Forme canonique d'un endomorphisme linéaire.

Pour la commodité du lecteur, nous rappelons tout au long de cette sous-section certains faits bien connus des formes de Jordan.

Nous introduisons la terminologie et fixons les notations en rappelant quelques faits élémentaires concernant la forme canonique de Jordan pour les matrices représentant des endomorphismes linéaires de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un endomorphisme linéaire, si nécessaire, nous considérerons l'extension  $\mathbb{C}$ -linéaire de  $A$  à un endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$ , défini par  ${}^c A(x + iy) = Ax + iAy$ , où  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Étant donné un nombre complexe  $z$ , nous désignerons par  $Im(z)$  sa partie imaginaire.

Nous désignons par  $Sp(A)$  le spectre (ensemble des valeurs propres complexes) de  ${}^c A$ ; si  $\lambda \in Sp(A)$ , notons par  $\mathcal{H}_\lambda(A)$  l'espace propre complexe généralisé de  $A$ .

$$\mathcal{H}_\lambda(A) = \text{Ker} [({}^c A - \lambda Id_n)^n].$$

Comme  $A$  est réel, si  $\lambda \in Sp(A)$  alors évidemment  $\bar{\lambda} \in Sp(A)$ ; nous fixons

$$\mathcal{F}_\lambda(A) = \begin{cases} \mathcal{H}_\lambda(A) & \text{if } \lambda \in Sp(A) \cap \mathbb{R}, \\ \mathcal{H}_\lambda(A) \oplus \mathcal{H}_{\bar{\lambda}}(A) & \text{if } \lambda \in Sp(A) \setminus \mathbb{R}. \end{cases}$$

de sorte que nous pouvons obtenir la décomposition de Jordan de  $\mathbb{C}^n$  comme suit :

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\substack{\lambda \in Sp(A) \\ Im(\lambda) \geq 0}} \mathcal{F}_\lambda(A) \tag{1.23}$$

(voir par exemple [23]). Enfin, soit  $\mathcal{F}_\lambda^o(A)$  l'espace propre généralisé réel de  $A$  :

$$\mathcal{F}_\lambda^o(A) = \mathcal{F}_\lambda(A) \cap \mathbb{R}^n;$$

$\mathcal{F}_\lambda(A)$  est la complexification de  $\mathcal{F}_\lambda^o(A)$ , c'est-à-dire  $\mathcal{F}_\lambda(A) = \mathcal{F}_\lambda^o(A) + i\mathcal{F}_\lambda^o(A)$ , et donc

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\substack{\lambda \in Sp(A) \\ Im(\lambda) \geq 0}} \mathcal{F}_\lambda^o(A)$$

Clairement, si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors  $\dim_{\mathbb{C}} \text{Ker}({}^c A - \lambda Id_n) = \dim_{\mathbb{R}} \text{Ker}(A - \lambda Id_n)$  et  $\mathcal{F}_\lambda^o(A) = \text{Ker}[(A - \lambda Id_n)^n]$ ; la dimension de  $\text{Ker}(A - \lambda Id_n)$  sera appelée la multiplicité géométrique de la valeur propre  $\lambda$ , tandis que la dimension de  $\text{Ker}[(A - \lambda Id_n)^n]$ , la multiplicité algébrique de  $\lambda$ . De plus, pour tout  $\lambda \in Sp(A)$ ,  $\mathcal{F}_\lambda^o(A)$  est un sous-espace réel invariant de  $A$ .



1.5.2 *Forme canonique d'un endomorphisme auto-adjoint pour un produit scalaire arbitraire.*

Considérons maintenant un produit scalaire  $g$  de signature quelconque sur un espace vectoriel  $V$ . Nous désignerons par  ${}^cV$  la complexification de  $V$ , c'est-à-dire l'espace vectoriel complexe défini formellement comme  ${}^cV = \{v + iw : v, w \in V\}$ . De plus,  $\bar{c}g$  désignera la forme hermitienne obtenue à partir de l'extension sesquilinéaire de  $g$  qui est déterminée par la linéarité par rapport à son deuxième argument et la propriété  $\bar{c}g(v, w) = \bar{c}g(w, v)$  pour tout  $v, w \in {}^cV$ . En particulier, cela implique que  $\bar{c}g(\alpha v, w) = \bar{\alpha} \bar{c}g(v, w)$  pour tout  $v, w \in {}^cV$  et tout  $\alpha \in \mathbb{C}$  et que  $\bar{c}g(v, w) = \bar{c}g(\bar{w}, \bar{v})$ .

Nous supposons que  $A : V \rightarrow V$  est un endomorphisme auto-adjoint par rapport au produit scalaire  $g$ , ce qui signifie que  $g(Av, w) = g(v, Aw)$  pour tous les  $v, w \in V$ ; il est immédiat que  $A$  est auto-adjoint par rapport à  $g$  si et seulement si  ${}^cA$  est auto-adjoint par rapport à  $\bar{c}g$ .

**Lemme 1.78.** *Si  $\lambda, \mu \in Sp(A)$  tels que  $\lambda \neq \bar{\mu}$ , alors les espaces propres généralisés  $\mathcal{H}_\lambda(A)$  et  $\mathcal{H}_\mu(A)$  sont  $\bar{c}g$ -orthogonaux. En particulier, si  $\lambda \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}$ , alors  $\mathcal{H}_\lambda(A)$  est isotrope, c'est-à-dire que  $\bar{c}g|_{\mathcal{H}_\lambda(A)} \equiv 0$ . De plus, si  $\lambda \in Sp(A)$ , la restriction de la forme hermitienne  $\bar{c}g$  à  $\mathcal{F}_\lambda(A)$  est non-dégénérée, de même que la restriction de  $g$  à  $\mathcal{F}_\lambda^o(A)$ .*

*Preuve.* Nous montrons par induction sur  $k = k_1 + k_2$  que  $\text{Ker}({}^cA - \lambda Id_n)^{k_1}$  et  $\text{Ker}({}^cA - \mu Id_n)^{k_2}$  sont des espaces  $\bar{c}g$ -orthogonaux (en particulier, cela sera vrai lorsque  $k_1$  et  $k_2$  atteignent les multiplicités algébriques de  $\lambda$  et  $\mu$ , ce qui donne le résultat). Ceci est trivial lorsque  $k = 0$ , ainsi que si  $k_1$  ou  $k_2$  est nul.

Supposons maintenant que  $\text{Ker}({}^cA - \lambda Id_n)^{k_1}$  et  $\text{Ker}({}^cA - \mu Id_n)^{k_2}$  sont des espaces  $\bar{c}g$ -orthogonaux pour toutes les paires  $k_1$  et  $k_2$  telles que  $k_1 + k_2 < k$ . Soit  $s_1, s_2 \geq 1$  tel que  $s_1 + s_2 = k$ , et soit  $v \in \text{Ker}({}^cA - \lambda Id_n)^{s_1}$  et  $w \in \text{Ker}({}^cA - \mu Id_n)^{s_2}$ . Puisque  $({}^cA - \lambda Id_n)v \in \text{Ker}({}^cA - \lambda Id_n)^{s_1-1}$  et  $({}^cA - \mu Id_n)w \in \text{Ker}({}^cA - \mu Id_n)^{s_2-1}$ , par l'hypothèse d'induction, nous avons :

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{c}g(({}^cA - \lambda Id_n)v, w) = \bar{c}g({}^cAv, w) - \bar{\lambda} \cdot \bar{c}g(v, w), \\ 0 &= \bar{c}g(v, ({}^cA - \mu Id_n)w) = \bar{c}g(v, {}^cAw) - \mu \cdot \bar{c}g(v, w), \end{aligned}$$

ce qui force  $\bar{\lambda} \cdot \bar{c}g(v, w) = \mu \cdot \bar{c}g(v, w)$  puisque  ${}^cA$  est auto-adjoint. Ceci démontre le résultat cherché.

L'orthogonalité des espaces propres généralisés montre que [Équation 1.23](#) est en fait une décomposition directe  $\bar{c}g$ -orthogonale de  ${}^cV$ , d'où il résulte que la restriction de  $\bar{c}g$  à chaque  $\mathcal{F}_\lambda(A)$  est non-dégénérée, puisque  $\bar{c}g$  est non-dégénéré sur  ${}^cV$ . Enfin, le fait que la restriction de  $\bar{c}g$  sur  $\mathcal{F}_\lambda(A)$  est non-dégénérée est équivalent au fait que la restriction de  $g$  à  $\mathcal{F}_\lambda^o(A)$  est non-dégénérée.  $\square$

Afin d'étudier la restriction de  $g$  aux espaces propres généralisés de  $A$ , nous allons maintenant déterminer la forme de la matrice représentant  $g$  dans

une base de Jordan convenable pour  $A$ . **Lemme 1.78** nous dit qu'il n'est pas restrictif de considérer le cas où  $A$  a seulement deux valeurs propres conjuguées complexes ou une valeur propre réelle : une fois que la représentation matricielle  $g_\lambda$  de la restriction  $g|_{\mathcal{F}_\lambda(A)}$  aura été déterminée pour chaque  $\lambda \in Sp(A)$  avec  $Im(\lambda) \geq 0$ , la représentation matricielle de  $g$  sera donnée par la somme directe de toutes ces restrictions  $g_\lambda$ .

Notons  $\mathfrak{p}_k$  la matrice de permutation de taille  $k \times k$  définie par  $\mathfrak{p}_k = [\delta_{i,k-j+1}]_{i,j=1}^k$ , ainsi une matrice  $\mathfrak{p}_n$  sera une matrice  $n \times n$  de la forme :

$$\mathfrak{p}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.26}$$

Nous distinguerons dans les deux résultats qui suivent, les cas dans lesquels la valeur propre  $\lambda$  est réelle ou non-réelle. Donnons quelques lemmes techniques :

**Lemme 1.79.** *Si  $W < V$ , alors  $A(W) \subset W$  implique que  $A(W^\perp) \subset W^\perp$ .*

*Preuve.* Soient  $v \in W^\perp$  et  $w \in W$ . Alors en utilisant le fait que  $A$  est auto-adjoint et que  $Aw \in W$ , nous en déduisons que  $g(Av, w) = g(v, Aw) = 0$ , d'où le résultat demandé.  $\square$

**Lemme 1.80.** *Soit  $a_j = (A - \lambda Id_n)^{j-1} a_1$  pour  $j = 1, \dots, s$ ; de sorte que  $(A - \lambda Id_n)a_s = 0$  (i.e.  $a_s \neq 0$  et  $a_{s+1} = 0$ ). Alors les vecteurs  $(a_j)_{1 \leq j \leq s}$  sont linéairement indépendants.*

*Preuve.* Supposons par absurde qu'il existe une combinaison linéaire non triviale

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_s a_s = 0$$

avec  $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{R}$  et soit  $j \in \{1, \dots, s\}$  le plus petit nombre tel que  $\alpha_j \neq 0$ . Alors

$$0 = (A - \lambda Id_n)^{s-j}(0) = (A - \lambda Id_n)^{s-j}(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_s a_s) = \alpha_j a_s,$$

ce qui est contradictoire puisque  $\alpha_j \neq 0$ .  $\square$

En adaptant la preuve de [[23], Théorème 3.3], on obtient :

**Proposition 1.81.** *Soit  $\lambda$  une valeur propre réelle de  $A$ , avec  $r = \dim(\text{Ker}(A - \lambda Id_n))$  et  $n = \dim V$ . Alors, l'espace propre généralisé réel peut être écrit comme une somme directe  $g$ -orthogonale :*

$$\text{Ker}(A - \lambda Id_n)^n = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{V}_{\lambda,i},$$

pour laquelle la propriété suivante est vérifiée :

- (i) pour tout  $i$ , il existe une base  $v_1^i, \dots, v_{n_i}^i$  de  $\mathcal{V}_{\lambda,i}$  et un nombre  $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$  tels que dans cette base la représentation matricielle de  $A|_{\mathcal{V}_{\lambda,i}}$  est donnée par 1.24, et la représentation matricielle de  $g|_{\mathcal{V}_{\lambda,i}}$  est donnée par  $\epsilon_i \cdot \mathfrak{p}_{n_i}$ . En particulier,
  - (a)  $g|_{\mathcal{V}_{\lambda,i}}$  est non-dégénérée pour tout  $i = 1, \dots, r$ ;
  - (b) chaque  $\mathcal{V}_{\lambda,i}$  est  $A$ -invariant;

*Preuve.* Il suffira de montrer l'existence d'un nombre  $\epsilon = \pm 1$ , d'un sous-espace  $\mathcal{V} \subset \text{Ker}(A - \lambda Id_n)^n$  et d'une base  $w_1, \dots, w_s$  de  $\mathcal{V}$  avec les propriétés :

1.  $Aw_1 = \lambda w_1$  et  $Aw_j = w_{j-1} + \lambda w_j$  pour  $j = 2, \dots, s$ ;
2.  $g(w_j, w_k) = \epsilon \delta_{j+k, s+1}$  pour tout  $j, k = 1, \dots, s$ .

Les deux propriétés ci-dessus impliquent que  $\mathcal{V}$  est  $A$ -invariant et que la restriction  $g|_{\mathcal{V}}$  est non-dégénérée. La représentation matricielle de  $A|_{\mathcal{V}}$  dans la base  $w_1, \dots, w_s$  est donnée par 1.24 et la représentation matricielle de  $g|_{\mathcal{V}}$  est  $\epsilon \cdot \mathfrak{p}_s$ ; la conclusion découlera facilement d'un argument d'induction en considérant le complémentaire  $g$ -orthogonal de  $\mathcal{V}$  dans  $\mathcal{F}_\lambda^o(A)$  (voir Lemme 1.79).

Pour déduire l'existence d'un tel sous-espace  $\mathcal{V}$  avec la base désirée, raisonnons comme suit. Soit  $s \geq 1$  tel que  $(A - \lambda Id_n)^s|_{\text{Ker}(A - \lambda Id_n)^n} = 0$ , mais  $(A - \lambda Id_n)^{s-1}|_{\text{Ker}(A - \lambda Id_n)^n} \neq 0$ .

Puisque  $B = g((A - \lambda Id_n)^{s-1}, \cdot)$  est une forme bilinéaire symétrique non nulle sur  $\text{Ker}(A - \lambda Id_n)^n$ , il doit exister un vecteur  $a_1 \in \text{Ker}(A - \lambda Id_n)^n$  tel que  $B(a_1, a_1) \neq 0$ . On peut normaliser  $a_1$  de telle sorte que  $g((A - \lambda Id_n)^{s-1}a_1, a_1) = \epsilon$ , pour certains  $\epsilon \in \{-1, 1\}$ ; si  $s = 1$  la preuve est terminée en fixant  $w_1 = a_1$ , donc nous supposons par suite que  $s > 1$ .

Pour  $j = 1, \dots, s$ , définissons  $a_j = (A - \lambda Id_n)^{j-1}a_1$  et soit  $\mathcal{V}$  l'espace engendré par les  $(a_j)_{1 \leq j \leq s}$ ; rappelons que les  $(a_j)_{1 \leq j \leq s}$  sont linéairement indépendants (voir Lemme 1.80). Pour  $j + k = s + 1$ , on a :

$$\begin{aligned} g(a_j, a_k) &= g((A - \lambda Id_n)^{j-1}a_1, (A - \lambda Id_n)^{k-1}a_1) \\ &= g((A - \lambda Id_n)^{j+k-2}a_1, a_1) = g((A - \lambda Id_n)^{s-1}a_1, a_1) = \epsilon, \end{aligned} \tag{1.27}$$

tandis que si  $j + k > s + 1$  on a :

$$g(a_j, a_k) = g((A - \lambda Id_n)^{j+k-2}a_1, a_1) = 0. \tag{1.28}$$



Maintenant, posons  $b_1 = a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_s a_s$ , avec  $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{R}$  et posons  $b_j = (A - \lambda Id_n)^{j-1} b_1$  pour  $j = 2, \dots, s$ . Remarquons que

$$g(b_j, b_k) = g((A - \lambda Id_n)^{j-1} b_1, (A - \lambda Id_n)^{k-1} b_1) = g((A - \lambda Id_n)^{j+k-2} b_1, b_1), \quad (1.29)$$

et

$$b_j = a_j + \sum_{k=2}^{s-j+1} \alpha_k a_{j+k-1} \quad (1.30)$$

donc,  $g(b_j, b_k) = 0$  si  $j + k > s + 1$  et  $g(b_j, b_k) = \epsilon$  si  $j + k = s + 1$  quelque soit le choix des coefficients réels  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_s$ . Nous allons maintenant choisir ces coefficients réels de telle sorte que  $g(b_1, b_k) = 0$  pour tout  $k = 1, \dots, s - 1$ , ce qui impliquera que  $g(b_j, b_k) = 0$  chaque fois que  $k + j < s + 1$ . Un tel choix des  $\alpha_i$  est possible (et unique). En effet, l'égalité  $g(b_1, b_j) = 0$  est donnée, compte tenu de [Équation 1.27](#), [Équation 1.28](#) et [Équation 1.30](#) par :

$$\begin{aligned} 0 &= g(a_1 + \sum_{k=2}^s \alpha_k a_k, a_j + \sum_{k=2}^{s-j+1} \alpha_k a_{j+k-1}) \\ &= g(a_1, a_j) + 2\epsilon \alpha_{s-j+1} + \text{termes en } \alpha_2, \dots, \alpha_{s-j}; \end{aligned} \quad (1.31)$$

de sorte que les éléments de la famille  $(\alpha_j)_{1 \leq j \leq s}$  peuvent être déterminés récursivement en prenant  $j = s - 1, s - 2, \dots, 1$  dans l'égalité ci-dessus. En appliquant [Lemme 1.80](#), on en déduit que les  $b_j$  forment une base de  $\mathcal{V}$ . Enfin, posons  $w_j = b_{s-j+1}$  pour tout  $j = 1, \dots, s$ ; un calcul immédiat montre que les  $w_j$  satisfont les propriétés requises.  $\square$

**Proposition 1.82.** Soit  $\lambda \in \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{R}$ , avec  $\lambda = a + bi$ , valeur propre complexe de  $A$ , avec  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $r = \dim(\text{Ker}({}^c A - \lambda Id_n))$  et  $n = \dim V$ . Alors, l'espace propre généralisé réel peut être écrit comme une somme directe  $g$ -orthogonale :

$$\mathcal{F}_\lambda^o(A) = \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{V}_{\lambda,i} \oplus \mathcal{V}_{\bar{\lambda},i}$$

pour laquelle la propriété suivante est vérifiée :

- (i) pour tout  $i$ , il existe une base  $v_1^i, w_1^i, v_2^i, w_2^i, \dots, v_{n_i}^i, w_{n_i}^i$  de  $\mathcal{V}_{\lambda,i} \oplus \mathcal{V}_{\bar{\lambda},i}$  avec tous les produits scalaires sont nuls sauf  $g(v_j^i, v_k^i) = 1 = -g(w_j^i, w_k^i)$  si  $j + k = n_i + 1$ ; tels que dans cette base la représentation matricielle de  $A|_{\mathcal{V}_{\lambda,i} \oplus \mathcal{V}_{\bar{\lambda},i}}$  est donnée par [1.25](#), avec  $a$  et  $b$  tel que  $\lambda = a + bi$ . En particulier,

- (a)  $g|_{\mathcal{V}_{\lambda,i} \oplus \mathcal{V}_{\bar{\lambda},i}}$  est non-dégénérée pour tout  $i = 1, \dots, r$ ;  
(b) chaque  $\mathcal{V}_{\lambda,i} \oplus \mathcal{V}_{\bar{\lambda},i}$  est  $A$ -invariant;

*Preuve.* Montrons d'abord que l'énoncé du théorème peut être réduit à la forme canonique complexe suivante.

**demande 1 :** il suffira de montrer l'existence d'un sous-espace  $\mathcal{V} \subset \text{Ker}({}^c A - \lambda Id_n)$  et d'une base  $z_1, \dots, z_s$  de  $\mathcal{V}$  avec les propriétés suivantes :

1.  ${}^c A z_1 = \lambda z_1$  et  ${}^c A z_j = z_{j-1} + \lambda z_j$  pour  $j = 2, \dots, s$ ;
2.  ${}^c g(z_j, \bar{z}_k) = 2\delta_{j+k, s+1}$  pour tout  $j, k = 1, \dots, s$ .

En effet, considérons  $\mathcal{V} \oplus \overline{\mathcal{V}}$ , où  $\overline{\mathcal{V}} = \{\bar{v} : v \in \mathcal{V}\}$ , et soit  $v_i$  et  $w_i$  respectivement les parties réelle et imaginaire de  $z_i$ , de sorte que  $z_i = v_i + iw_i$  pour  $i = 1, \dots, s$ . La première propriété ci-dessus implique que

$$\begin{aligned} Av_1 &= {}^cA\left(\frac{1}{2}(z_1 + \bar{z}_1)\right) = \frac{1}{2}(\lambda z_1 + \bar{\lambda}\bar{z}_1) = av_1 - bw_1; \\ Aw_1 &= {}^cA\left(\frac{-i}{2}(z_1 - \bar{z}_1)\right) = \frac{-i}{2}(\lambda z_1 - \bar{\lambda}\bar{z}_1) = bv_1 + aw_1 \end{aligned} \quad (1.32)$$

et

$$\begin{aligned} Av_j &= {}^cA\left(\frac{1}{2}(z_j + \bar{z}_j)\right) = \frac{1}{2}(z_{j-1} + \bar{z}_{j-1}) + \frac{1}{2}(\lambda z_j + \bar{\lambda}\bar{z}_j) = v_{j-1} + av_j - bw_j; \\ Aw_j &= {}^cA\left(\frac{-i}{2}(z_j - \bar{z}_j)\right) = \frac{-i}{2}(z_{j-1} - \bar{z}_{j-1}) - \frac{i}{2}(\lambda z_j - \bar{\lambda}\bar{z}_j) = w_{j-1} + bv_j + aw_j \end{aligned} \quad (1.33)$$

pour  $j = 2, \dots, s$ , ce qui est parfaitement en accord avec 1.25. De plus, la seconde propriété ci-dessus et le fait que  $\text{Ker}({}^cA - \lambda Id_n)^n$  est isotrope (voir Lemme 1.78) impliquent que

$$\begin{aligned} g(v_j, v_k) &= \frac{1}{4} {}^{\bar{c}}g(z_j + \bar{z}_j, z_k + \bar{z}_k) = \delta_{j+k, s+1}; \\ g(w_j, w_k) &= \frac{1}{4} {}^{\bar{c}}g(z_j - \bar{z}_j, z_k - \bar{z}_k) = -\delta_{j+k, s+1}; \\ g(v_j, w_k) &= -i \frac{1}{4} {}^{\bar{c}}g(z_j + \bar{z}_j, z_k - \bar{z}_k) = 0. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Par conséquent,  $\mathcal{V} \oplus \overline{\mathcal{V}}$  est  $A$ -invariant et la restriction  $g|_{\mathcal{V} \oplus \overline{\mathcal{V}}}$  est non-dégénérée. La représentation matricielle de  $A|_{\mathcal{V} \oplus \overline{\mathcal{V}}}$  dans la base  $v_1, w_1, \dots, v_s, w_s$  est donnée par 1.25 et les  $g$ -produits entre les éléments de la base sont comme requis; la conclusion découlera facilement d'un argument d'induction en considérant le complémentaire  ${}^{\bar{c}}g$ -orthogonal de  $\mathcal{V}$  dans  $\text{Ker}({}^cA - \lambda Id_n)$ .

Pour déduire l'existence d'un tel sous-espace  $\mathcal{V}$  avec la base désirée, raisonnons comme suit. Il existe  $s \geq 1$  avec la propriété que  $({}^cA - \lambda Id_n)^s|_{\text{Ker}({}^cA - \lambda Id_n)^n} = 0$  mais  $({}^cA - \lambda Id_n)^{s-1}|_{\text{Ker}({}^cA - \lambda Id_n)^n} \neq 0$ . Nous aurons besoin de la propriété suivante :

**demande II** : il existe un vecteur  $a_1 \in \text{Ker}({}^cA - \lambda Id_n)^n$  tel que

$${}^{\bar{c}}g(({}^cA - \lambda Id_n)^{s-1}a_1, \bar{a}_1) = 2.$$

On définit l'application

$$B : \mathcal{F}_\lambda(A) \times \mathcal{F}_\lambda(A) \rightarrow \mathbb{C}, \quad B(v, w) = {}^{\bar{c}}g(({}^cA - \lambda Id_n)^{s-1}v, w),$$

pour tout  $v, w \in \mathcal{F}_\lambda(A)$ . Clairement cette application est sesquilinéaire et remarquons que par le choix de  $s$ , on a  $({}^cA - \lambda Id_n)^{s-1}v \in \text{Ker}({}^cA - \lambda Id_n)$  pour tout  $v \in \mathcal{F}_\lambda(A)$  ainsi que  $B$  n'est pas identiquement nulle. Alors il

existe  $z$  tel que  $B(z, z) \neq 0$ . Il est facile de voir qu'il existe  $v, w \in \mathcal{H}_\lambda(A)$  tel que  $z = v + \bar{w}$ . Ainsi

$$0 \neq B(z, z) = B(v, v) + B(\bar{w}, \bar{w}) + 2\Re(B(v, \bar{w})).$$

Comme, d'après [Lemme 1.78](#),  $\mathcal{H}_\lambda(A)$  et  $\mathcal{H}_{\bar{\lambda}}(A)$  sont  $\bar{c}g$ -isotropes, d'où  $B(v, v) = B(\bar{w}, \bar{w}) = 0$ , et de l'équation ci-dessus découle que  $\Re(B(v, \bar{w})) \neq 0$ . Or  $B(v + w, \bar{v} + \bar{w}) = B(v, \bar{v}) + B(w, \bar{w}) + 2\Re(B(v, \bar{w}))$ , on trouve que l'un des trois nombres  $B(v + w, \bar{v} + \bar{w})$ ,  $B(v, \bar{v})$  et  $B(w, \bar{w})$  est non nul. Alors l'un des vecteurs  $v, w$  ou  $v + w$  doit satisfaire la condition requise dans **demande II**.

Pour  $j = 1, \dots, s$ , définissons  $a_j = ({}^c A - \lambda Id_n)^{j-1} a_1$  et soit  $\mathcal{V}$  l'espace engendré par les  $(a_j)_{1 \leq j \leq s}$ ; par [Lemme 1.80](#),  $(a_j)_{1 \leq j \leq s}$  sont linéairement indépendants. Pour  $j + k = s + 1$ , on a :

$$\begin{aligned} {}^c g(a_j, \bar{a}_k) &= \bar{c}g(({}^c A - \lambda Id_n)^{j-1} a_1, ({}^c A - \bar{\lambda} Id_n)^{k-1} \bar{a}_1) \\ &= {}^c g(({}^c A - \lambda Id_n)^{j+k-2} a_1, \bar{a}_1) = \bar{c}g(({}^c A - \lambda Id_n)^{s-1} a_1, \bar{a}_1) = 2; \end{aligned} \quad (1.35)$$

tandis que si  $j + k > s + 1$  on a :

$$\bar{c}g(a_j, \bar{a}_k) = \bar{c}g(({}^c A - \lambda Id_n)^{j+k-2} a_1, \bar{a}_1) = 0. \quad (1.36)$$

Maintenant, posons  $b_1 = a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_s a_s$ , avec  $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{C}$  et  $b_j = ({}^c A - \lambda Id_n)^{j-1} b_1$  pour  $j = 1, \dots, s$ . Remarquons que  $\bar{c}g(b_j, \bar{b}_k) = 0$  si  $j + k > s + 1$  et  $\bar{c}g(b_j, \bar{b}_k) = 2$  si  $j + k = s + 1$  et ceci quelque soit le choix des coefficients complexes  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_s$ . Nous allons maintenant choisir ces coefficients complexes de telle sorte que  $\bar{c}g(b_1, \bar{b}_j) = 0$  pour tout  $j = 1, \dots, s - 1$ , ce qui impliquera que  $\bar{c}g(b_k, \bar{b}_j) = 0$  chaque fois que  $k + j < s + 1$ . Un tel choix des  $\alpha_i$  est en effet possible (et unique); à savoir, l'égalité  $\bar{c}g(b_1, \bar{b}_j) = 0$  est donnée, compte tenu de [Équation 1.35](#) et [Équation 1.36](#), par :

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{c}g(a_1 + \sum_{k=2}^s \alpha_k a_k, \bar{a}_j + \sum_{k=2}^{s-j+1} \bar{\alpha}_k \bar{a}_{j+k-1}) \\ &= \bar{c}g(a_1, \bar{a}_j) + 4\bar{\alpha}_{s-j+1} + \text{termes en } \alpha_2, \dots, \alpha_{s-j}; \end{aligned} \quad (1.37)$$

de sorte que les éléments de la famille  $(\alpha_j)_{1 \leq j \leq s}$  peuvent être déterminés récursivement en prenant  $j = s - 1, s - 2, \dots, 1$  dans l'égalité ci-dessus. En appliquant [Lemme 1.80](#), on en déduit que les  $b_j$  forment une base de  $\mathcal{V}$ . Enfin, posons  $z_j = b_{s-j+1}$  pour tout  $j = 1, \dots, s$ ; un calcul immédiat montre que les  $z_j$  ont les propriétés requises de **demande I**.  $\square$

1.5.3 *Forme canonique de Jordan d'un endomorphisme auto-adjoint par rapport à un produit scalaire Lorentzien.*

Considérons maintenant le cas où le produit scalaire est Lorentzien. Le nombre de formes canoniques est considérablement réduit. On notera  $D_k$  une matrice diagonale de taille  $k \times k$ .

**Proposition 1.83.** *Soit  $(V, g)$  un espace vectoriel Lorentzien et  $A : V \rightarrow V$  un endomorphisme symétrique relativement à  $g$ . On a alors les 4 possibilités suivantes :*

(i) *il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de  $A$  est diagonale ou de la forme*

$$\left( \begin{array}{c|cc} D_{n-2} & & 0 \\ \hline & a & b \\ 0 & -b & a \end{array} \right)$$

(ii) *il existe une base  $e_1, e_2, \dots, e_{n-2}, u, v$  avec  $g(e_i, e_i) = 1, \forall i = 1, \dots, n-2$ ,  $g(u, v) = 1$  et les autres produits sont nuls, dans laquelle la matrice de  $A$  soit*

$$\left( \begin{array}{c|cc} D_{n-2} & & 0 \\ \hline & \lambda & \epsilon \\ 0 & 0 & \lambda \end{array} \right) \text{ avec } \epsilon = \pm 1, \text{ ou } \left( \begin{array}{c|ccc} D_{n-3} & & & 0 \\ \hline & \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ & 0 & 0 & \lambda \end{array} \right)$$

*Preuve.* Considérons un sous-espace  $\mathcal{V}_{\lambda, i}$  de Proposition 1.81 et  $n_i = \dim \mathcal{V}_{\lambda, i}$ . Donc la base de Proposition 1.81 a un indice égal à

$$\begin{cases} n_i/2, & \text{si } n_i \text{ est pair} \\ (n_i - 1)/2 \text{ ou } (n_i + 1)/2, & \text{si } n_i \text{ est impair} \end{cases} \quad (1.38)$$

c'est parce que tout couple  $\{v_j^i, v_k^i\}$  tel que  $j + k = s + 1, j \neq k$  génère un sous-espace de dimension 2, qui est orthonormé aux autres éléments de la base et d'indice 1. Considérons maintenant un sous-espace  $\mathcal{V}_{\lambda, i} \oplus \mathcal{V}_{\lambda, i}^{\perp}$  de dimension  $2s$  comme dans Proposition 1.82. L'indice de ce sous-espace est égal à  $s$ . En effet, si  $j + k = n_i + 1$  et  $j \neq k$ , alors le sous-espace généré par  $\{v_j^i, v_k^i, w_j^i, w_k^i\}$  est orthogonal aux autres éléments de la base et sa représentation matricielle de  $g$  est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

qui a clairement l'indice 2. Si  $j + k = n_i + 1$  et  $j = k$ , alors le sous-espace généré par  $\{v_j^i, w_j^i\}$  a l'indice 1.

En résumé, dans le cas Lorentzien on peut trouver un (et un seul) bloc de Jordan correspondant soit à une valeur propre réelle d'ordre au plus 3, soit à une valeur propre complexe d'ordre au plus 2. En fait, s'il existe un bloc de Jordan réelle de d'ordre 2, la base associée  $u, v$  de [Proposition 1.81](#) donne une matrice pour la métrique  $g$

$$\begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix}.$$

Considérant la base  $u, \epsilon v$  on obtient facilement le premier cas de [item \(ii\)](#). S'il existe un bloc de Jordan réelle d'ordre 3 de base  $u, e, v$  telle que  $g(u, v) = g(e, e) = \epsilon$  et tous les autres produits sont nuls, alors  $\epsilon = 1$ , sinon  $\text{span}_{\mathbb{R}}(u, e, v)$  aurait l'indice 2. En réordonnant la base en  $e, u, v$  on obtient immédiatement le second cas en [item \(ii\)](#). S'il existe un bloc de Jordan complexe d'ordre 2, alors on obtient facilement le cas [item \(i\)](#).  $\square$

# Théorie générale des variétés pseudo-Riemanniennes

---

Tout au long du présent chapitre,  $M$  désignera une variété différentiable de dimension finie  $n$ . Sauf mention explicite du contraire, les objets définis seront lisses, et ce terme signifiera (aussi bien pour la variété  $M$  que pour toute fonction, champ tensoriel, etc...)  $C^\infty$  dérivable. On supposera que  $M$  est de Hausdorff et paracompact (rappelons que, si  $M$  est connexe, la dernière propriété est équivalente au deuxième axiome de dénombrabilité).

## 2.1 SIMILITUDES ENTRE LA GÉOMÉTRIE RIEMANNIENNE ET PSEUDO-RIEMANNIENNE

### 2.1.1 Concept.

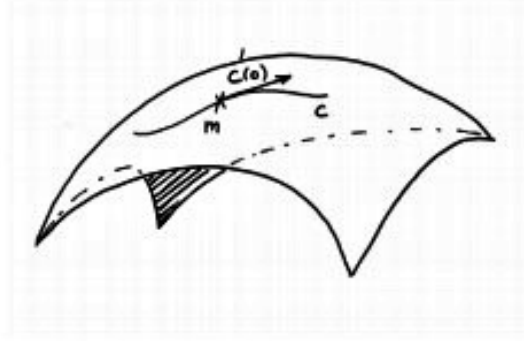
**Définition 2.1.** Une métrique pseudo-Riemannienne  $g$  sur une variété  $M$  est un champ de tenseurs de produits scalaires (tenseurs symétriques à 2-covariants non-dégénérés en tout point) d'indice constant  $\nu \in \{0, 1, \dots, n\}$ . Le couple  $(M, g)$  sera appelé *variété pseudo-Riemannienne*. Si  $\nu = 0$  on dira que  $(M, g)$  est *Riemannien*, et si  $\nu \neq 0, n$ ,  $(M, g)$  est *indéfini*. En particulier, si  $\nu = 1, n \geq 2$ , alors  $(M, g)$  est *Lorentzien*.

Autrement dit,  $g$  affecte à tout point  $p \in M$ , un produit scalaire  $g_p$  défini sur l'espace tangent  $T_p M$ , d'indice constant  $\nu_p = \nu$ .

*Remarque 2.2.* Nous voudrions souligner plusieurs faits :

1. L'exigence que l'indice  $\nu$  soit choisi constant ne doit être prise en compte que lorsque  $M$  n'est pas connexe (il n'est pas difficile de montrer que, si  $g$  est non-dégénéré en tout point, l'indice doit être localement constant).
2. Il est bien connu que, sur une variété différentiable, la condition topologique de paracompacité est équivalente à l'existence d'une métrique Riemannienne, et cette propriété est équivalente à la métrisabilité. On peut montrer que l'existence d'une métrique pseudo-Riemannienne implique la paracompacité (voir [[55], p. 8-52] et [40]). Cependant, il existe des restrictions topologiques sur les indices de métriques pseudo-Riemanniennes qu'admet une variété différentiable, comme nous le verrons explicitement dans le cas Lorentzien.

Toutes les propriétés que nous avons étudiées dans le premier Chapitre (voir [chapitre 1](#)) sur les produits scalaires et les tenseurs peuvent être appliquées à

FIGURE 2.1 – Vecteur tangent  $v \in T_m M$ , le long d'une courbe passant par  $m$ 

tout espace tangent  $(T_p M, g_p)$ . Soient  $\mathfrak{X}(M)$  l'ensemble des champs de vecteurs et  $\Lambda^1(M)$  l'ensemble des (1)-formes différentielles sur  $M$ , respectivement, tous les deux avec leurs opérations naturelles. En appliquant les isomorphismes  $\flat$  et  $\sharp$  à chaque espace tangent, tout  $X \in \mathfrak{X}(M)$  donne une forme différentielle unique  $X^\flat \in \Lambda^1(M)$  qui satisfait  $X^\flat(Y) = g(X, Y)$  pour tout  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Inversement, tout  $\omega \in \Lambda^1(M)$  détermine univoquement le champ de vecteurs  $\omega^\sharp \in \mathfrak{X}(M)$  caractérisé par  $\omega(Y) = g(\omega^\sharp, Y)$ , pour tout  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

On notera  $\mathbb{R}_\nu^n$ , l'ensemble  $\mathbb{R}^n$  doté de la métrique pseudo-Riemannienne usuelle  $g_\nu$  d'indice  $\nu$ , soit :

$$g_\nu = \sum_{i=1}^n \epsilon_i (dx^i)^2,$$

étant  $\epsilon_i = 1$  pour  $i = 1, \dots, n - \nu$  et  $\epsilon_i = -1$  pour  $i = n - \nu + 1, \dots, n$ .

### 2.1.2 Connexion de Levi-Civita

Comme dans le cas Riemannien, chaque métrique pseudo-Riemannienne a une connexion affine associée canoniquement. Par conséquent, dans chaque variété pseudo-Riemannienne, nous pouvons dériver des champs de vecteurs et à partir d'eux, tout type de champs de tenseurs.

**Théorème 2.3.** *Soit  $(M, g)$  une variété pseudo-Riemannienne. Alors il existe une unique connexion affine  $\nabla$  ( $\equiv \nabla^g$ ) qui vérifie :*

(i)  $\nabla$  est symétrique,

$$\nabla_Y X - \nabla_X Y = [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

(ii)  $\nabla$  parallélise  $g$ , c'est à dire que

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z), \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

La connexion affine ainsi définie est appelée la connexion de Levi-Civita de la métrique  $g$ .

*Idée de la preuve.* La preuve de ce résultat est tout à fait analogue au lemme fondamental de la géométrie Riemannienne, c'est-à-dire :

1. Vérifier que, si la connexion affine existe, alors elle doit satisfaire la formule de Koszul :

$$2g(\nabla_V W, X) = V(g(W, X)) + W(g(X, V)) - X(g(V, W)) - g(V, [W, X]) + g(W, [X, V]) + g(X, [V, W]); \quad (2.1)$$

pour tout  $X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$ . Cette formule relie la forme différentielle  $(\nabla_V W)^b$  (premier membre) avec une expression qui dépend de  $g$  et du crochet de Lie (deuxième membre). En conséquence, en supposant l'existence de  $\nabla$ , il est déterminé de manière univoque par [Équation 2.1](#).

2. Vérifier que la formule de Koszul permet de définir une connexion affine et que cette connexion affine vérifie les conditions [item \(i\)](#) et [item \(ii\)](#) de l'énoncé du théorème.

□

En particulier, si  $(U, \phi = (x^1, \dots, x^n))$  est une carte locale de  $M$  et  $\partial_i (\equiv \partial / (\partial_{x^i}))$  désigne le  $i$ -ème champ de vecteurs de coordonnées, la formule de Koszul permet de calculer immédiatement les symboles Christoffel  $\nabla_{\partial_i} \partial_j$  de  $\nabla$ . C'est-à-dire si

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \partial_k,$$

alors

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{li} - \partial_l g_{ij}).$$

Bien évidemment pour  $\mathbb{R}_v^n$  aux coordonnées usuelles,  $\nabla_{\partial_i} \partial_j \equiv 0$ .

### 2.1.3 Éléments associés à la connexion affine.

Comme toute connexion affine, celle de Levi-Civita possède les éléments associés suivants :

- Dérivée covariante de tenseurs de champs de vecteurs arbitraires, également notée en utilisant  $\nabla$ .
- Dérivée covariante  $D/dt$  des champs de vecteurs et de tenseurs sur des courbes lisses par morceaux sur  $M$ ,  $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ .
- Transport parallèle de champs de tenseurs le long d'une telle courbe  $\gamma$ . Le transport parallèle des champs de vecteurs (et, donc, pour tous les champs de tenseurs) devient une isométrie pour la connexion de Levi-Civita.



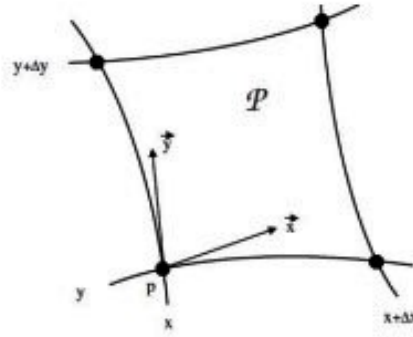


FIGURE 2.2 – Parallélogramme infinitésimal

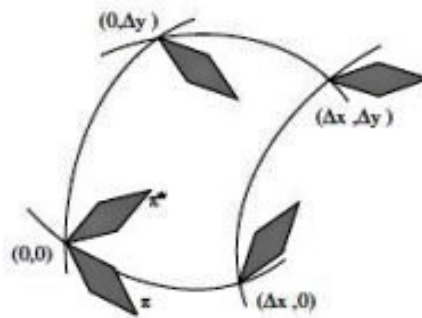


FIGURE 2.3 – Transport parallèle d'un plan le long d'un parallélogramme

- Les géodésiques, c'est-à-dire les courbes  $\gamma$  dont le champ vecteur vitesse est parallèle *i.e.*  $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$ . Pour toute connexion affine, si la courbe  $\gamma$  est une géodésique inextensible, alors elle est univoquement déterminée par sa vitesse en un point  $\gamma'(t_0) \in T_{\gamma(t_0)}M$ . Pour celui de Levi-Civita, nous avons en plus que  $g(\gamma'(t_0), \gamma'(t_0))$  est constante. Cela permet de parler de géodésiques spatiales, temporelles ou lumière selon le caractère causal de  $\gamma'(t_0)$ .

Comme nous le verrons plus tard, aucune des conclusions du théorème de Hopf-Rinow pour les variétés Riemanniennes ne tient pour les connexions de Levi-Civita dans le cas indéfini. Par exemple, il existe des variétés Lorentziennes compactes qui sont incomplètes et non géodésiquement connexe. Cependant, on peut définir l'application exponentielle  $\exp$  pour chaque connexion de Levi-Civita, comme pour chaque connexion affine. À savoir, l'exponentielle à  $p \in M$  qu'est définie par :

$$\exp_p : W_p \subseteq T_pM \rightarrow M, \quad \exp_p(v) = \gamma_v(1);$$

où  $\gamma_v$  est l'unique géodésique inextensible de vitesse égale à  $v$  en 0 ( $\gamma'_v(0) = v$ ), et  $W_p$  est un voisinage étoilé d'origine  $0 \in T_pM$  tel que  $\gamma_v$  est défini en 1 pour

tout  $v \in W_p$ ; on supposera que le voisinage  $W_p$  est maximal et donc unique. Alors, l'application exponentielle sur  $M$  est

$$\exp : W \subseteq TM \rightarrow M, \quad \exp(v) = \exp_p(v), \quad \forall v \in T_p M \cap W, \quad \forall p \in M,$$

où  $W = \bigcup_{p \in M} W_p$ .

Les remarques suivantes sur cette application s'imposent :

(a) Comme pour toute connexion affine, la différentielle

$$(d\exp_p)_0 : T_0(T_p M) \rightarrow T_p M$$

s'avère être égal, avec les identifications habituelles, à l'application identité sur  $T_p M$ . On peut donc trouver un voisinage étoilé  $\tilde{\mathcal{U}} \subseteq T_p M$  de l'origine 0 tel que la restriction de  $\exp_p$  à  $\tilde{\mathcal{U}}$  soit un difféomorphisme sur son image  $\mathcal{U} := \exp_p(\tilde{\mathcal{U}})$ . En choisissant une base  $B_p$  de  $T_p M$ , on obtient une carte  $(\mathcal{U}, \psi)$  qui envoie tout  $q \in \mathcal{U}$  aux coordonnées de  $\exp_p^{-1}(q)$  dans la base  $B_p$ . Une telle carte  $(\mathcal{U}, \psi)$  est appelée un voisinage normal de  $p$ . Alors, en coordonnées normales en  $p$ , nous avons

$$\Gamma_{ij}^k(p) = 0, \quad \forall i, j, k \in \{1, \dots, n\}. \quad (2.2)$$

Pour une métrique pseudo-Riemannienne, la base  $B_p$  est toujours supposée orthonormée pour  $g_p$  et, donc,

$$g_{ij}(p) = \epsilon_i \delta_{ij}; \quad (2.3)$$

avec  $\epsilon_i = \pm 1$ . Bien entendu, les identités [Équation 2.2](#) et [Équation 2.3](#) ne tiennent en principe qu'en  $p$  (la courbure de  $\nabla$  empêchera son extensibilité).

(b) Pour tout  $p \in M$ , il est possible de montrer l'existence d'un voisinage convexe  $\mathcal{C}$  (voir [\[\[45\], p. 130\]](#)), c'est-à-dire un voisinage normal de chacun de ses points. Pour chaque deux points  $p, q \in \mathcal{C}$  il existe une unique géodésique  $\gamma_{pq} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}$  qui les rejoint et qui est contenu dans  $\mathcal{C}$ . De plus, l'application

$$\mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow TM, \quad (p, q) \rightarrow \gamma'_{pq}(0)$$

est lisse.

(c) *Le lemme de Gauss* est vrai, et sa preuve peut être vérifiée de manière similaire au cas Riemannien [\[\[45\], p. 127, Lemme 1\]](#) : si  $p \in M$ ,  $0 \neq x \in T_p M$  et  $v_x, w_x \in T_x(T_p M)$  avec  $v_x$  parallèle à  $x$ , alors

$$g_p((d\exp_p)_x(v_x), (d\exp_p)_x(w_x)) = \langle v_x, w_x \rangle;$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire en  $T_x(T_p M)$  naturellement déterminé par  $g_p$ .

2.1.4 *Le tenseur de courbure.*

Toute connexion affine a une courbure associée, qui est un champ de tenseur 1-contravariant 3-covariant défini sur les champs de vecteurs par

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M);$$

et, donc, induite sur les vecteurs tangents (et les formes linéaires) sur chaque espace tangent.

*Remarque 2.4.* Rappelons qu'il n'y a pas de convention universellement acceptée pour le tenseur de courbure, et certains auteurs le définissent avec le signe opposé au notre.

Si, comme nous le supposons dorénavant,  $\nabla$  est la connexion de Levi-Civita de la métrique pseudo-Riemannienne  $g$ , à partir de ce tenseur de courbure nous pouvons construire le tenseur de courbure à 4-covariants défini par

$$R(X, Y, Z, W) := g(R(X, Y)Z, W).$$

Ces tenseurs présentent les symétries classiques suivantes, qui sont valables non seulement dans le cas Riemannien mais dans le cas général :

1. Symétrie dans les deux premières variables :  $R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W)$  (ou,  $R(X, Y) = -R(Y, X)$  tout court).
2. Symétrie dans les deux dernières :  $R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$ .
3. Symétrie de la première paire de variables avec la seconde :

$$R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y).$$

4. Première identité de Bianchi :  $R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0$ .
5. Deuxième identité de Bianchi :

$$(\nabla_Z R)(X, Y) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_X R)(Y, Z) = 0.$$

Comme dans le cas Riemannien, les contractions uniques non nécessairement nulles du tenseur de courbure sont, à un signe près, le tenseur de Ricci, Ric, et la courbure scalaire  $S$ . Le premier est le tenseur symétrique 2-covariant qui est obtenu comme la contraction par rapport aux derniers indices du tenseur de courbure (1, 3).

$$\begin{aligned} \text{Ric}(Y, Z)(p) &:= \text{trace } R(\cdot, Y_p)Z_p = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} g(R(\partial_i|_p, Y_p)Z_p, \partial_j|_p) \\ &= \sum_{i,j=1}^n g^{ij} R(\partial_i|_p, Y_p, Z_p, \partial_j|_p). \end{aligned}$$

La courbure scalaire  $S$  est la contraction métrique du tenseur de Ricci. En coordonnées :

$$S(p) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}(p) \operatorname{Ric}(\partial_i|_p, \partial_j|_p).$$

### 2.1.5 Courbure sectionnelle

Si  $g$  est une métrique Riemannienne et  $\Pi = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(u, v) \subseteq T_p M$  est un plan de l'espace tangent à  $p$ , la courbure sectionnelle  $K_S(\Pi)$  de  $\Pi$  est définie par la relation suivante :

$$K_S(\Pi) = \frac{R(u, v, v, u)}{g(u, u)g(v, v) - g(u, v)^2}, \quad (2.4)$$

qui est indépendante de la base choisie  $u, v$  de  $\Pi$  (voir [Équation 2.5](#) ci-dessous). Dans le cas où  $g$  est une métrique pseudo-Riemannienne, la définition [Équation 2.4](#) reste la même, mais la courbure sectionnelle est définie si et seulement si le plan tangent  $\Pi$  est non-dégénéré. Évidemment, cela est dû au fait que si  $g|_{\Pi}$  est dégénérée, alors le dénominateur de [Équation 2.4](#), à savoir

$$Q(u, v) = g(u, u)g(v, v) - g(u, v)^2,$$

est nul. En fait,

$$Q(u, v) \begin{cases} > 0 & \Leftrightarrow g|_{\Pi} \text{ is définie (positive or négative)} \\ = 0 & \Leftrightarrow g|_{\Pi} \text{ est dégénérée} \\ < 0 & \Leftrightarrow g|_{\Pi} \text{ est indéfinie} \end{cases}$$

Pour un plan non-dégénéré  $\Pi$ , l'expression [Équation 2.4](#) peut être simplifiée si l'on prend  $u, v$  comme étant une base orthonormée de  $T_p M$ , car alors le dénominateur  $Q(u, v)$  devient  $\pm 1$ . Lorsque  $g|_{\Pi}$  est Euclidien,  $Q(u, v)$  coïncide avec le carré de l'aire du parallélogramme engendré par  $u, v$  et, en général, chaque fois que  $g|_{\Pi}$  est non-dégénérée, on peut garder cette interprétation (toute métrique pseudo-Riemannienne génère naturellement à la fois un élément de volume à un signe près et une mesure sur  $M$ , comme le font les Riemanniens).

Comme nous l'avons déjà remarqué, si  $\Pi$  est un plan dégénéré, alors  $Q(u, v)$  est nul et la définition de la courbure sectionnelle dans [Équation 2.4](#) n'a pas de sens. Cependant, le signe du numérateur de [Équation 2.4](#) est indépendant de la base choisie, comme on en déduit l'identité suivante, qui découle immédiatement des symétries du tenseur de courbure :

$$u' = au + bv \text{ et } v' = cu + dv \Rightarrow R(u', v', v', u') = (ad - bc)^2 R(u, v, v, u), \quad (2.5)$$

pour tout  $u, v, u', v' \in T_p M$ ,  $p \in M$ . Ainsi, si  $\Pi = \text{span}_{\mathbb{R}}(u, v) \subseteq T_p M$  est un plan dégénéré, on définit la signature de la courbure

$$\mathcal{N}(\Pi) = \begin{cases} +1 & \text{si } R(u, v, v, u) > 0 \\ 0 & \text{si } R(u, v, v, u) = 0 \\ -1 & \text{si } R(u, v, v, u) < 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

En résumé :

**Définition 2.5.** Soit  $\Pi = \text{span}_{\mathbb{R}}(u, v) \subseteq T_p M$  un plan tangent :

- (i) Si  $\Pi$  est non-dégénéré, on définit sa courbure sectionnelle  $K_S(\Pi)$  en utilisant [Équation 2.4](#).
- (ii) Si  $\Pi$  est dégénéré, on définit la signature de sa courbure  $\mathcal{N}(\Pi)$  à l'aide de [Équation 2.6](#).

Pendant, dans certains cas particuliers, il existe un champ de vecteurs isotrope privilégié  $U \in \mathfrak{X}(M)$ . Ainsi, on définit la courbure sectionnelle nulle [\[27\]](#) par rapport à un vecteur isotrope  $u \in T_p M$  comme étant le nombre

$$K_u(\pi) = \frac{R(u, v, v, u)}{g(v, v)} \quad (2.7)$$

où  $\pi = \text{span}_{\mathbb{R}}(u, v)$  est tout plan tangent dans  $T_p M$  qui contient  $u$  tel que  $g_p|_{\pi}$  est dégénéré mais pas identiquement nul. Ceci est particulièrement intéressant dans la signature Lorentzienne, par exemple, le plan  $\pi$  qui est engendré par  $u$  et tout vecteur orthogonal (nécessairement de type spatial)  $v$  satisfait les propriétés requises.

Comme dans le cas Riemannien, la courbure sectionnelle  $K_S(\Pi)$  pour tout plan non-dégénéré  $\Pi$  tangent à  $p$  détermine la valeur du tenseur de courbure  $R$  en  $p$  dans le cas général. Il est facile de voir que la preuve de ce fait dans le cas Riemannien peut être étendue au cas indéfini en utilisant la continuité, car tout plan dégénéré est la limite des plans non-dégénérés, à la fois définis (positifs ou négatifs) et indéfinis. Plus précisément :

**Lemme 2.6.** Soit  $(V, g)$  un espace vectoriel doté d'un produit scalaire indéfini et soit  $\Pi \subset V$  un plan dégénéré. Alors il existe deux suites

$$\{u_k\}_k \rightarrow u, \quad \{v_k\}_k \rightarrow v$$

avec  $\Pi = \text{span}_{\mathbb{R}}(u, v)$ , tel que les plans  $\Pi_k = \text{span}_{\mathbb{R}}(u_k, v_k)$  sont non-dégénérés pour tout  $k$ . De plus, les suites peuvent être choisies de telle sorte que tous les plans  $\Pi_k$  soient définis ou bien indéfinis.

*Preuve.* Remarquons d'abord que le radical de  $g$  restreint à  $\Pi$  doit avoir la dimension 1 ou 2 (dans ce dernier cas,  $g|_{\Pi}$  sera identiquement nulle). On distingue ces deux cas

CAS 1 :  $g|_{\Pi}$  n'est pas identiquement nulle. Comme  $g|_{\Pi}$  est dégénérée, on peut supposer que  $v$  engendre le radical dans  $\Pi$  et  $g(u, u) \neq 0$ . Ainsi, pour tout  $x \in V$  et  $\delta \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} Q(u, v + \delta x) &= Q(u, v) + 2\delta(g(u, u)g(v, x) - g(u, v)g(u, x)) + \delta^2 Q(u, x) \\ &= 2\delta a[x] + \delta^2 Q(u, x) \end{aligned} \quad (2.8)$$

avec

$$a[x] = g(u, u)g(v, x) - g(u, v)g(u, x) = g(u, u)g(v, x).$$

Or  $g$  est non-dégénéré sur  $V$  tout entier, il existe  $x \in V$  tel que  $a[x] > 0$ . Considérant alors un  $k_0 \in \mathbb{N}$  assez grand, le signe de  $Q(u, v + \delta x)$  dans [Équation 2.8](#) pour  $\delta = \frac{\pm 1}{(k+k_0)}$  est indépendant de  $\delta^2 Q(u, x)$ , pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , et les suites requises sont

$$u_k = u, \quad v_k = v \pm \frac{1}{k+k_0}x. \quad (2.9)$$

CAS 2 :  $g|_{\Pi}$  est identiquement nulle. Remarquons d'abord que  $\Pi \subset \Pi^{\perp}$ , et  $\dim \Pi^{\perp} = n - 2$  et donc que la dimension  $n$  et l'indice  $\nu$  de  $V$  satisfont  $4 \leq n$ , et  $2 \leq \nu \leq n - 2$  (rappelons [Proposition 1.8](#) dans [chapitre 1](#)). Si  $\Pi = \text{span}_{\mathbb{R}}(u, v)$ , en prenant un vecteur  $z$  non isotrope dans  $v^{\perp} \subset V$ , considérons le plan

$$\Pi_j = \text{span}_{\mathbb{R}}\left(u + \frac{1}{j}z, v\right)$$

on voit clairement que  $g|_{\Pi_j}$  n'est pas identiquement nulle (jusqu'à au plus un  $j \in \mathbb{N}$  tel que  $|u + \frac{1}{j}z| = 0$ ). On obtient donc d'après le cas 1 deux suites (voir [Équation 2.9](#)) pour tout  $j$  :

$$u_{kj} = u + \frac{1}{j}z, \quad v_{kj} = v \pm \frac{1}{k+k_0(j)}x_j, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

où l'on peut même supposer que  $k_0(j)$  et  $x_j$  sont choisis de telle sorte que  $\frac{x_j}{k_0(j)}$  appartienne à un voisinage fixe  $W$  de  $0 \in V$ . Les suites recherchées sont alors les diagonales

$$u_k = u_{kk}, \quad v_k = v_{kk}.$$

□

**Proposition 2.7.** *La courbure sectionnelle  $K_S(\Pi)$  sur tous les plans non-dégénérés  $\Pi \subset T_p M$  tangents à un point fixe  $p$ , ainsi que la valeur de la métrique pseudo-Riemannienne  $g$  en ce point  $p$ , déterminent de manière univoque le tenseur de courbure  $R$  en  $p$ .*

*Preuve.* Montrons d'abord que la conclusion de la proposition est vraie pour  $R(u, v, v, u)$ . Il est évident que  $R(u, v, v, u)$  est nul si  $\{u, v\}$  est linéairement dépendant et on sait que

$$R(u, v, v, u) = K_S(\text{span}_{\mathbb{R}}(u, v)).Q(u, v) \quad (2.10)$$

si  $\text{span}_{\mathbb{R}}(u, v)$  est un plan non-dégénéré. Le cas où  $\text{span}_{\mathbb{R}}(u, v)$  est dégénéré, le lemme précédent permet d'obtenir  $R(u, v, v, u)$  par continuité comme limite de la sous-suite  $\{R(u_k, v_k, v_k, u_k)\}_k$ , où dans tout plan  $\text{span}_{\mathbb{R}}(u_k, v_k)$  nous pouvons utiliser [Équation 2.10](#). À partir de ce point, la preuve suit essentiellement les mêmes lignes que dans le cas Riemannien, c'est-à-dire en utilisant les symétries de  $R$  :

- (i) La valeur de  $R(u, v)v$  est calculable à partir de  $R(u, v, v, x)$  pour tout  $x$ , et cette dernière à partir des expressions connues du type [Équation 2.10](#), en utilisant

$$R(u + x, v, v, u + x) = R(u, v, v, u) + R(x, v, v, x) + 2R(u, v, v, x)$$

- (ii) Les valeurs de  $R(v, w)u$  sont calculables à partir de l'expression connue du cas précédent (i) en soustrayant les identités

$$\begin{aligned} R(u + w, v)(u + w) &= R(u, v)u + R(w, v)w + R(u, v)w + R(w, v)u \\ R(u + v, w)(u + v) &= R(u, w)u + R(v, w)v + R(u, w)v + R(v, w)u \end{aligned}$$

et en appliquant la première identité de Bianchi. □

Comme dans le cas Riemannien :

**Proposition 2.8.** *Si la courbure sectionnelle sur chaque plan non-dégénéré en  $p$  est une constante  $c(p)$ , alors*

$$R(u, v)w = c(p)(g(w, v)u - g(w, u)v).$$

*De plus, si cela se produit dans un voisinage connexe  $U$  et que la dimension  $n$  est  $\geq 3$ , alors  $c(p)$  est une constante indépendante de  $p$  sur  $U$ .*

En général, des expressions algébriques en termes de tenseur de courbure  $R$ , valables aussi bien dans le cas Riemannien que dans le cas général, entrent en jeu dans les résultats du type « la courbure détermine localement la métrique ». Ainsi, par exemple : si  $g$  et  $g'$  sont deux métriques pseudo-Riemanniennes sur la même variété connexe  $M$  qui coïncident en un point  $p$  ( $g_p = g'_p$ ) et qu'elles ont les mêmes tenseurs de courbure dans tout  $M$  ( $R^g = R^{g'}$ ), alors  $g = g'$ .

Dans d'autres interprétations de la courbure, quelques légers détails algébriques doivent être pris en compte pour passer du cas Riemannien au cas général :

- Supposons que  $\dim(M) = 2$  et soit  $\Pi$  un plan tangent (non-dégénéré),  $c = K_S(\Pi) \neq 0$  et  $B_\Pi$  une base orthonormée  $e_1, e_2$  de  $\Pi$ . Dans le cas Riemannien ou, en général, si  $g_\Pi$  est défini, l'application linéaire

$$R(e_1, e_2) : \Pi \rightarrow \Pi, \quad v \mapsto R(e_1, e_2)v;$$

est la composition d'une rotation et d'une homothétie de rapport  $c$ . En effet, dans le cas Riemannien :

$$R(e_1, e_2)e_1 = -c.e_2, \quad R(e_1, e_2)e_2 = c.e_1.$$

Or, si  $\Pi$  est un plan indéfini, cette application linéaire s'avère être une anti-isométrie (isométrie de  $(\Pi, g_\pi)$  dans  $(\Pi; -g_\pi)$ ) composée avec l'homothétie de rapport  $c$ . En effet dans ce cas on a

$$R(e_1, e_2)e_1 = c.e_2, \quad R(e_1, e_2)e_2 = c.e_1;$$

(cette interprétation peut être étendue à tout plan non-dégénéré d'un espace tangent de dimension arbitraire en prenant l'exponentielle de ce plan).

- Dans le cas pseudo-Riemannien, comme dans le cas Riemannien, le tenseur de Ricci et la courbure scalaire peuvent être exprimés algébriquement à partir des courbures sectionnelles. Mais il faut prendre en compte quelques précautions pour les interprétations de Ric et  $S$  comme moyenne des courbures sectionnelles. Ainsi, par exemple, si  $v$  n'est pas de type lumière, fixant une base orthonormée  $e_2, \dots, e_n$  de son espace orthogonal  $v^\perp$ , on peut écrire :

$$\frac{\text{Ric}(v, v)}{g(v, v)} = \sum_{i=2}^n K_S(\text{span}_{\mathbb{R}}(e_i, v)).$$

Une différence plus remarquable entre la courbure sectionnelle dans le cas Riemannien et dans le cas indéfini, est que la courbure sectionnelle est à peine bornée, comme indiqué ci-dessous.

## 2.2 BORNES DES COURBURES SECTIONNELLES ET DE RICCI

L'une des différences frappantes entre le cas Riemannien et le cas indéfini est la trivialité apparente liée à certaines bornes pour les courbures sectionnelles et de Ricci dans ce dernier cas. Pour le tenseur de Ricci, cela découle immédiatement du critère algébrique sur les bornes des formes bilinéaires (voir [Théorème 1.20](#) dans [chapitre 1](#)). En fait, le résultat suivant est une conséquence immédiate de ce critère, simplement en choisissant  $\text{Ric}_p$  comme forme bilinéaire symétrique :



**Corollaire 2.9.** Soit  $(M, g)$  une variété pseudo-Riemannienne indéfinie et  $p \in M$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\text{Ric}_p = c.g_p$  pour tout  $c \in \mathbb{R}$ ,
- (ii)  $\text{Ric}_p(u, u) = 0$ , sur tout vecteur isotrope  $u \in T_pM$ ,
- (iii)  $\exists a > 0 : |\text{Ric}(z, z)| \leq a.g_p(z, z)$  sur tout vecteur temporel  $z \in T_pM$ ,
- (iv)  $\exists a > 0 : |\text{Ric}(z, z)| \leq a.g_p(z, z)$  sur tout vecteur spatial  $z \in T_pM$ ,
- (v)  $\exists b \in \mathbb{R} : \frac{\text{Ric}(z, z)}{g_p(z, z)} \leq b$  sur tout vecteur non lumière  $z \in T_pM \setminus \{0\}$ ,
- (vi)  $\exists b \in \mathbb{R} : \frac{\text{Ric}(z, z)}{g_p(z, z)} \geq b$  sur tout vecteur non lumière  $z \in T_pM \setminus \{0\}$ .

En conséquence, si ces conditions équivalentes s'appliquent à tout  $M$ , alors le Ricci est égal à une certaine fonction  $f$  multipliée par la métrique. Mais, alors, le résultat suivant de Schur implique que cette fonction est (localement) indépendante du point, jusqu'au cas trivial en dimension 2.

**Théorème 2.10 (Schur).** Soit  $(M, g)$  une variété pseudo-Riemannienne connexe de dimension  $n \geq 3$ . Si le tenseur de Ricci satisfait

$$\text{Ric} = f.g \quad \text{pour une fonction } f \in C^\infty(M),$$

alors  $f$  est constante, c'est-à-dire que la variété est Einstein :

$$\text{Ric} = c.g \quad \text{pour une constante } c \in \mathbb{R}.$$

*Preuve.* La preuve classique du cas Riemannien (voir par exemple [[34], Note 3, page 292]) est toujours valable pour le cas indéfini.  $\square$

Les bornes de la courbure sectionnelle proviennent de la combinaison de plusieurs faits que nous avons déjà commentés :

- (a) la courbure sectionnelle n'est pas définie pour les plans dégénérés, mais le signe du numérateur de [Équation 2.4](#) est bien défini pour les plans dégénérés,
- (b) tout plan dégénéré est la limite des plans définis et indéfinis [Lemme 2.6](#),
- (c) le signe du dénominateur de [Équation 2.4](#) est distinct dans les plans défini et indéfini.

Concrètement, on a le résultat suivant :

**Théorème 2.11 (Kulkarni [33]).** Soit  $(M, g)$  une variété pseudo-Riemannienne indéfinie et  $p \in M$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) La courbure sectionnelle  $K_S$  est constante sur tous les plans non-dégénérés de  $T_pM$ .
- (ii)  $\mathcal{N}(\Pi)$  est nul sur tout plan dégénéré dans  $T_pM$ .
- (iii)  $\exists a > 0 : |K_S(\Pi)| \leq a$  sur tout plan indéfini  $\Pi \subset T_pM$ .
- (iv)  $\exists a > 0 : |K_S(\Pi)| \leq a$  sur tout plan défini  $\Pi \subset T_pM$ .
- (v)  $\exists b > 0 : K_S(\Pi) \geq b$  sur tout plan non-dégénéré  $\Pi \subset T_pM$ .
- (vi)  $\exists b > 0 : K_S(\Pi) \leq b$  sur tout plan non-dégénéré  $\Pi \subset T_pM$ .

*Preuve.* Il est immédiat que (i) implique toutes les autres équivalences (pour (i)  $\Rightarrow$  (ii) on utilise soit la continuité du numérateur de [Équation 2.4](#) soit [Proposition 2.8](#)).

(ii)  $\Leftrightarrow$  (i). C'est un résultat algébrique qui peut être déduit en trois étapes :

- (a) Si  $x, u, z$  sont trois vecteurs orthonormés, les deux premiers de caractère opposé, alors les courbures de  $\text{span}_{\mathbb{R}}(x, z)$  et  $\text{span}_{\mathbb{R}}(u, z)$  coïncident. (Cela découle du fait que les 2 espaces  $\text{span}_{\mathbb{R}}(x \pm u, z)$  sont dégénérés, ainsi

$$R(x + u, z, z, x + u) = 0, \quad R(x - u, z, z, x - u) = 0;$$

en additionnant les deux expressions et en utilisant  $Q(x, z) = -Q(u, z)$ ).

- (b) Si  $g$  est Lorentzien (ou d'indice  $\nu = n - 1$ ) et  $x, u, z$  est orthonormé avec  $u$  temporel, alors  $K_S(\text{span}_{\mathbb{R}}(x, u)) = K_S(\text{span}_{\mathbb{R}}(x, z)) = k(u)$  (ne dépend que de  $u$ ). Mais si  $v$  est un autre vecteur temporel indépendant de  $u$ , alors  $K_S(\text{span}_{\mathbb{R}}(u, v)) = k(u) = k(v)$  (d'où nous concluons le résultat pour le cas Lorentzien).
- (c) Pour un indice arbitraire, nous prenons une base orthonormée et raisonnons de manière analogue au cas IV de l'implication (ii)  $\Rightarrow$  (i) dans la démonstration du [Théorème 1.20](#).

Il est facile de montrer que (ii) est impliqué par toute propriété entre (iii) et (vi), en utilisant que tout plan dégénéré est la limite des plans définis et indéfinis ([Lemme 2.6](#)). Ainsi,

(iii)  $\Leftrightarrow$  (ii) (et de manière analogue (iv)  $\Leftrightarrow$  (ii)). Si  $\Pi = \text{span}_{\mathbb{R}}(u, v)$  est un plan dégénéré, prenons les suites

$$\{u_k\}_k \rightarrow u, \quad \{v_k\}_k \rightarrow v;$$

tel que les plans  $\Pi_k = \text{span}_{\mathbb{R}}(u_k, v_k)$  sont indéfinis (i.e  $Q(u_k, v_k) < 0$ ) pour tout  $k$ . Alors nous avons

$$aQ(u_k, v_k) \leq R(u_k, v_k, v_k, u_k) \leq -aQ(u_k, v_k).$$

Donc par passage à la limite ( $k \rightarrow \infty$ ), il s'ensuit que  $0 \leq R(u, v, v, u) \leq 0$ , comme on le souhaite.

(v)  $\Leftrightarrow$  (ii) ( et de manière analogue (vi)  $\Leftrightarrow$  (ii)). En raisonnant comme dans le cas précédent on a que

$$R(u_k, v_k, v_k, u_k) \leq bQ(u_k, v_k);$$

si les plans  $\Pi_k$  sont choisis définis, et par passage à la limite  $R(u, v, v, u) \leq 0$ . Alors, en choisissant des plans indéfinis  $\Pi'_k$ , on obtient l'inégalité inverse.  $\square$

Bien sûr, si la courbure sectionnelle est constante en un point, alors nécessairement le tenseur de Ricci en ce point est un multiple de  $g$  (utiliser [Proposition 2.8](#)). Par conséquent, en combinant les résultats de Kulkarni et Schur, on peut obtenir des restrictions sévères pour trouver des bornes non

triviales de la courbure. Cette situation contraste considérablement avec le cas Riemannien, où nécessairement toutes les courbures sectionnelles pour les plans tangents à n'importe quel  $p$  sont bornées par le haut et par le bas. En fait, la courbure sectionnelle est une fonction continue qui est définie sur tout le Grassmannien des plans tangents en  $p$  dans le cas Riemannien, et seulement dans un sous-ensemble dense ouvert dans l'infini; le premier domaine est compact, mais le second ne l'est pas. Rappelons qu'un problème classique en géométrie Riemannienne est relatif à la comparaison de propriétés entre deux variétés dont les courbures satisfont une certaine inégalité. L'extension au cas infini de ces types de problèmes présente alors quelques subtilités non triviales (voir par exemple [[1], [22]] et les références qui y sont contenues).

*Remarque 2.12.* Soit  $(M, g)$  une variété pseudo-Riemannienne avec  $n \geq 3$ . Supposons qu'elle satisfasse l'équation d'Einstein du vide

$$\text{Ric} - \frac{1}{2}S.g + \Lambda.g = 0 ;$$

pour une constante cosmologique  $\Lambda \in \mathbb{R}$ . Alors

- (i)  $(M, g)$  est Einstein,
- (ii) si  $\Lambda = 0$ , alors  $\text{Ric} = 0$ .

Enfin, nous soulignons quelques différences algébriques simples mais frappantes dans le cas infini. Dans le cas Riemannien, l'annulation des invariants scalaires qui peuvent être construits à partir du tenseur de courbure  $R$  (c'est-à-dire à partir de fonctions construites en utilisant les contractions de  $R$  et ses dérivées covariantes d'ordre quelconque) implique l'annulation de  $R$ . Par exemple, l'annulation du scalaire  $\sum_{ijkl} R_{ijkl}R^{ijkl}$  suffit. Cette propriété ne tient pas dans le cas infini. Une classification (locale) de toutes les variétés Lorentziennes ayant zéro pour tous les invariants scalaires de la courbure a été obtenue dans [14]. Plus subtilement, dans le cas Riemannien, un résultat célèbre [[46], [57]] dit que l'annulation de la dérivée covariante du second (ou supérieur) de  $R$  implique l'annulation de  $R$ , c'est-à-dire :

$$\nabla(\nabla R) \equiv 0 \Rightarrow R \equiv 0.$$

Cependant, un tel résultat ne tient pas dans le cas infini. Dans le cas Lorentzien, il est facile de trouver des contre-exemples dans la classe des ondes planes qui, essentiellement, s'avèrent être les uniques ondes locales non triviales [[52], [4]].

## 2.3 PROPRIÉTÉS CONFORMES ET PRÉGÉODÉSINIQUES DE TYPE LUMIÈRE

### 2.3.1 Isométries, homothéties, transformations conformes.

**Définition 2.13.** Soient  $(M, g)$ ,  $(N, h)$  deux variétés pseudo-Riemanniennes et  $\phi : M \rightarrow N$  un difféomorphisme (resp. difféomorphisme local). On dira que

$\phi$  est une transformation conforme (resp. transformation conforme locale) s'il existe une fonction  $\Omega \in C^\infty(M)$  telle que

$$\phi^*h = \Omega g, \text{ c'est-à-dire } h(d\phi_p(v_p), d\phi_p(w_p)) = \Omega(p)g(v_p, w_p), \forall p \in M.$$

En particulier, pour une transformation conforme  $\phi$  :

1. si  $\Omega$  est une constante ( $\Omega \equiv \lambda$ ), alors  $\phi$  est une homothétie.
2. si  $\Omega = 1$ , alors  $\phi$  est une isométrie, et si  $\Omega = -1$  on dit que  $\phi$  est une anti-isométrie.

On dit que  $(M, g)$  et  $(N, h)$  sont conformes (homothétique, isométrique, anti-isométrique) s'il existe une transformation du type correspondant entre les deux variétés. Si  $g, g^*$  sont deux métriques pseudo-Riemanniennes sur  $M$ , on dit qu'elles sont conformes (resp. homothétiques, opposées) si l'identité est une transformation conforme (resp. homothétique, anti-isométrique) entre  $(M, g)$  et  $(M, g^*)$ . Comme dans le cas Riemannien, les résultats généraux sur les groupes de transformations impliquent que l'ensemble de toutes les isométries (resp. homothéties, transformations conformes) de  $(M, g)$  constitue en lui-même un groupe de Lie (de dimension finie), à l'exception des transformations conformes en dimension  $< 3$ . Les champs de vecteurs tels que leurs flots locaux sont des isométries (resp. homothéties, transformations conformes) sont appelés Killing (resp. homothétique-Killing, conforme-Killing).

Essentiellement, deux variétés isométriques pseudo-Riemanniennes ont les mêmes propriétés. De la formule de Koszul, nous déduisons que deux métriques homothétiques ont la même connexion de Levi-Civita (voir [Équation 2.11](#)) et, par conséquent, toute transformation homothétique est également affine. Ainsi, si l'on considère deux métriques homothétiques  $g$  et  $\lambda g$  ( $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ ).

- le tenseur de Ricci de  $g$  et  $\lambda g$  coïncident.
- les courbures sectionnelles (dans chaque plan tangent non-dégénéré) et scalaire (en chaque point) pour  $\lambda g$  sont égales à celle correspondante pour  $g$  multipliée par le facteur  $1/\lambda$ .
- la signature de la courbure  $\mathcal{N}$  des plans dégénérés coïncide pour  $g$  et  $\lambda g$  si  $\lambda > 0$ , et elle est de signe opposé si  $\lambda < 0$ .

En particulier, l'effet du changement de la métrique  $g$  par son opposé  $-g$  peut se résumer en ce que les vecteurs spatiaux s'avèrent être temporels (et vice versa), et que les signes de  $\mathcal{N}$  et les courbures sectionnelles et scalaires changent.

### 2.3.2 Modifications conformes de la métrique.

[Théorème 1.20](#) produit une différence fondamentale entre les propriétés des métriques conformes dans les cas définis et indéfinis :

**Corollaire 2.14.** *Soient  $g$  et  $g^*$  deux métriques pseudo-Riemanniennes sur une variété  $M$ , et supposons que  $g$  est indéfini. Alors  $g^*$  est conforme à  $g$  si et seulement si les vecteurs lumières pour  $g$  sont aussi lumières pour  $g^*$ .*

*Preuve.* Nous appliquons [Théorème 1.20](#) en chaque point  $p \in M$  en prenant chaque  $g_p$  comme un produit scalaire indéfini et chaque  $g_p^*$  comme une forme bilinéaire symétrique.  $\square$

Ce résultat produit une simplification surprenante des propriétés conformes d'une métrique indéfinie, contrastant fortement avec la situation des métriques Riemanniennes. De plus, ces simplifications ont une interprétation physique exceptionnelle dans la signature Lorentzienne car, comme nous le verrons dans le chapitre suivant, les vecteurs lumières déterminent la structure causale des espaces-temps. D'autre part, la relation entre les connexions de Levi-Civita pour deux métriques conformes est formellement égale dans le cas Riemannien et dans le cas général. Ainsi, si  $g$  est une métrique pseudo-Riemannienne et  $g^*$  une métrique conforme,

$$g^* = \Omega \cdot g, \quad \Omega = e^{2u} (> 0), \quad u \in C^\infty(M);$$

les relations entre leurs connexions Levi-Civita  $\nabla, \nabla^*$  découlent directement de la formule de Koszul,

$$\nabla_X^* Y = \nabla_X Y + X(u)Y + Y(u)X - g(X, Y)\nabla u, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M); \quad (2.11)$$

où  $\nabla u = (du)^\sharp$  est le  $g$ -gradient de  $u$ .

Il est également intéressant d'observer que la définition du tenseur de Weyl (pour  $n \geq 4$ , ainsi que des tenseurs de Schouten et de Cotton pour  $n \geq 3$ ) peut se faire dans le cas général de la même manière que dans le cas Riemannien. De plus, les interprétations Riemanniennes restent vraies dans le cas général. Ainsi, lorsque  $n \geq 4$ , le tenseur de Weyl est identiquement égal à 0 si et seulement si la métrique est localement conformément plate (c'est-à-dire localement conforme à un espace pseudo-euclidien).

### 2.3.3 Invariance des pré géodésiques de type lumière.

Nous avons vu que si deux métriques indéfinies ont les mêmes vecteurs lumières, alors elles sont conformes. L'inverse est trivialement vrai, mais nous allons prouver une implication plus forte : si deux métriques sont conformes, alors leurs géodésiques lumières coïncident à reparamétrage près. À cet effet, nous prouverons auparavant que si l'accélération d'une courbe  $\gamma$  est ponctuellement proportionnelle à sa vitesse, alors c'est une pré géodésique, c'est-à-dire qu'elle admet une reparamétrisation en géodésique (à partir de maintenant, on supposera toujours, sans perte de généralité, que les reparamétrages sont croissants).

**Lemme 2.15.** Soit  $(M, g)$  une variété pseudo-Riemannienne, et soit  $\gamma : I \rightarrow M$  ( $I \subseteq \mathbb{R}$  intervalle) une courbe dont la vitesse n'est nulle en aucun point. Si  $\gamma$  satisfait

$$\frac{D\gamma'}{dt} = f(t)\gamma'(t), \quad \forall t \in I;$$

pour une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , on définit la reparamétrisation

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s)), \quad \tilde{\gamma} : J \rightarrow M; \quad (2.12)$$

( $J \subset \mathbb{R}$  intervalle), où  $t : J \rightarrow I$ ,  $s \mapsto t(s)$ , est une fonction dont l'inverse  $s(t)$  satisfait

$$s'(t) = s'(t_0)e^{\int_{t_0}^t f(x)dx}, \quad (2.13)$$

pour un certain  $t_0 \in I$ ,  $s'_0 > 0$ . Alors  $\tilde{\gamma}$  est une géodésique pour  $g$ .

*Preuve.* De [Équation 2.12](#), il résulte immédiatement (on note par un point  $\cdot$  et un prime  $'$  les dérivées naturelles, à savoir  $d/ds$  et  $d/dt$ , respectivement) :

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}'(s) &= \dot{t}(s)\gamma'(t(s)) \\ \frac{D\tilde{\gamma}'}{ds} &= \ddot{t}(s)\gamma'(t(s)) + \dot{t}(s)^2 \frac{D\gamma'}{dt}(t(s)) = (\ddot{t}(s) + \dot{t}(s)^2 f(t(s)))\gamma'(t(s)). \end{aligned}$$

Par conséquent,  $\tilde{\gamma}$  est une géodésique si et seulement si le reparamétrage satisfait l'équation différentielle

$$\ddot{t}(s) + \dot{t}(s)^2 f(t(s)) = 0.$$

Il est immédiat de vérifier que [Équation 2.13](#) correspond aux solutions de cette équation.  $\square$

**Théorème 2.16.** Soient  $g$  et  $g^* = \Omega g$ ,  $\Omega = e^{2u}$  deux métriques pseudo-Riemanniennes conformes sur la variété  $M$ . Alors les pré-géodésiques de type lumière pour  $g$  et  $g^*$  coïncident.

*Preuve.* Il suffit de prouver que, si  $\gamma$  est une géodésique de type lumière pour  $g$ , alors c'est une pré-géodésique de type lumière pour  $g^*$ . À l'aide de [Équation 2.11](#), on déduit la relation générale suivante entre les accélérations d'une même courbe pour les deux métriques conformes :

$$\frac{D^*\gamma'}{dt} = \frac{D\gamma'}{dt} + 2du(\gamma'(t)) \cdot \gamma' - g(\gamma', \gamma')\nabla u, \quad (2.14)$$

où  $\frac{D^*}{dt}$  désigne la dérivée covariante pour  $g^*$ , et l'accélération  $\frac{D\gamma'}{dt}$  est nulle puisque  $\gamma$  est une géodésique pour  $g$ . Comme  $\gamma$  est de type lumière, le dernier terme de [Équation 2.14](#) est également nul, et nous pouvons donc écrire

$$\frac{D^*\gamma'}{dt} = 2 \frac{d(u \circ \gamma)}{dt} \cdot \gamma'.$$

Par conséquent, il suffit d'appliquer [Lemme 2.15](#) avec

$$f = 2 \frac{d(u \circ \gamma)}{dt}. \quad (2.15)$$

□

Les changements conformes préservent non seulement la prégéodésique de type lumière mais aussi les points conjugués avec leur multiplicité le long des prégéodésiques de type lumière (voir [\[41\]](#), Théorème 2.36).

Ce résultat aura une interprétation naturelle dans la signature Lorentzienne pour les espaces-temps relativistes, puisque la trajectoire d'un rayon lumineux dans un espace-temps est précisément une prégéodésique de type lumière. Ainsi, la structure conforme (Causalité locale) d'un espace-temps est caractérisée par les trajectoires des rayons lumières qui le traversent.

Enfin, en étudiant les intervalles maximaux où  $\gamma$  et  $\tilde{\gamma}$  sont définis (c'est-à-dire la reparamétrisation  $t : J \rightarrow I$  du [Lemme 2.15](#)), nous pouvons obtenir des conséquences directes de ces résultats sur la complétude des géodésiques lumières. Désormais, toutes les géodésiques seront supposées inextensibles (elles seront donc complètes, par définition, si leur domaine est  $\mathbb{R}$  tout entier).

**Corollaire 2.17.** *Soient  $g$  et  $g^* = \Omega g$ ,  $\Omega = e^{2u}$   $g$  deux métriques conformes indéfinies sur une variété  $M$ . Soit  $\gamma$  une géodésique lumière pour  $g$  et  $\tilde{\gamma}$  la reparamétrisation de  $\gamma$  en géodésique de  $g^*$ .*

- (i) *Si  $\inf(\Omega) > 0$  et  $\gamma$  est complet (c'est-à-dire que son intervalle de définition est  $\mathbb{R}$ ) alors  $\tilde{\gamma}$  est complet.*
- (ii) *Si  $\sup(\Omega) < +\infty$  et  $\gamma$  est incomplet, alors  $\tilde{\gamma}$  est incomplet.*

*En particulier, si  $M$  est compact, les géodésiques lumières de  $g$  seront complètes si et seulement si les géodésiques lumières de  $g^*$  sont complètes.*

*Preuve.* Remarquons d'abord que par [Équation 2.13](#) et [Équation 2.15](#),

$$\frac{ds}{dt} = C e^{2u(\gamma(t))},$$

pour une constante  $C$ .

- (i) Comme  $u$  est également borné par le bas,  $ds/dt \geq \epsilon > 0$ , pour un certain  $\epsilon > 0$ . Par conséquent, si le domaine  $I$  de  $\gamma(t)$  est l'ensemble  $\mathbb{R}$ , l'image  $J$  de  $s(t)$  est aussi l'ensemble  $\mathbb{R}$ .
- (ii) De manière analogue, nous aurons que  $0 < ds/dt < P$ , pour certains  $P > 0$ . Ainsi, si  $I = (a, b)$  avec  $b < \infty$ , alors l'image de  $s(t)$  ne peut pas prendre la valeur  $s(t_0) + P(b - t_0)$ .

□

Des résultats plus précis dans ce sens peuvent être trouvés dans [\[12\]](#), [\[51\]](#). Pour autant que nous le sachions, aucun exemple compact dans la littérature ne montre que la complétude géodésique (pour les géodésiques non lumières)



peut être perdue par des changements conformes ; dans la section suivante, nous verrons que cette question est liée à l'indépendance du type causal de complétude.

#### 2.4 UN TOUR SUR LES DIFFÉRENCES AVEC DES CONTRE-EXEMPLES EXPLICITES

**Corollaire 2.17** suggère des possibilités qui n'ont aucun sens ou semblent étranges du point de vue Riemannien, à savoir l'existence de variétés pseudo-Riemanniennes avec toutes les géodésiques d'un certain caractère causal complètes, mais certaines géodésiques d'un autre caractère causal incomplètes, ainsi que l'existence de variétés compactes indéfinies géodésiquement incomplètes. Notre objectif dans cette section est de fournir quelques exemples explicites qui montrent que ces possibilités et d'autres, loin d'être étranges ou exceptionnelles, deviennent un ingrédient naturel de la géométrie pseudo-Riemannienne. Ainsi, même si dans les sections précédentes de nombreuses définitions algébriques et propriétés élémentaires du cas Riemannien ont été naturellement étendues au cas pseudo-Riemannien, la géométrie globale des variétés indéfinies diffère radicalement de celle des variétés Riemanniennes. De tels exemples seront aussi simples que possible et, pour notre propos, rester en dimension 2 (surfaces Lorentziennes) suffira.

Rappelons qu'une variété Riemannienne connexe  $(M, g)$  a une distance  $d$  associée canoniquement à  $g$ . Le théorème bien connu de Hopf-Rinow établit l'équivalence entre les conditions suivantes :

1.  $M$  est complet comme espace métrique doté de la distance  $d$  (c'est-à-dire que toute suite de Cauchy d'éléments de  $M$  converge dans  $M$ ).
2. Il existe un point  $p \in M$  tel que  $M$  soit géodésiquement complet à partir de  $p$  ( $\exp_p$  est défini sur tout l'espace tangent  $T_p M$ ).
3.  $(M, g)$  est géodésiquement complet (les géodésiques inextensibles sont définies sur tout  $(-\infty, +\infty)$ ).
4. Tout sous-ensemble fermé de  $M$  qui est borné pour  $d$  est compact.

De plus, dans ce cas  $(M, g)$  est géodésiquement connexe. En particulier, si  $M$  est compact, alors **item 4** est vérifié et, par conséquent, toutes les autres conditions sont vérifiées.

Certains des exemples dans la suite montreront qu'aucune des conclusions du théorème de Hopf-Rinow (par exemple, la complétude ou la connexité géodésique pour les variétés compactes) ne tient dans le cas indéfini.

##### 2.4.1 Indépendance de la complétude avec le caractère causal.

En général, pour une variété pseudo-Riemannienne indéfinie, le terme « complétude » désigne exclusivement la complétude géodésique, car il n'y a aucune



distance canoniquement associée à la métrique. Néanmoins, comme il existe trois types causaux de géodésiques, nous pouvons distinguer entre complétude spatiale, temporelle ou lumière selon le type causal de géodésiques requis pour être complet. Il existe des exemples qui montrent une totale indépendance entre les trois types de complétude, c'est-à-dire qu'ils sont complets dans un ou deux caractères causaux arbitraires, et incomplets dans les autres. Des références détaillées sur de tels exemples (construits par Kundt, Geroch et Beem) peuvent être trouvées dans [[2], page 203]. Il est particulièrement simple de construire l'exemple complet suivant de type espace, de type temps et de type lumière.

**Exemple 2.18.** Considérons la métrique Lorentzienne  $g^*$  sur  $\mathbb{R}^2$  qui est conforme à la métrique usuelle  $g_0 = dx^2 - dy^2$  :

$$g^* = e^{2u(x,y)}(dx^2 - dy^2) ,$$

où  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  satisfait les propriétés suivantes :

1.  $\partial_y u(x,0) = 0$  (par exemple  $u$  est symétrique par rapport à l'axe  $x$  :  $u(x,y) = u(x,-y)$ ).
2.  $u$  s'annule à partir d'une « bande horizontale » :  $u(x,y) = 0$  si  $|y| > 1$ .
3.  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{u(x,0)} dx < \infty$ .

Il est alors facile de prouver :

- (a) La paramétrisation de l'axe  $x$ ,  $\gamma(t) = (t,0)$  ; qui est une géodésique de type spatial pour  $g_0$ , est aussi une pré-géodésique pour  $g^*$ . En fait, par la propriété [item 1](#), on a :  $\nabla u(\gamma(t)) = \partial_y u(t,0)\gamma'(t) = 0$ . Alors, il suffit d'utiliser [Équation 2.14](#) et [Lemme 2.15](#).
- (b) La reparamétrisation  $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$  est nécessairement une géodésique incomplète. Pour le montrer, il suffit de prendre en compte que cette reparamétrisation vérifie [Équation 2.13](#) avec  $f(t) = \frac{d(u \circ \gamma)}{dt}(t)$ , et d'utiliser [item 3](#).
- (c) Toute géodésique causale  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  est complète pour  $g^*$ . Pour le montrer, remarquons que  $y'(t) \neq 0$  en tout point, car  $\alpha$  est causal. Alors, le reparamétrage  $\tilde{\alpha}(y) = (x(y), y)$  est bien défini puisque  $y(t)$  est continue et dérivable de dérivée qui ne s'annule pas donc  $y(t)$  est une bijection sur son domaine de définition, et comme  $(\frac{dx}{dy})^2 - 1 \leq 0$  alors  $|\frac{dx}{dy}| \leq 1$ . Ainsi, si le reparamétrage  $\tilde{\alpha}(y)$  n'est pas défini sur tout  $\mathbb{R}$ , mais seulement sur un intervalle  $(y_-; y_+)$  avec  $y_+ < \infty$ , alors l'application  $y \mapsto x(y)$  serait continûment extensible jusqu'à  $y = y_+$ . Sachant que si une géodésique a un point limite, alors elle est extensible à travers ce point (voir par exemple [[45], Lemme 5.8]), le domaine de  $x(y)$  doit être tout  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire la fonction  $y(t)$  doit être strictement monotone et son image couvrira tout  $\mathbb{R}$ . En conséquence, jusqu'à certaines valeurs de  $t$  dans un intervalle compact de  $\mathbb{R}$ , la courbe  $\alpha(t)$  est éloignée de la bande horizontale  $|y| < 1$ . Le résultat suit en observant qu'en dehors de cette

bande horizontale,  $\alpha(t)$  est aussi une géodésique de la métrique complète  $g_0$  à cause de la condition [item 2](#).

### 2.4.2 Géodésiques fermées incomplètes (de type lumière).

Considérons  $\mathbb{R}^2$  doté de la métrique

$$g_0 = du \otimes dv + dv \otimes du$$

(c'est-à-dire  $\mathbb{L}^2$  en coordonnées  $(u, v)$  de type lumière). Considérons l'isométrie  $\phi(u, v) = (2u, \frac{v}{2})$  et le groupe qu'elle génère  $G = \{\phi^k : k \in \mathbb{Z}\}$ . Notre objectif final est de vérifier l'existence de géodésiques fermées incomplètes dans le quotient  $M/G$  de  $M = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  doté de la métrique restreinte  $g_0$ . Mais, d'abord, les deux remarques suivantes montrent déjà d'autres différences pertinentes entre le cas Riemannien et le cas Lorentzien.

Rappelons que si  $\cdot : G \times X \rightarrow X$  est une action (à gauche) (voir [sous-sous-section 1.3.4.2](#) du [chapitre 1](#)) du groupe  $G$  sur un ensemble  $X$ , on dit que l'action est :

1. libre si l'égalité  $g.x = x$  pour un certain  $x$  implique que  $g$  est l'identité de  $G$ ,
2. discontinue si pour toute suite d'éléments distincts  $\{g_m\}_m \subset G$ , la suite de points  $\{g_m.x\}_m$  n'est convergente pour aucun  $x \in X$ ,
3. et proprement discontinue si :
  - (i) pour tout  $x, x'$  n'appartenant pas à la même orbite ( $x' \neq gx, \forall g \in G \setminus \{e\}$ ), il existe des voisinages  $U \ni x, U' \ni x'$  tels que  $gU \cap U' = \emptyset, \forall g \in G$ ,
  - (ii) le groupe d'isotropie  $G_x$  de chaque point  $x$  ( $G_x = \{g \in G : g.x = x\}$ ) est fini, et
  - (iii)  $\forall x \in X, \exists U \ni x$  ouvert :  $gU \cap U = \emptyset, \forall g \in G \setminus G_x$ .

*Remarque 2.19.* Clairement, l'action de  $G = \{\phi^k : k \in \mathbb{Z}\}$  sur tout  $\mathbb{R}^2$  n'est pas libre, puisque l'origine  $(0, 0)$  est un point fixe pour tout  $\phi_k$ . Soit  $\mathbb{R}_*^2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et considérons l'action naturelle des isométries de  $G$  sur  $\mathbb{R}_*^2$  obtenue par restriction. Alors

1. L'action de  $G$  sur  $\mathbb{R}^2$  est libre et discontinue.
2. Le quotient  $\mathbb{R}_*^2/G$  est une variété qui n'est pas de Hausdorff et admettant une métrique Lorentzienne  $g_0$ .
3. Si un groupe agit par isométries sur une variété Riemannienne et que l'action est libre et discontinue, alors l'action est proprement discontinue. Par conséquent, le quotient est une variété Riemannienne (de Hausdorff). (Voir aussi [\[34\]](#), en particulier la Proposition 4.4)

*Remarque 2.20.* Un espace homogène pseudo-Riemannien est une variété pseudo-Riemannienne  $(M, g)$  telle que son groupe d'isométries agit transitivement sur  $M$  (rappelons également [sous-sous-section 1.3.4.2](#) du [chapitre 1](#)). Alors

1.  $(M = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, g_0)$  est une variété Lorentzienne homogène incomplète. (Indice : les  $v$ -translations et les applications similaires à  $\phi$  sont des isométries).
2. Toute variété Riemannienne homogène est complète. (Indice : une variété Riemannienne est complète s'il existe un  $\epsilon > 0$  tel que la boule fermée de centre n'importe quel point et de rayon  $\epsilon$  est compacte. Cette propriété est clairement satisfaite dans les variétés Riemanniennes homogènes.)

*Remarque 2.21.* D'après un théorème de J.E. Marsden (voir [42]) toute variété compacte pseudo-Riemannienne homogène est géodésiquement complète. Remarquons que les deux hypothèses (homogénéité et compacité) sont nécessaires dans le cas indéfini, alors que dans le cas Riemannien l'une d'elles suffit.

Naturellement,  $G$  agit par isométries sur  $M$ , et le quotient  $C = M/G$  est topologiquement un cylindre, le cylindre de Misner (voir [43]), ce qui est une simplification de l'espace-temps relativiste Taub-NUT. Le quotient  $C$  peut être visualisé comme la bande

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1, 2]\}$$

avec l'identification

$$(1, y) \sim (2, y/2), \forall y \in \mathbb{R}.$$

Clairement, la géodésique incomplète de type la lumière  $\gamma(t) = (t, 0)$ ,  $t > 0$  de  $M$  se projette sur une courbe  $\tilde{\gamma}$  de  $C$ , qui est une géodésique incomplète fermée de type lumière.

*Remarque 2.22.* Les géodésiques temporelles ou spatiales de type  $t \mapsto (t, at)$ ,  $t > 0$  se projettent également sur des géodésiques incomplètes pour le cylindre. La demi-géodésique obtenue en restreignant le domaine à  $t \in (0, 1]$  est incomplète, mais elle est contenue dans une région compacte du cylindre.

En prenant en compte cet exemple, revenons sur la notion de géodésique fermée.

**Définition 2.23.** Soit  $(M, g)$  une variété pseudo-Riemannienne et soit  $\gamma : I \rightarrow M$  une géodésique non constante (inextensible). On dira que  $\gamma$  est fermé s'il existe  $\lambda > 0$  et  $a, b \in I$ ,  $a < b$  tel que

$$\gamma'(b) = \lambda \gamma'(a). \tag{2.16}$$

Dans ce cas, si  $\lambda = 1$ , on dira que  $\gamma$  est périodique.

*Remarque 2.24.* Il est facile de vérifier que, si  $\gamma$  est périodique, alors il existe un minimum  $T > 0$  (la période de  $\gamma$ ) tel que  $\gamma(t) = \gamma(t + T)$ , pour tout  $t$ . En particulier  $\gamma$  est complet.

**Proposition 2.25.** Soit  $\gamma$  une géodésique fermée de  $(M, g)$ .

- (i) Si  $\gamma$  n'est pas de type lumière, alors elle est périodique.

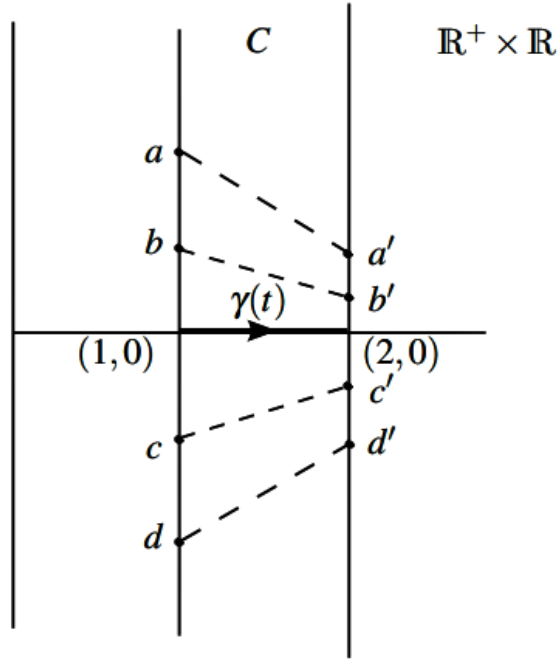


FIGURE 2.4 – Cylindre de Misner

(ii)  $\gamma$  est complet si et seulement s'elle est périodique.

Preuve. (i) Remarquons que, comme la géodésique est fermée,

$$g(\gamma'(b), \gamma'(b)) = \lambda^2 g(\gamma'(a), \gamma'(a)),$$

et comme elle n'est pas de type lumière, la constante  $g(\gamma', \gamma')$  est distincte de 0 et par suite  $\lambda = 1$ .

(ii) Comme nous l'avons noté, si  $\gamma$  est périodique ( $\lambda = 1$ ), alors il est aussi complet. Réciproquement, par contraposée, montrons que si  $\lambda > 1$ , alors  $\gamma$  est incomplet vers  $+\infty$  (un raisonnement analogue montre que si  $\lambda < 1$ , alors  $\gamma$  est incomplet vers  $-\infty$ ). On définit  $b_1 := b$  et  $T := b - a$ . Puisque  $\gamma'(b_1) = \lambda \gamma'(a)$ , de  $b_1$  et jusqu'à  $b_2 := b_1 + \frac{T}{\lambda}$ , la géodésique  $\gamma|_{[b_1, b_2]}$  est une reparamétrisation de  $\gamma|_{[a, b]}$  de telle sorte que  $\gamma'(b_2) = \lambda \gamma'(b_1) = \lambda^2 \gamma'(a)$ . En raisonnant par récurrence, la suite  $b_{i+1} = b_i + \frac{T}{\lambda^i}$  satisfait :

$$\gamma'(b_i) = \lambda^i \gamma'(a) \text{ et } b_k = b + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{T}{\lambda^i}.$$

Donc,  $\gamma$  ne peut pas être étendu jusqu'à

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \{b_i\} = b + \frac{T}{\lambda - 1} < +\infty.$$

□

2.4.3 *Connexité géodésique.*

En conséquence du théorème de Hopf-Rinow, nous avons qu’une variété Riemannienne complète (en particulier compacte) est géodésiquement connexe. La situation est radicalement différente dans le cas indéfini. En fait, il existe des variétés Lorentziennes

1. complètes et non géodésiquement connexes,
2. complètes et étoilées à partir d’un point, mais non géodésiquement connexes,
3. compactes et non géodésiquement connexes.

La fréquence de telles situations peut être surprenante. En fait, un espace de forme Lorentzienne (c’est-à-dire une variété Lorentzienne complète de courbure constante) de dimension  $n \geq 3$  et de courbure positive est géodésiquement connexe si et seulement si elle n’est pas orientable en temps (voir [[45], Proposition 9.19 page 248]). La classification du moment où [item 1](#) (et la propriété plus subtile [item 2](#)) se produit dans les espaces de formes a été faite par E. Calabi et L. Markus dans [8].

*Remarque 2.26.* L’espace de forme simplement connexe de dimension 2 et de courbure  $-1$  (espace-temps universel anti de Sitter) n’est pas géodésiquement connexe.

Rappelons que cet espace peut être vu comme l’une des deux surfaces Lorentziennes suivantes :

- (i) en coordonnées usuelles  $(t, x)$  :

$$\mathbb{R} \times \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ , \quad g_1 = \frac{1}{\cos^2(x)} (-dt^2 + dx^2), \text{ ou}$$

$$\mathbb{R}^2, \quad g_2 = dx^2 - \cosh^2(x) dt^2 ; \quad \text{et}$$

- (ii) le revêtement universel de la surface dans  $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$  défini par  $\langle x, x \rangle_2 = -(x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 = -1$ , avec la métrique induite.

2.4.4 *Tores plats avec groupes d’isométrie non compacts.*

Comme nous l’avons déjà commenté ([sous-section 2.3.1](#)), le groupe d’isométrie  $Isom(M, g)$  d’une variété Riemannienne ou, en général, pseudo-Riemannienne  $(M, g)$  est un groupe de Lie. Supposons que  $M$  est connexe, et considérons le fibré des repères orthonormés  $OM$ , c’est-à-dire la variété naturellement construite en prenant à chaque  $p \in M$  toutes les bases orthonormées de  $T_p M$  pour  $g_p$  ( $OM$  est un sous-fibré du fibré des repères  $LM$ ). Si on fixe une base orthonormée  $B_p \subset T_p M$ ; alors  $Isom(M, g)$  s’identifie naturellement à la sous-variété

$$C = \{ \phi_* B_p : \phi \in Isom(M, g) \} \subset OM$$

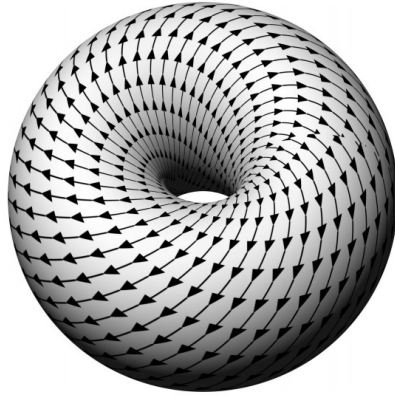


FIGURE 2.5 – Un champ vectoriel sur la surface d’un tore.

obtenue comme l’orbite de  $B_p$  dans  $OM$ . De plus,  $C$  est toujours un sous-ensemble fermé de  $LM$ .

Supposons maintenant que  $M$  soit compact. Si  $g$  est Riemannien, la compacité du groupe  $O(n)$  implique la compacité de  $OM$  et donc la compacité du sous-ensemble fermé  $C$ . Soit :

*le groupe d’isométrie d’une variété Riemannienne compacte<sup>1</sup>  $(M, g)$  est compact.*

Clairement, la preuve de ce résultat dépend fortement de la compacité de  $O(n)$ . Comme  $O_1(n)$  n’est pas compact, le résultat ne peut pas être étendu au cas Lorentzien et, encore une fois, il est très facile de trouver un contre-exemple Lorentzien. En fait, nous allons construire un tore Lorentzien plat de groupe d’isométrie non compact (voir [18]).

L’idée est la suivante. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

une matrice réelle de taille  $2 \times 2$  telle que ;

- (i)  $A$  a des coefficients entiers  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ .
- (ii)  $A$  est diagonalisable (par exemple,  $b = c$ ).
- (iii) Les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2$  de  $A$  satisfont  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1, \lambda_1 > 1$ .

Soit  $e_1, e_2$  une base de vecteurs propres, et définissons une métrique Lorentzienne  $\tilde{g}$  dans  $\mathbb{R}^2$  en imposant  $\tilde{g}(e_i, e_i) = 0, \tilde{g}(e_1, e_2) = 1$ . Cette métrique vérifie :

1.  $\tilde{g}$  induit une métrique  $g$  sur le tore  $T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ , car les coefficients métriques aux coordonnées usuelles sont constants.
2. La matrice  $A$  correspond à une isométrie de  $(\mathbb{R}^2, \tilde{g})$  (par [item \(iii\)](#)), qui peut être induite sur  $(T^2, g)$  (par [item \(i\)](#)).

---

<sup>1</sup>. Le résultat est valable même si  $M$  est non connexe car la compacité de  $M$  implique que le nombre de composantes connexes est fini

3. Le groupe  $G$  d'isométries généré par  $A$  a une fermeture non compacte dans  $Isom(T^2, g)$ , et il ne peut être identifié à aucun sous-ensemble compact du fibré de repères  $LT^2$ . En fait,  $A^k$  admet  $\lambda_1^k \rightarrow \infty$  comme valeur propre.

**Exemple 2.27.** Considérons la métrique Lorentzienne plate sur  $\mathbb{R}^2$  donnée dans les coordonnées usuelles comme

$$\tilde{g} = dx_1^2 + dx_1 \otimes dx_2 + dx_2 \otimes dx_1 - dx_2^2;$$

et l'induisons naturellement dans une métrique  $g$  sur le tore  $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ . La matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

génère une isométrie pour  $\tilde{g}$  et  $(T^2, g)$  : Mais le sous-groupe fermé  $\{A^n : n \in \mathbb{Z}\} \subset Isom(T^2, g)$  n'est pas compact, comme on le souhaite.

Quoi qu'il en soit, on peut obtenir des résultats généraux sur la compacité de  $Isom(M, g)$  (si  $(M, g)$  est Lorentzienne et compacte). En fait, le résultat suivant est prouvé dans l'article pionnier de D'Ambra [18] :

*Si une variété compacte pseudo-Riemannienne  $(M, g)$  est simplement connexe (ou à groupe fondamental fini), analytique et Lorentzienne, alors  $Isom(M, g)$  est compacte.*

Les tores construits ci-dessus montrent que la simple connexité est nécessaire. La nécessité d'être Lorentzien peut être vérifiée à l'aide d'un contre-exemple, par exemple  $\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$  admet une métrique analytique d'indice 2 à groupe d'isométrie non compact. L'analyticité a été récemment supprimée dans le cas simplement connexe où il existe un champ de vecteurs de Killing de type temporel par P. Piccione et A. Zeghib (voir [48]).

# Les huit géométries Riemanniennes de Thurston

Les principales sources utilisées pour ce chapitre sont Three-Dimensional Geometry and Topology [58] de William P. Thurston et The Geometries of 3-Manifolds [53] de Peter Scott. Le chapitre s'appuie également sur plusieurs autres références [13], [34], [36] et [39]. Nous avons limité au seul matériel nécessaire à la compréhension de la preuve de l'existence et de la suffisance des huit géométries tridimensionnelles de Thurston.

## 3.1 GÉOMÉTRIES MODÈLES

**Définition 3.1.** Une géométrie modèle est un couple  $(G, X)$ ,  $X$  étant une variété différentielle et  $G$  un groupe de Lie de difféomorphismes de  $X$ , vérifiant les hypothèses (a),(b),(c) et (d) suivantes :

- (a)  $X$  est connexe et simplement connexe.
- (b) L'action de  $G$  sur  $X$  est transitive avec stabilisateurs compacts.
- (c)  $G$  est maximal dans le sens où il n'est pas contenu dans un groupe de difféomorphisme de  $X$  avec stabilisateurs compacts.
- (d) Il existe au moins une variété compacte modelée par  $(G, X)$ .

On définit une variété modelée sur  $(G, X)$  comme un quotient de  $X$  par un sous-groupe discret de  $G$  agissant librement sur  $X$ . Une variété modelée sur  $X$  hérite de toute métrique Riemannienne invariante sur  $X$ .

*Remarque 3.2.* — Les exemples standards de géométrie modèle sont  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $S^n$  ou  $\mathbb{H}^n$  avec ses métriques habituelles, et  $G$  ses groupe d'isométries.

—  $X$  doit être un revêtement universel d'une variété compacte connexe.

Pour le deuxième axiome [item \(b\)](#), nous avons le théorème suivant :

**Théorème 3.3.**  $X$  admet une métrique  $G$ -invariante.

*Preuve.* Soit  $x \in X$ , son stabilisateur  $G_x$  induit une action sur l'espace tangent  $T_x X$ , dont l'image  $\mathcal{H}_x \subset GL(T_x X)$  est un sous-groupe compact de  $GL(T_x X)$ . Tout groupe compact peut admettre une mesure finie, appelée mesure de Haar, qui est invariante sous les translations gauche ou droite du groupe. Soit donc  $(\cdot, \cdot)$  une forme bilinéaire symétrique définie positive sur  $T_x X$ , et on définit

$$\langle u, v \rangle_x = \int_{\mathcal{H}_x} (gu, gv) dg, \quad u, v \in T_x X,$$



où  $dg$  est la mesure de Haar sur  $\mathcal{H}_x$ . Alors  $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$  est un produit scalaire défini positif sur  $T_x X$  invariant sous l'action de  $G_x$ . Puisque  $G$  agit transitivement sur  $X$ , ce produit scalaire peut être propagé à  $T_y X$  pour tout  $y \in X$  et nous obtenons ainsi une métrique Riemannienne  $G$ -invariante sur  $X$ .  $\square$

*Remarque 3.4.* — si  $\mu$  est une métrique Riemannienne  $G$ -invariante, alors  $G = \text{Isom}(X, \mu)$ . En effet, on sait que  $G \subset \text{Isom}(X, \mu)$ , or le groupe d'isométries d'une variété Riemannienne connexe agit toujours avec stabilisateurs compacts, donc par maximalité de  $G$  l'inclusion ci-dessus est une égalité. Ceci permet de voir que l'axiome [item \(c\)](#) est équivalent au suivant : pour toute métrique  $\mu$ ,  $G$ -invariante sur  $X$ ,  $G = \text{Isom}(X, \mu)$ .

- l'existence d'un modèle compact  $Y$  d'après l'axiome [item \(d\)](#) implique par Théorème de Hopf-Rinow ( voir [\[45\]](#), théorème 21, chapitre 5) que  $Y$  est complète, et donc que  $X$  est complète.

### 3.2 THÉORÈME DE THURSTON

Dans cette section, nous énonçons le résultat principal et fournissons une preuve partielle. Commençons par la version simple en dimension deux et généralisons ensuite le procédé en dimension trois.

Dans la suite, nous avons besoin du théorème suivant, connu sous le nom du théorème de Killing–Hopf (voir par exemple [\[45\]](#), corollaire 25, chapitre 8), qui est un des résultats fondamentaux de la géométrie Riemannienne. Introduisons à présent les définitions nécessaires à la compréhension de ce théorème.

Premièrement, nous définissons la courbure d'un cercle comme l'inverse de son rayon, et celle d'une ligne comme zéro. Alors, étant donné une courbe sur une surface et un point sur la courbe, il y a une ligne ou un cercle unique sur la surface qui se rapproche le plus de la courbe près de ce point, à savoir le cercle osculateur. La courbure de la courbe à ce point est définie comme étant la courbure de cette ligne ou de ce cercle.

Enfin, en tout point d'une surface, il existe un vecteur normal à la surface (nous supposons que notre surface est intégrée dans un espace ambiant avec un produit scalaire) et divers plans contenant ce vecteur. L'intersection d'un de ces plans avec la surface forme une courbe dont la courbure est appelée courbure normale. Les courbures normales maximale et minimale en un point sont appelées courbures principales, notées  $\kappa_1, \kappa_2$ , en ce point.

**Définition 3.5.** La courbure Gaussienne d'une surface en un point est  $\kappa_1 \kappa_2$ , le produit des courbures principales en ce point.

Il ressort clairement de la définition que la courbure de Gauss est un invariant de la métrique. En fait, si la métrique est multipliée par  $k$ , la courbure est multipliée par  $\frac{1}{k^2}$ .

Cette vision est source d'une autre manière de définir la courbure sectionnelle.

**Définition 3.6.** La courbure sectionnelle d'une variété Riemannienne, définie par rapport au plan tangent en un point, est la courbure Gaussienne de la surface tangente à ce plan. Cette définition dépend du plan tangent choisi.

On dit qu'une variété Riemannienne a une courbure sectionnelle constante si la courbure est indépendante non seulement du choix du plan tangent, mais aussi du choix du point auquel on choisit de calculer la courbure.

Si  $(M, g)$  est une variété Riemannienne complète de courbure sectionnelle constante  $K$ , alors, pour un nombre réel positif  $\lambda$ ,  $(M, \lambda g)$  est aussi une variété Riemannienne complète de courbure sectionnelle constante  $\lambda^{-1}K$ . Par conséquent, la métrique  $g$  peut être normalisée de sorte que  $K$  devienne égal à 0, 1 ou  $-1$ .

Dans ce cas nous avons

**Théorème 3.7** (Killing-Hopf). *Soit  $(M, g)$  est une variété Riemannienne complète simplement connexe de courbure sectionnelle constante  $K$  et de dimension  $n > 1$ . Alors  $M$  est isométrique à :*

1. l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ , si  $K = 0$ ;
2. l'espace hyperbolique réel  $\mathbb{H}^n$ , si  $K = -1$ ;
3. la sphère unité  $\mathbb{S}^n$ , si  $K = 1$ .

Une preuve de ce théorème peut être trouvée dans [13].

### 3.2.1 En deux dimensions.

**Théorème 3.8.** *Il existe exactement trois géométries modèles bidimensionnelles :  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{S}^2$  et  $\mathbb{H}^2$ .*

*Preuve.* Soit  $(G, X)$  une géométrie modèle à deux dimensions. Puisque nous travaillons en deux dimensions, il y a exactement un plan tangent à chaque point et la courbure sectionnelle est la courbure Gaussienne. De la définition d'une géométrie modèle, on sait que  $G$  agit transitivement sur  $X$  et que la métrique sur  $X$  est  $G$ -invariante. Par transitivité,  $G$  envoie la courbure en un point à la courbure en tout autre point, et puisque la courbure est un invariant de la métrique, elle doit être constante en tous points de  $X$ . D'après [Théorème 3.7](#),  $X$  ne peut être qu'un des  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{S}^2$  ou  $\mathbb{H}^2$   $\square$

Donc en deux dimensions, les choses sont relativement simples. Cependant, en trois dimensions, nous montrons que, par exemple, la géométrie produit suivante  $(O(3) \times \mathbb{S}^1, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R})$  est un candidat pour une géométrie modèle qui n'est homéomorphe à aucun des  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{S}^3$  ou  $\mathbb{H}^3$ . En fait, il existe huit géométries modèles en trois dimensions.

## 3.2.2 En trois dimensions.

Soit  $(G, X)$  une géométrie modèle tridimensionnelle. Nous donnons tout d'abord des informations supplémentaires sur le groupe  $G$  qui opère transitivement sur  $X$ .

3.2.2.1 Discussion sur  $G$ .

Nous examinons d'abord la composante neutre de  $G$ , qu'on va noter  $G^0$ .

**Lemme 3.9.** *L'action de  $G^0$  est transitive.*

*Preuve.* Supposons premièrement que, pour tout  $x \in X$ , on a  $G^0 G_x = G$ . Alors, si  $y \in X$  un autre point, et  $g.x = y$  pour un certain  $g \in G$  puisque l'action de  $G$  est transitive, alors  $g$  serait de la forme  $g'h$  pour un certain  $g' \in G^0$  et  $h \in G_x$ . Cela implique que  $y = g.x = g'h.x = g'.x$ , c'est-à-dire qu'il existe un élément dans  $G^0$  qui envoie  $x$  sur  $y$ .

Il reste donc à montrer que  $G^0 G_x = G$ . Puisque  $G$  agit transitivement avec le stabilisateur  $G_x$ ,  $G/G_x$  est difféomorphe à  $X$ ,  $G^0$ , étant la composante neutre, est un sous-groupe normal ouvert de  $G$ , donc  $G^0 G_x$  est lui-même un sous-groupe ouvert de  $G$ . Son image sous l'application ouverte  $G \rightarrow G/G_x$  est un ouvert, de même que les images de ses classes dans  $G$ . On obtient ainsi une collection d'ouverts disjoints dans  $G/G_x$ . Cependant, c'est difféomorphe à  $X$ , qui est connexe. Il s'ensuit qu'il n'y a en fait qu'un seul de ces ensembles ouverts. C'est-à-dire  $G^0 G_x = G$ .  $\square$

On note par  $G_x^0$  le stabilisateur de  $x$  dans  $G^0$ .

**Lemme 3.10.**  *$G_x^0$  est connexe pour tout  $x$ .*

*Preuve.* Soit  $(G_x^0)^0$  la composante neutre dans  $G_x^0$ . Il suffit donc de montrer que  $(G_x^0)^0 = G_x^0$ . D'après le lemme précédent, l'action de  $G^0$  est transitive, on a donc  $G^0/G_x^0 \cong X$  pour tout  $x \in X$ . Au lieu de  $G_x^0$ , si l'on quotient  $G^0$  par  $(G_x^0)^0$ , un sous-groupe de  $G_x^0$ , l'application  $G^0/(G_x^0)^0 \rightarrow X$  peut ne pas être injective, mais elle est toujours surjective. On a donc une projection  $\pi : G^0/(G_x^0)^0 \rightarrow X$  avec fibre  $G_x^0/(G_x^0)^0$ . Puisque  $(G_x^0)^0$  est la composante neutre, le quotient  $G_x^0/(G_x^0)^0$  est discret, et l'application  $\pi$  est en fait un revêtement. Comme  $X$  est simplement connexe, la fibre sur chaque point est exactement un point, donc  $(G_x^0)^0 = G_x^0$ .  $\square$

**Lemme 3.11.**  *$G_x^0$  est fermé dans  $G$  pour tout  $x$ .*

*Preuve.* Puisque  $G^0$  est une composante connexe, donc elle est clairement fermée.  $G_x$ , étant l'image inverse de  $x$  sous l'application  $: G \rightarrow X, g \mapsto g.x$ , est également fermé. Il s'ensuit que  $G_x^0 = G_x \cap G^0$  est également fermé.  $\square$

Le résultat de ces lemmes est que  $G_x^0$  est un sous-groupe fermé connexe de  $G$ . Ainsi  $G_x^0$  est un sous-groupe de Lie.

Pour une géométrie modèle  $(G, X)$  de dimension 3, le stabilisateur d'un point  $G_x$  est isomorphe à un sous-groupe fermé de  $O(3)$ . En effet, si l'action induite par  $h \in G_x$  sur  $T_x X$  notée  $h_*$  est triviale, alors  $\exp(u) = \exp(h_* \cdot u) = h \cdot \exp(u)$  pour tout  $u \in T_x X$ , et donc  $h$  agit trivialement sur  $X$  par complétude. En particulier, la composante neutre  $G_x^0$  est soit tout  $SO(3)$ , soit l'ensemble des rotations autour d'un axe  $SO(2)$  ou soit triviale. Par conséquent,  $G_x$  est également un groupe de Lie de même dimension.

### 3.2.2.2 Le théorème.

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, il existe trois possibilités pour les stabilisateurs d'un point. Il s'avère que ceux-ci décident de ce que  $X$  peut être.

**Théorème 3.12.** *Il existe huit géométries modèles  $(G, X)$  en dimension 3 :*

- (i) *Si les stabilisateurs sont tridimensionnels, alors  $X$  est  $\mathbb{R}^3$ ,  $S^3$  ou  $\mathbb{H}^3$ .*
- (ii) *Si les stabilisateurs sont unidimensionnels, alors  $X$  fibre sur les géométries modèles bidimensionnels. La connexion orthogonale aux fibres a une courbure zéro (auquel cas  $X$  est  $S^2 \times \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ) ou un (auquel cas  $X$  est Nil-géométrie (qui fibre sur  $\mathbb{R}^2$ ) ou  $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$  (qui fibre sur  $\mathbb{H}^2$ )).*
- (iii) *Si les stabilisateurs sont triviaux,  $X$  est Sol-géométrie, qui fibre sur  $\mathbb{R}$ .*

*Preuve.* Soit  $\mu$  une métrique Riemannienne  $G$ -invariante sur  $X$  (conséquence du [Théorème 3.3](#)). Nous discutons successivement les trois possibilités de stabilisateurs.

$\dim G_x^0 = 3$ . Un plan de  $T_x X$  peut être amené sur tout autre plan par l'action de  $G_x^0 = SO(3)$ , donc tout plan de  $TX$  peut être amené sur tout plan de  $TX$  par l'action transitive de  $G$ . La courbure sectionnelle étant calculée avec le tenseur de courbure sur tout plan et puisque la métrique  $\mu$ , et donc la courbure, est  $G$ -invariante, il s'ensuit que  $x$  a une courbure sectionnelle constante, et donc l'ensemble  $X$  a une courbure sectionnelle constante.

Les seules variétés complètes tridimensionnelles simplement connexes avec une courbure sectionnelle constante sont  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{H}^3$  et  $S^3$ , ce sont donc les géométries possibles pour ce cas.

$\dim G_x^0 = 1$ . Si  $G^0$  agit avec le stabilisateur  $SO(2)$ , alors en un point  $x \in X$ , l'espace tangent  $T_x X$  contient un sous-espace à une dimension qui est fixé sous l'action de  $G_x^0$ . Fixons donc un point  $p \in X$  et un vecteur tangent  $V_p$  dans ce sous-espace unidimensionnel de  $T_p X$ . Puisque l'action de  $G^0$  est transitive, considérons  $g_*(V_p)$  pour tout  $g \in G$ , cela nous permet de définir un champ de vecteurs  $V$  qui est  $G^0$ -invariant sur  $X$  (ceci est bien défini puisque le stabilisateur  $G_p$  fixe  $V_p$ ). Il s'agit d'un champ de vecteurs lisse qui ne s'annule nulle part.

Soit  $\phi_t$  le flot de  $V$  au temps  $t$ , on va montrer que le flot  $\phi_t$  agit par isométries sur  $X$ . Nous prouvons d'abord

**Lemme 3.13.**  $\phi_t$  commute avec l'action de  $G^0$ .

*Preuve.* Il suffit de montrer que, pour tout  $g \in G$ ,  $\psi_t = g \circ \phi_t \circ g^{-1}$  est aussi un flot de  $V$ . Alors par l'unicité du flot nous aurions  $\phi_t = g \circ \phi_t \circ g^{-1}$  et donc le lemme. Nous avons

$$\psi_t(g.p) = g \circ \phi_t \circ g^{-1}(g.p) = g.\phi_t(p).$$

Alors  $\psi_0(g.p) = g.\phi_0(p) = g.p$ . De plus,

$$\begin{aligned} \psi'_0(g.p) &= (g \circ \phi_t \circ g^{-1})'|_0(g.p) = (g \circ \phi_t)'|_0(p) \\ &= g_*(\phi'_0(p)) = g_*(V_p) = V_{g.p}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Enfin, nous avons montré que  $\psi_0(g.p) = g.p$  et  $\psi'_0(g.p) = V_{g.p}$ , ce qui prouve que  $\psi_t$  est un flot de  $V$  au temps  $t$ .

On en déduit donc l'égalité souhaitée, concluant la preuve du lemme.  $\square$

Puisque  $V$  ne s'annule nulle part et que ses courbes intégrales sont deux à deux disjointes, elles forment un feuilletage unidimensionnel de  $X$ . Notons ce feuilletage par  $\mathcal{F}$ . Appelons "feuilles" les trajectoires du flot de  $V$  et supposons que les points  $x$  et  $y$  se trouvent sur la même feuille  $F$  de  $\mathcal{F}$ , et soit  $g \in G_x^0$ . Alors, puisque  $y = \phi_t(x)$  pour un certain  $t$ , on a

$$g.y = g.\phi_t(x) = \phi_t(g.x) = \phi_t(x) = y,$$

de sorte que  $g \in G_y^0$ . Il s'ensuit que  $G_x^0 = G_y^0$ .

**Lemme 3.14.** Si  $h \in G^0$  envoie  $x$  à  $y$  dans la feuille  $F$ , alors  $h$  commute avec chaque élément de  $G_x^0 = G_y^0$ .

*Preuve.* Soit  $H_F$  le groupe de tous les éléments de  $G^0$  qui gardent  $F$  invariant (en fait, si un quelconque  $h$  amène un point d'une feuille à un autre point de la même feuille, il doit être dans  $H_F$ ). Pour  $g \in G_x^0$  et  $h \in H_F$ , l'application  $g \mapsto hgh^{-1}$  est un automorphisme de  $SO(2) \cong S^1$ . Comme il n'y a que deux automorphismes de  $S^1$ , on obtient une application continue de  $H_F$  vers  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Si nous pouvons montrer que  $H_F$  est connexe, alors nous aurons terminé, car alors  $g \mapsto hgh^{-1}$  serait l'identité pour chaque  $h \in H_F$ . Mais  $G_x^0$  est connexe et puisque  $H_F/G_x^0 \cong F$ , qui est connexe, nous avons que  $H_F$  est lui-même connexe d'après [Remarque 1.55](#) du [chapitre 1](#), d'où le résultat.  $\square$

Fixons un temps  $t \in \mathbb{R}$  et un point  $x$  sur une feuille  $F$ . Soit  $g_t$  un élément de  $G^0$  qui ramène  $\phi_t(x)$  à  $x$ . Alors  $g_t \circ \phi_t$  fixe  $x$ . De plus, puisque  $g_t$  et  $\phi_t$  sont tous deux des difféomorphismes,  $(g_t \circ \phi_t)_*$  est un automorphisme de  $T_x X$ . Comme  $(\phi_t)_*$  et  $(g_t)_*$  laissent tous les deux  $V$  invariant, on a

$$(g_t \circ \phi_t)_*(V_x) = (g_t)_* \circ (\phi_t)_*(V_x) = (g_t)_*(V_{\phi_t(x)}) = V_{g_t \circ \phi_t(x)} = V_x$$

$(g_t \circ \phi_t)_*$  est l'identité sur le sous-espace à une dimension de  $T_x X$  qui est fixé par  $G_x^0$ . Or, dans une base adaptée, les éléments de  $G_x^0$  sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & -\sin(t) \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

De plus, par les résultats précédents,  $(g_t \circ \phi_t)_*$  commute avec les éléments de  $G_x^0$ . Des calculs matriciels élémentaires montrent qu'une telle application doit être de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & -f & e \end{pmatrix}, \quad e, f \in \mathbb{R}.$$

Une telle matrice peut s'écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & -f & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{e}{e^2+f^2} & \frac{f}{e^2+f^2} \\ 0 & \frac{-f}{e^2+f^2} & \frac{e}{e^2+f^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^2+f^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^2+f^2 \end{pmatrix}.$$

**Lemme 3.15.**  $g_t \circ \phi_t$  ne peut être qu'une rotation.

*Preuve.* Nous devons montrer que  $e^2 + f^2 = 1$ . Par hypothèse, nous avons une variété compacte  $Y$  avec la géométrie de  $X$ . Maintenant  $Y$  est orientable et a donc une forme de volume canonique  $\omega$  obtenue à partir de la métrique Riemannienne qu'il hérite de  $X$ .

Par conséquent,  $((g_t \circ \phi_t)^* \omega)_p = \lambda(p) \omega_{g_t \circ \phi_t(p)}$ , avec  $\lambda$  représentant l'échelle en  $p$ . De plus  $((g_t \circ \phi_t)^* \omega)_p = (\phi_t^* \omega)_p$  et  $\omega_{g_t \circ \phi_t(p)} = \omega_{\phi_t(p)}$  puisque  $G^0$  garde la forme du volume invariante. On a donc  $(\phi_t^* \omega)_p = \lambda(p) \omega_{\phi_t(p)}$  pour tout  $p \in Y$ .

Si  $q$  est un autre point. Alors, puisque l'action de  $G^0$  est transitive, il existe un élément  $g \in G^0$  tel que  $g.p = q$ . Alors on a

$$\begin{aligned} \lambda(q) \omega_{\phi_t(p)} &= g^*(\lambda(q) \omega_{\phi_t(q)}) = g^* \circ \phi_t^*(\omega_q) \\ &= \phi_t^* \circ g^*(\omega_q) = \phi_t^*(\omega_p) = \lambda(p) \omega_{\phi_t(p)}, \end{aligned}$$

ce qui donne  $\lambda(p) = \lambda(q)$ . Ainsi  $\lambda$  est constant sur  $Y$  et nous avons  $(\phi_t^* \omega)_p = \lambda \omega_{\phi_t(p)}$  pour un nombre réel positif fixe  $\lambda$  et pour tout  $p \in Y$ . sachant que le champ  $V$  préserve le volume de la variété compacte, on a donc

$$\text{Vol}(Y) = \int_Y \omega = \int_Y \phi_t^* \omega = \lambda \int_Y \omega,$$

ce qui force  $\lambda = 1$  et d'où le résultat souhaitée.  $\square$

Ainsi  $((g_t \circ \phi_t)^*$  est une isométrie sur  $T_x X$ . Puisque  $g_t$  est une isométrie,  $\phi_t$  est aussi une isométrie. L'objet de la proposition suivante est de montrer que ce résultat est vrai pour tout  $x$  et  $t$ .

**Proposition 3.16.** *Le flot de  $V$  agit par isométries.*

Nous montrons maintenant que le quotient de  $X$  par ce feuilletage est lui-même une géométrie modèle à deux dimensions.

**Lemme 3.17.** *Deux feuilles  $F_1$  et  $F_2$  ont des voisinages disjoints.*

*Preuve.* Fixons  $x \in F_1$  et  $y \in F_2$ . Soient  $\mathcal{U}_1$  et  $\mathcal{U}_2$  deux voisinages disjoints de  $x$  et  $y$ . Soit  $G_1 = \{h \in G : h.x \in \mathcal{U}_1\}$ , et de manière analogue  $G_2$  pour  $y$  et  $\mathcal{U}_2$ . Alors, puisque l'action de  $G^0$  commute avec le flot, nous avons que  $G_1.F_1$  et  $G_2.F_2$  sont des voisinages disjoints de  $F_1$  et  $F_2$  respectivement.  $\square$

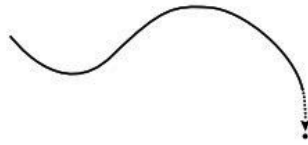


FIGURE 3.1 – Une courbe intégrale s'approchant un point

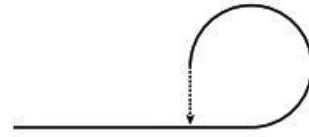


FIGURE 3.2 – Une courbe intégrale s'accumulant sur elle-même

**Lemme 3.18.** *Toute feuille  $F$  est l'image d'une immersion injective de  $\mathbb{R}$  ou  $S^1$ .*

*Preuve.* On raisonne par l'absurde. Alors, puisque  $F$  est en fait une courbe intégrale pour  $V$  pour tout temps, elle doit soit approcher un point  $p$  sans le traverser réellement (Figure 3.1), soit s'accumuler quelque part sur elle-même (Figure 3.2). Dans le premier cas, le point  $p$  appartient à une feuille  $F' \neq F$ , mais alors  $F'$  et  $F$  n'auraient pas de voisinages disjoints, contrairement au Lemme 3.17 précédent. Dans le deuxième cas, supposons que  $q \in F$  est le point d'accumulation. Alors nous avons  $h_n \rightarrow e$  pour une suite  $\{h_n\}$  dans  $G^0$ . Considérons maintenant un point  $p' \in F$  "après"  $p$  (c'est-à-dire situé sur la partie entre  $p$  et la partie qui s'accumule sur  $p$ ). Puisque l'action de groupe déplace effectivement la courbe intégrale "en avant", nous devons avoir  $h_n.p' \rightarrow p$  dans  $X$ , contredisant le fait que  $h_n.p' \rightarrow e.p' = p'$ .  $\square$

Il résulte de ce qui précède que également chaque feuille est fermée. Si l'on définit  $M = X/\mathcal{F}$ , on voit que  $M$  est lui-même une variété (la propriété de Hausdorff découle du Lemme 3.17, les autres conditions sont faciles à vérifier). Rappelons que nous avons défini  $H_F$  comme étant le sous-groupe de  $G^0$  qui laisse  $F$  invariant. Puisque chaque feuille est fermée, et que l'action de  $H_F$  est transitive, on voit que  $H_F$  lui-même est

fermé, d'où un sous-groupe de Lie de  $G^0$ . On voit que l'action de  $G^0$  sur  $M$  est transitive, avec le stabilisateur  $H_F$ . En d'autres termes,  $M \equiv G^0/H_F$ . Étant un quotient de  $X$ ,  $M$  est connexe.  $M$  est aussi simplement connexe. En effet : considérons un lacet centré en un point  $H_F.x \in M$ . Il a plusieurs pré-images dans  $X$  qui sont des chemins. Choisissons l'un de ces chemins. Les extrémités de ce chemin se trouvent sur la feuille  $F$  de  $x$ . Puisque  $X$  est simplement connexe et  $F$  est connexe par arcs, ce chemin est homotope à un chemin entre les deux extrémités, se trouvant entièrement à l'intérieur de  $F$ . Ainsi leurs images, le lacet considéré et l'application identité, sont homotopes, et finalement  $M$  est simplement connexe.

**Proposition 3.19.**  *$M$  hérite d'une métrique Riemannienne de  $X$ , et d'une action transitive de  $G^0$  par isométries.*

*Preuve.* Soit  $\pi : X \rightarrow M$  la projection quotient. En tout point  $p \in X$ ,  $\pi_*$  est un isomorphisme entre l'espace tangent horizontal (c'est-à-dire le plan orthogonal au champ vectoriel  $V$ ) et l'espace tangent de l'image de  $p$  dans  $M$ . Ainsi, nous pouvons affecter un produit scalaire à  $T_{\pi(p)}M$  comme  $\langle \pi_*(u), \pi_*(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ . Ceci est bien défini puisque  $\langle u, v \rangle = \langle (\phi_t)_*(u), (\phi_t)_*(v) \rangle$  pour tout  $t$ ,  $\phi_t$  étant lui-même une isométrie. Toutes les propriétés requises de ce produit scalaire pour être une métrique découlent du fait qu'il définit une métrique sur  $X$ . L'action de  $G^0$  sur  $M$  est transitive car l'action de  $G^0$  sur  $X$  était transitive au départ. Enfin,  $G^0$  préserve la métrique découle du fait que la métrique elle-même est héritée de  $X$ .  $\square$

Ainsi, nous avons montré que  $(G^0, M)$  est lui-même une géométrie modèle bidimensionnelle et par conséquent :

**Proposition 3.20.**  *$M$  est soit  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{H}^2$  ou  $\mathbb{S}^2$ .*

Nous notons également que  $X$  est un espace fibré principal sur  $M$ , avec une fibre et un groupe de structure égaux à  $\mathbb{S}^1$  ou  $\mathbb{R}$  : puisque les fibres du fibré sont les feuilles du feuilletage, il est clair que la fibre est  $\mathbb{S}^1$  ou  $\mathbb{R}$ . De plus, puisque les fonctions de transition sur l'intersection de deux voisinages de feuilles ne peuvent être données que par des translations. Par exemple, s'il s'agit de  $\mathbb{R}$ , étant donné un ouvert  $\mathcal{U}$  dans  $M$ , on peut trouver un ouvert  $\mathcal{U}'$  dans  $X$  qui est de la forme  $\phi_t(A)$  pour une "section locale"  $A$  de  $X$  avec une application de trivialisatoin locale donnée par  $\psi(\phi_t(a)) = \psi(a) + t$ . Si  $\phi_t(a)$  est aussi  $\phi_s(b)$  pour un ouvert  $\mathcal{V}'$  correspondant à un ouvert  $\mathcal{V}$  dans  $M$ , alors l'application de transition de  $\psi(\mathcal{U})$  à  $\psi(\mathcal{V})$  impliquerait une translation par  $s - t$ .

Il est clair que le champ plan  $\tau$  orthogonal au feuilletage  $\mathcal{F}$  est une connexion. Par une remise à l'échelle appropriée, nous pouvons supposer que la courbure de cette connexion est de  $-1$ ,  $0$  ou  $1$ . De plus, en choisissant des orientations appropriées pour la base et la fibre, nous pouvons traiter Les cas non nuls de la courbure simultanément, et nous avons ainsi deux possibilités pour la courbure :  $0$  et  $1$ .



Si la courbure est nulle, on obtient un feuilletage horizontal transversal aux fibres. On obtient ainsi des homéomorphismes locaux entre les intersections des feuilles avec des ouverts dans  $X$  et des ouverts dans  $M$ . En considérant la topologie sur une feuille donnée comme sa propre topologie et non celle héritée de  $X$ , on voit que chaque feuille est un revêtement de  $M$ . Puisque  $M$  est simplement connexe, chaque feuille est elle-même  $M$ , et on obtient ainsi une section globale de  $X$ .

On peut montrer qu'un fibré principal est trivial s'il admet une section globale (par exemple, envoyer chaque élément de la section à l'élément identité de la fibre correspondante dans le fibré trivial donne un isomorphisme de fibré).

On conclut donc que si la courbure est nulle, le fibré est trivial. Passant au revêtement universel, il y a trois cas possibles :  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^3$ , dont deux nouveaux géométrie modèle.

Si la courbure n'est pas nulle, nous obtenons ce qu'on appelle une structure de contact (une discussion détaillée de ceci et de la partie suivante de la preuve dépasse le cadre de notre projet, le lecteur est invité à se référer à [58] pour voir la preuve complète). Si  $M$  a une courbure non nulle,  $X$  peut être considéré comme le revêtement universel du fibré tangent unitaire de  $M$ . Donc si  $M = \mathbb{S}^2$ , on obtient  $\mathbb{S}^3$  (qui n'est pas une nouvelle géométrie), et si  $M = \mathbb{H}^2$ , on obtient  $\widehat{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Si  $M$  a une courbure nulle, on obtient *Nil-géométrie*.

$\dim G_x^0 = 0$ . Si  $G^0$  agit avec un stabilisateur trivial, alors on a  $G^0/G_x^0 \cong X$ , donc  $X$  est lui-même un groupe de Lie. La tâche consiste donc à trouver des groupes de Lie tridimensionnels connexes et simplement connexes pour lesquels il existe au moins un sous-groupe  $H$  tel que  $G/H$  est compact, et qui ne sont aucune des sept géométries obtenues jusqu'à présent. Il s'avère qu'il n'y a qu'un seul groupe de Lie, et la géométrie résultante est appelée *Sol-géométrie*.

□

Deuxième partie

Présentation des résultats

# Métriques Lorentziennes sur les groupes de Lie unimodulaires de dimension 3

## 4.1 INTRODUCTION

L'étude de la géométrie des métriques Lorentziennes invariantes à gauche sur les groupes de Lie tridimensionnels  $G$  remonte à Cordero et Parker [15] et est encore loin d'être achevée. Il existe des problèmes importants et intéressants non résolus, dont l'un est le problème de la détermination de l'espace des modules défini comme étant l'espace des orbites de l'action de  $Aut(G)$  sur l'espace  $\mathfrak{M}(G)$  des métriques Lorentziennes invariantes à gauche sur de tels groupes de Lie. Une étude complète sur le calcul des espaces de modules est réalisée pour le cas Riemannien par K. Y. Ha, et J. B. Lee (2009) dans [25]. Il est connu des travaux de Vukmirović (2015) dans [59] que les métriques de gauche Lorentziennes sur Heisenberg regroupent  $H_{2n+1}$  de dimension  $2n + 1$ , admettent trois classes non isométriques qui généralisent la métrique de Rahmani dans [49, 50]. Plus tard, dans [31], Kubo, Onda, Taketomi et Tamaru (2016) étudient l'espace des modules de métriques pseudo-Riemanniennes invariantes à gauche sur les groupes de Lie des espaces hyperboliques réels. De plus, il est déterminé dans un article récent [30] de Kondo et Tamaru l'espace des modules à isométrie près et homothétie près des métriques Lorentziennes invariantes à gauche sur certains groupes de Lie nilpotents. Dans la littérature à ce jour, l'espace des modules pour les métriques Lorentziennes invariantes à gauche sur le groupe de Lie tridimensionnel unimodulaire n'a pas été explicitement présenté. L'observation ci-dessus nous motive à étudier cet espace de modules et il est intéressant de remarquer que la classification résultante dans ce travail peut être considérée comme une généralisation naturelle du travail dans [25].

Les principaux objectifs du présent chapitre sont :

1. Compléter la classification dans [15] réalisée en termes d'algèbres de Lie à base orthonormée, en classant pour chaque groupe de Lie tridimensionnel, connexe, simplement connexe, unimodulaire et non abélien  $G$  toutes les métriques Lorentzienne invariantes à gauche sur  $G$ , à automorphisme de  $G$  près, et donc réaliser une étude similaire à celle faite dans le cas Riemannien dans [25],
2. Calculer, pour chaque classe de ces métriques, leurs courbures. De plus, nous fournissons nos formules plus explicites pour toutes les métriques

Lorentziennes solitons de Ricci généralisés invariantes à gauche sur de tels groupes de Lie [10].

Il existe cinq groupes de Lie tridimensionnels, connexes, simplement connexes, unimodulaires et non abéliens caractérisés par la signature de leur forme de Killing : le groupe de Lie nilpotent Nil avec la signature  $(0, 0, 0)$ , le groupe unitaire spécial  $SU(2)$  avec signature  $(-, -, -)$ , le groupe de revêtement universel  $\widetilde{PSL}(2, \mathbb{R})$  du groupe linéaire spécial avec signature  $(+, +, -)$ , le groupe de Lie résoluble Sol de signature  $(+, 0, 0)$  et le groupe de revêtement universel  $\widetilde{E}_0(2)$  de la composante neutre du groupe Euclidien avec signature  $(-, 0, 0)$ . Soit  $(G, h)$  un de ces groupes de Lie doté d'une métrique Lorentzienne invariante à gauche et  $\mathfrak{g}$  son algèbre de Lie d'orientation fixe. Notons par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  la valeur de  $h$  à l'élément neutre. L'étude dans [15] est basée sur une remarque faite pour la première fois par Milnor dans [37]. Dépendant uniquement de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de l'orientation, il existe un produit<sup>1</sup>  $\times : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$  et un endomorphisme symétrique  $L : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$  tel que, pour tout  $u, v \in \mathfrak{g}$ , le crochet de Lie sur  $\mathfrak{g}$  est donné par

$$[u, v] = L(u \times v). \quad (4.1)$$

Notons que  $L$  change en  $-L$  lorsque nous changeons l'orientation. Il est bien connu (voir Proposition 1.83 dans chapitre 1) qu'il existe quatre types d'endomorphismes symétriques sur un espace vectoriel Lorentzien. S'appuyant sur le type de  $L$ , il existe  $\mathbb{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$  une base orthonormée<sup>2</sup> de  $\mathfrak{g}$  avec  $\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_2, e_2 \rangle = 1$  et  $\langle e_3, e_3 \rangle = -1$  tels que Équation 4.1 donne l'une des formes suivantes :

**Type**  $\{a, b, c\}$ . Il existe  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que

$$[e_1, e_2] = -ce_3, [e_2, e_3] = ae_1 \text{ et } [e_3, e_1] = be_2. \quad (4.2)$$

Dans ce cas les valeurs propres de la matrice de la forme de Killing dans  $\mathbb{B}_0$  sont  $[-2ab, 2ac, 2bc]$ .

**Type**  $\{a, \alpha, \beta\}$ . Il existe  $a, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  avec  $\beta \neq 0$  tels que

$$[e_1, e_2] = -\beta e_2 - \alpha e_3, [e_2, e_3] = ae_1 \text{ et } [e_3, e_1] = \alpha e_2 - \beta e_3. \quad (4.3)$$

Dans ce cas les valeurs propres de la matrice de la forme de Killing dans  $\mathbb{B}_0$  sont  $[2(\alpha^2 + \beta^2), 2a\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, -2a\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}]$ .

**Type**  $\{ab, 2\}$ . Il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que

$$[e_1, e_2] = \frac{1}{2}e_2 + \left(\frac{1}{2} - b\right)e_3, [e_2, e_3] = ae_1 \text{ et } [e_3, e_1] = \left(b + \frac{1}{2}\right)e_2 + \frac{1}{2}e_3. \quad (4.4)$$

1. le produit  $\times$  désigne le produit vectoriel de deux vecteurs  $u, v$  dans l'algèbre de Lie Lorentzienne  $\mathfrak{g}$  tel que  $\langle u \times v, w \rangle = \det[u \ v \ w], \forall w \in \mathfrak{g}$ .

2. si  $\mathbb{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$  est une base orthonormée et positivement orientée avec  $e_3$  temporel alors  $e_1 \times e_2 = -e_3, e_2 \times e_3 = e_1$  et  $e_3 \times e_1 = e_2$ .

ce qui donne les valeurs propres de la matrice de la forme de Killing dans  $\mathbb{B}_0 : [2b^2, (\sqrt{4b^2 + 1} - 1)a, -(\sqrt{4b^2 + 1} + 1)a]$ .

**Type**  $\{a3\}$ . Il existe  $a \in \mathbb{R}$  tel que

$$[e_1, e_2] = \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 - ae_3, [e_2, e_3] = ae_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 \text{ et } [e_3, e_1] = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + ae_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_3. \quad (4.5)$$

Dans ce cas, les valeurs propres de  $M(K, \mathbb{B}_0)$  sont compliquées. Mais  $\det M(K, \mathbb{B}_1) = -8a^6$  et  $\text{tr}(M(K, \mathbb{B}_1)) = 2(a^2 + 1)$  qui permettent de déterminer la signature de la forme de Killing  $K$ .

De plus, d'après [Proposition 4.4](#) le type de l'endomorphisme symétrique  $L$  est un invariant des métriques Lorentziennes invariantes à gauche sur les groupes de Lie unimodulaires tridimensionnels. En effet, Soient  $h_1$  et  $h_2$  deux métriques Lorentziennes invariantes à gauche sur  $G$ . Soient  $L_1$  et  $L_2$  les endomorphismes associés à  $h_1$  et  $h_2$  respectivement, pour une orientation fixe sur  $\mathfrak{g}$ . S'il existe un automorphisme  $\phi : G \rightarrow G$  tel que  $h_1 = \phi^*(h_2)$  alors  $L_2 = \pm \psi \circ L_1 \circ \psi^{-1}$  où  $\psi = T_e \phi$ . Ainsi, si nous avons l'un des quatre cas suivants :

cas 1 : le type de  $L_1$  est différent de celui de  $\pm L_2$  .

cas 2 :  $L_1$  et  $\pm L_2$  sont diagonalisables mais ont des ensembles différents de valeurs propres de vecteurs propres spatiaux. Plus en détail :  $(a_1, b_1) \neq \pm (a_2, b_2)$  et  $(a_1, b_1) \neq \pm (b_2, a_2)$  où  $a_1$  et  $b_1$  ( resp.  $a_2$  et  $b_2$  ) sont donnés dans [Équation 4.2](#), et liés à une base orthonormée par rapport à  $\langle , \rangle_1 = h_1(e)$  ( resp.  $\langle , \rangle_2 = h_2(e)$  ).

cas 3 :  $L_1$  et  $\pm L_2$  sont diagonalisables et ont les mêmes ensembles de valeurs propres de vecteurs propres spatiaux mais la valeur propre du vecteur propre temporel de  $L_1$  est différente de celle de  $\pm L_2$ .

cas 4 :  $L_1$  et  $\pm L_2$  ne sont pas diagonalisables et ont le même type donné dans [Équation 4.3](#), [Équation 4.4](#) et [Équation 4.5](#) mais l'ensemble des valeurs propres de  $L_1$  est différent de celui de  $\pm L_2$ .

alors  $h_1$  et  $h_2$  ne sont pas isométriques.

### Étapes.

Pour la commodité du lecteur, nous proposons maintenant une discussion approfondie des principales étapes de l'approche utilisée. La tâche globale afin d'atteindre nos objectifs mentionnés ci-dessus se divise en huit étapes.

étape 1 : On prend un groupe de Lie unimodulaire tridimensionnel  $G$  et on fixe une base naturelle  $\mathbb{B}_N$  de son algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  (voir [paragraphe 4.2](#) où ces bases sont données).

étape 2 : Nous équipons  $G$  d'une métrique Lorentzienne invariante à gauche  $h_0$  et on note  $L$  son endomorphisme associé.

étape 3 : Nous devons déterminer quels sont les types et paramètres possibles de  $\pm L$  qui sont soumis à la signature de la forme de Killing.

- étape 4 : Pour chaque type possible de  $\pm L$ , il existe une base positivement orientée et orthonormée  $\mathbb{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$  avec  $e_3$  temporel telle que le crochet de Lie de  $\mathfrak{g}$  a l'une des quatre formes [Équation 4.2](#) ... [Équation 4.5](#).
- étape 5 : Nous déterminons une base  $\mathbb{B}_1 = (xe_1 + ye_2 + ze_3, ue_1 + ve_2 + we_3, pe_1 + qe_2 + re_3)$  dans laquelle les constantes de structure de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  sont les mêmes constantes de structure décrites au [paragraphe 4.2](#) et liées à la base fixe  $\mathbb{B}_N$ . En utilisant cette base  $\mathbb{B}_1$  on calcule l'automorphisme de l'algèbre de Lie  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  qui renvoie la base orthonormée  $\mathbb{B}_0$  à  $\mathbb{B}_1$ . Soit  $\phi_0$  l'automorphisme de  $G$  associé à  $\rho$ . On met donc  $h_1 = \phi_0^*(h_0)$ .
- étape 6 : Dans certains cas, nous utilisons un autre automorphisme  $\phi_1$  de  $G$  de sorte que  $\phi_1^*(h_1)$  a une forme plus réduite que  $h_1$ .
- étape 7 : Enfin, on obtient la matrice de  $\phi_1^*(h_1)$  dans la base naturelle  $\mathbb{B}_N$ . La matrice obtenue  $M(\phi_0^*(h_0), \mathbb{B}_N)$  ou  $M(\phi_1^*(h_1), \mathbb{B}_N)$  constitue une liste de Métriques Lorentziennes invariantes à gauche sur  $G$  en fonction d'un nombre réduit de paramètres et toute métrique Lorentzienne invariante à gauche sur  $G$  est isométrique à un dans cette liste. On trouve vingt et une classes non isométriques de telles métriques, ce qui montre que la situation est bien plus riche que le cas Riemannien [\[25\]](#).
- étape 8 : Nous calculons pour chaque métrique de la liste résultante la courbure de Ricci et la courbure scalaire qui déterminent toute la courbure puisque nous sommes en dimension 3. Enfin, nous exposons quelques métriques avec des propriétés de courbure distinguées.

Notons que les cinquième et sixième étapes, à savoir la recherche d'un automorphisme  $\phi_0$  et  $\phi_1$  représentent l'une des tâches les plus difficiles de notre travail, surtout lorsque  $G = \widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$ . Pour cette raison nous avons utilisé le logiciel Maple et l'expression des groupes d'automorphismes d'algèbres de Lie unimodulaires tridimensionnelles données dans [\[25\]](#). Tous les calculs du chapitre ont été vérifiés par Maple. La classification calculée au sein de cette étude est résumée dans les tableaux ci-dessous.

Algèbre de Lie	$\mathfrak{n}$			$\mathfrak{su}(2)$	$\mathfrak{sol}$						
Base naturelle	$[X, Y] = Z,$ $[Z, Y] = 0,$ $[Z, X] = 0.$			$[\sigma_x, \sigma_y] = 2\sigma_z,$ $[\sigma_y, \sigma_z] = 2\sigma_x,$ $[\sigma_z, \sigma_x] = 2\sigma_y.$	$[X_1, X_2] = X_2,$ $[X_1, X_3] = -X_3,$ $[X_2, X_3] = 0.$						
Groupe de Lie	Nil			SU(2)	Sol						
Métriques	nil+	nil-	nil0	su	sol1	sol2	sol3	sol4	sol5	sol6	sol7
Lorentziennes											
inv. à gauche (modulo automorphisme)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{4}{u^2-v^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{u}{v} \\ 0 & \frac{u}{v} & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{4}{v^2-u^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u}{v} & -1 \\ 0 & -1 & \frac{u}{v} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{u+v} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{v}{u} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{u} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{2}{u} \\ 0 & 1 & 1 \\ -\frac{2}{u} & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u^2 & 0 & 0 \\ 0 & u & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Paramètres	$\lambda > 0$	$\lambda > 0$		$\mu_1 \geq \mu_2 > 0$ $\mu_3 > 0$	$-v < u < v$ $v > 0$	$-v < u < v$ $v > 0$	$u > 0$ $v > 0$	$u > 0$	$u > 0$	$u \neq 0$	
Endomorphisme	diag	diag	ab2	diag	diag	diag	az $\bar{z}$	az $\bar{z}$	ab2	ab2	a3
symétrique <b>L</b>	$(\alpha, 0, 0)$ $\alpha \neq 0$	$(0, 0, \gamma)$ $\gamma \neq 0$	$a = 0$ $b = 0$	$(\alpha, \beta, \gamma)$ $\alpha, \beta, \gamma \neq 0$	$(\alpha, \beta, 0)$ $\alpha, \beta \neq 0$	$(\alpha, 0, \gamma)$ $\alpha, \gamma \neq 0$	$a = 0$ $\Re(z) \neq 0$	$a = 0$ $\Re(z) = 0$	$a < 0$ $b = 0$	$a = 0$ $b \neq 0$	$a = 0$
Signature de la courbure de Ricci	(+, +, +)	(+, -, -)	(0, 0, 0)	(+, +, +) if $\mu_1 < \mu_2 + \mu_3$ (+, -, -) if $\mu_1 > \mu_2 + \mu_3$ (+, 0, 0) if $\mu_1 = \mu_2 + \mu_3$	(+, -, -) if $u \neq 0$ (-, 0, 0) if $u = 0$	(+, -, -) if $u > 0$ (+, +, +) if $u < 0$ (0, 0, 0) if $u = 0$	(+, -, -)	(-, 0, 0)	(+, -, -)	(-, 0, 0) if $u > 0$ (+, 0, 0) if $u < 0$	(-, 0, 0)
Signature de la courbure scalaire	$\mathfrak{s} = \lambda/2$ $\mathfrak{s} > 0$	$\mathfrak{s} = \lambda/2$ $\mathfrak{s} > 0$	$\mathfrak{s} = 0$	$\mathfrak{s} > 0$	$\mathfrak{s} = v^2/2$ $\mathfrak{s} > 0$	$\mathfrak{s} = u^2/2$ $\mathfrak{s} > 0$ if $u \neq 0$ $\mathfrak{s} = 0$ if $u = 0$	$\mathfrak{s} = -2v$ $\mathfrak{s} < 0$	$\mathfrak{s} = -2u$ $\mathfrak{s} < 0$	$\mathfrak{s} = u^2/2$ $\mathfrak{s} > 0$	$\mathfrak{s} = 0$	$\mathfrak{s} = 0$

Algèbres de Lie	sl(2, ℝ)							e <sub>0</sub> (2)		
Base naturelle	$[X_1, X_2] = 2X_3,$ $[X_3, X_1] = 2X_2,$ $[X_3, X_2] = 2X_1.$							$[X_1, X_2] = X_3,$ $[X_1, X_3] = -X_2,$ $[X_3, X_2] = 0.$		
Groupe de Lie	$\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$							$\widetilde{\text{E}}_0(2)$		
Métriques	sll1	sll2	sll3	sll4	sll5	sll6	sll7	ee1	ee2	ee3
Lorentz. inv. à gauche (modulo)	$\begin{pmatrix} -\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}$	$K \begin{pmatrix} M & \beta & 0 \\ \beta & N & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2\alpha}{N} \end{pmatrix}$	$K \begin{pmatrix} -N & 0 & \beta \\ 0 & \frac{a^2\alpha}{N} & 0 \\ \beta & 0 & M \end{pmatrix}$	$K \begin{pmatrix} u & 0 & v \\ 0 & M & 0 \\ v & 0 & u \end{pmatrix}$	$K \begin{pmatrix} M & -a & 0 \\ -a & N & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8a}{b} \end{pmatrix}$	$K \begin{pmatrix} M & N & 0 \\ N & S & R \\ 0 & R & 4a^4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & u & 0 \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & u & 0 \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}$
automorphisme)	$\mu_1 > 0$ $\mu_2 \geq \mu_3 > 0$	$\mu_1 > 0$ $\mu_2 > 0, \mu_3 > 0.$	$K = \frac{4}{a^2\alpha\sqrt{a^2+\beta^2}}$ $M = \frac{\beta^2-\alpha^2}{\sqrt{a^2+\beta^2}}$ $N = \sqrt{a^2+\beta^2}$	$K = \frac{16}{v^2-u^2}$ $M = 2(u+v)$ $-v < u < v$ $v > 0$	$a \neq 0$ $b \neq 0$ $K = \frac{1}{2ab}$ $M = a-8$ $N = a+8$	$K = \frac{2}{a^4(1+2a^2)}$ $M = 1-4a^4$ $N = (1+2a^2)^{\frac{3}{2}}$ $S = 4a^4+6a^2+1$ $R = 2a^3\sqrt{2}, a > 0$	$u \geq v$ $v > 0$	$u < 0$ $v > 0$	$u > 0$	
Paramètres			$\alpha > 0, \beta > 0$	$\alpha < 0, \beta > 0$	$v > 0$					
Endomorphisme symétrique <b>L</b>	diag $(\alpha, \beta, \gamma)$ $\alpha > 0, \beta > 0$ $\gamma > 0$	diag $(\alpha, \beta, \gamma)$ $\alpha < 0, \beta > 0$ $\gamma < 0$	a <sup>2</sup> z $\bar{z}$ $a \neq 0$ $\Re(z) > 0$	a <sup>2</sup> z $\bar{z}$ $a \neq 0$ $\Re(z) < 0$	a <sup>2</sup> z $\bar{z}$ $a \neq 0$ $\Re(z) = 0$	ab2 $a \neq 0$ $b \neq 0$	a3 $a \neq 0$	diag $(\alpha, \beta, 0)$ $\alpha > 0, \beta > 0$	diag $(\alpha, 0, \gamma)$ $\alpha > 0, \gamma < 0$	ab2 $a > 0$ $b = 0$
Signature de la courbure de Ricci	(+, +, +) if $\mu_3 < \mu_1 - \mu_2$	(+, +, +) if $\mu_1 < \mu_2 - \mu_3$	(+, -, -) $a^2 \neq 2 \Re(z)$	(+, -, -)	(+, -, -)	(+, -, -) if $a \neq 2b$	(+, -, -)	(0, 0, 0) if $u = v$	(+, +, +) if $u < -v$	(+, -, -)
	(+, -, -) if $\mu_3 > \mu_1 - \mu_2$	(+, -, -) if $\mu_1 > \mu_2 - \mu_3$	(-, 0, 0) $a^2 = 2 \Re(z)$			(-, 0, 0) if $a = 2b$		(+, -, -). if $u \neq v$	(+, -, -) if $u > -v$	
	(+, 0, 0) if $\mu_3 = \mu_1 - \mu_2$	(+, 0, 0) if $\mu_1 = \mu_2 - \mu_3$							(+, 0, 0) if $u = -v$	
	(-, 0, 0) if $\mu_3 = -\mu_1 + \mu_2$	(-, 0, 0) if $\mu_1 = \mu_2 + \mu_3$								
Courbure scalaire	$\mathfrak{s} = \frac{2[(\sqrt{\mu_1+\mu_2})^2+\epsilon\mu_3][(\sqrt{\mu_1-\mu_2})^2+\epsilon\mu_3]}{\mu_1\mu_2\mu_3}$ $\epsilon = -1$	$\mathfrak{s} = \frac{1}{2}a^4 - 2a^2\alpha - 2\beta^2$ $\epsilon = 1$	$\mathfrak{s} = \frac{1}{2}a^4 - 2a^2\alpha - 2\beta^2$	$\mathfrak{s} = \frac{u}{2}$	$\mathfrak{s} = \frac{1}{2}a(a-4b)$	$\mathfrak{s} = -\frac{3}{2}a^2$ $\mathfrak{s} < 0$	$\mathfrak{s} = \frac{(u-v)^2}{2v}$ $\mathfrak{s} \geq 0$	$\mathfrak{s} = \frac{(u-v)^2}{2v}$ $\mathfrak{s} > 0$	$\mathfrak{s} = \frac{u}{2}$ $\mathfrak{s} > 0$	



## 4.2 PRÉLIMINAIRES

Tout au long de ce chapitre,  $G$  sera toujours un groupe de Lie connexe, simplement connexe, unimodulaire, tridimensionnel et non abélien. Notons  $h$ , une métrique Lorentzienne invariante à gauche sur  $G$ , déterminée par le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle = h(e)$  de la signature  $(2, 1)$  sur l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$ . Soit  $\nabla : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  la connexion Levi-Civita associée à  $(G, h)$ . De la formule de Koszul, nous obtenons

$$2\langle \nabla_u v, w \rangle = \langle [u, v], w \rangle + \langle [w, u], v \rangle + \langle [w, v], u \rangle. \quad (4.6)$$

Pour tout  $u, v \in \mathfrak{g}$ ,  $\nabla_u : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  est antisymétrique et  $[u, v] = \nabla_u v - \nabla_v u$ . Soit  $K$  le tenseur de courbure Riemannien de  $(G, h)$  défini pour les vecteurs tangents  $u, v$  par  $K(u, v) = \nabla_{[u, v]} - [\nabla_u, \nabla_v]$ . La courbure de Ricci est le tenseur symétrique ric défini, pour tout vecteur tangent  $u$  et  $v$  comme trace de l'application :  $w \mapsto K(u, w)v$  et l'opérateur de Ricci  $\text{Ric} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  est donné par la relation  $\langle \text{Ric}(u), v \rangle = \text{ric}(u, v)$ . La courbure scalaire est donnée par  $\mathfrak{s} = \text{tr}(\text{Ric})$ .

Rappelons que :

1.  $(G, h)$  est appelé plat si  $K = 0$ ;
2.  $(G, h)$  a une courbure sectionnelle constante s'il existe une constante  $\lambda$  telle que, pour tout  $u, v, w \in \mathfrak{g}$ ,

$$K(u, v)w = \lambda (\langle v, w \rangle u - \langle u, w \rangle v).$$

3.  $(G, h)$  est appelé Einstein s'il existe une constante  $\lambda$  telle que  $\text{Ric} = \lambda \text{Id}_{\mathfrak{g}}$ .
4.  $(G, h)$  est dit localement symétrique si, pour tout  $u, v, w \in \mathfrak{g}$ ,

$$\nabla_u(K)(v, w) := [\nabla_u, K(v, w)] - K(\nabla_u v, w) - K(v, \nabla_u w) = 0.$$

5.  $(G, h)$  est dit semi-symétrique si, pour tout  $u, v, a, b \in \mathfrak{g}$ ,

$$[K(u, v), K(a, b)] = K(K(u, v)a, b) + K(a, K(u, v)b).$$

6.  $(G, h)$  est dit soliton de Ricci généralisé (voir [11] et ses références) s'il existe  $u \in \mathfrak{g}$  et des constantes réelles  $\alpha_0, \beta_0, \lambda_0$  tels que

$$\mathcal{L}_u \langle \cdot, \cdot \rangle + 2\alpha_0 u^\flat \odot u^\flat - 2\beta_0 \text{ric} = 2\lambda_0 \langle \cdot, \cdot \rangle,$$

$\mathcal{L}_u$  désigne la dérivée de Lie dans la direction de  $u$  et  $u^\flat$  désigne une 1-forme telle que  $u^\flat(v) = \langle u, v \rangle$ .

En adoptant la notation dans [11], on trouve :

- (K). L'équation du champ vectoriel de Killing si  $\alpha_0 = \beta_0 = \lambda_0 = 0$ ;
- (H). L'équation du champ vectoriel homothétique si  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ ;
- (RS). L'équation soliton de Ricci quand  $\alpha_0 = 0, \beta_0 = 1$ ;

- (E-W). Un cas particulier de l'équation d'Einstein-Weyl en géométrie conforme quand  $\alpha_0 = 1, \beta_0 = -1$  ;
- (PS). L'équation d'une structure projective métrique avec un tenseur de Ricci antisymétrique représentatif dans la classe projective si  $\alpha_0 = 1, \beta_0 = \frac{-1}{2}$ , et  $\lambda_0 = 0$  ;
- (VN-H). L'équation géométrique du vide à l'horizon proche d'un espace-temps si  $\alpha_0 = 1, \beta_0 = \frac{1}{2}$ , avec  $\lambda_0$  jouant le rôle de la constante cosmologique.

### Base naturelle.

Avant de porter notre focale sur notre sujet d'intérêt principal : la classification des métriques, il nous est apparu primordial de tourner notre attention vers la description du groupe de Lie  $G$  ainsi qu'aux constantes de structure de son algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  liées à la base naturelle notée  $\mathbb{B}_N$ .

I– *Le groupe de Lie nilpotent Nil* connu sous le nom de groupe de Heisenberg dont l'algèbre de Lie sera notée  $\mathfrak{n}$ . Nous avons

$$\text{Nil} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \text{ et } \mathfrak{n} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

et les crochets de Lie non nuls dans la base canonique  $\mathbb{B}_N = \{X, Y, Z\}$  sont donnés par  $[X, Y] = Z$ . La forme de Killing est triviale.

II– *Le groupe unitaire spécial SU(2)* =  $\left\{ \begin{pmatrix} a + ib & -c + id \\ c + id & a - ib \end{pmatrix} : a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \right\}$

dont l'algèbre de Lie  $\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} iz & y + ix \\ -y + xi & -zi \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ .

Dans la base naturelle

$$\mathbb{B}_N = \left\{ \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right\},$$

nous avons

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2\sigma_z, [\sigma_y, \sigma_z] = 2\sigma_x \text{ et } [\sigma_z, \sigma_x] = 2\sigma_y. \quad (4.7)$$

La forme de Killing a la signature  $(-, -, -)$ .

III– *Le groupe de revêtement universel  $\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$  de  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$*  dont l'algèbre de Lie est  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ . Dans la base naturelle

$$\mathbb{B}_N = \left\{ X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\},$$

nous avons

$$[X_1, X_2] = 2X_3, [X_3, X_1] = 2X_2 \text{ et } [X_3, X_2] = 2X_1. \quad (4.8)$$

La forme de Killing a la signature  $(+, +, -)$ .

IV – Le groupe de Lie résoluble  $\text{Sol} = \left\{ \begin{pmatrix} e^x & 0 & y \\ 0 & e^{-x} & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$  dont l'algèbre de Lie est  $\mathfrak{sol} = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 0 & -x & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$ . Dans la base naturelle

$$\mathbb{B}_N = \left\{ X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

nous avons

$$[X_1, X_2] = X_2, [X_1, X_3] = -X_3 \text{ et } [X_2, X_3] = 0. \quad (4.9)$$

La forme de Killing a la signature  $(+, 0, 0)$ .

V – Le groupe de revêtement universel  $\tilde{E}_0(2)$  du groupe de Lie

$$E_0(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & x \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \theta, x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Son algèbre de Lie est

$$\mathfrak{e}_0(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \theta & x \\ -\theta & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \theta, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dans la base naturelle

$$\mathbb{B}_N = \left\{ X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

nous avons

$$[X_1, X_2] = X_3, [X_1, X_3] = -X_2 \text{ et } [X_2, X_3] = 0. \quad (4.10)$$

La forme de Killing a la signature  $(-, 0, 0)$ .

*Remarque 4.1.* De toute évidence, nous pouvons voir à partir de la description ci-dessus que deux algèbres de Lie non abéliennes unimodulaires tridimension-

nelles sont isomorphes si et seulement si leurs formes de Killing ont la même signature.

Nous sommes maintenant prêts à aborder les relations d'équivalence suivantes.

**Définition 4.2.** Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie unimodulaire de dimension 3. On définit une relation d'équivalence  $\simeq$  sur l'ensemble des produits scalaires Lorentziens sur  $\mathfrak{g}$  en posant  $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle_1) \simeq (\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$  si et seulement s'il existe un automorphisme d'algèbre de Lie  $\phi \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$  tel que  $\phi^*(\langle \cdot, \cdot \rangle_1) = \langle \cdot, \cdot \rangle_2$ .

**Définition 4.3.** Soient  $\mathfrak{l} = (\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$  et  $\mathfrak{p} = (\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$  deux algèbres de Lie unimodulaires tridimensionnelles Lorentziennes orientées. Soient  $\mathbf{L}_1$  et  $\mathbf{L}_2$  les endomorphismes symétriques de  $\mathfrak{l}$  et  $\mathfrak{p}$ , respectivement. On dit que  $\mathbf{L}_1$  et  $\mathbf{L}_2$  sont équivalents que nous noterons  $\mathbf{L}_1 \equiv \mathbf{L}_2$  s'il existe une matrice pseudo-orthogonale  $\phi \in O(2, 1)$  telle que  $M(\mathbf{L}_2, \mathbb{B}_2) = \det(\phi) \cdot \phi M(\mathbf{L}_1, \mathbb{B}_1) \phi^{-1}$ , où  $\mathbb{B}_1 = (e_1, e_2, e_3)$  (resp.  $\mathbb{B}_2 = (v_1, v_2, v_3)$ ) est une base positivement orientée et orthonormée de  $\mathfrak{l}$  (resp.  $\mathfrak{p}$ ) avec  $e_3$  (resp.  $v_3$ ) temporel.

Cette dernière relation d'équivalence  $\equiv$  ne dépend pas des bases  $\mathbb{B}_1$  et  $\mathbb{B}_2$  et on voit que  $\equiv$  découle du fait que  $O(2, 1)$  est un groupe. Plus en détail, on trouve que

1. La réflexivité provient du fait que  $\text{Id} \in O(2, 1)$ .
2. La symétrie provient du fait que si  $\phi \in O(2, 1)$  alors  $\phi^{-1} \in O(2, 1)$ .
3. La transitivité provient du fait que si  $\phi \in O(2, 1)$  et  $\psi \in O(2, 1)$  alors  $\phi\psi \in O(2, 1)$ .

L'endomorphisme symétrique  $\mathbf{L}$  contient les informations complètes sur les métriques Lorentziennes invariantes à gauche sur le groupe de Lie. Plus précisément, [Proposition 4.4](#) suivante réduit le problème de la détermination des classes isométriques de métriques à celui de la recherche des classes d'équivalence d'un ensemble d'endomorphismes symétriques.

**Proposition 4.4.** Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie unimodulaire tridimensionnelle orientée. Alors les classes d'équivalence des algèbres de Lie Lorentziennes  $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  correspondent bijectivement aux classes d'équivalence de  $\mathbf{L}$  de l'endomorphisme symétrique associé.

*Preuve.* Pour chaque produit scalaire Lorentzien  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $\mathfrak{g}$ , on pose  $[(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)] = \{(\mathfrak{g}, \phi^*\langle \cdot, \cdot \rangle) : \phi \in \text{Aut}(\mathfrak{g})\}$ . Et pour chaque  $\mathbf{L}$  l'endomorphisme symétrique associé à  $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , soit  $[\mathbf{L}] = \{\det(A) \cdot A M(\mathbf{L}, \mathbb{B}) A^{-1} : A \in O(2, 1)\}$ , où  $\mathbb{B} = (e_1, e_2, e_3)$  est une base orientée positivement et orthonormée par rapport au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  avec  $e_3$  de type temps. La bijection est

$$\begin{aligned} \{[(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)] : \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ Lorentzien}\} &\rightarrow \{[\mathbf{L}] : \mathbf{L} \text{ endomorphisme symétrique de } (\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)\} \\ [(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)] &\mapsto [\mathbf{L}]. \end{aligned}$$

En effet, les assertions suivantes sont équivalentes

- (i) il existe un automorphisme d'algèbre de Lie  $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$  tel que  $\langle , \rangle_2 = \phi^*(\langle , \rangle_1)$ .
- (ii) il existe un isomorphisme  $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$  tel que  $\mathbf{L}_2 = \det(\phi) \cdot \phi \mathbf{L}_1 \phi^{-1}$  et  $\langle , \rangle_2 = \phi^*(\langle , \rangle_1)$ .
- (iii) si  $\mathbb{B}_1$  (resp.  $\mathbb{B}_2$ ) est une base positivement orientée et orthonormée par rapport à  $\langle , \rangle_1$  (resp.  $\langle , \rangle_2$ ), alors il existe une matrice  $\Phi \in \text{O}(2, 1)$  telle que  $M(\mathbf{L}_2, \mathbb{B}_2) = \det(\Phi) \cdot \Phi M(\mathbf{L}_1, \mathbb{B}_1) \Phi^{-1}$ .

(i)  $\Leftrightarrow$  (ii)

Soient  $\times_1$  et  $\times_2$  deux produits vectoriels (voir note de bas de page 92) associés respectivement à  $\langle , \rangle_1$  et  $\langle , \rangle_2$ .

$$\begin{aligned} \phi \in \text{Aut}(\mathfrak{g}) \text{ et } \langle , \rangle_1 = \phi^*(\langle , \rangle_2) &\Leftrightarrow \phi([u, v]) = [\phi(u), \phi(v)] \text{ et } \langle , \rangle_1 = \phi^*(\langle , \rangle_2) \\ &\Leftrightarrow \phi(\mathbf{L}_1(u \times_1 v)) = \mathbf{L}_2(\phi(u) \times_2 \phi(v)) \text{ et } \langle , \rangle_1 = \phi^*(\langle , \rangle_2) \\ &\Leftrightarrow \phi(\mathbf{L}_1(u \times_1 v)) = \det(\phi) \cdot \mathbf{L}_2(\phi(u \times_1 v)) \text{ et } \langle , \rangle_1 = \phi^*(\langle , \rangle_2), \end{aligned}$$

où la dernière ligne suit par le fait que,

$$\begin{aligned} \langle \phi(u) \times_2 \phi(v), \phi(w) \rangle_2 &= \det[\phi(u) \ \phi(v) \ \phi(w)] = \det \phi \det [u \ v \ w] \\ &= \det \phi \langle u \times_1 v, w \rangle_1 = \det \phi \langle \phi(u \times_1 v), \phi(w) \rangle_2, \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \phi \in \text{Aut}(\mathfrak{g}) \text{ et } \langle , \rangle_1 = \phi^*(\langle , \rangle_2) &\Leftrightarrow \phi \mathbf{L}_1 = \det(\phi) \cdot \mathbf{L}_2 \phi \text{ et } \langle , \rangle_1 = \phi^*(\langle , \rangle_2) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{L}_2 = \det(\phi) \cdot \phi \mathbf{L}_1 \phi^{-1} \text{ et } \langle , \rangle_1 = \phi^*(\langle , \rangle_2) \end{aligned}$$

(ii)  $\Leftrightarrow$  (iii)

Soit  $\mathbb{B}_1 = (e_1, e_2, e_3)$  avec  $e_3$  temporel, et  $\mathbb{B}_2 = (v_1, v_2, v_3)$  avec  $v_3$  temporel.

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_2 = \det(\phi) \cdot \phi \mathbf{L}_1 \phi^{-1} &\Leftrightarrow M(\mathbf{L}_2, \mathbb{B}_2) = \det(\Phi) \cdot \Phi M(\mathbf{L}_1, \mathbb{B}_1) \Phi^{-1} \\ \text{où } \Phi = M(\phi, \mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2), \text{ et } \Phi^{-1} &= M(\phi^{-1}, \mathbb{B}_2, \mathbb{B}_1); \end{aligned}$$

par contre, on pose  $\phi(e_j) = \sum_{i=1}^3 a_{ij} v_i$ ,  $\forall j = 1, 2, 3$  et on désigne par  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker correspondant à la métrique de Minkowski (i.e.  $\delta_{ii} = -1$ , si  $i = 3$ ).

$$\begin{aligned} \Phi = M(\phi, \mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2) \in \text{O}(2, 1) &\Leftrightarrow (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} \in \text{O}(2, 1) \\ &\Leftrightarrow \left\langle \sum_{k=1}^3 a_{ki} v_k, \sum_{k=1}^3 a_{kj} v_k \right\rangle_2 = \delta_{ij}, \forall i, j = 1, 2, 3 \\ &\Leftrightarrow \langle \phi(e_i), \phi(e_j) \rangle_2 = \langle e_i, e_j \rangle_1, \forall i, j = 1, 2, 3 \\ &\Leftrightarrow \langle , \rangle_1 = \phi^*(\langle , \rangle_2). \end{aligned}$$

□

## 4.3 MÉTRIQUES LORENTZIENNES INVARIANTES À GAUCHE

Le but de cette section est de donner un aperçu de notre outil principal que nous utilisons pour fournir une classification des métriques pour chaque  $G$  en gardant à l'esprit la description des principales étapes données dans l'introduction (voir [paragraphe 4.1](#)), les constantes de structure de son algèbre de Lie dans la base naturelle  $\mathbb{B}_N$  et [Définition 4.3](#).

## 4.3.1 Métriques Lorentziennes invariantes à gauche sur Nil

- (I)  $L$  est de type  $\text{diag}(0, 0, \sqrt{\lambda})$  avec  $\lambda \neq 0$ . Dans la base orthonormée  $\mathbb{B}_0$  donnée dans [Équation 4.2](#), on a  $[e_1, e_2] = -\sqrt{\lambda}e_3$ . On considère l'automorphisme d'algèbre de Lie  $\rho : \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{n}$  donné par

$$\rho(X) = e_1, \rho(Y) = e_2 \text{ et } \rho(Z) = -\sqrt{\lambda}e_3.$$

Soit  $\phi_0 : G \rightarrow G$  son automorphisme de groupe de Lie associé. La matrice de  $\phi_0^*(h_0)$  dans la base naturelle  $\mathbb{B}_N$  est spécifiée par

$$M(\phi_0^*(h_0), \mathbb{B}_N) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda > 0. \quad \boxed{\text{Metric: nil-}} \quad (\text{nil-})$$

- (II)  $L$  est de type  $\text{diag}(\sqrt{\lambda}, 0, 0)$  avec  $\lambda \neq 0$ . Dans la base orthonormée  $\mathbb{B}_0$  donnée dans [Équation 4.2](#), on a  $[e_2, e_3] = \sqrt{\lambda}e_1$ . On considère l'automorphisme d'algèbre de Lie  $\rho : \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{n}$  donné par

$$\rho(X) = e_2, \rho(Y) = e_3 \text{ et } \rho(Z) = \sqrt{\lambda}e_1.$$

$\phi_0$  son automorphisme de groupe de Lie associé. La matrice de  $\phi_0^*(h_0)$  dans la base naturelle  $\mathbb{B}_N$  est spécifiée par

$$M(\phi_0^*(h_0), \mathbb{B}_N) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda > 0. \quad \boxed{\text{Metric: nil+}} \quad (\text{nil+})$$

- (III)  $L$  est de type  $\{ab2\}$  avec  $a = b = 0$ .

Dans la base orthonormée  $\mathbb{B}_0$  donnée dans [Équation 4.4](#), on a  $[e_1, e_2] = [e_3, e_1] = \frac{1}{2}(e_2 + e_3)$ .

On considère l'automorphisme d'algèbre de Lie  $\rho : \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{n}$  donné par

$$\rho(X) = e_1, \rho(Y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_2 - e_3) \text{ et } \rho(Z) = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_2 + e_3).$$

$\phi_0$  son automorphisme de groupe de Lie associé. La matrice de  $\phi_0^*(h_0)$  dans la base naturelle  $\mathbb{B}_N$  est spécifiée par

$$M(\phi_0^*(h_0), \mathbb{B}_N) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \boxed{\text{Metric: nilo}} \quad (\text{nilo})$$

**Théorème 4.5.** *La métrique Lorentzienne invariante à gauche sur Nil est équivalente à automorphisme près à la métrique dont la matrice associée dans  $\mathbb{B}_N$  est exactement l'une des trois formes données par (nil-), (nil+) et (nilo).*

*Remarque 4.6.* **Théorème 4.5** confirme les résultats de [50], qui énonce qu'il y a exactement trois métriques non isométriques à homothétie près. Ces métriques sont représentées sous forme matricielle dans [59].

#### 4.3.2 Métriques Lorentziennes invariantes à gauche sur $SU(2)$

Nous avons exactement une forme d'endomorphismes symétriques non équivalents  $L$  associés à  $SU(2)$ .

$L$  est de type  $\text{diag}\{a, b, c\}$  avec  $a > 0$ ,  $b > 0$  et  $c < 0$ .

Notons que nous supposons ici que  $a \geq b$  puisque  $\text{diag}\{a, b, c\} \equiv \text{diag}\{b, a, c\}$  au vu de **Définition 4.3**. Dans la base orthonormée  $\mathbb{B}_0$  donnée dans **Équation 4.2**, on a  $[e_1, e_2] = -ce_3$ ,  $[e_2, e_3] = ae_1$  et  $[e_3, e_1] = be_2$ .

On considère l'automorphisme  $\rho : \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{su}(2)$  donné par

$$\rho(\sigma_x) = \frac{2}{\sqrt{-cb}}e_1 = \sqrt{\mu_1}e_1, \quad \rho(\sigma_y) = \frac{2}{\sqrt{-ca}}e_2 = \sqrt{\mu_2}e_2 \quad \text{et} \quad \rho(\sigma_z) = \frac{2}{\sqrt{ab}}e_3 = \sqrt{\mu_3}e_3.$$

$\phi_0$  son automorphisme de groupe de Lie associé. La matrice de  $\phi_0^*(h_0)$  dans  $\mathbb{B}_N$  est donnée par

$$M(\phi_0^*(h_0), \mathbb{B}_N) = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_3 \end{pmatrix}, \quad \mu_1 \geq \mu_2 > 0, \mu_3 > 0. \quad \boxed{\text{Metric: su}} \quad (\text{su})$$

**Théorème 4.7.** *La métrique Lorentzienne invariante à gauche sur  $SU(2)$  est équivalente à automorphisme près à la métrique dont la matrice associée dans  $\mathbb{B}_N$  est exactement de la forme donnée par (su).*

#### 4.3.3 Métriques Lorentziennes invariantes à gauche sur $\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$

Remarquons que l'ensemble des classes d'équivalence représentatives des endomorphismes symétriques associés à  $\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$  admet exactement cinq formes.

- (I)  $\mathbf{L}$  est de type  $\text{diag}\{a, b, c\}$  avec  $a > 0$ ,  $b > 0$  et  $c > 0$ , où en plus on suppose que  $a \geq b$  puisque  $\text{diag}\{a, b, c\} \equiv \text{diag}\{b, a, c\}$  au vu de [Définition 4.3](#).

Dans la base orthonormée  $\mathbb{B}_0$  donnée dans [Équation 4.2](#), on a

$$[e_1, e_2] = -ce_3, [e_2, e_3] = ae_1 \text{ et } [e_3, e_1] = be_2.$$

On considère l'automorphisme  $\rho : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  donné par

$$\rho(X_1) = \frac{2}{\sqrt{ab}}e_3 = \sqrt{\mu_1}e_3, \rho(X_2) = \frac{2}{\sqrt{ca}}e_2 = \sqrt{\mu_2}e_2 \text{ et } \rho(X_3) = -\frac{2}{\sqrt{cb}}e_1 = -\sqrt{\mu_3}e_1.$$

$\phi_0$  son automorphisme associé du groupe de Lie. La matrice de  $\phi_0^*(h_0)$  dans  $\mathbb{B}_N$  est spécifiée par

$$M(\phi_0^*(h_0), \mathbb{B}_N) = \begin{pmatrix} -\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}, \quad \mu_1 > 0, \mu_2 \geq \mu_3 > 0. \quad \boxed{\text{Metric: sll1}} \quad (\text{sll1})$$

- (II)  $\mathbf{L}$  est de type  $\text{diag}\{a, b, c\}$  avec  $a < 0$ ,  $b > 0$  et  $c < 0$ . On se souvient que

$$[e_1, e_2] = -ce_3, [e_2, e_3] = ae_1 \text{ et } [e_3, e_1] = be_2.$$

On considère l'automorphisme  $\rho : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  donné par

$$\rho(X_1) = \frac{2}{\sqrt{-cb}}e_1 = \sqrt{\mu_1}e_1, \rho(X_2) = \frac{2}{\sqrt{-ab}}e_3 = \sqrt{\mu_2}e_3 \text{ et } \rho(X_3) = -\frac{2}{\sqrt{ac}}e_2 = -\sqrt{\mu_3}e_2.$$

$\phi_0$  son automorphisme associé du groupe de Lie. La matrice de  $\phi_0^*(h_0)$  dans  $\mathbb{B}_N$  est spécifiée par

$$M(\phi_0^*(h_0), \mathbb{B}_N) = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix}, \quad \mu_1 > 0, \mu_2 > 0, \mu_3 > 0. \quad \boxed{\text{Metric: sll2}} \quad (\text{sll2})$$

- (III)  $\mathbf{L}$  est de type  $\{azz\}$   $a \neq 0$ . On remarque que, d'après [Définition 4.3](#) :

$$M(\mathbf{L}, \mathbb{B}_0) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & -\beta \\ 0 & \beta & -\alpha \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{où } z = \alpha + i\beta.$$

En termes de paramètres  $a$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ , cela se traduit par  $(a, \alpha, \beta) \equiv (-a, -\alpha, \beta) \equiv (a, \alpha, -\beta)$ . On suppose donc que  $a > 0$  et  $\beta > 0$ . On obtient ainsi  $\mathbf{L}$  est de type  $\{a^2zz\}$  avec  $a \neq 0$  et  $\beta > 0$ . Dans la base orthonormée  $\mathbb{B}_0$  donnée dans [Équation 4.3](#), on a

$$[e_1, e_2] = -\beta e_2 - \alpha e_3, [e_2, e_3] = a^2 e_1 \text{ et } [e_3, e_1] = \alpha e_2 - \beta e_3, \quad a \neq 0, \beta > 0$$



On distingue trois cas :

a)  $\alpha > 0$ . On considère l'automorphisme  $\rho : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  donné par

$$\rho(X_1) = \frac{2}{a\sqrt{\alpha(\alpha^2 + \beta^2)}}(\beta e_2 + \alpha e_3), \quad \rho(X_2) = \frac{2}{a\sqrt{\alpha}}e_2 \quad \text{et} \quad \rho(X_3) = -\frac{2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}e_1.$$

$\phi_0$  son automorphisme associé du groupe de Lie. La matrice de  $\phi_0^*(h_0)$  dans  $\mathbb{B}_N$  est spécifiée par

$$M(\phi_0^*(h_0), \mathbb{B}_N) = \frac{4}{a^2\alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \begin{pmatrix} \frac{\beta^2 - \alpha^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} & \beta & 0 \\ \beta & \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \end{pmatrix}, \quad (\text{sll}_3)$$

$$\alpha > 0, \beta > 0. \quad \boxed{\text{Metric: sll}_3}$$

b)  $\alpha < 0$ . On considère l'automorphisme  $\rho : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  donné par

$$\rho(X_1) = \frac{2}{a\sqrt{|\alpha|}}e_2, \quad \rho(X_2) = -\frac{2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}e_1 \quad \text{et} \quad \rho(X_3) = \frac{2}{a\sqrt{|\alpha|(\alpha^2 + \beta^2)}}(-\beta e_2 - \alpha e_3).$$

$\phi_0$  son automorphisme associé du groupe de Lie. La matrice de  $\phi_0^*(h_0)$  dans  $\mathbb{B}_N$  est spécifiée par

$$M(\phi_0^*(h_0), \mathbb{B}_N) = \frac{4}{a^2\alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} & 0 & \beta \\ 0 & \frac{a^2\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} & 0 \\ \beta & 0 & \frac{a^2 - \beta^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \end{pmatrix}, \quad (\text{sll}_4)$$

$$\alpha < 0, \beta > 0. \quad \boxed{\text{Metric: sll}_4}$$

c)  $\alpha = 0$ . On considère l'automorphisme  $\rho : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  donné par

$$\rho(X_1) = \frac{1}{\beta}e_2 + \frac{2}{a^2}e_3, \quad \rho(X_2) = \frac{2}{\beta}e_1 \quad \text{et} \quad \rho(X_3) = \frac{1}{\beta}e_2 - \frac{2}{a^2}e_3.$$

$\phi_0$  son automorphisme associé du groupe de Lie. La matrice de  $\phi_0^*(h_0)$  est donnée

$$M(\phi_0^*(h_0), \mathbb{B}_N) = \frac{1}{a^4\beta^2} \begin{pmatrix} a^4 - 4\beta^2 & 0 & a^4 + 4\beta^2 \\ 0 & 4a^4 & 0 \\ a^4 + 4\beta^2 & 0 & a^4 - 4\beta^2 \end{pmatrix}.$$

En mettant  $u = a^4 - 4\beta^2$  et  $v = a^4 + 4\beta^2$ , on obtient donc la matrice désirée

$$M(\phi_0^*(h_0), \mathbb{B}_N) = \frac{16}{v^2 - u^2} \begin{pmatrix} u & 0 & v \\ 0 & 2(u+v) & 0 \\ v & 0 & u \end{pmatrix}, \quad v > 0, -v < u < v. \quad \text{Metric: sll5}$$

(sll5)

(IV)  $\mathbf{L}$  est de type  $\{ab2\}$  avec  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$ . Dans la base orthonormée  $\mathbb{B}_0$  donnée dans [Équation 4.4](#), on a

$$[e_1, e_2] = \frac{1}{2}e_2 + \left(\frac{1}{2} - b\right)e_3, \quad [e_2, e_3] = ae_1 \quad \text{et} \quad [e_3, e_1] = \left(b + \frac{1}{2}\right)e_2 + \frac{1}{2}e_3.$$

On considère l'automorphisme  $\rho : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  donné par

$$\begin{aligned} \rho(X_1) &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4b} - \frac{2}{ab}\right)e_2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4b} - \frac{2}{ab}\right)e_3, \\ \rho(X_2) &= \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4b} - \frac{2}{ab}\right)e_2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4b} - \frac{2}{ab}\right)e_3, \\ \rho(X_3) &= -\frac{2}{b}e_1. \end{aligned}$$

$\phi_0$  son automorphisme associé du groupe de Lie. La matrice de  $\phi_0^*(h_0)$  dans  $\mathbb{B}_N$  est spécifiée par

$$M(\phi_0^*(h_0), \mathbb{B}_N) = \frac{1}{2ab} \begin{pmatrix} a-8 & -a & 0 \\ -a & a+8 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8a}{b} \end{pmatrix}, \quad a \neq 0, b \neq 0. \quad \text{Metric: sll6}$$

(sll6)

(V)  $\mathbf{L}$  est de type  $\{a3\}$  avec  $a \neq 0$ . On observe directement à partir de [Définition 4.3](#) que

$$M(\mathbf{L}, \mathbb{B}_0) = \begin{pmatrix} a & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & a & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & a \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -a & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & -a & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -a \end{pmatrix}$$

que nous pouvons écrire sous la forme  $a \equiv (-a)$ . À partir de ce point, nous supposons ci-dessous que  $\mathbf{L}$  est de type  $\{a3\}$  avec  $a > 0$ .

Dans la base orthonormée  $\mathbb{B}_0$  donnée dans [Équation 4.5](#), on a

$$[e_1, e_2] = \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 - ae_3, \quad [e_2, e_3] = ae_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 \quad \text{et} \quad [e_3, e_1] = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + ae_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_3.$$

On considère l'automorphisme  $\rho : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  donné par

$$\begin{aligned} \rho(X_1) &= \frac{1}{a^2} \left( \sqrt{2}e_2 - 2ae_3 \right), \quad \rho(X_2) = \frac{1}{a^2\sqrt{2a^2+1}} \left( 2ae_1 + \sqrt{2}(2a^2+1)e_2 \right), \\ \rho(X_3) &= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2+1}}e_1. \end{aligned}$$

$\phi_0$  son automorphisme associé du groupe de Lie. La matrice de  $\phi_0^*(h_0)$  dans  $\mathbb{B}_N$  est spécifiée par

$$M(\phi_0^*(h_0), \mathbb{B}_N) = \frac{2}{a^4(1+2a^2)} \begin{pmatrix} 1-4a^4 & (1+2a^2)^{\frac{3}{2}} & 0 \\ (1+2a^2)^{\frac{3}{2}} & 4a^4+6a^2+1 & 2a^3\sqrt{2} \\ 0 & 2a^3\sqrt{2} & 4a^4 \end{pmatrix}, \quad a > 0. \quad \text{Metric: sll7} \quad (\text{sll7})$$

**Théorème 4.8.** *La métrique Lorentzienne invariante à gauche sur  $\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$  est équivalente à automorphisme près à la métrique dont la matrice associée dans  $\mathbb{B}_N$  est exactement l'une des sept formes données par (sll1) ... (sll7).*

#### 4.3.4 Métriques Lorentziennes invariantes à gauche sur Sol

Nous avons cinq possibilités :

- (I)  $\mathbf{L}$  est de type  $\text{diag}(\alpha, \beta, 0)$  avec  $\alpha > 0, \beta < 0$ . Dans la base orthonormée  $\mathbb{B}_0$  donnée dans Équation 4.2, on a

$$[e_1, e_2] = 0, [e_2, e_3] = \alpha e_1 \text{ et } [e_3, e_1] = \beta e_2, \quad \alpha > 0, \beta < 0.$$

On considère l'automorphisme  $\rho : \mathfrak{sol} \rightarrow \mathfrak{sol}$  donné par

$$\rho(X_1) = -\frac{1}{\sqrt{-\alpha\beta}}e_3, \quad \rho(X_2) = e_1 - \frac{\beta}{\sqrt{-\alpha\beta}}e_2 \text{ et } \rho(X_3) = e_1 + \frac{\beta}{\sqrt{-\alpha\beta}}e_2.$$

$\phi_0$  son automorphisme associé du groupe de Lie et on met  $h_1 = \phi_0^*(h_0)$ . Nous avons

$$M(h_1, \mathbb{B}_N) = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - \beta & \alpha + \beta \\ 0 & \alpha + \beta & \alpha - \beta \end{pmatrix}.$$

On peut réduire cette métrique en considérant l'automorphisme  $Q : \mathfrak{sol} \rightarrow \mathfrak{sol}$  donné par

$$M(Q, \mathbb{B}_N) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} \\ 0 & \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Considérons  $\phi_1$  l'automorphisme de Sol associé à  $Q$ . La matrice de  $\phi_1^*(h_1)$  dans  $\mathbb{B}_N$  est spécifiée par

$$M(\phi_1^*(h_1), \mathbb{B}_N) = M(Q, \mathbb{B}_N)^t M(h_1, \mathbb{B}_N) M(Q, \mathbb{B}_N) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha\beta} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} \\ 0 & \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} & 1 \end{pmatrix}.$$

On met  $u = \alpha + \beta$  et  $v = \alpha - \beta$ , donc on obtient la matrice désirée

$$M(\phi_1^*(h_1), \mathbb{B}_N) = \begin{pmatrix} \frac{4}{u^2-v^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{u}{v} \\ 0 & \frac{u}{v} & 1 \end{pmatrix}, \quad v > 0, -v < u < v. \quad \text{Metric: sol1}$$

(sol1)

(II)  $L$  est de type  $\text{diag}(\alpha, 0, \beta)$  avec  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ . Dans la base orthonormée  $\mathbb{B}_0$  donnée dans [Équation 4.2](#), on a

$$[e_1, e_2] = \alpha e_3, \quad [e_2, e_3] = \beta e_1 \quad \text{et} \quad [e_3, e_1] = 0, \quad \alpha < 0, \beta > 0.$$

On considère l'automorphisme  $\rho : \mathfrak{sol} \rightarrow \mathfrak{sol}$  donné par

$$\rho(X_1) = -\frac{1}{\sqrt{-\alpha\beta}}e_2, \quad \rho(X_2) = e_3 - \frac{\beta}{\sqrt{-\alpha\beta}}e_1 \quad \text{et} \quad \rho(X_3) = e_3 + \frac{\beta}{\sqrt{-\alpha\beta}}e_1.$$

$\phi_0$  son automorphisme associé du groupe de Lie et on met  $h_1 = \phi_0^*(h_0)$ . Nous avons

$$M(h_1, \mathbb{B}_N) = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha - \beta & -\alpha + \beta \\ 0 & -\alpha + \beta & -\alpha - \beta \end{pmatrix}.$$

On peut réduire cette métrique en considérant l'automorphisme  $Q : \mathfrak{sol} \rightarrow \mathfrak{sol}$  donné par

$$M(Q, \mathbb{B}_N) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} \\ 0 & \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Considérons  $\phi_1$  l'automorphisme de  $\text{Sol}$  associé à  $Q$ . La matrice de  $\phi_1^*(h_1)$  dans  $\mathbb{B}_N$  est spécifiée par

$$M(\phi_1^*(h_1), \mathbb{B}_N) = M(Q, \mathbb{B}_N)^t M(h_1, \mathbb{B}_N) M(Q, \mathbb{B}_N) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\alpha\beta} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha} & -1 \\ 0 & -1 & \frac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha} \end{pmatrix}.$$

On met  $u = \alpha + \beta$  et  $v = \beta - \alpha$  et donc on obtient la matrice désirée

$$M(\phi_1^*(h_1), \mathbb{B}_N) = \begin{pmatrix} \frac{4}{v^2-u^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{u}{v} & -1 \\ 0 & -1 & \frac{u}{v} \end{pmatrix}, \quad v > 0, -v < u < v. \quad \text{Metric: sol2}$$

(sol2)

(III)  $L$  est de type  $\{az\bar{z}\}$  avec  $a = 0$ . Un même argument que celui utilisé dans [item \(III\)](#) montre que  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ .

Dans la base orthonormée  $\mathbb{B}_0$  donnée dans [Équation 4.3](#), on a

$$[e_1, e_2] = -\beta e_2 - \alpha e_3, [e_2, e_3] = 0 \text{ et } [e_3, e_1] = \alpha e_2 - \beta e_3, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$

On distingue deux cas :

a)  $\alpha \neq 0$ . On considère l'automorphisme  $\rho : \mathfrak{sol} \rightarrow \mathfrak{sol}$  donné par

$$\rho(X_1) = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} e_1, \rho(X_2) = e_3 + \frac{\beta - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha} e_2 \text{ et } \rho(X_3) = e_3 + \frac{\beta + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\alpha} e_2.$$

$\phi_0$  son automorphisme associé du groupe de Lie et on met  $h_1 = \phi_0^*(h_0)$ . Nous avons

$$M(h_1, \mathbb{B}_N) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2\beta(-\beta + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})}{\alpha^2} & -2 \\ 0 & -2 & \frac{2\beta(\beta + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})}{\alpha^2} \end{pmatrix}.$$

On peut réduire cette métrique en considérant l'automorphisme  $Q : \mathfrak{sol} \rightarrow \mathfrak{sol}$  donné par

$$M(Q, \mathbb{B}_N) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}\sqrt{\beta(\beta + \sqrt{\beta^2 + \alpha^2})}}{2\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha\sqrt{2}}{2\sqrt{\beta(\beta + \sqrt{\beta^2 + \alpha^2})}} \end{pmatrix}.$$

Considérons  $\phi_1$  l'automorphisme de  $\mathfrak{Sol}$  associé à  $Q$  et on aboutit à la relation suivante.

$$M(\phi_1^*(h_1), \mathbb{B}_N) = \begin{pmatrix} \frac{1}{u+v} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{v}{u} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad u = \alpha^2 > 0, v = \beta^2 > 0. \quad \boxed{\text{Metric: sol}_3}$$

(sol3)

b)  $\alpha = 0$ . On prend alors l'automorphisme  $\rho : \mathfrak{sol} \rightarrow \mathfrak{sol}$  donné par

$$\rho(X_1) = \frac{1}{\beta} e_1, \rho(X_2) = e_3, \text{ et } \rho(X_3) = e_2.$$

$\phi_0$  son automorphisme associé du groupe de Lie. Nous avons

$$M(\phi_0^*(h_0), \mathbb{B}_N) = \begin{pmatrix} \frac{1}{u} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u = \beta^2 > 0. \quad \boxed{\text{Metric: sol}_4} \quad (\text{sol4})$$

(IV)  $\mathbf{L}$  est de type  $\{ab2\}$  avec  $a < 0$  et  $b = 0$ . Dans la base orthonormée  $\mathbb{B}_0$  donnée dans Équation 4.4, on a

$$[e_1, e_2] = \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3, [e_2, e_3] = -a^2e_1 \text{ et } [e_3, e_1] = \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3.$$

On considère l'automorphisme  $\rho : \mathfrak{sol} \rightarrow \mathfrak{sol}$  donné par

$$\rho(X_1) = \frac{\sqrt{2}}{a}e_3, \rho(X_2) = a\sqrt{2}e_1 + e_2 + e_3 \text{ et } \rho(X_3) = -a\sqrt{2}e_1 + e_2 + e_3.$$

$\phi_0$  son automorphisme associé du groupe de Lie et on met  $h_1 = \phi_0^*(h_0)$ . Nous avons

$$M(h_1, \mathbb{B}_N) = -\frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} 2 & a\sqrt{2} & a\sqrt{2} \\ a\sqrt{2} & -2a^4 & 2a^4 \\ a\sqrt{2} & 2a^4 & -2a^4 \end{pmatrix}.$$

On peut réduire cette métrique en considérant l'automorphisme  $Q : \mathfrak{sol} \rightarrow \mathfrak{sol}$  donné par

$$M(Q, \mathbb{B}_N) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}(3-2a^2)}{8a^2} & -\frac{\sqrt{2}}{2a} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}(1+2a^2)}{8a^3} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2a} \end{pmatrix}.$$

Considérons  $\phi_1$  l'automorphisme de  $\mathfrak{Sol}$  associé à  $Q$ . La matrice de  $\phi_1^*(h_1)$  dans  $\mathbb{B}_N$  est spécifiée par

$$M(\phi_1^*(h_1), \mathbb{B}_N) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{2}{b} \\ 0 & 1 & 1 \\ -\frac{2}{b} & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = a^2 > 0. \quad \boxed{\text{Metric: sol5}} \quad (\text{sol5})$$

(V)  $\mathbf{L}$  est de type  $\{ab2\}$  avec  $a = 0$  et  $b \neq 0$ . Dans la base orthonormée  $\mathbb{B}_0$  donnée dans Équation 4.4, on a

$$[e_1, e_2] = \frac{1}{2}e_2 + \left(\frac{1}{2} - b\right)e_3, [e_2, e_3] = 0 \text{ et } [e_3, e_1] = \left(b + \frac{1}{2}\right)e_2 + \frac{1}{2}e_3.$$

Nous définissons l'automorphisme  $\rho : \mathfrak{sol} \rightarrow \mathfrak{sol}$  comme étant :

$$\rho(X_1) = \frac{2}{b}e_1, \rho(X_2) = (2b + 1)e_2 + (1 - 2b)e_3 \text{ et } \rho(X_3) = e_2 + e_3.$$

$\phi_0$  son automorphisme associé du groupe de Lie et on met  $h_1 = \phi_0^*(h_0)$ . Nous avons

$$M(h_1, \mathbb{B}_N) = \begin{pmatrix} \frac{1}{b^2} & 0 & 0 \\ 0 & 8b & 4b \\ 0 & 4b & 0 \end{pmatrix}.$$

Prenant l'automorphisme suivant  $Q : \mathfrak{sol} \longrightarrow \mathfrak{sol}$

$$M(Q, \mathbb{B}_N) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{4b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons réduire  $h_1$  à  $h_2$  de la manière suivante. Considérons  $\phi_1$  l'automorphisme de Sol associé à  $Q$ .

La matrice de  $\phi_1^*(h_1)$  dans  $\mathbb{B}_N$  est spécifiée par

$$M(\phi_1^*(h_1), \mathbb{B}_N) = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \frac{1}{b} \neq 0. \quad \text{Metric: sol6} \quad (\text{sol6})$$

(VI)  $L$  est de type  $\{a3\}$  avec  $a = 0$ . Dans la base orthonormée  $\mathbb{B}_0$  donnée dans [Équation 4.5](#), on a

$$[e_1, e_2] = \frac{1}{\sqrt{2}}e_2, \quad [e_2, e_3] = \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 \quad \text{et} \quad [e_3, e_1] = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_3.$$

On peut alors définir l'automorphisme  $\rho : \mathfrak{sol} \longrightarrow \mathfrak{sol}$  comme

$$\rho(X_1) = \sqrt{2}e_1, \quad \rho(X_2) = e_2 \quad \text{et} \quad \rho(X_3) = e_3 + e_1.$$

$\phi_0$  son automorphisme associé du groupe de Lie et on met  $h_1 = \phi_0^*(h_0)$ . Nous avons

$$M(h_1, \mathbb{B}_N) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut réduire cette métrique en considérant l'automorphisme  $Q : \mathfrak{sol} \longrightarrow \mathfrak{sol}$  donné par

$$M(Q, \mathbb{B}_N) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Considérons  $\phi_1$  l'automorphisme de Sol associé à  $Q$ . La matrice de  $\phi_1^*(h_1)$  dans  $\mathbb{B}_N$  est spécifiée par

$$M(\phi_1^*(h_1), \mathbb{B}_N) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Metric: sol7} \quad (\text{sol7})$$

**Théorème 4.9.** *La métrique Lorentzienne invariante à gauche sur Sol est équivalente à automorphisme près à la métrique dont la matrice associée dans  $\mathbb{B}_N$  est exactement l'une des sept formes données par [\(sol1\)](#) ... [\(sol7\)](#).*

Remarque 4.10. La métrique (sol7) définit dans [21] une géométrie maximale Lorentzienne et non Riemannienne désignée par *Lorentz-SOL*.

4.3.5 Métriques Lorentziennes invariantes à gauche sur  $\tilde{E}_0(2)$

Il y a trois possibilités :

(I)  $L$  est de type  $\text{diag}(\alpha, \beta, 0)$  avec  $\alpha > 0$  et  $\beta > 0$ . En appliquant la relation  $\text{diag}(\alpha, \beta, 0) \equiv \text{diag}(\beta, \alpha, 0)$ , on en déduit que  $\alpha \geq \beta$ . Dans la base orthonormée  $\mathbb{B}_0$  donnée dans Équation 4.2, on a

$$[e_1, e_2] = 0, [e_2, e_3] = \alpha e_1 \text{ et } [e_3, e_1] = \beta e_2, \quad \alpha \geq \beta > 0.$$

Comme d'habitude nous pouvons alors définir l'automorphisme  $\rho : e_0(2) \rightarrow e_0(2)$  comme

$$\rho(X_1) = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}e_3, \quad \rho(X_2) = e_1 - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}e_2 \text{ et } \rho(X_3) = e_1 + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}e_2$$

$\phi_0$  son automorphisme associé du groupe de Lie et on met  $h_1 = \phi_0^*(h_0)$ . Nous avons

$$M(h_1, \mathbb{B}_0) = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha + \beta & \alpha - \beta \\ 0 & \alpha - \beta & \alpha + \beta \end{pmatrix}. \quad \alpha \geq \beta > 0$$

On peut réduire cette métrique en considérant l'automorphisme  $Q : e_0(2) \rightarrow e_0(2)$  donné par

$$M(Q, \mathbb{B}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} & \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2} & -\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} & \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2} & \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2} \end{pmatrix}.$$

Considérons  $\phi_1$  l'automorphisme de  $\tilde{E}_0(2)$  associé à  $Q$ . La matrice de  $\phi_1^*(h_1)$  dans  $\mathbb{B}_N$  est spécifiée par

$$M(\phi_1^*(h_1), \mathbb{B}_N) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & u & 0 \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix}, \quad u = \alpha\beta \geq v = \beta^2 > 0. \quad \boxed{\text{Metric: ee1}}$$

(ee1)

(II)  $L$  est de type  $\text{diag}(\alpha, 0, \beta)$  avec  $\alpha > 0$  et  $\beta < 0$ . Dans la base orthonormée  $\mathbb{B}_0$  donnée dans Équation 4.2, on a

$$[e_1, e_2] = \alpha e_3, [e_2, e_3] = \beta e_1 \text{ et } [e_3, e_1] = 0, \quad \alpha > 0, \beta > 0.$$



On considère l'automorphisme  $\rho : \mathfrak{e}_0(2) \longrightarrow \mathfrak{e}_0(2)$  donné par

$$\rho(X_1) = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}e_2, \quad \rho(X_2) = e_3 - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}e_1 \quad \text{et} \quad \rho(X_3) = e_3 + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}e_1.$$

$\phi_0$  son automorphisme associé du groupe de Lie et on met  $h_1 = \phi_0^*(h_0)$ .  
Nous avons

$$M(h_1, \mathbb{B}_N) = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta} & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha + \beta & -\alpha - \beta \\ 0 & -\alpha - \beta & -\alpha + \beta \end{pmatrix}.$$

On peut réduire cette métrique en considérant l'automorphisme  $Q : \mathfrak{e}_0(2) \longrightarrow \mathfrak{e}_0(2)$  donné par

$$M(Q, \mathbb{B}_N) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} & \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2} & -\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} & \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2} & \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{2} \end{pmatrix}.$$

Considérons  $\phi_1$  l'automorphisme de  $\tilde{\mathfrak{E}}_0(2)$  associé à  $Q$ . La matrice de  $\phi_1^*(h_1)$  dans  $\mathbb{B}_N$  est spécifiée par

$$M(\phi_1^*(h_1), \mathbb{B}_N) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -u & 0 \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix}, \quad u = \alpha\beta > 0, v = \beta^2 > 0. \quad \boxed{\text{Metric: ee2}}$$

(ee2)

(III)  $L$  est de type  $\{ab2\}$  avec  $a > 0$  et  $b = 0$ . Dans la base orthonormée  $\mathbb{B}_0$  donnée dans [Équation 4.4](#), on a

$$[e_1, e_2] = \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3, \quad [e_2, e_3] = a^2e_1 \quad \text{et} \quad [e_3, e_1] = \frac{1}{2}e_2 + \frac{1}{2}e_3.$$

On considère l'automorphisme  $\rho : \mathfrak{e}_0(2) \longrightarrow \mathfrak{e}_0(2)$  donné par

$$\rho(X_1) = \frac{\sqrt{2}}{a}e_3, \quad \rho(X_2) = a\sqrt{2}e_1 + e_2 + e_3 \quad \text{et} \quad \rho(X_3) = -a\sqrt{2}e_1 + e_2 + e_3.$$

$\phi_0$  son automorphisme associé du groupe de Lie et on met  $h_1 = \phi_0^*(h_0)$ .  
Nous avons

$$M(h_1, \mathbb{B}_N) = -\frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} 2 & a\sqrt{2} & a\sqrt{2} \\ a\sqrt{2} & -2a^4 & 2a^4 \\ a\sqrt{2} & 2a^4 & -2a^4 \end{pmatrix}.$$

On peut réduire cette métrique en considérant l'automorphisme  $Q : e_0(2) \rightarrow e_0(2)$  donné par

$$M(Q, \mathbb{B}_N) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4a} & -\frac{\sqrt{2}a}{4} & -\frac{\sqrt{2}a}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4a} & -\frac{\sqrt{2}a}{4} & -\frac{\sqrt{2}a}{4} \end{pmatrix}.$$

Considérons  $\phi_1$  l'automorphisme de  $\tilde{E}_0(2)$  associé à  $Q$ . La matrice de  $\phi_1^*(h_1)$  dans  $\mathbb{B}_N$  est spécifiée par

$$M(\phi_1^*(h_1), \mathbb{B}_N) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad u = a^4 > 0. \quad \boxed{\text{Metric: ee3}} \quad (\text{ee3})$$

**Théorème 4.11.** *La métrique Lorentzienne invariante à gauche sur  $\tilde{E}_0(2)$  est équivalente à automorphisme près à la métrique dont la matrice associée dans  $\mathbb{B}_N$  est exactement l'une des trois formes données par (ee1), (ee2) et (ee3).*

Le tableau suivant 4.3 donne les signatures possibles de la courbure de Ricci des métriques lorentziennes invariantes à gauche sur des groupes de Lie unimodulaires tridimensionnels et les métriques réalisant ces signatures.

TABLE 4.3 – Signatures de courbure de Ricci sur des groupes de Lie unimodulaires 3D Lorentziens.

Signature de la courbure de Ricci	Métriques réalisant cette signature	Remarque
(0, 0, 0)	(nilo), [(sol2), $u = 0$ ], [(ee1), $u = v$ ]	Ces métriques sont plates.
(+, +, +)	(nil-), (su), (sll1), (sll2), (sol2), (ee2)	
(+, -, -)	(nil+), (su), (sll1), (sll2), (sll3), (sll4), (sll5), (sll6), (sll7), (sol1), (sol2), (sol3), (sol5), (ee1), (ee2), (ee3)	La métrique (sll1) a une courbure sectionnelle constante négative pour $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ . La métrique (sll7) est soliton de Ricci shrinking.
(+, 0, 0)	(su), (sll1), (sll2), (sol6), (ee2)	
(-, 0, 0)	(sll1), (sll2), (sll3), (sll6), (sol1), (sol4), (sol6), (sol7)	Les métriques (sol6) et (sol7) sont soliton de steady Ricci et semi-symétrique non localement symétriques, [(sll6), $a = b \neq 0$ ] est soliton de Ricci shrinking.

## 4.4 SOLITONS DE RICCI GÉNÉRALISÉS LORENTZIENS INVARIANTS À GAUCHE

Après avoir discuté de l'ensemble des représentants de classes d'équivalence sous  $\simeq$ , dans ce qui suit, nous aimerions incorporer des travaux connexes dans [3, 11, 10]. En particulier, nous allons développer l'étude des groupes de Lie tridimensionnels unimodulaires qui sont de courbure sectionnelle constante, Einstein, localement symétrique, semi-symétrique non localement symétrique et soliton de Ricci généralisé. En résumé, nous avons les résultats suivants :

**Théorème 4.12** ([10]). *Soit  $h$  une métrique Lorentzienne invariante à gauche sur un groupe de Lie unimodulaire tridimensionnel. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *La métrique  $h$  est localement symétrique.*
2. *La métrique  $h$  est Einstein.*
3. *La métrique  $h$  a une courbure sectionnelle constante.*

*De plus, une métrique satisfaisant l'une de ces assertions est soit plate et isométrique à la métrique (nilo), [(sol2),  $u = 0$ ] ou [(ee1),  $u = v$ ]; ou il a une courbure sectionnelle constante négative et est isométrique à [(sll1),  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ ].*

**Théorème 4.13** ([3, 10]). *Les métriques (sol6) et (sol7) sont les uniques, à automorphisme près, métriques Lorentziennes semi-symétriques non localement symétriques invariantes à gauche sur un groupe de Lie unimodulaire tridimensionnel.*

Jusqu'à la fin de cette section, nous gardons les notations et utilisons les résultats de [11].

**Théorème 4.14** ([11]). *Avec la notation introduite dans (K), (H), (RS), (E-W), (PS) et (VN-H), ces métriques sont les seuls solitons Lorentziens généralisés invariants à gauche, à automorphisme près, sur Nil.*

- a) *La métrique (nil-) satisfait les relations*

$$\mathcal{L}_u h = 0, \text{ si et seulement si } u \in \text{span}(Z); \quad (4.11)$$

$$\mathcal{L}_u h + 2\alpha_0 u^\flat \odot u^\flat - 2\beta_0 \text{ric}(h) = -\beta_0 \lambda h, \text{ où } u = \pm \frac{\sqrt{\alpha_0 \beta_0}}{\alpha_0} X. \quad (4.12)$$

*et donc Équation 4.11 implique (K) et Équation 4.12 implique (VN-H).*

- b) *La métrique (nil+) satisfait les relations*

$$\mathcal{L}_u h = 0, \text{ si et seulement si } u \in \text{span}(Z); \quad (4.13)$$

$$\mathcal{L}_u h + 2\alpha_0 u^\flat \odot u^\flat - 2\beta_0 \text{ric}(h) = -\beta_0 \lambda h, \text{ où } u = \pm \frac{\sqrt{-\alpha_0 \beta_0}}{\alpha_0} X \quad (4.14)$$

*et donc Équation 4.13 implique (K) et Équation 4.14 implique (E-W).*

- c) *La métrique (nilo) est plate telle que  $\mathcal{L}_u h = 0$ , si et seulement si  $u \in \text{span}(Z)$ ; ce qui conduit à (K).*

**Théorème 4.15** ([11]). *Avec la notation ci-dessus, ces métriques sont les seuls solitons de Ricci généralisés invariants à gauche Lorentziens, à automorphisme près, sur  $SU(2)$ . La métrique (su) satisfait les relations*

$$\mathcal{L}_u h = 0, \text{ si et seulement si } u \in \text{span}(\sigma_z); \quad (4.15)$$

$$\mathcal{L}_u h + 2\alpha_0 u^b \odot u^b - 2\beta_0 \text{ric}(h) = -4 \frac{\beta_0(2\mu_1 + \mu_3)}{\mu_1^2} h, \quad (4.16)$$

$$\text{où } u = \pm 2 \frac{\sqrt{\alpha_0 \beta_0 \mu_3 (\mu_1 + \mu_3)}}{\alpha_0 \mu_3 \mu_1} \sigma_z.$$

et donc [Équation 4.15](#) implique (K) et [Équation 4.16](#) implique (VN-H).

**Théorème 4.16** ([11]). *Avec la notation ci-dessus, ces métriques sont les seuls solitons de Ricci généralisés invariants à gauche Lorentziens, à automorphisme près, sur  $\overline{PSL}(2, \mathbb{R})$ .*

a) *La métrique [(sll1),  $\mu_1 = \mu_2$ ] satisfait les relations*

$$\mathcal{L}_u h = 0, \quad (4.17)$$

*si et seulement si  $u \in \mathfrak{g}$  et  $\mu_3 = \mu_2$  ou  $u \in \text{span}(X_1)$  et  $\mu_3 \neq \mu_2$ .*

$$\mathcal{L}_u h + \frac{\mu_2 - \mu_3}{2\beta_0 \mu_3} u^b \odot u^b - 2\beta_0 \text{ric}(h) = \frac{4\beta_0(2\mu_2 - \mu_3)}{\mu_2^2} h, \quad (4.18)$$

$$\text{où } u = \pm 4 \frac{\beta_0}{\mu_2} X_3.$$

et donc [Équation 4.17](#) implique (K); [Équation 4.18](#) implique (VN-H) si  $\mu_2 \neq \mu_3$ .

b) *La métrique [(sll1),  $\mu_1 = \mu_3$ ] satisfait la relation*

$$\mathcal{L}_u h + \frac{\mu_2 - \mu_3}{-2\beta_0 \mu_2} u^b \odot u^b - 2\beta_0 \text{ric}(h) = \frac{-4\beta_0(-2\mu_3 + \mu_2)}{\mu_3^2} h, \quad (4.19)$$

$$\text{où } u = \pm \frac{4\beta_0}{\mu_3} X_2.$$

et donc [Équation 4.21](#) implique (E-W) si  $\mu_2 \neq \mu_3$ .

c) *La métrique [(sll1),  $\mu_2 = \mu_3$ ] satisfait les relations*

$$\mathcal{L}_u h = 0, \text{ si et seulement si } u \in \text{span}(X_3) \text{ et } \mu_1 \neq \mu_2. \quad (4.20)$$

$$\mathcal{L}_u h + 2\alpha_0 u^b \odot u^b - 2\beta_0 \text{ric}(h) = \frac{-4\beta_0(-2\mu_3 + \mu_1)}{\mu_3^2} h, \quad (4.21)$$

$$\text{où } u = \pm \frac{4\sqrt{\alpha_0 \beta_0 \mu_1 (\mu_1 - \mu_3)}}{\alpha_0 \mu_1 \mu_3} X_1.$$

et donc [Équation 4.20](#) implique (K); [Équation 4.21](#) implique (EW) si  $\mu_1 \leq \mu_3$  et (VN-H) si  $\mu_1 \geq \mu_3$ .

d) *La métrique [(sll4),  $2\alpha = -a^2$ ] satisfait la relation*

$$\mathcal{L}_u h - \frac{3}{4\beta_0} u^b \odot u^b - 2\beta_0 \text{ric}(h) = \frac{-8(3\alpha^2 - \beta^2)}{3} \beta_0 h, \quad \text{où} \quad (4.22)$$

$$u = FX_1 + \frac{-2\sqrt{9\alpha^4+10\alpha^2\beta^2+\beta^4}}{3}\beta_0X_2 + F\frac{(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\beta+\sqrt{9\alpha^4+10\alpha^2\beta^2+\beta^4})\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}(3\alpha^2+\beta^2)+\sqrt{9\alpha^4+10\alpha^2\beta^2+\beta^4}\beta}X_3;$$

avec  $F = \pm \frac{4\sqrt{\beta^2(5\alpha^2+\beta^2)+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\beta\sqrt{9\alpha^4+10\alpha^2\beta^2+\beta^4}}}{3}\beta_0.$

e) La métrique [(sll6),  $b = -3a$ ] satisfait la relation

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_u h + 2u^b \odot u^b + 2\text{ric}(h) &= \frac{7b^2}{9}h, \\ \text{où } u &= \pm \frac{\sqrt{6b^3b}}{24}(X_1 + X_2) - \frac{b^2}{3}X_3.\end{aligned}\tag{4.23}$$

et donc Équation 4.23 implique (E-W).

f) La métrique [(sll6),  $b = 3a$ ] satisfait la relation

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_u h + 2u^b \odot u^b - \text{ric}(h) &= \frac{5b^2}{18}h, \\ \text{où } u &= \pm \frac{\sqrt{-b^3b}}{24}(X_1 + X_2) - \frac{b^2}{6}X_3.\end{aligned}\tag{4.24}$$

et donc Équation 4.24 implique (VN-H).

g) La métrique [(sll6),  $a = b$ ] satisfait les relations

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_u h + 2\alpha_0u^b \odot u^b - 2\beta_0\text{ric}(h) &= a^2\beta_0h, \\ \text{où } u &= \pm \frac{\sqrt{-2\alpha_0\beta_0aa^2}}{8\alpha_0}(X_1 + X_2).\end{aligned}\tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_u h - 2\beta_0\text{ric}(h) &= a^2\beta_0h, \\ \text{où } u &= t(X_1 + X_2) - \frac{a^2\beta_0}{2}X_3. \forall t \in \mathbb{R}.\end{aligned}\tag{4.26}$$

et donc Équation 4.25 implique (E-W) si  $a > 0$  et implique (VN-H) si  $a < 0$ .  
Équation 4.26 implique (RS).

h) La métrique [(sll6),  $a = 2b$ ] satisfait la relation

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_u h - \frac{1}{4\beta_0}u^b \odot u^b - 2\beta_0\text{ric}(h) &= 0, \\ \text{où } u &= \pm \frac{\sqrt{-2aa^2\beta_0}}{4}(X_1 + X_2) - \frac{a^2\beta_0}{2}X_3.\end{aligned}\tag{4.27}$$

i) La métrique (sll7) satisfait la relation

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_u h + \text{ric}(h) &= -\frac{1}{2}a^2h, \\ \text{avec } u &= \frac{a\sqrt{2}}{4}X_1 + \frac{(2a^3-a)\sqrt{2}}{4\sqrt{2a^2+1}}X_2 - \frac{a^2}{\sqrt{2a^2+1}}X_3\end{aligned}\tag{4.28}$$

et donc Équation 4.28 implique (RS).

**Théorème 4.17** ([11]). Avec la notation ci-dessus, ces métriques sont les seuls solitons de Ricci généralisés invariants à gauche Lorentziens, à automorphisme près, sur Sol.

a) La métrique [(sol1),  $u=0$ ] satisfait la relation

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u h - \frac{3}{4\beta_0} u^b \odot u^b - 2\beta_0 \operatorname{ric}(h) &= \frac{-2\beta_0 v^2}{3} h, \\ \text{où } u &= \frac{\beta_0 v^2}{3} X_1 \pm \frac{4\beta_0 v}{3} X_3. \end{aligned} \quad (4.29)$$

b) La métrique (sol4) satisfait la relation

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u h + 2\alpha_0 u^b \odot u^b + \frac{3}{4\alpha_0} \operatorname{ric}(h) &= \frac{-u}{\alpha_0} h, \\ \text{où } u &= \frac{-u}{2\alpha_0} X_1 \pm \frac{\sqrt{u}}{\alpha_0} X_2. \end{aligned} \quad (4.30)$$

c) La métrique (sol5) satisfait les relations

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u h + 2\alpha_0 u^b \odot u^b + \frac{1}{2\alpha_0} \operatorname{ric}(h) &= \frac{b^2}{4\alpha_0} h, \\ \text{où } u &= \frac{(\sqrt{3}-1)b}{4\alpha_0(\sqrt{3}-2)} \left( X_2 + (\sqrt{3}-2)X_3 \right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u h + 2\alpha_0 u^b \odot u^b + \frac{2}{\alpha_0} \operatorname{ric}(h) &= \frac{b^2}{\alpha_0} h, \\ \text{où } u &= \frac{b}{2\alpha_0} (X_2 + X_3). \end{aligned} \quad (4.32)$$

et donc Équation 4.32 implique (E-W).

d) La métrique (sol6) satisfait la relation

$$\mathcal{L}_u h - 2\beta_0 \operatorname{ric}(h) = 0 \quad \text{où } u = \frac{2\beta_0}{\lambda^2} X_1. \quad (4.33)$$

et donc Équation 4.33 implique (RS).

e) La métrique (sol7) satisfait la relation

$$\mathcal{L}_u h - 2\beta_0 \operatorname{ric}(h) = 0, \quad u = 2\beta_0 X_3. \quad (4.34)$$

et donc Équation 4.34 implique (RS).

**Théorème 4.18** ([11]). Avec la notation ci-dessus, ces métriques sont les seuls solitons de Ricci généralisés invariants à gauche Lorentziens, à automorphisme près, sur  $\tilde{E}_0(2)$ . La métrique (ee3) satisfait la relation

$$\mathcal{L}_u h + 2\alpha_0 u^b \odot u^b + \frac{2}{\alpha_0} \operatorname{ric}(h) = \frac{u}{\alpha_0} h, \quad \text{où } u = \frac{1}{\alpha_0} X_3. \quad (4.35)$$

et donc Équation 4.35 implique (E-W).

# Groupes d'isométries des groupes de Lie Lorentziens unimodulaires de dimension 3

## 5.1 INTRODUCTION

L'objectif principal de ce chapitre est de considérer le problème du calcul des groupes complets d'isométries des groupes de Lie tridimensionnels, connexes, simplement connexes et unimodulaires relativement à une métrique Lorentzienne invariante à gauche. Rappelons que les groupes d'isométries de ces groupes de Lie ont été donnés pour le cas Riemannien dans [26] et [54]. L'étude décrite ici a été motivée par [6] (voir [chapitre 4](#)) dans lequel toutes les métriques Lorentziennes invariantes à gauche sont classées à automorphisme près et qui sont répertoriées dans [Tableau 4.1](#) et [Tableau 4.2](#) avec leurs endomorphismes symétriques.

Soit  $(G, \mathfrak{g})$  un groupe de Lie tridimensionnel, unimodulaire, connexe et simplement connexe doté d'une métrique Lorentzienne invariante à gauche. Son groupe complet d'isométries  $\text{Isom}(G, \mathfrak{g})$  est un groupe de Lie sous la topologie ouverte compacte et agit sur  $G$  transitivement. Soit  $\text{Isom}^0(G, \mathfrak{g})$  sa composante neutre. Le sous-groupe d'isotropie de  $\text{Isom}^0(G, \mathfrak{g})$  et la représentation d'isotropie à l'élément neutre  $e$  sont donnés par

$$\text{Isom}_e^0(G, \mathfrak{g}) := \{ \theta \in \text{Isom}^0(G, \mathfrak{g}) \mid \theta(e) = e \}, \quad \rho : \text{Isom}_e(G, \mathfrak{g}) \rightarrow \text{GL}(T_e G), \quad \theta \mapsto T_e \theta. \quad (5.1)$$

La représentation  $\rho$  est fidèle puisqu'une isométrie est déterminée par sa valeur et sa différentielle en un point. Cela montre que  $\text{Isom}_e^0(G, \mathfrak{g})$  est identifié à un sous-groupe de  $\text{SO}(2, 1)$ , plus précisément nous montrerons que  $\text{Isom}_e^0(G, \mathfrak{g})$  est trivial ou exactement conjugué à l'un des sous-groupes suivants :

1. le groupe restreint de Lorentz  $\text{SO}^0(2, 1)$ .
2. un groupe de rotations à un paramètre autour d'un axe dans l'espace de Minkowski tridimensionnel  $\mathbb{R}_1^3$  engendré par un vecteur temporel. Nous appellerons ce sous-groupe  $\text{SO}(2)$ .
3. un groupe de rotations à un paramètre autour d'un axe dans  $\mathbb{R}_1^3$  engendré par un vecteur de type espace qui sera appelé  $\text{SO}(1, 1)$ .
4. un groupe à un paramètre de rotations autour d'un axe dans  $\mathbb{R}_1^3$  engendré par un vecteur isotrope qui sera noté  $\mathbf{K}$ .

Pour énoncer notre résultat principal à cet égard, quelques notations doivent être introduites. Pour un automorphisme  $\Phi \in \text{Aut}(G)$ , de sorte que pour tout  $a \in G$  on a  $\Phi \circ L_a = L_{\Phi(a)} \circ \Phi$ , on dit que  $\Phi$  est un automorphisme isométrique par rapport à la métrique invariante à gauche  $g$  si et seulement si  $\Phi^*g = g$ . On écrit  $\text{Aut}(G, g)$  pour le sous-groupe d'éléments dans  $\text{Aut}(G)$  qui préserve la métrique  $g$ . Alors  $\text{Aut}(G, g)$  est un sous-groupe de  $\text{Isom}_e(G, g)$ .

Nous sommes maintenant prêts à donner le théorème suivant.

**Théorème 5.1** (théorème principal). *Soit  $(G, g)$  un groupe de Lie connexe, simplement connexe et unimodulaire de dimension trois avec une métrique  $g$  Lorentzienne invariante à gauche .*

1. *Si  $(G, g)$  est un espace symétrique, alors  $\text{Isom}_e(G, g) \neq \text{Aut}(G, g)$ , et  $\text{Isom}_e(G, g) \cong \text{O}(2, 1)$ .*
2. *Si  $G = \text{Sol}$  doté d'une métrique Lorentzienne invariante à gauche équivalente à  $\text{sol7}$  (voir [Tableau 4.1](#)), alors  $\text{Isom}_e(G, g) \cong \mathbf{K} \times \mathbb{Z}_2$  et  $\text{Aut}(G, g) \cong \mathbb{Z}_2$ .*
3. *Dans tous les autres cas,  $\text{Isom}_e(G, g) = \text{Aut}(G, g)$  avec  $\dim \text{Isom}(G, g) = 3$  ou 4.*

Lorsque  $G$  est semi-simple,  $\text{Aut}^0(G) = \text{Inn}(G)$  où  $\text{Inn}(G)$  est le groupe des automorphismes intérieurs de  $G$  (voir [\[44\]](#)) et, comme conséquence du [Théorème 5.1](#), on obtient le corollaire suivant.

**Corollaire 5.2.** *Soit  $G$  un groupe de Lie connexe, simplement connexe et semi-simple de dimension trois et  $g$  une métrique Lorentzienne invariante à gauche sur  $G$ . Alors  $\text{Isom}_e^0(G, g)$  est un sous-groupe de  $\text{Inn}(G)$ .*

En conséquence du [Théorème 5.1](#), on retrouve le résultat dans [\[21\]](#) qui a montré que  $\dim \text{Isom}_e(G, g) \neq 2$  si  $G = \text{Nil}$ ,  $\overline{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$  ou  $\text{Sol}$  et nous l'étendons à tous les groupes de Lie unimodulaires Lorentziens simplement connexes de dimension trois. La seconde assertion [item 2](#) du [Théorème 5.1](#) correspond dans [\[21\]](#) à la géométrie maximale Lorentzienne et non-Riemannienne désignée par *Lorentz-Sol*.

Les groupes d'isométries des métriques pseudo-riemanniennes invariantes à gauche ont été étudiés par de nombreux auteurs. On peut citer, par exemple, les travaux de [\[16, 56, 20, 38\]](#). Cependant, ces études ont cherché à identifier la relation entre le groupe d'isotropie  $\text{Isom}_e(G, g)$  et le groupe d'automorphisme isométrique  $\text{Aut}(G, g)$  ou ont déterminé l'algèbre de Lie des champs de vecteurs de Killing. Ici, nous utilisons la même approche que celle utilisée dans le cas Riemannien dans [\[26\]](#). Notons que, grosso modo, la procédure de calcul des groupes d'isométries fait intervenir une connexion entre l'endomorphisme symétrique définissant le crochet de Lie et l'opérateur de Ricci de  $(G, g)$ .



Groupe de Lie <b>G</b>	Métriques Lorentziennes invariante à gauche		Endomorphisme symétrique		Groupes des automorphismes isométriques		
	métriq.	paramètres	type	paramètres	$A = \text{Aut}(G, g)$	infini	$A/A^0$ or $ A $
Nil	nil−		{diag}	$a = b \neq c$	O(2)	✓	$\mathbb{Z}_2$
	nil+		{diag}	$a \neq b = c$	O(1,1)	✓	$\mathbb{Z}_2$
	nil0		{ab2}	$a = b$	$\mathbf{K} \times \mathbb{Z}_2$	✓	$\mathbb{Z}_2$
SU(2)	su	$\mu_1 \neq \mu_2$	{diag}	$a \neq b \neq c$	D <sub>4</sub>		4
	su	$\mu_1 = \mu_2$	{diag}	$a = b \neq c$	O(2)	✓	$\mathbb{Z}_2$
$\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$	sll1	$\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$	{diag}	$a \neq b \neq c$	D <sub>4</sub>		4
	sll1	$\mu_1 \neq \mu_2 = \mu_3$	{diag}	$a = b \neq c$	O(2)	✓	$\mathbb{Z}_2$
	sll1	$\mu_1 = \mu_2 \neq \mu_3$	{diag}	$a \neq b = c$	O(1,1)	✓	$\mathbb{Z}_2$
	sll1	$\mu_1 = \mu_3 \neq \mu_2$	{diag}	$a = c \neq b$	O(1,1)	✓	$\mathbb{Z}_2$
	sll1	$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$	{diag}	$a = b = c$	SO(2,1)	✓	$\mathbb{Z}_2$
	sll2	$\mu_1 = \mu_2$	{diag}	$a = c \neq b$	O(1,1)	✓	$\mathbb{Z}_2$
	sll2	$\mu_1 \neq \mu_2$	{diag}	$a \neq b \neq c$	D <sub>4</sub>		4
	sll6	$a = b$	{ab2}	$a = b$	$\mathbf{K} \times \mathbb{Z}_2$	✓	$\mathbb{Z}_2$
	sll6	$a \neq b$	{ab2}	$a \neq b$	$\mathbb{Z}_2$		2
	sll3, sll4, sll5		{azz}	$a \neq 0$	$\mathbb{Z}_2$		2
sll7		{a3}	$a \neq 0$	{id}		1	
Sol	sol1	$u \neq 0$	{diag}	$a \neq b \neq c$	D <sub>4</sub>		4
	sol2	$u \neq 0$		$a \neq -b$			
	sol1	$u = 0$	{diag}	$a \neq b \neq c$ $a = -b$	D <sub>8</sub>		8
	sol2	$u = 0$	{diag}	$a = c \neq b$	O(1,1)	✓	$\mathbb{Z}_2$
	sol4		{azz}	$\Re(z) = 0$	D <sub>4</sub>		4
	sol3		{azz}	$\Re(z) \neq 0$	$\mathbb{Z}_2$		2
	sol5, sol6		{ab2}	$a \neq b$	$\mathbb{Z}_2$		2
sol7		{a3}	$a = 0$	$\mathbb{Z}_2$		2	
$\widetilde{\text{E}}_0(2)$	ee1	$u = v$	{diag}	$a = b \neq c$	O(2)	✓	$\mathbb{Z}_2$
	ee1	$u \neq v$	{diag}	$a \neq b \neq c$	D <sub>4</sub>		4
	ee2		{diag}	$a \neq b \neq c$	D <sub>4</sub>		4
	ee3		{ab2}	$a \neq b$	$\mathbb{Z}_2$		2

TABLE 1. Groupes des automorphismes isométriques

Groupe de Lie	Métriq. Lorentz. inv. à gauche	Symétriq.	Endomorphisme symétrique	Groupes d'isométries $\text{Isom}(G, \mathfrak{g})$		
				$\text{Isom}(G, \mathfrak{g})$	dim	$\leq \text{Aut}(G)$
<b>G</b>	métriq., paramètres		type, paramètres			
Nil	nil−		{diag}, $a = b \neq c$	$\text{Nil} \times \text{O}(2)$	4	✓
	nil+		{diag}, $a \neq b = c$	$\text{Nil} \times \text{O}(1, 1)$	4	✓
	nil0	✓	{ab2}, $a = b$	$\text{Nil} \times \text{O}(2, 1)$	6	
SU(2)	su, $\mu_1 \neq \mu_2$		{diag}, $a \neq b \neq c$	$\text{SU}(2) \times \text{D}_4$	3	✓
	su, $\mu_1 = \mu_2$		{diag}, $a = b \neq c$	$\text{SU}(2) \times \text{O}(2)$	4	✓
$\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$	sl1, $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$		{diag}, $a \neq b \neq c$	$\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R}) \times \text{D}_4$	3	✓
	sl1, $\mu_1 \neq \mu_2 = \mu_3$		{diag}, $a = b \neq c$	$\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R}) \times \text{O}(2)$	4	✓
	sl1, $\mu_1 = \mu_2 \neq \mu_3$		{diag}, $a \neq b = c$	$\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R}) \times \text{O}(1, 1)$	4	✓
	sl1, $\mu_1 = \mu_3 \neq \mu_2$		{diag}, $a = c \neq b$	$\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R}) \times \text{O}(1, 1)$	4	✓
	sl1, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$	✓	{diag}, $a = b = c$	$\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R}) \times \text{O}(2, 1)$	6	
	sl2, $\mu_1 = \mu_2$		{diag}, $a = c \neq b$	$\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R}) \times \text{O}(1, 1)$	4	✓
	sl2, $\mu_1 \neq \mu_2$		{diag}, $a \neq b \neq c$	$\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R}) \times \text{D}_4$	3	✓
	sl6, $a = b$		{ab2}, $a = b$	$\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R}) \times (\mathbf{K} \times \mathbb{Z}_2)$	4	✓
	sl6, $a \neq b$		{ab2}, $a \neq b$	$\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{Z}_2$	3	✓
	sl3, sl4, sl5		{azz}, $a \neq 0$	$\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{Z}_2$	3	✓
sl7		{a3}, $a \neq 0$	$\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$	3	✓	
Sol	sol1, $u \neq 0$ sol2, $u \neq 0$		{diag}, $a \neq b \neq c$ $a \neq -b$	$\text{Sol} \times \text{D}_4$	3	✓
	sol1, $u = 0$		{diag}, $a \neq b \neq c$ $a = -b$	$\text{Sol} \times \text{D}_8$	3	✓
	sol2, $u = 0$	✓	{diag}, $a = c \neq b$	$\text{Sol} \times \text{O}(2, 1)$	6	
	sol4		{azz}, $\Re(z) = 0$	$\text{Sol} \times \text{D}_4$	3	✓
	sol3		{azz}, $\Re(z) \neq 0$	$\text{Sol} \times \mathbb{Z}_2$	3	✓
	sol5, sol6		{ab2}, $a \neq b$	$\text{Sol} \times \mathbb{Z}_2$	3	✓
	sol7		{a3}, $a = 0$	$\text{Sol} \times (\mathbf{K} \times \mathbb{Z}_2)$	4	
$\widetilde{\text{E}}_0(2)$	ee1, $u = v$	✓	{diag}, $a = b \neq c$	$\widetilde{\text{E}}_0(2) \times \text{O}(2, 1)$	6	
	ee1, $u \neq v$		{diag}, $a \neq b \neq c$	$\widetilde{\text{E}}_0(2) \times \text{D}_4$	3	✓
	ee2		{diag}, $a \neq b \neq c$	$\widetilde{\text{E}}_0(2) \times \text{D}_4$	3	✓
	ee3		{ab2}, $a \neq b$	$\widetilde{\text{E}}_0(2) \times \mathbb{Z}_2$	3	✓

TABLE 2. Groupes d'isométries des groupes de Lie 3D Lorentziens unimodulaires

## 5.2 NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES

Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie unimodulaire tridimensionnelle avec crochet de Lie  $[\cdot, \cdot]$  et munie d'un produit scalaire Lorentzien  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Soit  $G$  le groupe de Lie connexe simplement connexe avec algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , et métrique Lorentzienne invariante à gauche  $\mathfrak{g}$  déterminée par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Notons qu'un groupe de Lie est unimodulaire si et seulement si sa mesure de Haar invariante à gauche est également invariante à droite, ou de manière équivalente un groupe de Lie est unimodulaire si et seulement si les constantes de structure de l'algèbre de Lie correspondante sont sans trace, c'est-à-dire  $\text{Tr}(ad_X) = 0$  pour tout  $X \in \mathfrak{g}$ .

La classification de Bianchi fournit une liste de toutes les algèbres de Lie tridimensionnelles réelles à isomorphisme près. Il est précisé dans [32] que les cinq algèbres de Lie unimodulaires non abéliennes appelées *Bianchi classe A* sont des types de Bianchi II, VI<sub>0</sub>, VII<sub>0</sub>, VIII et IX. De plus, à isomorphisme près, il existe exactement un groupe de Lie connexe et simplement connexe associé à chaque type d'algèbre de Lie (voir paragraphe 4.2 dans chapitre 4 où ces groupes de Lie sont décrits).

Il est bien connu que tout automorphisme de  $G$  induit un automorphisme de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g} = T_e G$ , mais si  $G$  est connexe et simplement connexe, tout automorphisme de  $\mathfrak{g}$  peut être élevé à un automorphisme unique de  $G$  et donc  $\text{Aut}(G)$  et  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  sont isomorphes [60]. Désormais, nous ne faisons aucune distinction entre les automorphismes de  $\mathfrak{g}$  et ceux de  $G$ .

**Endomorphisme symétrique.**

Rappelons qu'un produit vectoriel Lorentzien en dimension trois est déterminé par un produit scalaire Lorentzien  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et une orientation. Fixons une orientation sur  $\mathfrak{g}$  et posons  $\times : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  le produit vectoriel Lorentzien satisfaisant  $\langle u, v \times w \rangle = \det([u \ v \ w])$ . Puisque le crochet de Lie et le produit vectoriel dans l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  sont bilinéaires et antisymétriques, alors ils sont liés par un unique endomorphisme  $L : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  vérifiant

$$L(X \times Y) = [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \quad (5.2)$$

De plus,  $\mathfrak{g}$  est unimodulaire si et seulement si  $L$  est auto-adjoint par rapport à  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Tout au long de ce chapitre, l'application auto-adjointe  $L$  est appelée endomorphisme symétrique. D'autre part,  $L$  se comporte principalement comme l'opérateur de Ricci  $\text{Ric}$  avec la similitude fondamentale étant qu'il existe une base pseudo-orthonormale  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , avec  $e_3$  temporel, de sorte que  $\text{Ric}$  et  $L$  prennent l'une des formes suivantes :

$$\text{type \{diag\}} : \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad \text{type \{azz\}} : \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & -c \\ 0 & c & b \end{pmatrix} \quad c \neq 0$$

$$\text{type } \{ab2\} : \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b + 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & b - 1/2 \end{pmatrix}, \quad \text{type } \{a3\} : \begin{pmatrix} a & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & a & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & a \end{pmatrix}.$$

Une application linéaire auto-adjointe  $\phi$  par rapport à  $\langle , \rangle$  est de type  $\{a3\}$  si elle a trois valeurs propres égales associées à un espace propre unidimensionnel,  $\phi$  est de type  $\{ab2\}$  si elle a deux valeurs propres  $a$  et  $b$ , chacune associée à un espace propre unidimensionnel de sorte que  $b$  a une multiplicité deux et enfin  $\phi$  est de type  $\{azz\}$  si elle a une valeur propre réelle  $a$  et deux complexes conjugués  $z$  et  $\bar{z}$  où  $z = b + ic$ .

### Groupe d'isotropie.

Un difféomorphisme  $\theta$  sur  $G$  est dit isométrie par rapport à la métrique Lorentzienne invariante à gauche  $g$  si  $\theta^*g = g$ , on note  $\text{Isom}(G, g)$  le groupe complet des isométries de  $(G, g)$ . Il est immédiat que le groupe des translations à gauche  $L(G)$  est un sous-groupe de  $\text{Isom}(G, g)$  et  $L(G)$  agit transitivement sur  $G$ . De plus,  $\text{Isom}(G, g)$  est généré par le groupe des translations à gauche et le groupe d'isotropie, c'est-à-dire le sous-groupe  $\text{Isom}_e(G, g) = \{\theta \in \text{Isom}(G, g) \mid \theta(e) = e\}$  composé de toutes les isométries qui laissent l'élément neutre fixe. La représentation d'isotropie  $\rho$  comme déjà mentionnée dans [section 5.1](#) ( voir [Équation 5.1](#)) est l'action linéaire de  $\text{Isom}_e(G, g)$  sur  $T_eG = g$  où  $\rho.\theta = T_e\theta$ . Une isométrie est uniquement déterminée par son 1-jet à  $e$ , ceci est une conséquence du fait que si une isométrie  $\theta$  a un point fixe  $x$  tel que  $T_x\theta$  est l'application identité, alors  $\theta$  est l'identité. Ainsi nous pouvons identifier  $\text{Isom}_e(G, g)$  avec son image  $\rho.\text{Isom}_e(G, g)$  aussi nous pouvons considérer  $\text{Isom}_e(G, g)$  comme un sous-groupe de  $O(2, 1)$ .

### 5.3 GROUPES D'AUTOMORPHISMES ISOMÉTRIQUES

Dans la présente section, nous décrirons  $\text{Aut}(g, \langle , \rangle)$  le groupe d'automorphisme isométrique (c'est-à-dire le groupe de tous les automorphismes qui laissent invariant la métrique) car il nous servira d'ingrédient le plus important dans le calcul du groupe d'isométrie. Dans cette première étude, nous ne nous intéressons qu'aux quatre types d'endomorphismes symétriques.

En résumant la discussion ci-dessus, nous avons la proposition suivante.

**Proposition 5.3.** *Soit  $(g, \langle , \rangle)$  une algèbre de Lie unimodulaire Lorentzienne orientée de dimension trois avec l'endomorphisme symétrique correspondant  $L$ , alors les conditions suivantes sont équivalentes.*

1.  $\phi \in \text{Aut}(g)$ .
2.  $\phi \circ L = \det(\phi)L \circ (\phi^{-1})^*$ .

En particulier  $\text{Aut}(g, \langle , \rangle) = \{\phi \in \text{GL}(g) : \phi^*\langle , \rangle = \langle , \rangle \text{ et } \phi \circ L = \det(\phi)L \circ \phi\}$ , où  $\det(\phi) = \pm 1$ , pour tout  $\phi \in \text{Aut}(g, \langle , \rangle)$ .

*Preuve.* Soit  $\phi \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$ ,  $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned}\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)] &\Leftrightarrow \phi \circ \mathbf{L}(X \times Y) = \mathbf{L}(\phi(X) \times \phi(Y)) \\ &\Leftrightarrow \phi \circ \mathbf{L}(X \times Y) = \det(\phi) \mathbf{L} \circ (\phi^{-1})^*(X \times Y) \\ &\Leftrightarrow \phi \circ \mathbf{L} = \det(\phi) \mathbf{L} \circ (\phi^{-1})^*\end{aligned}$$

par contre

$$\begin{aligned}\phi \in \text{Aut}(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle) &\Leftrightarrow \phi \in \text{Aut}(\mathfrak{g}) \text{ et } \phi^* \langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle \\ &\Leftrightarrow \phi \in \text{Aut}(\mathfrak{g}) \text{ et } \phi = (\phi^{-1})^*.\end{aligned}$$

□

Par le choix d'une base positivement orientée et pseudo-orthonormale, le groupe d'automorphismes de  $\mathfrak{g}$  est identifié à un sous-groupe de  $\text{GL}(3, \mathbb{R})$ , donc on sépare le groupe  $\text{Aut}(\mathfrak{g})$  en utilisant le déterminant comme suit;  $\text{Aut}(\mathfrak{g}) = \text{Aut}^+(\mathfrak{g}) \cup \text{Aut}^-(\mathfrak{g})$  où  $\text{Aut}^+(\mathfrak{g})$  (resp.  $\text{Aut}^-(\mathfrak{g})$ ) est le sous-groupe des automorphismes à déterminant positif (est l'ensemble des automorphismes à déterminant négatif).

Ayant à l'esprit les quatre types d'endomorphismes symétriques et l'idée de [Proposition 5.3](#), nous effectuons une étude minutieuse au cas par cas dans ce qui suit.

**Proposition 5.4.** Soit  $(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  une algèbre de Lie unimodulaire Lorentzienne orientée de dimension trois avec l'endomorphisme symétrique correspondant  $\mathbf{L}$ , alors il existe une base pseudo-orthonormale  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , avec  $e_3$  temporel, dans lequel  $\text{Aut}(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  prend l'une des formes suivantes.

**I** si  $\mathbf{L}$  est de genre  $\{\text{diag}\}(\alpha, \beta, \beta)$ ,  $\alpha \neq \beta$ ; alors  $\text{Aut}(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle) = \left\{ \begin{pmatrix} \det S & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} : S \in \text{O}(1, 1) \right\}$ ,

**II** si  $\mathbf{L}$  est de genre  $\{\text{diag}\}(\alpha, \alpha, \beta)$ ,  $\alpha \neq \beta$ ; alors  $\text{Aut}(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle) = \left\{ \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & \det S \end{pmatrix} : S \in \text{O}(2) \right\}$ ,

**III** si  $\mathbf{L}$  est de genre  $\{\text{diag}\}(\alpha, \beta, \alpha)$ ,  $\alpha \neq \beta$ ; alors

$$\text{Aut}(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & n & 0 \\ c & 0 & d \end{pmatrix} : S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{O}(1, 1), \text{ et } n = \det(S) \right\},$$

**IV** si  $\mathbf{L}$  est de genre  $\{\text{diag}\}(\alpha, \alpha, \alpha)$ ,  $\alpha \neq 0$ ; alors  $\text{Aut}(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle) = \text{SO}(2, 1)$ ,

**V** si  $\mathbf{L}$  est de genre  $\{\text{diag}\}(\alpha, \beta, \gamma)$ ,  $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ ; alors

$$a) \text{Aut}(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle) = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon\sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} : \sigma = \pm 1, \varepsilon = \pm 1 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} : \sigma = \pm 1, \varepsilon = \pm 1 \right\}$$

si  $\text{Aut}^-(\mathfrak{g}) \neq \emptyset$  et  $\alpha = -\beta$  et  $\gamma = 0$ ,

$$b) \text{Aut}(\mathfrak{g}, \langle \cdot, \cdot \rangle) = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon\sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} : \sigma = \pm 1, \varepsilon = \pm 1 \right\} \text{ sinon,}$$

**VI** si  $L$  est de type  $\{ab2\}$ ; alors

$$a) \text{Aut}(\mathfrak{g}, \langle , \rangle) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & \lambda \\ \sigma\lambda & \sigma - \sigma(1/2)\lambda^2 & \sigma(1/2)\lambda^2 \\ \sigma\lambda & -\sigma(1/2)\lambda^2 & \sigma + \sigma(1/2)\lambda^2 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}, \sigma = \pm 1 \right\},$$

si  $a = b$ ,

$$b) \text{Aut}(\mathfrak{g}, \langle , \rangle) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} : \sigma = \pm 1 \right\}, \text{ si } a \neq b,$$

**VII** si  $L$  est de type  $\{azz\}$ ; alors

$$a) \text{Aut}(\mathfrak{g}, \langle , \rangle) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} : \varepsilon = \pm 1, \sigma = \pm 1 \right\}, \text{ si } \text{Aut}^-(\mathfrak{g}) \neq \emptyset \text{ et}$$

$a = \Re(z) = 0$ ,

$$b) \text{Aut}(\mathfrak{g}, \langle , \rangle) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} : \sigma = \pm 1 \right\} \text{ sinon,}$$

**VIII** si  $L$  est de type  $\{a3\}$ ; alors

$$a) \text{Aut}(\mathfrak{g}, \langle , \rangle) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \sigma = \pm 1 \right\}, \text{ si } \text{Aut}^-(\mathfrak{g}) \neq \emptyset \text{ et } a = 0,$$

$$b) \text{Aut}(\mathfrak{g}, \langle , \rangle) = \{ \text{id} \} \text{ sinon.}$$

*Notation 5.5.* Pour énoncer nos prochains résultats de manière concise, il convient d'introduire les notations

$$\mathbf{K} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & \lambda \\ \lambda & 1 - (1/2)\lambda^2 & (1/2)\lambda^2 \\ \lambda & -(1/2)\lambda^2 & 1 + (1/2)\lambda^2 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Comme déjà mentionné  $\mathbf{K}$  est appelé le groupe de paramètres de rotations dans l'espace de Minkowski tridimensionnel  $\mathbb{R}_1^3$  autour d'un axe engendré par un vecteur isotrope.

Soit  $D_{2n} = \langle X, Y \mid X^n = Y^2 = 1, YXY = X^{-1} \rangle$  le groupe dièdre d'ordre  $2n$ .

Nous mettons  $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  et  $Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  alors nous pouvons

facilement voir que

$$\left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon\sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} : \sigma = \pm 1, \varepsilon = \pm 1 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ \varepsilon\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} : \sigma = \pm 1, \varepsilon = \pm 1 \right\} \cong D_8.$$

Il est clair sans calcul que

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} : \varepsilon = \pm 1, \sigma = \pm 1 \right\} \cong \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon\sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} : \sigma = \pm 1, \varepsilon = \pm 1 \right\} \cong D_4$$

Une conséquence simple de [Proposition 5.4](#) ci-dessus est le résultat suivant.

**Étude de  $\text{Aut}(\text{Nil}, \mathfrak{g})$ .**

Notons que si  $\varphi \in \text{Aut}(\mathfrak{n}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , alors  $\det(\varphi) = 1$ .

**Proposition 5.6.** *Pour toute métrique Lorentzienne invariante à gauche  $\mathfrak{g}$  sur Nil*

$$\text{Aut}(\text{Nil}, \mathfrak{g}) \cong \begin{cases} \text{O}(1, 1) & \text{si } \mathfrak{g} \cong \text{nil}+, \\ \text{O}(2) & \text{si } \mathfrak{g} \cong \text{nil}-, \\ \mathbf{K} \times \mathbb{Z}_2 & \text{si } \mathfrak{g} \cong \text{nil}0. \end{cases}$$

**Étude de  $\text{Aut}(\text{SU}(2), \mathfrak{g})$ .**

Notons que si  $\varphi \in \text{Aut}(\mathfrak{su}(2), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , alors  $\det(\varphi) = 1$ .

**Proposition 5.7.** *Pour toute métrique Lorentzienne invariante à gauche  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{su}$  sur  $\text{SU}(2)$*

$$\text{Aut}(\text{SU}(2), \mathfrak{g}) \cong \begin{cases} \text{O}(2) & \text{si } \mu_1 = \mu_2, \\ D_4 & \text{si } \mu_1 \neq \mu_2. \end{cases}$$

**Étude de  $\text{Aut}(\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R}), \mathfrak{g})$ .**

Si  $\varphi \in \text{Aut}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , alors  $\det(\varphi) = 1$ .

**Proposition 5.8.** *Pour toute métrique Lorentzienne invariante à gauche  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}1$  sur  $\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$*

$$\text{Aut}(\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R}), \mathfrak{g}) \cong \begin{cases} \text{SO}(2, 1) & \text{si } \mu_1 = \mu_2 = \mu_3, \\ \text{O}(2) & \text{si } \mu_1 \neq \mu_2 = \mu_3, \\ \text{O}(1, 1) & \text{si } \mu_1 = \mu_2 \neq \mu_3 \text{ ou } \mu_1 = \mu_3 \neq \mu_2, \\ D_4 & \text{si } \mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3. \end{cases}$$

*Pour toute métrique Lorentzienne invariante à gauche  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}2$  sur  $\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$*

$$\text{Aut}(\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R}), \mathfrak{g}) \cong \begin{cases} \text{O}(1, 1) & \text{si } \mu_1 = \mu_2, \\ D_4 & \text{si } \mu_1 \neq \mu_2. \end{cases}$$

*Pour toute métrique invariante à gauche Lorentzienne  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}3, \mathfrak{sl}4, \mathfrak{sl}5$ , sur  $\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$ ;*

$\text{Aut}(\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R}), \mathfrak{g}) \cong \mathbb{Z}_2$ .

*Pour toute métrique Lorentzienne invariante à gauche  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}7$ , sur  $\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$ ;*

$\text{Aut}(\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R}), \mathfrak{g}) = \{\text{id}\}$ .

Pour toute métrique Lorentzienne invariante à gauche  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}6$ , sur  $\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$

$$\text{Aut}(\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R}), \mathfrak{g}) \cong \begin{cases} \mathbf{K} \times \mathbb{Z}_2 & \text{si } a = b, \\ \mathbb{Z}_2 & \text{si } a \neq b. \end{cases}$$

**Étude de  $\text{Aut}(\text{Sol}, \mathfrak{g})$ .**

Notons que  $\text{Aut}^-(\text{Sol})$  n'est pas vide.

**Proposition 5.9.** Pour toute métrique Lorentzienne invariante à gauche  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sol}1$  sur Sol

$$\text{Aut}(\text{Sol}, \mathfrak{g}) \cong \begin{cases} \text{D}_8 & \text{si } u = 0, \\ \text{D}_4 & \text{si } u \neq 0. \end{cases}$$

Pour toute métrique Lorentzienne invariante à gauche  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sol}2$  sur Sol

$$\text{Aut}(\text{Sol}, \mathfrak{g}) \cong \begin{cases} \text{O}(1, 1) & \text{si } u = 0, \\ \text{D}_4 & \text{si } u \neq 0. \end{cases}$$

Pour toute métrique invariante à gauche Lorentzienne  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sol}4$  sur Sol;

$$\text{Aut}(\text{Sol}, \mathfrak{g}) \cong \text{D}_4.$$

Pour toute métrique Lorentzienne invariante à gauche  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sol}3, \mathfrak{sol}5, \mathfrak{sol}6, \mathfrak{sol}7$  sur Sol;  $\text{Aut}(\text{Sol}, \mathfrak{g}) \cong \mathbb{Z}_2$ .

**Étude de  $\text{Aut}(\widetilde{\text{E}}_0(2), \mathfrak{g})$ .**

Notons que si  $\varphi \in \text{Aut}(\mathfrak{n}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , alors  $\det(\varphi) = 1$ .

**Proposition 5.10.** Pour toute métrique Lorentzienne invariante à gauche  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{ee}1$  sur  $\widetilde{\text{E}}_0(2)$

$$\text{Aut}(\widetilde{\text{E}}_0(2), \mathfrak{g}) \cong \begin{cases} \text{O}(2) & \text{si } u = v, \\ \text{D}_4 & \text{si } u \neq v. \end{cases}$$

Pour toute métrique invariante à gauche Lorentzienne  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{ee}2$  sur  $\widetilde{\text{E}}_0(2)$ ;

$$\text{Aut}(\widetilde{\text{E}}_0(2), \mathfrak{g}) \cong \text{D}_4.$$

Pour toute métrique invariante à gauche Lorentzienne  $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{ee}3$  sur  $\widetilde{\text{E}}_0(2)$ ;

$$\text{Aut}(\widetilde{\text{E}}_0(2), \mathfrak{g}) \cong \mathbb{Z}_2.$$

Dans la section suivante, nous allons introduire et compléter la solution au problème en question.

## 5.4 GROUPES D'ISOMÉTRIES

Nous proposons ici une nouvelle méthode pour identifier les groupes d'isométries qui combine deux étapes : une détermination de tous les différents types d'opérateurs de Ricci Ric est effectuée dans la première étape, et en utilisant les dérivées covariantes  $\nabla R$ , dans la deuxième étape, nous implémentons [algorithme 1](#) qui nous permet de connaître la relation entre les groupes obtenus dans la section précédente et les groupes d'isotropie  $\text{Isom}_e(G, \mathfrak{g})$ . Dans la suite, nous faisons quelques préparatifs afin de résoudre le problème en



question et plus loin dans cette section, nous limiterons notre attention au cas particulier où le groupe d'isotropie  $\text{Isom}_e(G, g)$  est plus large que le groupe d'automorphisme isométrique  $\text{Aut}(G, g)$ . Commençons par passer rapidement en revue les ingrédients algébriques dont nous avons besoin pour formuler la solution.

#### 5.4.1 Résultats utiles pour le calcul des groupes d'isotropie

Nous citons un théorème de [9] avec quelques résultats préliminaires utiles de [45].

**Théorème 5.11 ([9]).** *Soit  $(G, g)$  un groupe de Lie Lorentzien, tridimensionnel, connexe, simplement connexe et unimodulaire et  $L$  son endomorphisme symétrique.  $(G, g)$  est symétrique si et seulement si l'un des cas suivants se produit :*

1.  $G = \widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$  avec  $L$  est de genre  $\{\text{diag}\}(\alpha, \alpha, \alpha)$ ,  $\alpha \neq 0$ .
2.  $G = \text{Sol}$  avec  $L$  est de genre  $\{\text{diag}\}(\alpha, 0, \alpha)$  et  $g$  est plate.
3.  $G = \widetilde{E}_0(2)$  avec  $L$  est de genre  $\{\text{diag}\}(\alpha, \alpha, 0)$  et  $g$  est plate.
4.  $G = \text{Nil}$  avec  $L$  est de genre  $\{\text{ab}2\}$ ,  $a = b = 0$  et  $g$  est plate.

Un outil de base pour calculer  $\text{Isom}_e(G, g)$  sur l'espace symétrique est le théorème d'Ambrose–Hicks–Cartan (voir [45], Thm. 17, Chap. 8).

**Théorème 5.12 ([45]).** *Soit  $(M, g)$  une variété pseudo-riemannienne complète, connexe, simplement connexe et localement symétrique. Si  $\mathcal{L} : T_p M \rightarrow T_q M$  est une isométrie linéaire qui préserve la courbure, alors il existe une unique isométrie  $\theta : M \rightarrow M$  telle que  $T_p \theta = \mathcal{L}$ .*

On remarque que le tenseur de courbure  $R$  d'une variété Lorentzienne tridimensionnelle  $(M, g)$  est complètement déterminé par le tenseur de courbure de Ricci. Cela signifie que pour tout  $\mathcal{L} \in \text{GL}(\mathfrak{g})$ , nous avons que  $\mathcal{L}$  préserve la courbure  $R$  si et seulement si  $\mathcal{L}$  commute avec l'opérateur de Ricci  $\text{Ric}$ , c'est-à-dire  $\mathcal{L}^* R = R \Leftrightarrow [\mathcal{L}, \text{Ric}] = 0$ .

Il est bien connu que toute isométrie  $\theta \in \text{Isom}(G, g)$  préserve la métrique  $g$ , et le tenseur de courbure  $R$ , pour cette raison, nous introduisons un nouveau groupe appelé groupe symétrique noté  $\text{Sym}(G, g)$ . Le groupe symétrique peut être exprimé comme suit :

$$\text{Sym}(G, g) := \{\mathcal{L} \in \text{GL}(\mathfrak{g}) : \mathcal{L}^* \langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ et } [\mathcal{L}, \text{Ric}] = 0\}, \quad (5.3)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est induit par la métrique  $g$ .

*Remarque 5.13.* Étant donné que le groupe d'isotropie  $\text{Isom}_e(G, g)$  est isométrique en tant que groupe de Lie à un sous-groupe de  $O(\mathfrak{g}) \cong O(2, 1)$ , on peut donc écrire que

$$\text{Aut}(G, g) \subset \text{Isom}_e(G, g) \subset \text{Sym}(G, g).$$

Une application du [Théorème 5.12](#) et du [Théorème 5.11](#) est le corollaire suivant.

**Corollaire 5.14.** *Si  $(G, g)$  est un espace symétrique, alors  $\text{Isom}_e(G, g) \cong O(2, 1)$ .*

*Preuve.* Par [Théorème 5.12](#), pour toute application linéaire  $\phi \in GL(\mathfrak{g})$  préservant la métrique  $g$  et le tenseur de courbure  $R$  à l'élément neutre,  $\phi$  peut être élevé à une unique isométrie  $\theta \in \text{Isom}_e(G, g)$  telle que  $T_e\theta = \phi$ . Par conséquent, pour tout  $\phi \in \text{Sym}(G, g)$  nous avons  $\phi \in \text{Isom}_e(G, g)$ , et donc  $\text{Isom}_e(G, g) \cong \text{Sym}(G, g)$ . Du [Théorème 5.11](#) nous obtenons immédiatement qu'un espace symétrique est un espace plat ou un espace à courbure sectionnelle constante négative. Le corollaire suit.  $\square$

En utilisant la même procédure que dans la section [5.3](#), nous donnons maintenant une liste de tous ces groupes symétriques  $\text{Sym}(G, g)$  associés à chaque type d'opérateur de courbure  $\text{Ric}$ . Une base pseudo-orthonormale  $\{e_1, e_2, e_3\}$  avec  $e_3$  de type temps, est considérée par souci de simplicité.

**Genre**  $\{\text{diag}\}(a, b, c)$ ,

1. si  $a \neq b \neq c$ , alors  $\text{Sym}(G, g)$  est un groupe fini ;
2. si  $a = b \neq c$ , alors  $\text{Sym}(G, g) = \begin{pmatrix} O(2) & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$  ;
3. si  $a \neq b = c$ , alors  $\text{Sym}(G, g) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & O(1, 1) \end{pmatrix}$  ;
4. si  $a = c \neq b$ , alors  $\text{Sym}(G, g) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} \in O(1, 1) \right\}$  ;
5. si  $a = b = c$ , alors  $\text{Sym}(G, g) = O(\mathfrak{g}) \cong O(2, 1)$ .

**Genre**  $\{\text{azz}\}$ , alors  $\text{Sym}(G, g)$  est un groupe fini.

**Genre**  $\{\text{ab2}\}$ ,

1. si  $a \neq b$ , alors  $\text{Sym}(G, g)$  est un groupe fini ;
2. si  $a = b$ , alors
 
$$\text{Sym}(G, g) = \left\{ \begin{pmatrix} \varepsilon & -\lambda & \lambda \\ \sigma\lambda & \sigma\varepsilon(1 - (1/2)\lambda^2) & (1/2)\sigma\varepsilon\lambda^2 \\ \sigma\lambda & -(1/2)\sigma\varepsilon\lambda^2 & \sigma\varepsilon(1 + (1/2)\lambda^2) \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R}, \varepsilon = \pm 1, \sigma = \pm 1 \right\}.$$

**Genre**  $\{\text{a3}\}$ , alors  $\text{Sym}(G, g)$  est un groupe fini.

On se restreint aux genres de l'opérateur de courbure  $\text{Ric}$  et de l'endomorphisme symétrique  $L$  donnant des groupes infinis, à savoir les genres  $\{\text{diag}\}(a, b, c)$ ,  $a = b = c$ ,  $a = b \neq c$ ,  $a = c \neq b$ ,  $a \neq b = c$  et  $\{\text{ab2}\}$  avec  $a = b$ . Introduisons d'abord les terminologies suivantes.

**Définition 5.15.** L'opérateur de courbure (resp. L'endomorphisme symétrique) est dit *de genre infini* s'il possède un groupe symétrique infini (resp. groupe d'automorphisme isométrique infini), sinon il est dit *de genre fini*.

*Remarque 5.16.* Au vu de [Remarque 5.13](#), si  $L$  est de genre infini, alors Ric est nécessairement de genre infini.

Cela stimule la définition suivante.

**Définition 5.17.** Soit  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace vectoriel Lorentzien. On dit que deux endomorphismes auto-adjoints  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sur  $V$  ont le même genre infini s'il existe une base pseudo-orthonormale  $B$  pour  $V$  par rapport à laquelle la matrice de :

- i.  $\phi_1$  (resp.  $\phi_2$ ) est  $\{\text{diag}\}(a, a, a)$  (resp.  $\{\text{diag}\}(a', a', a')$ ) pour certains  $a, a' \in \mathbb{R}$ .
- ii.  $\phi_1$  (resp.  $\phi_2$ ) est  $\{\text{diag}\}(a, a, c), a \neq c$  (resp.  $\{\text{diag}\}(a', a', c'), a' \neq c'$ ) pour certains  $a, c, a', c' \in \mathbb{R}$ .
- iii.  $\phi_1$  (resp.  $\phi_2$ ) est  $\{\text{diag}\}(a, b, a), a \neq b$  (resp.  $\{\text{diag}\}(a', b', a'), a' \neq b'$ ) pour certains  $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ .
- iv.  $\phi_1$  (resp.  $\phi_2$ ) est  $\{\text{diag}\}(a, b, b), a \neq b$  (resp.  $\{\text{diag}\}(a', b', b'), a' \neq b'$ ) pour certains  $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ .
- v.  $\phi_1$  (resp.  $\phi_2$ ) est  $\{ab2\}, a = b$  (resp.  $\{a'b'2\}, a' = b'$ ) pour certains  $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ .

Pour une utilisation dans la preuve de [Proposition 5.19](#), nous enregistrons l'énoncé évident suivant.

**Proposition 5.18.** Soient  $(G_1, \mathfrak{g}_1)$  et  $(G_2, \mathfrak{g}_2)$  deux groupes de Lie tridimensionnels Lorentziens avec l'opérateur de Ricci Ric<sub>1</sub> et Ric<sub>2</sub> respectivement. Si Ric<sub>1</sub> et Ric<sub>2</sub> ont le même genre infini alors  $\text{Sym}(G_1, \mathfrak{g}_1) = \text{Sym}(G_2, \mathfrak{g}_2)$ .

*Preuve.*  $\text{Sym}(G, \mathfrak{g})$  ne dépend que des cinq genres infinis mentionnés ci-dessus de l'opérateur de Ricci Ric.  $\square$

**Proposition 5.19.** Soit  $(G, \mathfrak{g})$  un groupe de Lie Lorentzien d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g} = T_e G$  tel que son endomorphisme symétrique  $L$  et son opérateur de Ricci Ric ont le même genre infini, alors

$$\text{Isom}_e(G, \mathfrak{g}) = \text{Aut}(G, \mathfrak{g}) \text{ ou } \text{Isom}_e(G, \mathfrak{g}) = \text{Aut}(G, \mathfrak{g}) \times \{\pm \text{id}\}. \quad (5.4)$$

En particulier si  $(G, \mathfrak{g})$  est un espace symétrique alors  $\text{Isom}_e(G, \mathfrak{g}) = \text{Aut}(G, \mathfrak{g}) \times \{\pm \text{id}\}$ , sinon  $\text{Isom}_e(G, \mathfrak{g}) = \text{Aut}(G, \mathfrak{g})$ .

*Preuve.* Il suffit de prouver que l'ensemble  $\text{Aut}^-(G, \mathfrak{g})$  est vide. Soit donc  $\theta \in \text{Aut}(G, \mathfrak{g})$ . Nous avons les deux égalités  $\phi \circ L = \det(\phi)L \circ \phi$  et  $\phi \circ \text{Ric} = \text{Ric} \circ \phi$  où  $\phi = T_e \theta$ . Si nous supposons en plus que  $\phi \in \text{Aut}^-(\mathfrak{g})$ , alors  $\phi$  satisfait  $\phi \circ L = -L \circ \phi$  et  $\phi \circ \text{Ric} = \text{Ric} \circ \phi$ . Il découle de l'hypothèse que  $\text{Sym}(G, \mathfrak{g})$  peut s'écrire en substituant  $L$  à la place de Ric, puisque d'après [Proposition 5.18](#),  $\text{Sym}(G, \mathfrak{g})$  est déterminé de manière unique par le genre correspondant de Ric. Aussi, on peut écrire  $\phi \circ L = -L \circ \phi$  et  $\phi \circ L = L \circ \phi$ . Ceci, à son tour, implique que l'ensemble  $\text{Aut}^-(G, \mathfrak{g})$  est vide et donc

$\text{Aut}(G, g) \subset \text{Isom}_e(G, g) \subset \text{Aut}(G, g) \times \{\pm \text{id}\}$ . Ainsi  $\text{Aut}(G, g)$  est un sous-groupe d'indice au plus 2 dans  $\text{Isom}_e(G, g)$ , et la propriété (Équation 5.4) suit. Le reste de la proposition est prouvé par le fait que  $(G, g)$  est un espace symétrique si et seulement s'il existe une isométrie  $\theta \in \text{Isom}_e(G, g)$  telle que  $T_e\theta = -\text{id}$ .  $\square$

En considérant la discussion ci-dessus, il est naturel de se demander quand un opérateur de Ricci se comporte comme un endomorphisme symétrique. Cela signifie que nous n'avons qu'à trouver toutes les possibles genres de Ric en fonction des genres de  $\mathbf{L}$ .

Nous énonçons maintenant le lemme qui nous amène à l'intuition derrière la conception de [algorithme 1](#).

**Lemme 5.20.** *Soit  $(G, g)$  un groupe de Lie Lorentzien connexe et simplement connexe et  $\mathbf{L}$  son endomorphisme symétrique et Ric son opérateur de Ricci.*

- I**– si  $G = \text{Nil}$ , alors nous avons trois possibilités pour les genres de  $\mathbf{L}$ .
- 1**  $\mathbf{L}$  est de genre  $\{\text{diag}\}(\alpha, 0, 0)$  avec  $\alpha \neq 0$ , alors Ric est de genre  $\{\text{diag}\}(a, b, b)$ ,  $a \neq b$ . (même genre)
  - 2**  $\mathbf{L}$  est de genre  $\{\text{diag}\}(0, 0, \gamma)$  avec  $\gamma \neq 0$ , alors Ric est de genre  $\{\text{diag}\}(a, a, c)$ ,  $a \neq c$ . (même genre)
  - 3**  $\mathbf{L}$  est de genre  $\{\text{ab}^2\}$  avec  $a = b$ , alors Ric = 0. (différentes genres et espace symétrique)
- II**– si  $G = \text{SU}(2)$ , alors nous avons quatre possibilités pour les genres de  $\mathbf{L}$ .
- 1**  $\mathbf{L}$  est de type  $\{\text{diag}\}(\alpha, \alpha, \gamma)$  avec  $\alpha \neq \gamma$ , alors Ric est de genre  $\{\text{diag}\}(a, a, c)$ ,  $a \neq c$ . (même genre)
  - 2**  $\mathbf{L}$  est de genre  $\{\text{diag}\}(\alpha, \beta, \gamma)$  avec  $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ ,
    - i. si  $\gamma = \alpha - \beta$ , alors Ric est de genre  $\{\text{diag}\}(a, b, b)$ ,  $a \neq b$ . (différentes genres)
    - ii. si  $\gamma = -(\alpha - \beta)$ , alors Ric est de genre  $\{\text{diag}\}(a, b, a)$ ,  $a \neq b$ . (différentes genres)
    - iii. si  $\gamma \neq \pm(\alpha - \beta)$ , alors Ric est de genre  $\{\text{diag}\}(a, b, c)$ ,  $a \neq b \neq c$ . (de genres finis)
- III**– si  $G = \widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$ , alors nous avons quatorze possibilités pour les genres de  $\mathbf{L}$ .
- 1**  $\mathbf{L}$  est de genre  $\{\text{diag}\}(\alpha, \beta, \gamma)$  avec  $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ ,
    - i. si  $\gamma = \alpha - \beta$ , alors Ric est de genre  $\{\text{diag}\}(a, b, b)$ ,  $a \neq b$ . (différentes genres)
    - ii. si  $\alpha = \gamma - \beta$ , alors Ric est de genre  $\{\text{diag}\}(a, a, c)$ ,  $a \neq c$ . (différentes genres)
    - iii. si  $\alpha = -\gamma + \beta$ , alors Ric est de genre  $\{\text{diag}\}(a, b, a)$ ,  $a \neq b$ . (différentes genres)

iv. si  $\alpha \neq \pm(\gamma - \beta)$  et  $\alpha \neq \gamma + \beta$ , alors Ric est de genre  $\{\text{diag}\}(a, b, c)$ ,  
 $a \neq b \neq c$ . (de genres finis)

2 L est de type  $\{\text{diag}\}(\alpha, \alpha, \gamma)$  avec  $\alpha \neq \gamma$ , alors Ric est de genre  $\{\text{diag}\}(a, a, c)$ ,  
 $a \neq c$ . (même genre)

3 L est de type  $\{\text{diag}\}(\alpha, \beta, \alpha)$  avec  $\alpha \neq \beta$ , alors Ric est de genre  $\{\text{diag}\}(a, b, a)$ ,  
 $a \neq b$ . (même genre)

4 L est de type  $\{\text{diag}\}(\alpha, \beta, \beta)$  avec  $\alpha \neq \beta$ , alors Ric est de genre  $\{\text{diag}\}(a, b, b)$ ,  
 $a \neq b$ . (même genre)

5 L est de genre  $\{\text{diag}\}(\alpha, \alpha, \alpha)$ , alors Ric est de genre  $\{\text{diag}\}(a, a, a)$ ,  
 $a \neq 0$ . (mêmes genres et espace symétrique)

6 L est de type  $\{\text{azz}\}$ ,

i. si  $a \neq 2\Re(z)$ , alors Ric est de type  $\{a'z'\bar{z}'\}$ . (de genres finis)

ii. si  $a = 2\Re(z)$ , alors Ric est de genre  $\{\text{diag}\}(a', b', b')$ ,  $a' \neq b'$ .  
(différentes genres)

7 L est de type  $\{a^3\}$ , alors Ric est de type  $\{a'^3\}$ . (de genres finis)

8 L est de genre  $\{ab^2\}$  avec  $a = b \neq 0$ , alors  $\frac{-1}{a}$ . Ric est de genre  $\{a'b'^2\}$ ,  
 $a' = b'$ . (même genre)

9 L est de genre  $\{ab^2\}$  avec  $a \neq b \neq 0$ ,

i. si  $a \neq 2b$  alors Ric est de genre  $\{a'b'^2\}$ ,  $a' \neq b'$ . (de genres finis)

ii. si  $a = 2b$ , alors Ric est de genre  $\{\text{diag}\}(a', b', b')$ ,  $a' \neq b'$ . (différentes genres)

IV— si  $G = \text{Sol}$ , alors nous avons neuf possibilités pour les genres de L.

1 L est de genre  $\{\text{diag}\}(\alpha, \beta, 0)$  avec  $\alpha > 0, \beta < 0$ , et  $\alpha = -\beta$   
alors Ric est de genre  $\{\text{diag}\}(a, a, c)$ ,  $a \neq c$ . (différentes genres)

2 L est de genre  $\{\text{diag}\}(\alpha, \beta, 0)$  avec  $\alpha > 0, \beta < 0$  et  $\alpha \neq -\beta$   
alors Ric est de genre  $\{\text{diag}\}(a, b, c)$ ,  $a \neq b \neq c$ . (de genres finis)

3 L est de genre  $\{\text{diag}\}(\alpha, 0, \gamma)$  avec  $\alpha \neq \gamma$ , alors Ric est de genre  $\{\text{diag}\}(a, b, c)$ ,  
 $a \neq b \neq c$ . (de genres finis)

4 L est de genre  $\{\text{diag}\}(\alpha, 0, \alpha)$  avec  $\alpha \neq 0$ , alors Ric = 0. (différentes genres et espace symétrique)

5 L est de type  $\{\text{azz}\}$  avec  $\Re(z) \neq 0$ , alors Ric est de type  $\{a'z'\bar{z}'\}$ . (de genres finis)

6 L est de type  $\{\text{azz}\}$  avec  $\Re(z) = 0$ , alors Ric est de genre  $\{\text{diag}\}(a', b', b')$ ,  
 $a' \neq b'$ . (différentes genres)

7 L est de genre  $\{ab^2\}$  avec  $a \neq b$ ,

i. si  $a = 0$  alors Ric est de genre  $\{a'b'^2\}$ ,  $a' = b'$ . (différentes genres)

ii. si  $b = 0$  alors Ric est de genre  $\{a'b'^2\}$ ,  $a' \neq b'$ . (de genres finis)

8]  $L$  est de genre  $\{a^3\}$  avec  $a = 0$  alors  $\text{Ric}$  est de genre  $\{a'b'^2\}$ ,  $a' = b' = 0$ . (différentes genres)

V] si  $G = \tilde{E}_0(2)$ , alors nous avons cinq possibilités pour les genres de  $L$ .

1]  $L$  est de genre  $\{\text{diag}\}(\alpha, 0, \gamma)$  avec  $\alpha > 0, \gamma < 0$ ,

i. si  $\alpha = -\gamma$ , alors  $\text{Ric}$  est de genre  $\{\text{diag}\}(a, b, a)$ ,  $a \neq b$ . (différentes genres)

ii. si  $\alpha \neq -\gamma$ , alors  $\text{Ric}$  est de genre  $\{\text{diag}\}(a, b, c)$ ,  $a \neq b \neq c$ . (de genres finis)

2]  $L$  est de genre  $\{\text{diag}\}(\alpha, \alpha, 0)$  avec  $\alpha \neq 0$ , alors  $\text{Ric} = 0$ . (différentes genres et espace symétrique)

3]  $L$  est de genre  $\{\text{diag}\}(\alpha, \beta, 0)$  avec  $\alpha \neq \beta$ , alors  $\text{Ric}$  est de genre  $\{\text{diag}\}(a, b, c)$ ,  $a \neq b \neq c$ . (de genres finis)

4]  $L$  est de genre  $\{ab^2\}$  avec  $a \neq 0, b = 0$  alors  $\text{Ric}$  est de genre  $\{a'b'^2\}$ ,  $a' \neq b'$ . (de genres finis)

Nous avons besoin du lemme suivant qui est essentiellement [[26], corollaire 2.8], et le résultat utile de [45].

**Lemme 5.21** ([26]). Si  $\text{Isom}_e(G, g)$  est un groupe fini, alors  $\text{Isom}_e(G, g) = \text{Aut}(G, g)$ .

*Remarque 5.22.* Notons que si  $\text{Ric}$  est de genre fini alors  $\text{Isom}_e(G, g) = \text{Aut}(G, g)$ .

Toute isométrie  $\theta \in \text{Isom}_e(G, g)$  préserve la métrique  $g$ , le tenseur de courbure  $R$ , et sa dérivée covariante  $\nabla R$ . Plus précisément, nous avons le résultat suivant.

**Proposition 5.23** ([45]). Si  $\theta \in \text{Isom}_e(G, g)$ , alors  $\theta^* \nabla R = \nabla R$ , c'est-à-dire pour tout  $U, V, W, Z \in \mathfrak{g} = T_e G$ , si  $\psi = T_e \theta$ , alors

$$\psi(\nabla R(U, V, W, Z)) = \nabla R(\psi(U), \psi(V), \psi(W), \psi(Z)).$$

Ce sont tous les ingrédients dont nous avons besoin. Nous sommes donc maintenant en mesure de proposer [algorithme 1](#) efficace.

Nous ne nous soucions que du cas où [algorithme 1](#) produit un ensemble vide, donc la meilleure façon de procéder dans ce cas est la suivante. Nous introduisons un groupe symétrique modifié noté  $\text{Sym}'(G, g)$  défini par :

$$\text{Sym}'(G, g) = \{\psi \in \text{GL}(\mathfrak{g}) : \psi^* \langle \cdot, \cdot \rangle = \langle \cdot, \cdot \rangle, \psi^* R = R, \psi^* \nabla R = \nabla R\}; \quad (5.5)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est induit par la métrique  $g$ .

*Remarque 5.24.* Puisque de [Remarque 5.13](#) il s'ensuit que  $\text{Isom}_e(G, g) \subset O(\mathfrak{g})$ , on en déduit que

$$\text{Aut}(G, g) \subset \text{Isom}_e(G, g) \subset \text{Sym}'(G, g) \subset \text{Sym}(G, g).$$

---

**Algorithme 1** : Groupes des automorphismes isométriques et groupes d'isotropies
 

---

**Entrées** : •  $[G_i]_{i=1}^5 := \{ \text{Nil}, \text{SU}(2), \widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R}), \text{Sol}, \widetilde{E}_0(2) \}$ ,  
 • entiers  $K_1 \cdots K_5$ ,  
 •  $[\mathbf{L}_{i,j}]_{j=1}^{K_i}, i = 1 \cdots 5$  := une liste d'endomorphismes symétriques associés à chaque  $G_i, i = 1 \cdots 5$ .

**Sorties** : • une liste de groupes des automorphismes isométriques  $\text{Aut}(G, g)$ ,  
 • une liste de groupes d'isotropies  $\text{Isom}_e(G, g)$ ,

```

2  pour i = 1 to 5 faire
3    pour chaque j ∈ {1, 2, ..., Ki} faire
4      Genre_L ← le genre de Li,j // Partie 1: Groupes des automorphismes
        isométriques
5      A[i,j] ← Aut(Gi, g) associé à Genre_L
6      [e2, e1] := Li,j · e3, [e2, e3] := Li,j · e1, [e3, e1] := Li,j · e2 // sera
        utilisé pour calculer Ric
        /* B = {e1, e2, e3} est une base pseudo-orthonormale avec e3 temporel
        */
7      Ric ← Ricci opérateur // par rapport à cette base B
8      Genre_Ric ← le genre de Ric // Partie 2: Groupes d'isotropies
9      si Genre_Ric= fini alors
10     | I[i,j] ← A[i,j] // si Ric est de genre fini */
11     sinon
12     | si Genre_Ric= symétrique alors
13     | | I[i,j] ← O(2, 1) // si (G, g) est un espace symétrique */
14     | sinon
15     | | si Genre_Ric= Genre_L alors
16     | | | I[i,j] ← A[i,j] // si Ric et L ont le même genre infini */
17     | | sinon
18     | | | I[i,j] ← ∅ // pour procéder dans ce cas, il faut utiliser
        la dérivée covariante */
19     | | fin
20     | fin
21     fin
22  fin
23 fin
24 retourner (A, I)
  
```

---

En calculant la dérivée covariante  $\nabla R$  pour chaque cas que nous avons appelé *différentes genres* dans [Lemme 5.20](#), nous trouvons que tous les groupes symétriques modifiés  $\text{Sym}'(G, g)$  sont des groupes finis sauf dans un cas unique présenté dans [item 8](#) sur le groupe de Lie résoluble Sol où  $\text{Sym}'(G, g)$  devient unidimensionnel. Ce cas sera expliqué plus en détail dans le paragraphe suivant.

**Cas particulier.**

On traite le cas où l'endomorphisme symétrique  $L$  est de genre  $\{a3\}$ ,  $a = 0$  sur le groupe de Lie résoluble  $Sol$  qui peut être identifié à  $\mathbb{R} \times_{\phi} \mathbb{R}^2$  équipé de l'opération de groupe  $\star$  suivante

$$\left(x, \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}\right) \star \left(m, \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}\right) = \left(x + m, \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} + \phi(x) \begin{bmatrix} n \\ p \end{bmatrix}\right) \text{ où } \phi(x) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}$$

et la projection couvrante  $\pi$  est  $\left(x, \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}\right) \mapsto \left(\phi(x), \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}\right)$ .

Si on note  $\partial_x, \partial_y, \partial_z$  les champs de vecteurs de coordonnées habituels sur  $\mathbb{R}^3$ , on peut définir les champs de vecteurs invariants à gauche suivants sur  $Sol$

$$E_1 = \partial_x, E_2 = \exp(x)\partial_y, E_3 = \exp(-x)\partial_z, \quad (5.6)$$

de sorte que l'ensemble  $\{E_1, E_2, E_3\}$  est une base de l'algèbre de Lie  $Sol$  avec des relations de commutation non nulles  $[E_1, E_2] = E_2$ ,  $[E_1, E_3] = -E_3$ , et  $E_1^* = dx$ ,  $E_2^* = \exp(-x)dy$ ,  $E_3^* = \exp(x)dz$  où  $E_i^*$  désigne la forme duale de  $E_i$ . La métrique Lorentzienne invariante à gauche  $g$  sur  $Sol$  admettant  $L$  de type  $\{a3\}$ ,  $a = 0$  comme endomorphisme symétrique est équivalente à la métrique  $sol_7$  (voir [Tableau 4.1](#)).

$$g = \exp(x)dxdz + \exp(-2x)dy^2. \quad (5.7)$$

Le groupe d'isotropie de cette métrique est unidimensionnel.

En effet, nous considérons un groupe de paramètres  $\zeta_t : \mathbb{R} \times_{\phi} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \times_{\phi} \mathbb{R}^2$  de difféomorphismes définis par

$$\zeta_t \left(x, \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}\right) = \left(x, \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}t \exp(3x) + y + \frac{1}{3}t \\ -\frac{1}{6} \exp(3x) t^2 + ty + z + \frac{1}{6} t^2 \end{bmatrix}\right).$$

On peut facilement vérifier que  $\zeta_t$  laisse invariant l'élément neutre et la différentielle de  $\zeta_t$  par rapport à la base (5.6) a la matrice

$$\zeta_{t*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -t \exp(3x) & 1 & 0 \\ \frac{-t^2}{2} \exp(3x) & t & 1 \end{pmatrix}.$$

Par inspection on voit que le  $\zeta_t$  est lui-même une isométrie par rapport à la métrique  $g$  donné dans [Équation 5.7](#). Il s'ensuit que  $\text{Isom}_e(Sol, g) = \mathbf{K} \times \mathbb{Z}_2$  puisque les deux autres composantes connexes de  $\text{Sym}(Sol, g)$  ne préservent pas la dérivée covariante  $\nabla R$  et donc  $\text{Isom}_e(Sol, g) \neq \text{Aut}(Sol, g)$ .



## 5.4.2 Résultats

Soit  $(G, g)$  un groupe de Lie Lorentzien et simplement connexe avec  $L$  son endomorphisme symétrique et  $Ric$  son opérateur de Ricci. Les calculs suivants sont effectués pour chaque cas répertorié dans [Lemme 5.20](#).

## I– Groupe de Lie : Nil

1  $L$  est de genre  $\{\text{diag}\}(\alpha, 0, 0)$ , (espace non symétrique).

☑  $Ric$  et  $L$  ont le même *genre infini*, alors  $\text{Isom}_e(G, g) = \text{Aut}(G, g)$ .

Résultat<sub>1</sub> :  $\text{Aut}(G, g) \cong O(1, 1)$  et  $\text{Isom}(G, g) \cong \text{Nil} \rtimes O(1, 1)$ .

2  $L$  est de genre  $\{\text{diag}\}(0, 0, \gamma)$ , (espace non symétrique).

☑  $Ric$  et  $L$  ont le même *genre infini*, alors  $\text{Isom}_e(G, g) = \text{Aut}(G, g)$ .

Résultat<sub>2</sub> :  $\text{Aut}(G, g) \cong O(2)$  et  $\text{Isom}(G, g) \cong \text{Nil} \rtimes O(2)$ .

3  $L$  est de genre  $\{\text{ab}2\}$  avec  $a = b = 0$ ,

☒  $g$  est plate et  $(\text{Nil}, g)$  est un espace symétrique.

Résultat<sub>3</sub> :  $\text{Aut}(G, g) \cong \mathbf{K} \times \mathbb{Z}_2$  et  $\text{Isom}(G, g) \cong \text{Nil} \times O(2, 1)$ .

II– Groupe de Lie :  $SU(2)$ 

1  $L$  est de genre  $\{\text{diag}\}(\alpha, \alpha, \gamma)$ ,  $\alpha \neq \gamma$ , (espace non symétrique).

☑  $Ric$  et  $L$  ont le même *genre infini*, alors  $\text{Isom}_e(G, g) = \text{Aut}(G, g)$ .

Résultat<sub>1</sub> :  $\text{Aut}(G, g) \cong O(2)$  et  $\text{Isom}(G, g) \cong SU(2) \rtimes O(2)$ .

2  $L$  est de genre  $\{\text{diag}\}(\alpha, \beta, \gamma)$ ,  $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ .

i. Si  $\gamma = \alpha - \beta$ , alors  $Ric$  est de genre  $\{\text{diag}\}(a, b, b)$ ,  $a \neq b$  (de *genre infini*). Soit  $\Theta \in \text{Isom}_e^0(G, g)$ , on met  $T_e\Theta = \psi$  alors il existe

$$t \in \mathbb{R} \text{ tel que } M(\psi, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(t) & \sinh(t) \\ 0 & \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}.$$

Or  $\nabla R(\psi(e_2), \psi(e_3), \psi(e_2), \psi(e_1)) - \psi(\nabla R(e_2, e_3, e_2, e_1)) = 0$ , alors  $2 \sinh(t)(\alpha - \beta)(\alpha - 2\beta) = 0$  ie  $\sinh(t) = 0$ .

☑  $\text{Isom}_e^0(G, g)$  est trivial. D'où  $\text{Isom}_e(G, g) = \text{Aut}(G, g)$ .

ii. Si  $\gamma = -(\alpha - \beta)$ , alors  $Ric$  est de genre  $\{\text{diag}\}(a, b, a)$ ,  $a \neq b$  (de *genre infini*). Soit  $\Theta \in \text{Isom}_e^0(G, g)$ , on met  $T_e\Theta = \psi$  alors il existe

$$t \in \mathbb{R} \text{ tel que } M(\psi, B) = \begin{pmatrix} \cosh(t) & 0 & \sinh(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(t) & 0 & \cosh(t) \end{pmatrix}.$$

Or  $\nabla R(\psi(e_2), \psi(e_3), \psi(e_2), \psi(e_1)) - \psi(\nabla R(e_2, e_3, e_2, e_1)) = 0$ , alors  $2 \sinh(t)2\alpha^2(\alpha - \beta) = 0$  i.e.  $\sinh(t) = 0$ .

☑  $\text{Isom}_e^0(G, g)$  est trivial. D'où  $\text{Isom}_e(G, g) = \text{Aut}(G, g)$ .

iii. Si  $\gamma \neq \pm(\alpha - \beta)$ ,

☑  $Ric$  est de *genre fini*, alors  $\text{Isom}_e(G, g) = \text{Aut}(G, g)$ .

Résultat2 :  $\text{Aut}(G, \mathfrak{g}) \cong D_4$  et  $\text{Isom}(G, \mathfrak{g}) \cong \text{SU}(2) \rtimes D_4$ .

III – Groupe de Lie :  $\widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$

1 L est de genre  $\{\text{diag}\}(\alpha, \beta, \gamma), \alpha \neq \beta \neq \gamma$ .

i. Si  $\gamma = \alpha - \beta$ , alors Ric est de genre  $\{\text{diag}\}(a, b, b), a \neq b$  (de genre infini). Soit  $\Theta \in \text{Isom}_e^0(G, \mathfrak{g})$ , on met  $T_e\Theta = \psi$  alors il existe

$$t \in \mathbb{R} \text{ tel que } M(\psi, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(t) & \sinh(t) \\ 0 & \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}.$$

Or  $\nabla R(\psi(e_2), \psi(e_3), \psi(e_2), \psi(e_1)) - \psi(\nabla R(e_2, e_3, e_2, e_1)) = 0$ ,  
alors  $2 \sinh(t)(\alpha - \beta)(\alpha - 2\beta) = 0$  ie  $\sinh(t) = 0$

☑  $\text{Isom}_e^0(G, \mathfrak{g})$  est trivial. D'où  $\text{Isom}_e(G, \mathfrak{g}) = \text{Aut}(G, \mathfrak{g})$ .

ii. Si  $\alpha = \gamma - \beta$ , alors Ric est de genre  $\{\text{diag}\}(a, a, c), a \neq c$  (de genre infini). Soit  $\Theta \in \text{Isom}_e^0(G, \mathfrak{g})$ , on met  $T_e\Theta = \psi$  alors il existe

$$t \in \mathbb{R} \text{ tel que } M(\psi, B) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) & 0 \\ -\sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Or  $\nabla R(\psi(e_2), \psi(e_3), \psi(e_2), \psi(e_1)) - \psi(\nabla R(e_2, e_3, e_2, e_1)) = 0$ ,  
alors  $2 \sin^3(t)\beta(\gamma - \beta)(\gamma - 2\beta) = 0$  ie  $\sin(t) = 0$

☑  $\text{Isom}_e^0(G, \mathfrak{g})$  est trivial. D'où  $\text{Isom}_e(G, \mathfrak{g}) = \text{Aut}(G, \mathfrak{g})$ .

iii. Si  $\gamma = -(\alpha - \beta)$ , alors Ric est de genre  $\{\text{diag}\}(a, b, a), a \neq b$  (de genre infini). Soit  $\Theta \in \text{Isom}_e^0(G, \mathfrak{g})$ , on met  $T_e\Theta = \psi$  alors il existe

$$t \in \mathbb{R} \text{ tel que } M(\psi, B) = \begin{pmatrix} \cosh(t) & 0 & \sinh(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(t) & 0 & \cosh(t) \end{pmatrix}.$$

Or  $\nabla R(\psi(e_2), \psi(e_3), \psi(e_2), \psi(e_1)) - \psi(\nabla R(e_2, e_3, e_2, e_1)) = 0$ ,  
alors  $2 \sinh(t)2\alpha^2(\alpha - \beta) = 0$  ie  $\sinh(t) = 0$

☑  $\text{Isom}_e^0(G, \mathfrak{g})$  est trivial. D'où  $\text{Isom}_e(G, \mathfrak{g}) = \text{Aut}(G, \mathfrak{g})$ .

iv. Si  $\gamma \neq \pm(\alpha - \beta)$  et  $\alpha \neq \gamma - \beta$

☑ Ric est de genre fini, alors  $\text{Isom}_e(G, \mathfrak{g}) = \text{Aut}(G, \mathfrak{g})$ .

Résultat1 :  $\text{Aut}(G, \mathfrak{g}) \cong D_4$  et  $\text{Isom}(G, \mathfrak{g}) \cong \widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R}) \rtimes D_4$ .

2 L est de genre  $\{\text{diag}\}(\alpha, \alpha, \gamma), \alpha \neq \gamma$ , (espace non symétrique).

☑ Ric et L ont le même genre infini, alors  $\text{Isom}_e(G, \mathfrak{g}) = \text{Aut}(G, \mathfrak{g})$ .

Résultat2 :  $\text{Aut}(G, \mathfrak{g}) \cong \text{O}(2)$  et  $\text{Isom}(G, \mathfrak{g}) \cong \widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R}) \rtimes \text{O}(2)$ .

3 L est de genre  $\{\text{diag}\}(\alpha, \beta, \alpha), \alpha \neq \beta$ , (espace non symétrique).

☑ Ric et L ont le même genre infini, alors  $\text{Isom}_e(G, \mathfrak{g}) = \text{Aut}(G, \mathfrak{g})$ .

Résultat3 :  $\text{Aut}(G, \mathfrak{g}) \cong \text{O}(1, 1)$  et  $\text{Isom}(G, \mathfrak{g}) \cong \widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R}) \rtimes \text{O}(1, 1)$ .

4 L est de genre  $\{\text{diag}\}(\alpha, \beta, \beta), \alpha \neq \beta$ , (espace non symétrique).

☑ Ric et L ont le même genre infini, alors  $\text{Isom}_e(G, \mathfrak{g}) = \text{Aut}(G, \mathfrak{g})$ .

Résultat4 :  $\text{Aut}(G, g) \cong O(1, 1)$  et  $\text{Isom}(G, g) \cong \widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R}) \rtimes O(1, 1)$ .

5 L est de genre  $\{\text{diag}\}(\alpha, \alpha, \alpha)$ ,  $\alpha \neq 0$ , (espace symétrique).

☑ Ric et L ont le même *genre infini*,  
alors  $\text{Isom}_e(G, g) = \text{Aut}(G, g) \times \{\pm \text{id}\}$ .

Résultat5 :  $\text{Aut}(G, g) \cong \text{SO}(2, 1)$  et  $\text{Isom}(G, g) \cong \widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R}) \times O(2, 1)$ .

6 L est de type  $\{\text{azz}\}$ .

i. Si  $a \neq 2 \Re(z)$ , on obtient

☑ Ric est *de genre fini*, alors  $\text{Isom}_e(G, g) = \text{Aut}(G, g)$ .

ii. Si  $a = 2 \Re(z)$ , Ric est de genre  $\{\text{diag}\}(a', b', b')$  (*de genre infini*).  
Soit  $\Theta \in \text{Isom}_e^0(G, g)$ , on met  $T_e \Theta = \psi$  alors il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel

$$\text{que } M(\psi, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(t) & \sinh(t) \\ 0 & \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}.$$

Or  $\nabla R(\psi(e_2), \psi(e_3), \psi(e_2), \psi(e_1)) - \psi(\nabla R(e_2, e_3, e_2, e_1)) = 0$ ,  
alors  $4 \sinh(t) \Im(z) |z|^2 = 0$  ie  $\sinh(t) = 0$ .

☑  $\text{Isom}_e^0(G, g)$  est trivial. D'où  $\text{Isom}_e(G, g) = \text{Aut}(G, g)$ .

Résultat6 :  $\text{Aut}(G, g) \cong \mathbb{Z}_2$  et  $\text{Isom}(G, g) \cong \widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2$ .

7 L est de genre  $\{a3\}$ , avec  $a \neq 0$ .

☑ Ric est *de genre fini*, cela implique que  $\text{Isom}_e(G, g) = \text{Aut}(G, g)$ .

Résultat7 :  $\text{Aut}(G, g) = \{\text{id}\}$  et  $\text{Isom}(G, g) = \widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R})$ .

8 L est de genre  $\{ab2\}$ , avec  $a = b$ , (espace non symétrique)

☑ Ric et L ont le même *genre infini*, alors  $\text{Isom}_e(G, g) = \text{Aut}(G, g)$ .

Résultat8 :  $\text{Aut}(G, g) \cong \mathbb{K} \times \mathbb{Z}_2$  et  $\text{Isom}(G, g) \cong \widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R}) \rtimes (\mathbb{K} \times \mathbb{Z}_2)$ .

9 L est de genre  $\{ab2\}$ , avec  $a \neq b \neq 0$ .

i. Si  $a \neq 2b$ , on obtient

☑ Ric est *de genre fini*, alors  $\text{Isom}_e(G, g) = \text{Aut}(G, g)$ .

ii. Si  $a = 2b$ , on obtient Ric est de genre  $\{\text{diag}\}(a', b', b')$  (*de genre infini*). Soit  $\Theta \in \text{Isom}_e^0(G, g)$ , on met  $T_e \Theta = \psi$  alors il existe

$$t \in \mathbb{R} \text{ tel que } M(\psi, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(t) & \sinh(t) \\ 0 & \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}.$$

Or  $\nabla R(\psi(e_2), \psi(e_3), \psi(e_2), \psi(e_1)) - \psi(\nabla R(e_2, e_3, e_2, e_1)) = 0$ ,  
alors  $2b \sinh(t) = 0$  ie  $\sinh(t) = 0$

☑  $\text{Isom}_e^0(G, g)$  est trivial, cela implique que  $\text{Isom}_e(G, g) = \text{Aut}(G, g)$ .

Résultat9 :  $\text{Aut}(G, g) \cong \mathbb{Z}_2$  et  $\text{Isom}(G, g) \cong \widetilde{\text{PSL}}(2, \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}_2$ .

IV – Groupe de Lie : Sol

- 1]  $L$  est de genre  $\{\text{diag}\}(\alpha, \beta, 0)$ ,  $\alpha \neq \beta \neq 0$  et  $\alpha = -\beta$ , alors Ric est de genre  $\{\text{diag}\}(a, a, c)$ ,  $a \neq c$  (de genre *infini*). Soit  $\Theta \in \text{Isom}_e^0(G, \mathfrak{g})$ , on met  $T_e\Theta = \psi$  et soit  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $M(\psi, B) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) & 0 \\ -\sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .  
Or  $\nabla R(\psi(e_2), \psi(e_3), \psi(e_2), \psi(e_1)) - \psi(\nabla R(e_2, e_3, e_2, e_1)) = 0$ , alors

$$4 \sin^3(t) \beta^3 = 0 \quad \text{ie } \sin(t) = 0$$

☑  $\text{Isom}_e^0(G, \mathfrak{g})$  est trivial. Cela implique que  $\text{Isom}_e(G, \mathfrak{g}) = \text{Aut}(G, \mathfrak{g})$ .

Résultat1 :  $\text{Aut}(G, \mathfrak{g}) \cong D_8$  et  $\text{Isom}(G, \mathfrak{g}) \cong \text{Sol} \times D_8$ .

- 2]  $L$  est de genre  $\{\text{diag}\}(\alpha, \beta, 0)$ ,  $\alpha \neq \beta \neq 0$  et  $\alpha \neq -\beta$ , alors Ric est de genre  $\{\text{diag}\}(a, b, c)$ ,  $a \neq b \neq c$ .

☑ Ric est *de genre fini*. Cela implique que  $\text{Isom}_e(G, \mathfrak{g}) = \text{Aut}(G, \mathfrak{g})$ .

Résultat2 :  $\text{Aut}(G, \mathfrak{g}) \cong D_4$  et  $\text{Isom}(G, \mathfrak{g}) \cong \text{Sol} \times D_4$ .

- 3]  $L$  est de genre  $\{\text{diag}\}(\alpha, 0, \gamma)$ ,  $\alpha \neq \gamma \neq 0$ .

☑ Ric est *de genre fini*. Cela implique que  $\text{Isom}_e(G, \mathfrak{g}) = \text{Aut}(G, \mathfrak{g})$ .

Résultat3 :  $\text{Aut}(G, \mathfrak{g}) \cong D_4$  et  $\text{Isom}(G, \mathfrak{g}) \cong \text{Sol} \times D_4$ .

- 4]  $L$  est de genre  $\{\text{diag}\}(\alpha, 0, \alpha)$ ,  $\alpha \neq 0$ .

☒  $\mathfrak{g}$  est plate et  $(\text{Sol}, \mathfrak{g})$  est un espace symétrique.

Résultat4 :  $\text{Aut}(G, \mathfrak{g}) \cong O(1, 1)$  et  $\text{Isom}(G, \mathfrak{g}) \cong \text{Sol} \times O(2, 1)$ .

- 5]  $L$  est de type  $\{\text{azz}\}$  avec  $\Re(z) \neq 0$ .

☑ Ric est *de genre fini*, alors  $\text{Isom}_e(G, \mathfrak{g}) = \text{Aut}(G, \mathfrak{g})$ .

Résultat5 :  $\text{Aut}(G, \mathfrak{g}) \cong \mathbb{Z}_2$  et  $\text{Isom}(G, \mathfrak{g}) \cong \text{Sol} \times \mathbb{Z}_2$ .

- 6]  $L$  est de type  $\{\text{azz}\}$  avec  $\Re(z) = 0$ , on obtient Ric est de genre  $\{\text{diag}\}(a', b', b')$  (de genre *infini*). Soit  $\Theta \in \text{Isom}_e^0(G, \mathfrak{g})$ , on met  $T_e\Theta = \psi$  alors il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $M(\psi, B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(t) & \sinh(t) \\ 0 & \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$ .

Or  $\nabla R(\psi(e_2), \psi(e_3), \psi(e_2), \psi(e_1)) - \psi(\nabla R(e_2, e_3, e_2, e_1)) = 0$ , alors

$$4 \sinh(t) (\Im(z))^3 = 0 \quad \text{ie } \sinh(t) = 0$$

☑  $\text{Isom}_e^0(G, \mathfrak{g})$  est trivial. Cela implique que  $\text{Isom}_e(G, \mathfrak{g}) = \text{Aut}(G, \mathfrak{g})$ .

Résultat6 :  $\text{Aut}(G, \mathfrak{g}) \cong D_4$  et  $\text{Isom}(G, \mathfrak{g}) \cong \text{Sol} \times D_4$ .

- 7]  $L$  est de genre  $\{\text{ab}2\}$ , avec  $a \neq b$ .

i. Si  $a = 0$ , on obtient Ric est de genre  $\{\text{a'b'2}\}$  avec  $a' = b'$  (de genre *infini*). Soit  $\Theta \in \text{Isom}_e^0(G, \mathfrak{g})$ , on met  $T_e\Theta = \psi$  alors il existe

$$t \in \mathbb{R} \text{ tel que } M(\psi, B) = \begin{pmatrix} 1 & -t & t \\ t & 1 - (1/2)t^2 & (1/2)t^2 \\ t & -(1/2)t^2 & 1 + (1/2)t^2 \end{pmatrix}.$$

Or  $\nabla R(\psi(e_2), \psi(e_2), \psi(e_1), \psi(e_1)) - \psi(\nabla R(e_2, e_2, e_1, e_1)) = 0$ ,  
alors  $2tb^2 = 0$  ie  $t = 0$ .

☑  $\text{Isom}_e^0(G, g)$  est trivial. D'où  $\text{Isom}_e(G, g) = \text{Aut}(G, g)$ .

ii. Si  $b = 0$ , on obtient

☑ Ric est *de genre fini*, alors  $\text{Isom}_e(G, g) = \text{Aut}(G, g)$ .

Résultat7 :  $\text{Aut}(G, g) \cong \mathbb{Z}_2$  et  $\text{Isom}(G, g) \cong \text{Sol} \times \mathbb{Z}_2$ .

☐ 8 L est de genre  $\{a^3\}$ , avec  $a = 0$ , on obtient Ric est de genre  $\{a'b'2\}$ ,  $a' = b'$   
(*de genre infini*), voir [Cas particulier](#).

☒  $\text{Isom}_e(G, g) \neq \text{Aut}(G, g)$ .

Résultat8 :  $\text{Aut}(G, g) \cong \mathbb{Z}_2$  et  $\text{Isom}(G, g) \cong \text{Sol} \times (\mathbf{K} \times \mathbb{Z}_2)$ .

☐ V – Groupe de Lie :  $\tilde{E}_0(2)$

☐ 1 L est de genre  $\{\text{diag}\}(\alpha, 0, \gamma)$ ,  $\alpha \neq \gamma \neq 0$ .

i. Si  $\alpha = -\gamma$ , alors Ric est de genre  $\{\text{diag}\}(a, b, a)$ ,  $a \neq b$  (*de genre infini*). Soit  $\Theta \in \text{Isom}_e^0(G, g)$ , on met  $T_e\Theta = \psi$  alors il existe

$$t \in \mathbb{R} \text{ tel que } M(\psi, B) = \begin{pmatrix} \cosh(t) & 0 & \sinh(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh(t) & 0 & \cosh(t) \end{pmatrix}.$$

Or  $\nabla R(\psi(e_1), \psi(e_2), \psi(e_1), \psi(e_1)) - \psi(\nabla R(e_1, e_2, e_1, e_1)) = 0$ ,  
alors  $4\gamma^3 \sinh^3(t) = 0$  ie  $\sinh(t) = 0$ .

☑  $\text{Isom}_e^0(G, g)$  est trivial, on obtient  $\text{Isom}_e(G, g) = \text{Aut}(G, g)$ .

ii. Si  $\alpha \neq -\gamma$ , alors Ric est de genre  $\{\text{diag}\}(a, b, c)$ ,  $a \neq b \neq c$  (*de genre fini*),

☑ Ric est *de genre fini*. Cela implique que  $\text{Isom}_e(G, g) = \text{Aut}(G, g)$ .

Résultat1 :  $\text{Aut}(G, g) \cong D_4$  et  $\text{Isom}(G, g) \cong \tilde{E}_0(2) \times D_4$ .

☐ 2 L est de genre  $\{\text{diag}\}(\alpha, \alpha, 0)$ ,  $\alpha \neq 0$ . (espace symétrique)

☒  $g$  est plate et  $(\tilde{E}_0(2), g)$  est un espace symétrique.

Résultat2 :  $\text{Aut}(G, g) \cong O(2)$  et  $\text{Isom}(G, g) \cong \tilde{E}_0(2) \times O(2, 1)$ .

☐ 3 L est de genre  $\{\text{diag}\}(\alpha, \beta, 0)$ ,  $\alpha \neq \beta \neq 0$ .

☑ Ric est *de genre fini*, alors  $\text{Isom}_e(G, g) = \text{Aut}(G, g)$ .

Résultat3 :  $\text{Aut}(G, g) \cong D_4$  et  $\text{Isom}(G, g) \cong \tilde{E}_0(2) \times D_4$ .

☐ 4 L est de genre  $\{ab^2\}$ , avec  $a \neq b$ .

☑ Ric est *de genre fini*, alors  $\text{Isom}_e(G, g) = \text{Aut}(G, g)$ .

Résultat4 :  $\text{Aut}(G, g) \cong \mathbb{Z}_2$  et  $\text{Isom}(G, g) \cong \tilde{E}_0(2) \times \mathbb{Z}_2$ .

# Bibliographie

---

- [1] L. Andersson and R. Howard. *Comparison and rigidity theorems in semi-Riemannian geometry*, Comm. Anal. Geom., **6** (1998), pp. 819–877.
- [2] John K. Beem, Paul E. Ehrlich, and Kevin L. Easley. *Global Lorentzian geometry*, volume 202 of Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. Marcel Dekker Inc., New York, second edition, 1996.
- [3] A. Benroummane, M. Boucetta, and A. Ikemakhen. *Four-dimensional homogeneous semi-symmetric Lorentzian manifolds*, Differential Geometry and its Applications **56** (2018) 211-233.
- [4] O. Blanco ; M. Sanchez ; and J. M. M. Senovilla. *Complete classification of second order symmetric spacetimes*, arXiv :1001.3629v1 [gr-qc], (2010).
- [5] D. Bleeker, *Gauge theory and variational principles*, vol. 1 of Global Analysis Pure and Applied Series A, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1981.
- [6] M. Boucetta and A. Chakkar. *Lorentzian left-invariant metrics on three dimensional unimodular Lie groups and their curvatures*. (2019), arXiv :1903.05194.
- [7] M. Boucetta and A. Chakkar. *The isometry groups of Lorentzian three dimensional unimodular simply connected Lie groups*. À paraitre dans Revista de la Unión Matemática Argentina. <https://doi.org/10.33044/revuma.2021>.
- [8] E. Calabi and L. Markus. *Relativistic space forms*, Ann. of Math. (2), **75** (1962), pp. 63–76.
- [9] G. Calvaruso. *Einstein-like metrics on three-dimensional homogeneous Lorentzian manifolds*. Geom. Dedicata **127** (2007), 99–119. MR 2338519.
- [10] G. Calvaruso. *Three-dimensional semi-symmetric homogeneous Lorentzian manifolds*, Acta Math. Hung., (1-2) **121** (2008), 157-170.
- [11] G. Calvaruso. *Three-Dimensional Homogeneous Generalized Ricci Solitons*, Mediterr. J. Math. **14**, 216 (2017). <https://doi.org/10.1007/s00009-017-1019-2>.
- [12] A. M. Candela and M. Sanchez. *Geodesics in semi-Riemannian manifolds : geometric properties and variational tools*, in Recent developments in pseudo-Riemannian geometry, ESI Lect. Math. Phys., Eur. Math. Soc., Zurich, 2008, pp. 359–418.
- [13] Manfredo do Carmo. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser Basel, 1992.
- [14] A. Coley ; R. Milson, V. Pravda ; et A. Pravdova. *All spacetimes with vanishing curvature invariants*, Classical Quantum Gravity, **19** (2002), pp. 6213–6236.

- [15] L. A. Cordero, and P. E. Parker. *Left-invariant Lorentzian metrics on 3-dimensional Lie groups*, Rend. Mat., Serie VII **17** (1997), 129-155.
- [16] Luis A., Cordero; Phillip E., Parker. *Isometry groups of pseudoriemannian 2-step nilpotent Lie groups*. Houston J. Math. **35** (2009), no. 1, 49-72. [MR 2491866](#).
- [17] A. Cosgaya; and S. Reggiani. *Isometry groups of three-dimensional Lie groups*, arXiv :2105.08924 [math.DG] (2021).
- [18] G. D'Ambra. *Isometry groups of Lorentz manifolds*, Invent. Math., **92** (1988), pp. 555-565.
- [19] M. Dajczer and K. Nomizu. *On the boundedness of Ricci curvature of an indefinite metric*, Bol. Soc. Brasil. Mat., **11** (1980), pp. 25-30.
- [20] Viviana, del Barco; Gabriela P., Ovando. *Isometric actions on pseudo-Riemannian nilmanifolds*. Ann. Global Anal. Geom. **45** (2014), no. 2, 95-110. [MR 3165476](#).
- [21] Sorin, Dumitrescu; Abdelghani, Zeghib. *Géométries lorentziennes de dimension 3 : classification et complétude*. (French) [[Three-dimensional Lorentzian geometries : classification and completeness]] Geom. Dedicata **149** (2010), 243-273. [MR 2737692](#).
- [22] P. E. Ehrlich and M. Sanchez. *Some semi-Riemannian volume comparison theorems*, Tohoku Math. J. (2), **52** (2000), pp. 331-348.
- [23] I. Gohberg; P. Lancaster; and L. Rodman. *Matrices and indefinite scalar products*, vol. 8 of Operator Theory : Advances and Applications, Birkhauser Verlag, Basel, 1983.
- [24] C. S., Gordon; and E. N., Wilson. *Isometry groups of Riemannian solvmanifolds*, Trans. Am. Math. Soc. **307** (1988), no. 1, 245-269 (English).
- [25] Ku Yong, Ha; and Jong Bum, Lee. *left-invariant metrics and curvatures on simply connected three-dimensional Lie groups*, Math. Nachr. **282** (2009), 868-898.
- [26] Ku Yong, Ha; and Jong Bum, Lee. *The isometry groups of simply connected 3-dimensional unimodular Lie groups*. J. Geom. Phys. **62** (2012), no. 2, 189-203. [MR 2864471](#).
- [27] S. G. Harris. *A triangle comparison theorem for Lorentz manifolds*, Indiana Univ. Math. J., **31** (1982), pp. 289-308.
- [28] J. Hilgert and K. H. Neeb. *Structure and geometry of Lie groups*. Springer Science and Business Media, 2011.
- [29] H. Kodama; A. Takahara; and H. Tamaru. *The space of left-invariant metrics on a Lie group up to isometry and scaling*, Manuscripta Math. **135** (2011), no. 1-2, 229-243.
- [30] Y. Kondo; and H. Tamaru. *A classification of left-invariant Lorentzian metrics on some nilpotent Lie groups*, arXiv :2011.09118 (2020).

- [31] A. Kubo ; K. Onda ; Y. Taketomi and H. Tamaru. *On the moduli spaces of left-invariant pseudo-Riemannian metrics on Lie groups*, Hiroshima Math. J. **46** (2016), 357–374.
- [32] A., Krasinski ; Christoph G., Behr ; Engelbert, Schücking ; Frank B., Estabrook ; Hugo D., Wahlquist ; George F. R., Ellis ; Robert, Jantzen ; Wolfgang, Kundt. *The Bianchi classification in the Schücking-Behr approach*. Gen. Relativity Gravitation **35** (2003), no. 3, 475–489. [MR 1964375](#).
- [33] R. S. Kulkarni. *The values of sectional curvature in indefinite metrics*, Comment. Math. Helv., **54** (1979), pp. 173–176.
- [34] S. Kobayashi ; K. Nomizu. *Foundations of differential geometry*. Vol. I, Wiley Classics Library, John Wiley, Sons Inc., New York, 1996. Reprint of the 1963 original, A Wiley Interscience Publication.
- [35] J. Lauret. *Degenerations of Lie algebras and geometry of Lie groups*, Differential Geom. Appl. **18** (2003), no. 2, 177–194.
- [36] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Wiley, Springer-Verlag New York.
- [37] J. Milnor. *Curvatures of left-invariant metrics on Lie groups*, Advances in Mathematics Volume **21**, Issue 3, September 1976, Pages 293-329.
- [38] Detlef, Müller. *Isometries of bi-invariant pseudo-Riemannian metrics on Lie groups*. Geom. Dedicata **29** (1989), no. 1, 65–96. [MR 0989188](#).
- [39] John W. Morgan. *Recent progress on the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds*. Bull. Amer. Math. Soc., 2005.
- [40] K. B. Marathe. *A condition for paracompactness of a manifold*, J. Differential Geometry, **7** (1972), pp. 571–573.
- [41] E. Minguzzi and M. Sanchez. *The causal hierarchy of spacetimes*, in Recent developments in pseudo-Riemannian geometry, ESI Lect. Math. Phys., Eur. Math. Soc., Zurich, 2008, pp. 299–358.
- [42] J. Marsden. *On completeness of homogeneous pseudo-riemannian manifolds*, Indiana Univ. J., **22** (1972/73), pp. 1065–1066.
- [43] C. Misner. *Taub-nut space as a counterexample to almost anything*, in Relativity Theory and Astrophysics I : Relativity and Cosmology, vol. 8, J. Ehlers, ed. Lectures in Applied Mathematics, American Mathematical Society, 1967, pp. 160–169.
- [44] Takushiro Ochiai ; and Tsunero Takahashi. *The group of isometries of a left invariant Riemannian metric on a Lie group*, Math. Ann. **223** (1976), 91–96.
- [45] Barrett, O'Neill. *Semi-Riemannian geometry. With applications to relativity*. Pure and Applied Mathematics, 103. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, 1983. xiii+468 pp. ISBN : 0-12-526740-1. [MR 0719023](#).
- [46] K. Nomizu ; and H. Ozeki. *A theorem on curvature tensor fields*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **48** (1962), pp. 206–207.



- [47] R. Penrose and W. Rindler. *Spinors and space-time*. Vol. 1, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1984. Two-spinor calculus and relativistic fields.
- [48] P. Piccione and A. Zeghib. *On the isometry group and the geometric structure of compact stationary Lorentzian manifolds*, arXiv :1002.0814v1 [math.DG], (2010).
- [49] S. Rahmani. *Métriques de Lorentz sur les groupes de Lie unimodulaires de dimension 3*, J. Geom. Phys. **9** (1992), 295-302.
- [50] N. Rahmani; and S. Rahmani. *Lorentzian geometry of the Heisenberg group*, Geom. Dedicata **118**, 133–140 (2006).
- [51] A. Romero and M. Sanchez. *On completeness of certain families of semi-Riemannian manifolds*, Geom. Dedicata, **53** (1994), pp. 103–117.
- [52] J. M. M. Senovilla. *Second-order symmetric Lorentzian manifolds*. I. Characterization and general results, Classical Quantum Gravity, **25** (2008), pp. 245011, 25.
- [53] Peter Scott. *The Geometries of 3-Manifolds*. Bull. London Math. Soc., 1983.
- [54] J. Shin. *Isometry groups of unimodular simply connected 3-dimensional Lie groups.*, Geom. Dedicata **65** (1997), no. 3, 267–290 (English).
- [55] M. Spivak. *A comprehensive introduction to differential geometry*. Vol. II, Publish or Perish Inc., Wilmington, Del., second ed., 1979.
- [56] Tijana, Šukilović. *Geometric properties of neutral signature metrics on 4-dimensional nilpotent Lie groups*. Rev. Un. Mat. Argentina **57** (2016), no. 1, 23–47. [MR 3519282](#).
- [57] S. Tanno. *Curvature tensors and covariant derivatives*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **96** (1972), pp. 233–241.
- [58] William P. Thurston. *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Volume 1. 1997.
- [59] S. Vukmirović. *Classification of left-invariant metrics on the Heisenberg group* J. Geom. Phys. **94**, 72–80 (2015).
- [60] Frank W., Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Corrected reprint of the 1971 edition. Graduate Texts in Mathematics, 94. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1983. ix+272 pp. ISBN : 0-387-90894-3. [MR 0722297](#).
- [61] E. N. Wilson. *Isometry groups on homogeneous nilmanifolds*, Geom Dedicata **12** (1982), no. 3, 337–346.
- [62] J. Wolf. *On locally symmetric spaces of non-negative curvature and certain other locally homogeneous spaces*, Comment. Math. Helv. **37** (1963), 266–295.